

Jake fluktuacije u kritičnim sustavima

Farkaš, Lucija Nora

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:140879>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Lucija Nora Farkaš

JAKE FLUKTUACIJE U KRITIČNIM SUSTAVIMA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Lucija Nora Farkaš

Diplomski rad

Jake fluktuacije u kritičnim sustavima

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Ivan Balog

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2019.

Zahvaljujem mentoru dr. sc. Ivanu Balogu na izuzetnoj susretljivosti i vremenu izdvojenom pri pomoći u izradi ovog rada, prilici za ispunjujuć rad u zanimljivoj i aktivnoj grani znanosti i otvorenosti za pitanja. Također zahvaljujem roditeljima na strpljenju i podršci.

Sažetak

Razmatramo dugovalnu aproksimaciju Isingovog modela koja odgovara ϕ^4 teoriji polja sa skalarnim poljem ϕ . Ovaj model služi nam kao predložak sustava s kontinuiranim faznim prijelazom. Fluktuacije dobivaju na značaju smanjenjem prostorne dimenzije. Dimenzija ispod koje prijelaz nestaje naziva se donjom kritičnom dimenzijom. Donja kritična dimenzija odgovara $d_l = 1$, gdje je egzaktno rješenje Isingovog modela poznato. Ipak, ovdje primjenjujemo metode neperturbativne renormalizacijske grupe (NPRG) kako bismo našli aproksimativno rješenje. Krajnji cilj je u budućnosti razviti nov pristup kritičnim statističkim sustavima u donjoj kritičnoj dimenziji preko NPRG koji bi bio primjenjiv i na sustave koje ne možemo egzaktno riješiti. Koristeći određene neperturbativne aproksimacije nalazimo opis prijelaza u blizini i na donjoj kritičnoj dimenziji. Nalazimo da se tako određena donja kritična dimenzija dobro slaže s $d_l = 1$ te da je opća slika prijelaza konzistentna s egzaktnim rezultatom. Novi je rezultat ovoga rada da efektivni potencijal U pokazuje neanalitičnost na konačnom polju, ali na način da se novodobiveni rezultati u potpunosti slažu s fizikalnim ponašanjem sustava.

Ključne riječi: fluktuacije, kritično ponašanje, fazni prijelaz, Isingov model, donja kritična dimenzija, renormalizacijska grupa

Strong fluctuations in critical systems

Abstract

We consider the long wave approximation of the Ising model which corresponds to the ϕ^4 field theory with a scalar field ϕ . This model is used as a paradigm of a system with a continuous phase transition. Fluctuations are gaining importance with the decrease of the spatial dimension. The dimension at which the transition disappears is called the lower critical dimension. The lower critical dimension for the present system is $d_l = 1$, where the exact solution is known. Still, here we attempt to apply the methods of the nonperturbative renormalisation group (NPRG) to obtain an approximative solution. The ultimate goal is to, in future, develop a novel approach to handling critical statistical systems in the lower critical dimension via NPRG that could be extended to systems without exact solutions. Using certain nonperturbative approximation schemes, we find a description of the system in the vicinity and at the lower critical dimension. We find the lower critical dimension to be in good agreement with the exact $d_l = 1$. A new result that we find is that the effective potential U shows nonanalyticity at a finite field, but in a way that is consistent with the expected physical behavior of the system.

Keywords: fluctuations, criticality, phase transition, Ising model, lower critical dimension, renormalisation group

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Isingov model	2
2.1	Fazni prijelaz u Isingovom modelu	2
2.1.1	Metoda srednjeg polja	3
2.2	Donja kritična dimenzija i Peierlsov argument	5
2.3	Gornja kritična dimenzija i Gaussova teorija	6
2.4	Ginzburgov kriterij	7
2.5	Egzaktno rješenje jednodimenzionalnog Isingovog modela	7
2.5.1	Esencijalno skaliranje	8
2.6	Efektivni potencijal	9
3	Metodologija	12
3.1	Regulator	13
3.2	Klizno efektivno djelovanje	14
3.3	Egzaktne jednačbe toka	15
3.4	Fiksne točke	16
3.5	Derivacijski razvoj kliznog efektivnog djelovanja	17
3.5.1	Bezdimenzionalne veličine	18
3.5.2	Fluktuacije u kritičnosti	19
3.5.3	Jednačbe toka za U i Z	20
3.5.4	U_k kao klizni analogon efektivnog potencijala	22
3.5.5	Theta regulator i LPA'	23
3.6	Postojeći opis	24
4	Rezultati	25
4.1	Jednačba toka za $c[M]$	26
4.2	Kritični eksponenti i numeričko rješenje za $c[M]$	27
5	Zaključak	31
	Dodaci	33
A	Kritični eksponenti	33

B	Hubbard-Stratonovich transformacija	34
C	Isingov model i ϕ^4 teorija	36
D	Gaussova teorija i Ginzburgov kriterij	38
E	$\Gamma_k [M]$ u mikroskopskoj granici	41
F	Jednadžbe toka	43
	Literatura	50

1 Uvod

Fazni prijelazi su pojave u kojima infinitezimalnim promjenama vanjskih parametara makroskopskog sustava opažamo značajnu promjenu njegovih svojstava. Ilustrativan je primjer feromagnetskog prijelaza u odsudstvu vanjskog polja. Pri njemu sustav iz paramagnetske faze u kojoj mu je magnetizacija m iščezavajuća, sniženjem temperature prelazi u feromagnetsku fazu pri čemu m postupno i neprekidno raste od $m = 0$ na samom prijelazu. Ovakve fazne prijelaze nazivamo kontinuiranim, a očituju se kritičnošću, to jest divergencijom korelacijske duljine ξ koja je karakteristična duljina opadanja korelacijske funkcije s udaljenošću. Fazni prijelazi su bitni jer govore o promjeni režima u fizikalnim sustavima. Osim eksperimentalnog interesa, zanimljivi su i zbog kompliciranosti njihovog matematičkog opisa koja motivira razvoj novih tehnika poput renormalizacijske grupe primjenjivih i u drugim granama fizike [1, 2]. Jedna od iznenađujućih pojava pri kontinuiranim faznim prijelazima je univerzalnost. Opaža se da se veličine koje opisuju sustav poput susceptibilnosti, korelacijske duljine, toplinskog kapaciteta ili parametra uređenja kao posljedica divergencije korelacijske duljine ponašaju po potencijskim zakonima čije eksponente nazivamo kritičnim eksponentima [3, 4]. U dodatku A navedene su definicije nekih od takvih eksponenata. Univerzalnost je pojava klasa naizgled nepovezanih fizikalnih sustava koji dijele isti skup kritičnih eksponenata. Ispostavlja se da vrijednosti kritičnih eksponenata ovise o malom broju globalnih parametara modela kao što su simetrija parametra uređenja i dimenzionalnost [3].

U ovom radu nas zanima opisati što se događa s faznim prijelazima snižavanjem prostorne dimenzionalnosti promatranog problema. Iz literature je poznato da su fluktuacije u niskodimenzionalnim sustavima veće od onih u visokodimenzionalnim [5]. Vrlo poopćeno se to pripisuje smanjenju broja susjeda s kojima pojedini konstituenti međudjeluju kako se smanjuje dimenzija. To smanjuje utjecaj energije interakcije koja omeđuje fluktuacije. Postaje jasno da može postojati situacija u kojoj prijelaz u potpunosti nestaje pri niskim dimenzijama. Cilj je analitički opisati takav nestanak kritičnog faznog prijelaza za jednostavni Isingov model u formalizmu renormalizacijske grupe. Ovaj scenarij je bitan jer je poznata dimenzija u kojoj se to događa te u toj dimenziji postoji egzaktno rješenje modela, pa je isti pogodan za razvoj formalizma koji proučavamo. Sam formalizam koji proučavamo primjenjiv je i na sustave

koje nije moguće riješiti egzaktno pa se nadamo da će dovesti do novih spoznaja u srodnim problemima poput Isingovog modela u nasumičnom polju u donjoj kritičnoj dimenziji [6, 7].

2 Isingov model

Isingov model prvotno je uveden kao pojednostavljen prikaz feromagnetizma [8]. Zamišljen je kao model u kojem jedna spinska varijabla $\sigma_i = \pm 1$ modelira jednu magnetsku domenu. Predznak varijable odgovara orijentaciji magnetizacije domene duž jedne određene prostorne osi, što odgovara uniaksijalnom feromagnetu. Hamiltonijan modela dan je s

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i. \quad (2.1)$$

Varijable σ_i predstavljaju stupnjeve slobode modela. Oznaka $\langle \cdot, \cdot \rangle$ odnosi se na ograničenje sume na prve susjede. pozitivna konstanta J mjera je jačine međudjelovanja. Parametar h označava magnetsko polje. Konceptualna korisnost Isingovog modela nadi-lazi prikaz feromagnetizma. Teorijska razmatranja opisuju, a mnogi eksperimenti potvrđuju pojavu ponašanja predviđenih ovim modelom u raznim magnetskim sus-tavima, poput nekih fluorida prijelaznih i alkalijskih metala (na primjer K_2CoF_4 , [9]), ali i nemagnetskim sustavima poput prijelaza u suprafluidnom heliju [10]. To je model koji se jednostavno zadaje i vizualizira ali pokazuje bogato i vrlo univerzalno ponašanje. Stoga je koristan za uvođenje i stjecanje osjećaja za mnoge pojmove statističke mehanike.

2.1 Fazni prijelaz u Isingovom modelu

Zanima nas kontinuirani fazni prijelaz sa skalarnim parametrom uređenja. Takav pri-jelaz javlja se u Isingovom modelu u odsudstvu vanjskog polja ($h = 0$), što je slučaj koji promatramo. Zbog jednostavnosti Hamiltonijana (2.1) model je vrlo pogodan za opis popratne fizike. Pri niskim temperaturama sustavu pogoduje minimizirati unutarnju energiju, što rezultira uređenom konfiguracijom. Povišenjem temperature sustavu dovodimo energiju koja omogućava termička pobuđenja. Entropijski dopri-nos slobodnoj energiji postaje značajan i natječe se s energijskim. Kada su rezul-

tirajuće fluktuacije dovoljno velike da obuhvaćaju termodinamički značajan udio spinova, sustav gubi uređenje. Dva opisana stanja sustava nazivamo uređenom i neuređenom fazom. Jasno je da između te dvije krajnje temperature mora postojati granična temperatura T_C pri kojoj se događa fazni prijelaz, a koju nazivamo kritičnom temperaturom. Uređena faza se odlikuje neiščezavajućim parametrom uređenja, u ovom slučaju homogenom magnetizacijom $m = \langle \sigma_i \rangle$ koja na prijelazu kontinuirano teži k $m = 0$.

Unatoč jednostavnosti Hamiltonijana, matematički opis je kompliciran i postoji malo rješivih ilustrativnih primjera. Jedan od njih je $2d$ Isingov model koji je na četvrtastoj rešetci egzaktno riješio Lars Onsager 1944. godine [11]. Proširenjem ideje transfer matrica izložene u potpoglavlju 2.5 na matematički znatno zahtjevniji ali konceptualno analogan dvodimenzionalni slučaj Onsager nalazi egzaktni izraz za slobodnu energiju sustava iz koje se u blizini prijelaza opaža očekivano univerzalno potencijско ponašanje mjerljivih veličina. Dobiveni kritični eksponenti koji opisuju to ponašanje su

$$\nu = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad \gamma = \frac{7}{4}, \quad \delta = 15, \quad (2.2)$$

te anomalna dimenzija $\eta = \frac{1}{4}$, koja se dobiva iz korelacijske funkcije [12, 13]. Definicije kritičnih eksponenata dane su u dodatku A.

Da su ovakvi prijelazi u stalnom fokusu istraživanja statističke fizike pokazuju nedavno dobiveni rezultati za stroge granice analognih kritičnih eksponenata u $3d$ Isingovom modelu [14, 15]. One su nađene "conformal bootstrap" numeričkom metodom uz pretpostavku konformne invarijantnosti. Naknadno je dokazano da za klasu univerzalnosti Isingovog modela i u $d < 4$ području prostornih dimenzija invarijantnost na promjenu skale koja se javlja u kritičnom sustavu implicira konformnu invarijantnost [16]. Pošto kritični eksponenti nisu međusobno neovisni (dodatak A), za njihovo određivanje dovoljno je poznavanje ν i η . Ova metoda vrlo precizno daje eksponente $\nu = 0.629971(4)$ i $\eta = 0.0362978(20)$.

2.1.1 Metoda srednjeg polja

Ilustriramo pojavu faznih prijelaza jednostavnom aproksimacijom srednjeg polja. Magnetizaciju računamo usrednjenjem po kanonskom ansamblu. Na rešetci spinova

biramo neki određeni spin σ_0 . Zbog translacijske invarijantnosti svaki je odabir jednako valjan. Promatramo gustoću magnetizacije m , koju možemo prikazati kao:

$$m = \langle \sigma_0 \rangle = \frac{\sum_{\sigma_0=\pm 1} \sigma_0 \exp[-\beta H(\sigma_0)]}{\sum_{\sigma_0=\pm 1} \exp[-\beta H(\sigma_0)]} = \tanh[-\beta e(\sigma_0)], \quad (2.3)$$

gdje je

$$e(\sigma_0) = -\sigma_0 \left(J \sum_{\langle i0 \rangle} \sigma_i + h \right) = -\sigma_0 (zJm + h) - \sigma_0 J \sum_{\langle i0 \rangle} (\sigma_i - m). \quad (2.4)$$

Sa z označavamo broj prvih susjeda pojedinog spina (koordinacijski broj). Račun sume u izrazu za $e(\sigma_0)$ koji predstavlja utjecaj okolnih spinova i vanjskog polja na promatrani spin je nemoguće općenito izvrijedniti. U aproksimaciji potpuno zanemarujemo fluktuacije iznosa spinova σ_i oko njihove srednje vrijednosti m . Stoga član $\sum_{\langle i0 \rangle} (\sigma_i - m)$ u ovoj aproksimaciji potpuno iščezava, te za magnetizaciju dobivamo

$$m = \tanh[\beta(zJm + h)]. \quad (2.5)$$

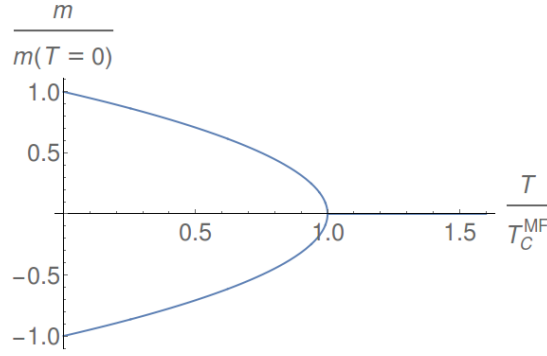
Zanima nas prijelaz pri $h = 0$. Uvijek postoji rješenje $m = 0$, dok neiščezavajuća rješenja postoje za $\left. \frac{\partial \tanh[\beta(zJm+h)]}{\partial m} \right|_{m=0} \geq 1$, to jest $\beta zJ \geq 1$. Za kritičnu temperaturu u aproksimaciji srednjeg polja T_C^{MF} vrijedi upravo jednakost, te dobivamo

$$T_C^{MF} = zJ/k_B. \quad (2.6)$$

Granica u kojoj se T približava T_C^{MF} odgovara $m \rightarrow 0$, te stoga razvijamo (2.5) po maloj magnetizaciji:

$$m = \beta zJm - \frac{1}{3}(\beta zJ)^3 m^3 + \dots \implies m \propto \sqrt{1 - \frac{T}{T_C^{MF}}}, \quad T \approx T_C^{MF}. \quad (2.7)$$

Primjetimo da čak i ova jednostavna aproksimacija reproducira potencijsko ponašanje, uz kritični ekpONENT parametra uređenja $\beta = 1/2$ (definicija β se nalazi u dodatku A). Ovaj poznati rezultat prikazan je na slici 2.1



Slika 2.1: Prikaz magnetizacije u aproksimaciji srednjeg polja i razvoju temperaturene ovisnosti oko pripadne kritične temperature T_C^{MF} .

2.2 Donja kritična dimenzija i Peierlsov argument

U vrlo pojednostavljenoj slici nađenoj aproksimacijom srednjeg polja dobiva se da se prijelaz javlja pri svakoj dimenziji d , neovisno o obliku rešetke ili kojem drugom parametru. To se vidi tako što je z funkcija dimenzije te je uvijek moguće naći parametre za koje je (2.6) zadovoljeno. Uputno je pitati se kada takva kvalitativna slika kontinuiranog prijelaza pri konačnoj temperaturi vrijedi, a kada je proizvod korištenih aproksimacija. Ispostavlja se da za Isingov model postoji donja kritična dimenzija d_l ispod koje ne postoji fazni prijelaz. Zašto bi fazni prijelaz nestao smanjenjem prostorne dimenzije može se jasno vidjeti iz Peierlsovog argumenta [4]. Peierlsov argument govori o Isingovom modelu u jednoj dimenziji. Općenito stanje takvog lanca sastoji se od spin-gore i spin-dolje domena. Za svako je sučelje među njima po izrazu za Hamiltonijan modela (2.1) potrebna energija $2J$. Takva termalna pobuđenja moguća su pri svakoj konačnoj temperaturi, neovisno koliko niskoj. Pri $T = 0K$ pak ne postoji entropijski doprinos slobodnoj energiji F i sustav ju minimizira uređenom konfiguracijom u kojoj svi spinovi pokazuju u istom smjeru. Jednostavnim računom demonstriramo da je već jedno pobuđenje koje predstavlja fluktuaciju u odnosu na $T = 0K$ stanje dovoljno da naruši dugodosežno uređenje u lancu. Razlika u slobodnoj energiji koja proizlazi od pojave već jednog sučelja unutar lanca u odnosu na uređeno $T = 0K$ stanje iznosi

$$\Delta F = \Delta E - TS = 2J - \frac{1}{\beta} \ln(N - 1). \quad (2.8)$$

Ovdje je $N - 1$ broj mogućih različitih konfiguracija s jednim sučeljem. Za svaku temperaturu $T \neq 0K$ i u termodinamički velikom sustavu ΔF je neomeđeno odozdo.

Efekt se pojačava daljnjim dijeljenjem na domene. Stoga su uređenje i fazni prijelaz prisutni jedino pri $T = 0K$, što nije u skladu s rezultatima aproksimativne metode srednjeg polja. Ponašanje ΔF pokazuje da je Isingov model u donjoj kritičnoj dimenziji pri konačnoj temperaturi dominiran termalnim fluktuacijama, pa aproksimacija koja ih zanemaruje nije valjana.

2.3 Gornja kritična dimenzija i Gaussova teorija

Dobro je pitanje zašto značaj fluktuacija raste s padom prostorne dimenzionalnosti. S porastom dimenzije d raste i koordinacijski broj rešetke spinova z . Na primjer, u slučaju hiperkubične rešetke radi se o relaciji $z = 2d$. Fluktuacije su potisnute međudjelovanjem spinova s povećanim brojem susjeda.

Nad donjom kritičnom dimenzijom kvalitativno razlikujemo dva režima faznih prijelaza. Za $d < 4$ fluktuacije značajno doprinose ponašanju sustava. Sustav u blizini kritičnosti ispoljava netrivialna potencijalna ponašanja. Renormalizacijska grupa razvijena je upravo za opis ovog režima. Hubbard-Stratonovich transformacijama (dodatak B) moguće je formulirati problem Isingovog modela preko teorije polja. Ispostavlja se da Isingov model u svim dimenzijama i dugovalnoj aproksimaciji odgovara ϕ^4 teoriji polja uz skalarno polje ϕ (dodatak C, detaljnije [17]). Nad gornjom kritičnom dimenzijom $d_u = 4$ fluktuacije nisu ključne za ponašanje sustava, te je isti potpuno opisiv Gaussovom teorijom, u kojoj se ispušta ϕ^4 član, dok ga je u $d < 4$ potrebno zadržati [13]. U Gaussovoj teoriji sustav je stoga opisan Hamiltonijanom oblika

$$H = \int d\mathbf{x} \{ a_0 + a_2 \phi^2(\mathbf{x}) + c [\nabla \phi(\mathbf{x})]^2 \}, \quad (2.9)$$

gdje su stupnjevi slobode skalarna polja $\phi(\mathbf{x})$, te vrijedi $a_2 \propto T - T_C$. Uz $c = 0$ izraz (2.9) odgovara Landauovoj aproksimaciji srednjeg polja [18]. Rezultati te teorije slažu se s već dobivenim rezultatima aproksimacije srednjeg polja uz $m = \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$. Uvođenjem gradijentnog člana uključuje se doprinos fluktuacija. Problem nad gornjom kritičnom dimenzijom je potpuno rješiv, to jest moguće je egzaktno naći partijsku funkciju.

2.4 Ginzburgov kriterij

Ocjenjujemo primjenjivost Gaussove teorije. Iz particijske funkcije računamo (dodatak D) toplinski kapacitet sustava. Kao kriterij razmatramo omjer tog toplinskog kapaciteta C^G i skoka toplinskog kapaciteta ΔC^{MF} kojeg pri kritičnoj temperaturi nalazimo aproksimacijom srednjeg polja. Divergentan omjer $C^G/\Delta C^{MF}$ govori o izrazitom značaju dodatno uvedenog doprinosa fluktuacija i potrebi za rafiniranjem aproksimacije. U dodatku D izračunato je $C^G/\Delta C^{MF} \propto \xi^{4-d} \propto (T_C - T)^{\frac{d-4}{2}}$. Stoga za $d < 4$ nikako ne možemo kritični sustav dobro opisati Gaussovom teorijom. Ovo je poznati Ginzburgov kriterij [4] i potvrđuje $d_u = 4$ kao gornju kritičnu dimenziju.

2.5 Egzaktno rješenje jednodimenzionalnog Isingovog modela

Jednodimenzionalni Isingov model u homogenom polju h je egzaktno rješiv [19]. Kako su u termodinamičkoj granici koja opisuje makroskopske sustave rubni efekti irelevantni radi jednostavnosti razmatramo prsten. Hamiltonijan svakog ovakvog sustava koji odgovara (2.1) za periodične rubne uvjete $i + N = i$ zapisujemo

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (2.10)$$

Problem je prvotno riješen metodom transfer matrica u kojoj je particijska funkcija prikaziva kao suma umnoška matrica. Kako bismo partili taj postupak, zapisujemo Hamiltonijan u drugom obliku:

$$H = - \sum_{i=1}^N \left[J \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{h}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right]. \quad (2.11)$$

Uvrstivši ovaj Hamiltonijan u definiciju particijske funkcije dobivamo za istu

$$Z = \sum_{\sigma_i} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ \beta \left[J \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{h}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right] \right\}. \quad (2.12)$$

Ključ ove metode uvođenje je 2×2 matrice transfera

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{1-1} \\ P_{-11} & P_{-1-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \exp[\beta(J+h)] & \exp(-\beta J) \\ \exp(-\beta J) & \exp[\beta(J-h)] \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Elementi ove matrice odgovaraju eksponencijalima energija svih mogućih kombinacija predznaka dvaju susjednih spinskih varijabli. Množenjem elemenata takvih matrica (po jedan za svaki par spinova) dobiva se doprinos jedne od mogućih konfiguracija ukupnoj particijskoj funkciji. Kako bismo dobili potpunu Z moramo još zbrojiti te doprinose za sve moguće $\{\sigma_i = \pm 1\}$ kombinacije, te dobivamo

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} P_{\sigma_1\sigma_2} P_{\sigma_2\sigma_3} \cdot \dots \cdot P_{\sigma_N\sigma_1} = \text{Tr} (\mathbf{P}^N). \quad (2.14)$$

Matrica \mathbf{P} je po definiciji simetrična i realna i stoga dijagonalizabilna. Također vrijedi da su svojstvene vrijednosti N -te potencije \mathbf{P} -a koje označavamo s $\lambda_{1,2}$. Kako je trag matrice suma njenih svojstvenih vrijednosti, vrijedi

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N. \quad (2.15)$$

Računamo svojstvene vrijednosti iz jednadžbe $\det (\mathbf{P} - \lambda_{1,2}\mathbf{I}) = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \exp(\beta J) \left[\cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + \exp(-4\beta J)} \right]; \quad \lambda_1 > \lambda_2. \quad (2.16)$$

Uvrštavanjem (2.16) u izraz (2.15) dobivamo egzaktnu particijsku funkciju problema. Iz nje možemo izračunati sve relevantne termodinamičke veličine, čime je problem riješen.

2.5.1 Esencijalno skaliranje

Jednodimenzionalni Isingov model pokazuje anomalno ponašanje korleacijske funkcije u blizini kritičnosti. Korelacijska funkcija se definira kao

$$G(i, j) = \langle \sigma_i \sigma_{i+j} \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_{i+j} \rangle, \quad (2.17)$$

te mjeri prostorne statističke korelacije među spinovima. Za jednodimenzionalni $h = 0$ slučaj vrijedi

$$\begin{aligned} G(j, j+i) &= G(i) = \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_0 \sigma_i \exp \left(\beta \sum_{j=1}^{N-1} J_j \sigma_j \sigma_{j+1} \right), \quad J_i = J. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Izraz (2.18) svodi se na

$$G(i) = \frac{1}{Z\beta^i} \frac{\partial^i Z_J}{\partial J_0 \dots \partial J_i} \Big|_{J_j=J} = [\tanh(\beta J)]^i, \quad Z_J = 2 \prod_{j=1}^{N-1} [2 \cosh(\beta J_j)]. \quad (2.19)$$

Definiramo li (kao i inače) korelacijsku duljinu ξ tako da odgovara skali eksponencijalnog pada korelacija pri konačnoj temperaturi, $G(i) = \exp(-i/\xi)$, dobivamo

$$\xi = -\frac{1}{\ln[\tanh(\beta J)]}. \quad (2.20)$$

Do kontinuiranog faznog prijelaza pri $h = 0$ dolazi jedino pri $T = 0K$ [19]. Dakle, u blizini prijelaza, gdje očekujemo divergenciju korelacijske duljine, razvojem oko niskih temperatura se dobiva

$$\xi \approx \exp(2\beta J) = \exp\left(\frac{2J}{k_B T}\right). \quad (2.21)$$

Ovo ponašanje se razlikuje od uobičajnog kritičnog ponašanja $\xi \sim |T - T_C|^{-\nu}$. U Gaussovoj teoriji, na primjer, vrijedi $\nu = 1/2$ te je $\xi \sim 1/\sqrt{T - T_C}$. Od poznatih sustava, ponašanje slično skaliraju (2.21) u $1d$ Isingovom modelu još se ispoljava pri dvodimenzionalnom Kosterlitz–Thouless faznom prijelazu, gdje vrijedi $\xi \propto \exp\left(c/\sqrt{|T - T_c|}\right)$ uz neku pozitivnu konstantu c [20,21]. Skaliranje (2.21) zbog svoje anomalnosti dobilo je i posebno ime te se naziva esencijalnim skaliranjem.

2.6 Efektivni potencijal

Efektivni potencijal centralna je veličina od interesa u NPRG pristupu koji se koristi u ovom radu. Njegov značaj i konstrukciju izložimo na primjeru $1d$ Isingovog modela. Efektivni potencijal se može smatrati efektivnim Hamiltonijanom sustava izraženim preko veličina koje odgovaraju $m = \langle \sigma_i \rangle$, dok se matematički definira kao Legendreova transformacija gustoće slobodne energije $F/N = f$:

$$\frac{U(m)}{N} = f - \frac{\partial f}{\partial h} h = f(h(m)) + mh(m), \quad (2.22)$$

izvrjednena pri konstantnom magnetskom polju h , pa stoga i prostorno homogenom m . Koristimo se dobivenom egzaktnom particijskom funkcijom (2.15) i računamo

potrebne veličine. Izraz za gustoću slobodne energije u termodinamičkoj granici glasi

$$\begin{aligned}
 f = \frac{F}{N} &= - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\beta N} \ln Z \right) \stackrel{(2.15)}{=} \\
 &= -\frac{1}{\beta} \ln(\lambda_1) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{\beta N} \ln \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right] \right\} \stackrel{\lambda_2/\lambda_1 < 1}{=} \\
 &= -\frac{1}{\beta} \ln(\lambda_1),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

uz uvrštenu svojstvenu vrijednost λ_1 iz izraza (2.16):

$$f = -J - \frac{1}{\beta} \ln \left[\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + \exp(-4\beta J)} \right]. \tag{2.24}$$

Iz slobodne energije računamo parametar uređenja (magnetizaciju sustava):

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + \exp(-4\beta J)}}. \tag{2.25}$$

Da bi potencijal bio dobro definiran, mora postojati Legendreova transformacija slobodne energije f po h , što zahtjeva konveksnost ili konkavnost f u h , i inverz $m(h) \rightarrow h(m)$. Kako bismo provjerili te uvjete računamo susceptibilnost χ :

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \beta \exp(-2\beta J) \frac{m^2(1-m^2)}{\sqrt{1+m^2[\exp(-4\beta J)-1]}}. \tag{2.26}$$

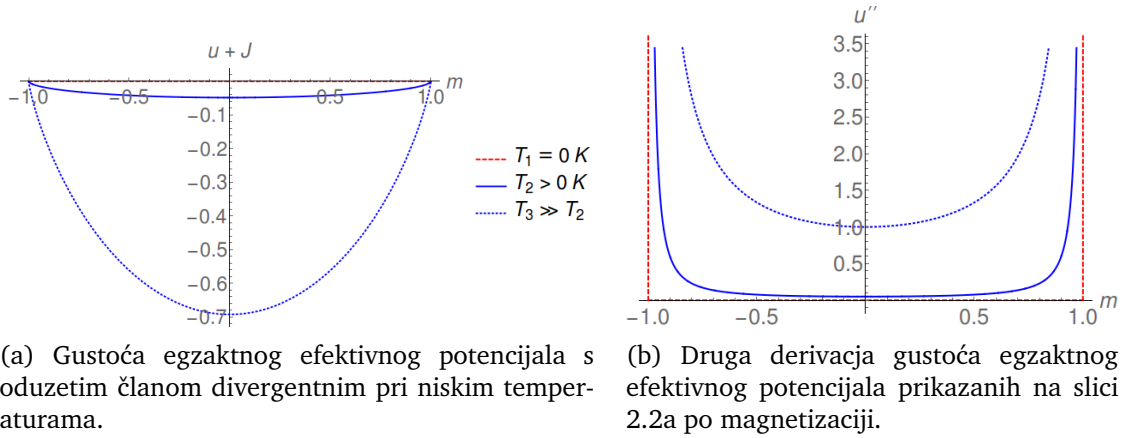
Iz izraza za magnetizaciju (2.25) vidljivo je da uvijek vrijedi $m^2 \leq 1$. To potvrđuje nenegativnost susceptibilnosti χ koju očekujemo za stabilni termodinamički sustav. Stroga pozitivnost $\partial m/\partial h$ za konačne temperature garantira strogu monotonost te stoga postojanje inverza koji je potreban da bismo U prikazali kao funkciju magnetizacije. Analogno $\partial^2 f/\partial h^2 < 0$ za $T \neq 0K$ jamči postojanje Legendreovog transformata slobodne energije po h . Invertiramo $m(h)$ ovisnost iz izraza (2.25), što daje:

$$h(m) = \frac{1}{\beta} \text{Arsinh} \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \exp(-2\beta J) \right]. \tag{2.27}$$

Time za efektivni potencijal dobivamo, uz konstantno h i oznaku za gustoću efektivnog potencijala u termodinamičkoj granici $U(m)/N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u(m)$:

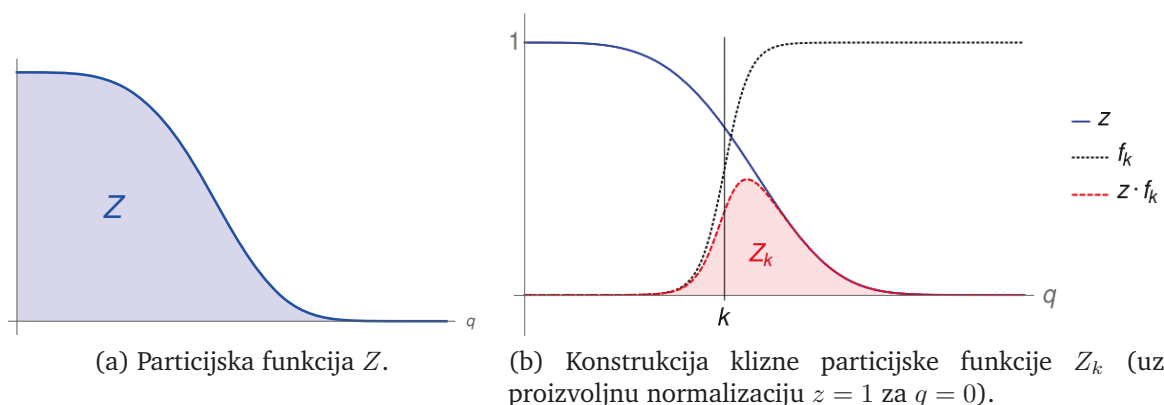
$$\beta u(m) = \beta J + \frac{1}{2} \ln(1 - m^2) + m \operatorname{Arsinh} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - m^2} \exp(-2\beta J)} \right) - \ln \left[1 + \sqrt{m^2 + (1 - m^2) \exp(4\beta J)} \right]. \quad (2.28)$$

Nadalje u definicije energijskih veličina apsorbiramo prefaktor β (na primjer $\beta u \rightarrow u$), te takve veličine nazivamo reduciranim.



Slika 2.2: Prikaz interesantnih reduciranih egzaktnih veličina.

Kako se radi o Legendreovoj transformaciji slobodne energije, $u(m)$ je konveksno u magnetizaciji. Ovaj potencijal ima ulogu efektivnog Hamiltonijana sustava magnetizacije homogene u prostoru. Kako T teži k $0K$, tako gustoća egzaktnog efektivnog potencijala na rasponu magnetizacija $\langle -1, 1 \rangle$ teži k $-J$. Od interesa su vjerojatnosti te se u tom smislu ovaj divergentni član (nakon prelaska na reducirane veličine J je proporcionalno β) se krati, budući da je dio normalizacije particijske funkcije. Ovako "ravan" potencijal ne može ograničiti termičke fluktuacije. Dok u samom $T = 0K$ režimu imamo $m = \pm 1$, iz neprekidnosti vidimo da je za male konačne temperature potencijal i dalje vrlo ravan te su sve rečene m podjednako vjerojatne što predstavlja značajne fluktuacije koje uništavaju uređenje. Izravnavanje ovog konveksnog potencijala sa samnjenjem temperature najjasnije se očituje u njegovoj drugoj derivaciji. Egzaktni efektivni potencijal i njegova druga derivacija prikazani su na slici 2.2.



Slika 3.1: Shematski prikaz integrala i podintegralnih funkcija u računu Z i Z_k parametriziranih valnim vektorima \mathbf{q} stupnjeva slobode $\phi(\mathbf{q})$. Simbolički prikazujemo q na jednoj osi.

3 Metodologija

Rješenje problema u statističkoj fizici sastoji se od pronalaženja particijske funkcije Z promatranog sustava. Pitanje je što znači naći particijsku funkciju. Kako bismo našli Z potrebno je izračunati doprinose svih mogućih konfiguracija stupnjeva slobode sustava:

$$Z = \int D\phi \exp \left(-H[\phi(q)] + \int_{\mathbf{x}} B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) \equiv \int D\phi z[\phi], \quad (3.1)$$

gdje $D\phi$ naznačauje funkcionalnu integraciju po stupnjevima slobode, koje možemo parametrizirati valnim vektorima \mathbf{q} . Integral u direktnom prostoru pokraćen je kao $\int dx = \int_{\mathbf{x}}$ te se provodi po cijelom prostoru, kao i svi ostali prostorni integrali u ovom radu.

Shematski particijsku funkciju kao integral prikazujemo na slici 3.1. Taj integral gotovo nikad nije rješiv. Kao alat koji olakšava račun u izraz za particijsku funkciju uvodimo funkciju kojom ćemo regulirati da su integracijom obuhvaćeni samo modovi nad nekom skalom momenata k , to jest $k \lesssim q$, $q = |\mathbf{q}|$. Regulaciju provodimo konvolucijom novouvedene funkcije f_k s podintegralnom funkcijom z iz (3.1) izraza za Z . Poanta uvođenja f_k je iz računa klizne Z_k sasvim isključiti spore ($q < k$), a u potpunosti izintegrirati brze ($q > k$) modove, što odgovara obliku sa slike 3.1b. Kako smo provođenjem integracije $Z_k = \int D\phi z[\phi] \cdot f_k[\phi]$ efektivno odintegrirali brze modove, u direktnom prostoru to odgovara usrednjavanju ponašanja sustava

od mikroskopske skale a do skale $\sim 1/k$. Veličina a najmanja je intrinzična skala sustava te odgovara na primjer konstanti kristalne rešetke. Skala $\lambda \sim 1/a$ prirodni je ultraljubičasti prag ("UV cutoff") teorije do koje se protežu integrali u momentnom prostoru. Skala k može se razmatrati kao infracrveni prag ("IR cutoff") sustava brzih modova, te Z_k možemo gledati kao njihovu particijsku funkciju. Mogućnost ovakvog razvezivanja moramo postići funkcijom f_k . Z_k iščezavajućeg k odgovara stvarnoj particijskoj funkciji, $Z_{k=0} = Z$. Odabirom klizne momentne skale k biramo koji dio konfiguracija polja smo prointegrirali u particijskoj funkciji. Promjena Z_k i ostalih analognih kliznih statističkofizičkih veličina sa skalom k opisiva je diferencijalnim jednadžbama, što je osnovna ideja ove metode koja odgovara neperturbativnoj renormalizacijskoj grupi (NPRG) [22, 23].

3.1 Regulator

Za račun klizne particijske funkcije potrebno je konkretno i formalno uvesti funkciju f_k , što provodimo dodavanjem regulatora ΔH_k Hamiltonijanu sustava. Regulator je nelokalni izraz oblika

$$\Delta H_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{x}) R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} R_k(\mathbf{q}) \phi(-\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}), \quad \int_{\mathbf{q}} = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}. \quad (3.2)$$

Svi momentni integrali provode se za $0 \leq |\mathbf{q}| \leq \lambda \sim 1/a$. Ideja NPRG pristupa je da se smanjivanjem momentne skale k od mikroskopske skale λ do 0 glatko uzimaju u obzir fluktuacije; regulator ΔH_k potiskuje fluktuacije momenta manjeg od k , dok na ostale ne utječe [20]. Funkciju R_k , koja je parna, nazivamo funkcijom praga. Uz ovako uveden regulator za funkciju f_k dobivamo $f_k = \exp(-\Delta H_k)$, što za kliznu particijsku funkciju daje

$$Z_k = \int D\phi z[\phi] \cdot f_k[\phi] = \int D\phi \exp\left(-H[\phi] - \Delta H_k[\phi] + \int_{\mathbf{x}} B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})\right). \quad (3.3)$$

Iz izraza (3.2) danog integralom u momentnom prostoru vidljivo je da uvođenje regulatora možemo shvatiti kao pridjeljivanje efektivne mase $R_k(q)$ modovima $\phi(q)$. Iz ponašanja f_k vidljivog na slici 3.1b jasno je da je ona gotovo jedinična za brze modove, a skoro sasvim iščezava za spore. Stoga brzim modovima nismo pridjelili

masu, dok je efektivna masa sporih modova vrlo velika. Ovakvim oblikom regulatora zadovoljili smo zahtjev razvezivanja fizike brzih i sporih modova, budući da su sada u sustavu s Hamiltonijanom $H + \Delta H_k$ za pobuđivanje "teških" sporih modova potrebne nedostupno velike energije.

3.2 Klizno efektivno djelovanje

Veličina od interesa u ovom radu je efektivno djelovanje Γ koje je izrazom

$$\Gamma [M] + W [B] = \int_{\mathbf{x}} B(\mathbf{x}) M(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

definirano kao Legendreov transformat veličine

$$W [B] = \ln Z, \quad (3.5)$$

koja do na predznak odgovara reduciranoj slobodnoj energiji sustava. Reduciranim nazivamo veličine u čiju smo definiciju apsorbirali β , poput bezdimenzionalnog Hamiltonijana βH ili njegovog parametra βJ . Te i srodne (energijske) veličine odsad smatramo reduciranima, a označavamo ih jednako, na primjer $\beta H \rightarrow H$. U ovom formalizmu B predstavlja izvor ili magnetsko polje a M srednje polje $\langle \phi \rangle$ ili magnetizaciju. Efektivno djelovanje od efektivnog potencijala (2.22) se razlikuje u tome što je $\Gamma [M]$ funkcional, funkcija prostorno ovisnih polja. U sustavu s regulatorom čija slobodna energija glasi

$$W_k = \ln Z_k \quad (3.6)$$

definiramo analognu kliznu veličinu

$$\Gamma_k [M] + W_k [B] = \int_{\mathbf{x}} B(\mathbf{x}) M(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M(\mathbf{x}) R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M(\mathbf{y}), \quad (3.7)$$

koja predstavlja Legendreovu transformaciju u takvom sustavu kojom ujedno vodimo računa o tumačenju Γ_k kao efektivnog Hamiltonijana sustava. Ukoliko razmotrimo izraze (3.3) i (3.6) jasno je da bi bez dodatnog člana u odnosu na definiciju (3.4)

Γ_k opisivalo sumu Hamiltonijana i regulatora, a ne sam Hamiltonijan. Također, u granici $k = \lambda \gg 1$ nismo integrirali ništa te u direktnom prostoru i dalje razmatramo i potpuno mikroskopske skale. Kako nismo proveli nikakva usrednjavanja, od kliznog efektivnog djelovanja očekujemo da u toj granici egzaktno opisuje mikroskopski sustav, to jest

$$\Gamma_\lambda [M] = H [\phi = M]. \quad (3.8)$$

U dodatku E pokazano je slaganje definicije (3.7) sa zahtjevom (3.8), koje ne postoji bez oduzimanja člana s regulatorom (u odnosu na (3.4)). S druge strane, kao što je već rečeno, vrijedi $R_{k=0}(q) = 0$ i izraz (3.7) se slaže s definicijom (3.4) za $k = 0$ sustav i $\Gamma_0 = \Gamma$.

3.3 Egzaktne jednadžbe toka

Zanima nas kako se promatrane veličine mijenjaju s kliznom momentnom skalom k . Za početak deriviramo izraz za kliznu particijsku funkciju Z_k (3.3) po k i uvrštavamo definiciju klizne slobodne energije W_k (3.6). Dobivamo za tok iste jednadžbu

$$\partial_k W_k [B] = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \partial_k R_k (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left(\frac{\delta^2 W_k [B]}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{y}}} + \frac{\delta W_k [B]}{\delta B_{\mathbf{x}}} \frac{\delta W_k [B]}{\delta B_{\mathbf{y}}} \right), \quad (3.9)$$

koja se naziva jednadžbom Polchinskog [22]. Ovdje smo uveli pokratu za prikaz prostorne ovisnosti u obliku $B(\mathbf{x}) = B_{\mathbf{x}}$. Potrebno je voditi računa o tome da δ označava funkcionalnu derivaciju, to jest derivaciju funkcionala polja po tom polju koje je ujedno ovisno o prostoru. U slučaju funkcionalne derivacije po, na primjer, polju $\phi_{\mathbf{x}}$ označujemo ju s $\delta/\delta\phi_{\mathbf{x}}$ dok ju definiramo kao

$$\frac{\delta F [\phi_{\mathbf{x}}]}{\delta \phi_{\mathbf{y}}} = F' [\phi_{\mathbf{x}}] \frac{\delta \phi_{\mathbf{x}}}{\delta \phi_{\mathbf{y}}} = F' [\phi_{\mathbf{x}}] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.10)$$

gdje je F općeniti funkcional polja.

Kako bismo dobili jednadžbu toka za Γ_k , veličinu koja je kao funkcional parametra uređenja pogodnija za potrebna razmatranja, deriviramo njegov definicijski izraz (3.7) po skali k uz konstantno polje B . Dobivamo jednadžbu toka od interesa, koja

se još naziva Wetterichevom jednađžbom [22]:

$$\partial_k \Gamma_k [M] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \partial_k R_k (\mathbf{x} - \mathbf{y}) G_k (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.11)$$

Uvedna je funkcija $G_k (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ koju nazivamo propagatorom:

$$G_k (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\Gamma_{k, \mathbf{x}\mathbf{y}}^{(2)} + R_k (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]^{-1}, \quad (3.12)$$

gdje $[\dots]^{-1}$ označava inverz funkcionala, a koristimo i pokratu

$$\Gamma_{k, \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}^{(n)} = \frac{\delta^n \Gamma_k}{\delta M_{\mathbf{x}_n} \dots \delta M_{\mathbf{x}_1}} \quad (3.13)$$

za $n = 2$ slučaj. Pri nalaženju jednađžbe toka (3.11) korištena je jednađžba Polchinskog (3.9), lančana derivacija

$$\partial_k |_B = \partial_k |_M + \int_{\mathbf{x}} \partial_k |_B M_{\mathbf{x}} \frac{\delta}{\delta M_{\mathbf{x}}}, \quad (3.14)$$

izraz za magnetizaciju

$$M_{\mathbf{x}} = \langle \phi_{\mathbf{x}} \rangle = \frac{\delta W_k [B]}{\delta B_x} \quad (3.15)$$

i identitet

$$\int_{\mathbf{z}} \frac{\delta^2 W_k [B]}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{z}}} \left[\frac{\delta^2 \Gamma_k [M]}{\delta M_{\mathbf{z}} \delta M_{\mathbf{y}}} + R_k (\mathbf{z} - \mathbf{y}) \right] = \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.16)$$

Dosadašnji računi tokova su egzaktni i rađeni u direktnom prostoru. Dobivanje izraza (3.11) i (3.16) raspisano je u dodatku F.

3.4 Fiksne točke

Sustav je na mikroskopskoj skali zadan svojim Hamiltonijanom $H [\phi, \mathbf{K}, \lambda]$, to jest dan je u terminima polja ϕ a ovisi o mikroskopskoj skali λ i sprežanjima \mathbf{K} . Ointegriranjem brzih modova nad skalom k (to jest fluktuacija u direktnom prostoru pod skalom $\sim 1/k$) želimo dobiti za opis kritičnog sustava presudnu fiziku na velikim skalama. Promjenom klizne skale k promatranog sustava mijenjamo parametre \mathbf{K} koji ga opisuju i efektivno istražujemo sustave na raznim prostornim skalama

(to jest s različitim efektivnim Hamiltonijanima) u prostoru sprezanja \mathbb{K} . Kako nas zanima kontinuirani fazni prijelaz, od posebnog interesa su kritični sustavi. Oni se odlikuju divergentnom korelacijskom duljinom $\xi \rightarrow \infty$. Kod kontinuiranih faznih prijelaza najčešće je potrebno podesiti jedan parametar (ne razmatramo polje B), što znači da je prostor parametara koji odgovaraju kritičnim sustavima ima kodimenziju jedan u odnosu na puni prostor. Obično se radi o temperaturi. Taj prostor nazivamo kritičnom površinom. Sustavi na kritičnoj površini povećanjem skale k teku u atraktore koje nazivamo fiksnim točkama [23]. Koristimo taj naziv jer su sustavi opisani fiksnim točkama invarijantni na promjene skale. Postojanje takvih rješenja invarijantnih na skalu potvrđuje postojanje univerzalnosti potencijskih zakona koji se javljaju s divergencijom ξ . Kritični sustavi koji teku u istu fiksnu točku pripadaju istoj klasi univerzalnosti. Kako su univerzalne veličine ono što nas zanima kod kritičnih sustava, račune provodimo za fiksne točke, budući da zbog invarijantnosti na promjene skale iščekavaju derivacije po k . Potrebno je ipak razumjeti da su fiksne točke pojmovno bitnije od pojednostavljenja računa. Iz poznavanja fiksnih točaka sustava NPRG jednadžbi može se zaključiti općenita topološka svojstva toka koja daju značajan uvid u promatranu klasu modela [4, 24].

3.5 Derivacijski razvoj kliznog efektivnog djelovanja

Jednadžba (3.11) je funkcionalna diferencijalna jednadžba koja obuhvaća i funkcionalne derivacije i operatorski inverz. Kao takvu ju ne možemo riješiti. Potrebno je odabrati određene aproksimacije i odlučiti kakva ponašanja želimo opisati. Pri razmatranju kritičnih sustava od interesa je uglavnom fizika na velikim skalama, to jest ponašanje dugovalnih $q \rightarrow 0$ modova. Stoga je korisno uvesti derivacijski razvoj do drugog reda [25], to jest ansatz za klizno efektivno djelovanje

$$\Gamma_k [M] = \int_{\mathbf{x}} \left[U_k [M_{\mathbf{x}}] + \frac{1}{2} Z_k [M_{\mathbf{x}}] (\nabla_{\mathbf{x}} M_{\mathbf{x}})^2 \right]. \quad (3.17)$$

Ovdje je uveden U_k , klizni analogon efektivnog potencijala (ovaj naziv argumentiramo u podpoglavlju 3.5.4), i funkcija Z_k koja unatoč oznaci nije konceptualno povezana s kliznom particijskom funkcijom. U izrazu (3.17) zadržali smo punu ovisnost o nederiviranom polju M , ali najniži red u razvoju po ∇M koji se slaže sa simetrijom sustava. Značaj ovog ansatza je što omogućuje da od opisa toka kompli-

ciranom Wetterichevom jednadžbom (3.11) uz određene jednostavne aproksimacije i pogodan odabir regulatora omogućuje prijelaz na zatvoren sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za funkcije U_k i Z_k .

3.5.1 Bezdimezionalne veličine

Invarijantnost na promjene skale je jasni pokazatelj da su dimezionalne veličine nepogodne za traženje fiksnih točaka [23]. Stoga uvodimo bezdimezionalne veličine u smislu dimezije momentne skale k naznačene tildom:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{q^2}{k^2}, \\
k^{2-\eta} y r(y) &= R_k(q^2), \\
\tilde{\mathbf{x}} &= k\mathbf{x}, \\
\tilde{M} &= k^{\frac{2-d-\eta}{2}} M, \\
\tilde{U}_s [\tilde{M}(\tilde{\mathbf{x}})] &= k^{-d} U_k [M(\mathbf{x})], \\
\tilde{Z}_s [\tilde{M}(\tilde{\mathbf{x}})] &= k^\eta Z_k [M(\mathbf{x})],
\end{aligned} \tag{3.18}$$

gdje s predstavlja renormalizacijsko vrijeme definirano kao

$$s = \ln \left(\frac{k}{\lambda} \right), \quad \partial_s = k \partial_k. \tag{3.19}$$

Invarijantnost na promjene skale i prelazak na bezdimezionalne veličine jasno ukazuje i na neovisnost o mikroskopskoj skali λ [25], što dodatno ukazuje na univerzalnost. Skaliranja momenta q s k i koordinate direktnog prostora \mathbf{x} s k^{-1} su izravno jasna. Kako smo u definiciju kliznog efektivnog djelovanja apsorbirali β , Γ_k je bezdimezionalna veličina. Iz izraza (3.17) i skaliranja $d\mathbf{x}$ s k^{-d} , jasno je da se U_k i umnožak $Z_K (\nabla_{\mathbf{x}} M_{\mathbf{x}})^2$ skaliraju s k^d . Standardna definicija η [26] kao anomalne dimezije koja se javlja u potencijskom zakonu koji opisuje "two-point" korelacijsku funkciju u kritičnom režimu

$$G \propto \frac{\exp(-r/\xi)}{r^{d-2+\eta}}, \tag{3.20}$$

daje skaliranje polja ϕ i srednjeg polja M , što uz skaliranje $\nabla_{\mathbf{x}}$ s k fiksira dimeziju

Z_k . Skaliranje funkcije praga R_k zaključuje se iz skaliranja polja i definicije regulatora (3.2). Uvođenje varijable $y \propto q^2$ opravdano je rotacijskom invarijantnošću promatranog problema. Potrebno je voditi računa da su derivacije po skali k u dimenzionalnim jednadžbama provođene pri konstantnom dimenzionalnom srednjem polju M , te ih sada treba raspisati uz fiksirane bezdimenzionalne veličine:

$$\partial_s|_M = \partial_s|_{\tilde{M}} - \frac{d-2+\eta}{2} \tilde{M} \partial_{\tilde{M}}|_s. \quad (3.21)$$

Drugi pribrojnik predstavlja dimenzionalni doprinos toku bezdimenzionalnih veličina. Analogno je potrebno provesti i zamjene

$$\begin{aligned} \partial_s|_q &= \partial_s|_y - 2y\partial_y|_s, \\ \tilde{\partial}_s f(R_k(q^2)) &\rightarrow \tilde{\partial}_y f(r(y)) = - \left(\eta r + 2 \frac{dr}{dy} \right) \frac{df}{dr}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

do na potenciju skale k . Derivacije označene tildom, $\tilde{\partial}$, djeluju samo na ovisnost R (ili r u bezdimenzionalnom slučaju) o varijabli po kojoj se derivira.

Rotacijska invarijantnost omogućuje pojednostavljenje nekih od integrala koji se javljaju uz korištenje

$$\int_{\mathbf{q}} f(q^2) = 2v_d k^{d+d_f} \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{d}{2}-1} f(y). \quad (3.23)$$

Izrazi od (3.18) do (3.23) omogućuju prelazak na bezdimenzionalne jednadžbe toka. Pri tom računu se ispostavlja da se, očekivano, iz svakog pribrojnika može izlučiti ista potencija skale k koja se onda krati. Zato u izrazima poput (3.22) nije nužno pratiti potencije klizne skale.

3.5.2 Fluktuacije u kritičnosti

Od posebnog je interesa relacija

$$M = k^{\frac{d-2+\eta}{2}} \tilde{M}. \quad (3.24)$$

Vidimo da je moguće, u $k \rightarrow 0$ granici i za $d-2+\eta > 0$, da je sustav opisan neiščekavajućom bezdimenzionalnom magnetizacijom dok je $M = 0$. Kažemo da \tilde{M}

ovdje opisuje fluktuacije oko $M = 0$. Razmatranjem bezdimenzionalnog polja \tilde{M} stoga "uvećavamo" takve fluktuacije što olakšava njihov tretman. Dok u Gaussovoj teoriji vrijedi $\eta = 0$, za netrivialne fazne prijelaze (prijelaze koji nisu opisivi Gaussovom teorijom) je anomalna dimenzija u većini modela statističke fizike pozitivna (npr. $O(N)$ modeli [27], modeli s neredom [28, 29]). Zamislimo li neki sustav bezdimenzionalnog polja $\tilde{M} \neq 0$ koji ispoljava netrivialni fazni prijelaz, to u kritičnosti za male $k \ll 1$ rezultira za faktor k^η manjim dimenzionalnim fluktuacijama u odnosu na približni opis Gaussovom teorijom. U toj slici su za $k \rightarrow 0$ kritične fluktuacije dobro kontrolirane i uvijek male ($\ll 1$). To nije slučaj za iščezavajući eksponent $d - 2 + \eta = 0$. U tom slučaju svako neiščezavajuće polje \tilde{M} rezultira dimenzionalnim fluktuacijama jediničnog reda veličine, koje onemogućuju konstrukciju smislenog parametra uređenja koji je generalno također reda veličine jedan. Drugim riječima, za $d - 2 + \eta \leq 0$ opažamo značajne kritične fluktuacije koje onemogućuju uređenje. Vidljivo je konceptualno podudaranje sa spomenutim Pierelsovim argumentom te stoga $d_l = 2 - \eta$ prepoznavamo kao donju kritičnu dimenziju.

3.5.3 Jednadžbe toka za U i Z

Prvi korak u postupku dobivanja traženih jednadžbi je nalaženje druge funkcionalne derivacije Γ po magnetizaciji. Izravnim računom dobiva se

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}^{(2)} = & \left[U'' - \frac{1}{2} Z'' (\nabla M)^2 - Z' \nabla^2 M \right] \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \\ & - Z' \nabla M \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - Z \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Korištene su oznake

$$F' = \frac{\delta F}{\delta M}, \quad \Gamma_{k, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n}^{(n)} = \frac{\delta^n \Gamma_k [M_{\mathbf{x}}]}{\delta M_{\mathbf{x}_n} \dots \delta M_{\mathbf{x}_1}}, \quad (3.26)$$

te su ovdje i ubuduće ispuštene oznake klizne skale k te oznake funkcionalnih ovisnosti o poljima i ovisnosti polja o prostoru, kako bi izrazi bili čitljiviji. Zanima nas oblik ovisnosti funkcija U'' i Z o M . Ovdje izabiremo homogenu magnetizaciju takvu da $\nabla M = \nabla^2 M = 0$:

$$\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}^{(2)} = U'' \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - Z \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (3.27)$$

Kako sad U'' i Z ne ovise o prostoru, moguće je provesti Fourierovu transformaciju izraza (3.27):

$$\Gamma_{\mathbf{p}}^{(2)} = U'' + \mathbf{p}^2 Z, \quad (3.28)$$

gdje je korištena translacijska invarijantnost $M = konst.$ sustava. Tražene funkcije dobivamo izravno iz izraza (3.28) kao

$$U'' = \Gamma_{\mathbf{p}=0}^{(2)}, \quad Z = \frac{\partial \Gamma_{\mathbf{p}}^{(2)}}{\partial (\mathbf{p}^2)}. \quad (3.29)$$

Tok veličine $\Gamma^{(2)}$ zahtijeva dvostruku funkcionalnu derivaciju Wettericheve jednadžbe (3.11) po magnetizaciji i stoga izračun $\Gamma^{(n)}$ za $n \leq 4$, proveden u dodatku F. To omogućuje dobivanje toka za veličine \tilde{U}'' i \tilde{Z} derivacijom izraza (3.29) po skali k uz konstantnu magnetizaciju, $\partial_k|_M$, i prelaskom na bezdimenzionalne veličine uz ispuštanje tildi:

$$\begin{aligned} \partial_s U'' &= (\eta - 2) U'' + \frac{d-2+\eta}{2} M U''' + \\ &\quad - 2v_d [l(1, d) U^{iv} + l(1, d+2) Z'' - l(2, d) (U''')^2 + \\ &\quad - 2l(2, d+2) Z' U''' - l(2, d+4) (Z')^2] \\ \partial_s Z &= \eta Z + \frac{d-2+\eta}{2} M Z' + \\ &\quad + \frac{2}{d} v_d \left\{ [(2d+1)l(2, 2+d) - 2m(4, 4+d)] (Z')^2 - dl(1, d) Z'' + \right. \\ &\quad \left. + 2[dl(2, d) - 2m(4, 2+d)] Z' U''' - 2m(4, d) (U''')^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Parcijalne derivacije po s provedene su uz fiksnu bezdimenzionalnu kliznu magnetizaciju. Tilde su ispuštene jer se, kako nas zanimaju rezultati u fiksnim točkama, nadalje podrazumijeva rad s bezdimenzionalnim veličinama. Uvedena je pokrata

$$v_d = \frac{1}{2^{d+1} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} dx x^{z-1} \exp(-x) \quad (3.31)$$

i funkcije

$$l(n, d) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dy \tilde{\partial}_y \left[y^{\frac{d}{2}-1} G^n(y) \right] & n > 0, \\ -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dy \tilde{\partial}_y \left[y^{\frac{d}{2}-1} \ln G(y) \right] & n = 0; \end{cases} \quad (3.32)$$

$$m(n > 0, d) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\partial}_y \left[y^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dG(y)}{dy} \right)^2 G^{n-4}(y) \right].$$

Glavna prednost konfiguracije $M = konst.$ je što se inverz u izrazu (3.12) za propagator koji se javlja u (3.32) može u momentnom prostoru provesti algebarski

$$G_{\mathbf{q}} = \frac{1}{R_{\mathbf{q}} + \Gamma_{\mathbf{q}}^{(2)}}, \quad (3.33)$$

što u bezdimenzionalnim veličinama (do na prefaktor potencije skale k) glasi:

$$G(y) = \frac{1}{y(r + Z) + U''}. \quad (3.34)$$

3.5.4 U_k kao klizni analogon efektivnog potencijala

Kako bismo objasnili zašto U_k nazivamo analogonom kliznog efektivnog potencijala, uvrštavamo homogenu magnetizaciju u ansatz (3.17) čime dobivamo

$$k^d \tilde{U}_s = U_k [M = konst.] = \frac{\Gamma_k [M = konst.]}{V}, \quad (3.35)$$

gdje je V volumen, to jest U predstavlja gustoću. Ovdje smo privremeno vratili oznake k i tilde kako bismo mogli jednostavnije diskutirati da fizikalnu sliku daje jedino $k \rightarrow 0$ slučaj. U tom slučaju Γ_0 odgovara potencijalu čija je prirodna varijabla magnetizacija ili srednje polje a izračunat je iz partijske funkcije Z_0 u kojoj smo potpuno prointegrirali po svim modovima, pa tako i fluktuacijama, to jest uz (3.35) veličina U_k za iščezavajući k konceptualno odgovara reduciranoj gustoći efektivnog potencijala (2.28). Treba uzeti u obzir da je to smisleno jedino za konfiguraciju uniformne magnetizacije u kojoj se može provesti integral ansatza (3.17).

3.5.5 Theta regulator i LPA'

Želimo pokazati da NPRG metodama možemo dobiti kvalitativno ispravan opis fizike kritičnih sustava u d_l dominiranih jakim fluktuacijama. U tu svrhu želimo uvesti aproksimacije koje nam olakšavaju rješavanje zatvorenog sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje predstavljaju tok bezdimenzionalnih pandana kliznih veličina U i Z iz ansatza 3.17. Za konkretne račune potrebno je eksplicitno zadati regulator, to jest funkciju praga R_k . Biramo izraz koji zadovoljava željeni oblik kojim efektivno zamrzavamo spore modove, a koristan je za račune (3.32). Jedan od jednostavnijih odabira je theta (ili Litim) regulator

$$R_k(q^2) = k^{-\eta} (k^2 - q^2) \theta(k^2 - q^2). \quad (3.36)$$

Za bezdimenzionalne račune koristan je oblik

$$r(y) = \left(\frac{1}{y} - 1\right) \theta(1 - y) = \begin{cases} \frac{1}{y} - 1 & y < 1, \\ 0 & y \geq 1; \end{cases} \quad (3.37)$$

povezan s R_k izrazom (3.18). Uz theta regulator funkcije l i m dane izrazima (3.32) prikazive su preko nepotpunih beta funkcija (dodatak F). Potrebna nam je aproksimacija koja daje netrivialnu η , kako bismo mogli postići $d'_l < 2$. Ovdje se oznaka d'_l odnosi na donju kritičnu dimenziju dobivenu NPRG metodama uz aproksimacije. Aproksimacija koju koristimo je jednostavna i standardno korištena LPA' (gdje LPA predstavlja "Local Potential Approximation", aproksimaciju lokalnog potencijala). U LPA' se uzima da je bezdimenzionalna veličina Z konstantna u magnetizaciji te biramo $Z[M_0] = 1$ za neku magnetizaciju M_0 u kojoj provodimo renormalizaciju, te koristimo $Z' = Z'' = 0$. Tada je dimenzionalni Z dan s $k^{-\eta}$. Ova aproksimacija omogućuje analitičko provođenje integrala u izrazu (3.32):

$$l(n \geq 0, d) = 2(n + \delta_{n0}) \frac{d + 2 - \eta}{d(d + 2)} \frac{1}{(1 + U^n)^{n+1}}, \quad m(n > 0, d) = \frac{1}{(1 + U^n)^n}. \quad (3.38)$$

Uz ova pojednostavljena jednadžbe (3.30) poprimaju oblik

$$\begin{aligned}\partial_s U'' &= (\eta - 2) U'' + \frac{d - 2 + \eta}{2} M U'' + 4v_d \frac{d + 2 - \eta}{d(d + 2)} \left[\frac{2(U''')^2}{(1 + U'')^3} - \frac{U^{iv}}{(1 + U'')^2} \right], \\ \eta &= \frac{4v_d}{d} \frac{(U''')^2}{(1 + U'')^4},\end{aligned}\tag{3.39}$$

gdje izraz za η slijedi iz toka veličine Z . Zbog simetrije promatranog sustava (Isingov model opisan ϕ^4 teorijom uz skalarno polje) funkcija U je parna u magnetizaciji. Stoga iz neparnosti U''' i izraza za η iz (3.39) jasno vidimo da za LPA' nije svejedno za koju magnetizaciju M_0 provodimo renormalizaciju, jer bi uvrštavanje $M_0 = 0$ rezultiralo trivijalnom anomalnom dimenzijom. Standardan odabir [30] koji ovdje koristimo je neiščekavajuća magnetizacija u kojoj U ima minimum, to jest $U' [M_0 \neq 0] = 0$. Ovaj izbor je gotovo intuitivan jer M_0 odgovara statistički najvjerojatnijoj konfiguraciji. Izbor theta regulatora u kombinaciji s LPA' je doveo do znatnog pojednostavljenja jednadžbi toka (3.30). Odabir regulatora ne bi imao utjecaj na kvalitetu rezultata ukoliko bismo mogli provoditi praktične račune s egzaktnom jednadžbom toka (3.11) [23].

3.6 Postojeći opis

Ne postoji opsežna literatura o tretmanu sustava u donjoj kritičnoj dimenziji formalizmom neperturbativne renormalizacijske grupe. Nije neuobičajno da se slučaj niskodimenzionalnih ($d < 2$) $O(N = 1)$ modela zaobilazi u opsežnoj postojećoj literaturi o $O(N)$ modelima [24, 27, 31–34]. Jedan od relevantnih članaka je onaj H. Ballhausena, J. Bergesa i C. Wettericha [35]. U njemu se razmatra razvoj derivacije bezdimenzionalne klizne funkcije U u obliku

$$U'[\rho] = \lambda(\rho - \kappa) + \frac{1}{2!} u_3(\rho - \kappa)^2 + \frac{1}{3!} u_4(\rho - \kappa)^3 + \dots, \quad \rho = \frac{M^2}{2}.\tag{3.40}$$

Autori ovdje koriste veličinu $\rho = M^2/2$ najvjerojatnije zbog svoje uloge kao prirodne varijable $O(N)$ modela, to jest modela analognom Isingovom ali za N -komponentna polja ϕ . U izrazu (3.40) κ se odnosi na ρ u kojem je potencijal $U[\rho]$ minimalan, to jest $U'[\kappa] = 0$ ili $\kappa = M_0^2/2$. Pokratak λ se odnosi na $\lambda = U''[\kappa]$, a $u_n = U^{(n)}[\kappa]$. Autori

pronalaze jednadžbu toka za κ . Pri tome koriste LPA', theta regulator i razvoj (3.40). Iz te jednadžbe toka dobivaju izraz koji vrijedi u fiksnoj točki:

$$\kappa^3 \lambda^2 = \frac{2v_d}{d(d+2)^2} \eta \left(\frac{d+2-\eta}{d-2+\eta} \right)^2. \quad (3.41)$$

Iz izraza (3.41) vidljivo je da u donjoj kritičnoj dimenziji $d_l = 2 - \eta$ veličina $\kappa^3 \lambda^2$ divergira. Kako je u samu pretpostavku mogućnosti razvoja (3.40) ugrađena potreba za konačnošću λ , Ballhausen, Berges i Wetterich zaključuju da divergira upravo κ . To bi značilo da je za kritični sustav (opisan fiksnom točkom) u donjoj kritičnoj dimenziji polje za koje je potencijal minimalan neomeđeno ($M_0 \rightarrow \infty$). Ovakvo ponašanje slaže se s rezultatima za $O(N > 1)$ modele [27]. U poglavlju 4 pokazujemo da razmatranje ovog problema bez korištenja razvoja oko κ dobivamo kvalitativno potpuno drukčije ponašanje koje ukazuje na divergenciju veličine λ .

4 Rezultati

Ono što želimo je, umjesto razvojem (3.40), tretirati jednadžbe toka u punoj funkcionalnoj ovisnosti o magnetizaciji. Jednadžbe će biti potrebno rješavati numerički. Kako predviđamo divergenciju U'' u fiksnoj točki, nije praktično raditi izravno u U'' . Potrebno je raditi u nekoj veličini za koju očekujemo da je kontrolirana, te stoga uvodimo kliznu bezdimenzionalnu veličinu

$$\tilde{c}_s [\tilde{M}] = c = \frac{1}{U'' + [yr(y)]|_{y=0}}. \quad (4.1)$$

Funkcija c je, osim što je izuzetno pogodna za numerička razmatranja potencijala U'' , povezana s bezdimenzionalnom kliznom susceptibilnošću $\tilde{\chi}_k = \chi$. Razmotrimo li definiciju propagatora (3.12) i identitet (3.16), jasno je da vrijedi

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta^2 W}{\delta B_{\mathbf{y}} \delta B_{\mathbf{x}}}, \quad (4.2)$$

što odgovara korelacijskoj funkciji. Fourierov transformat korelacijske funkcije za iščezavajući moment ($y \propto q^2 = 0$), koji je za korištenu uniformnu konfiguraciju upravo funkcija c , predstavlja reduciranu susceptibilnost [13].

4.1 Jednadžba toka za $c[M]$

Iz definicije funkcije c uz korišteni theta regulator, lako se vidi da vrijedi

$$c = \frac{1}{1+U''} \implies U'' = \frac{1}{c} - 1, \quad U''' = -\frac{1}{c^2}, \quad U^{iv} = \frac{2}{c^3}; \quad \partial_s U'' = -\frac{1}{c^2} \partial_s c. \quad (4.3)$$

Koristeći (4.3) i izraz (3.30) dobivamo zatvoren sustav jednadžbi toka veličina c i Z uz theta regulator i u derivacijskom razvoju do drugog reda:

$$\begin{aligned} \partial_s c &= (\eta - 2) c (c - 1) + \frac{d - 2 + \eta}{2} M c' + \\ &+ 2v_d \left\{ l(1, d) \frac{1}{c} \left[2(c')^2 - c c'' \right] + l(1, d + 2) c Z'' - l(2, d) \left(\frac{c'}{c} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2l(2, d + 2) (c')^2 Z' - l(2, d + 4) (c Z')^2 \right\}, \\ \partial_s Z &= \eta Z + \frac{d - 2 + \eta}{2} M Z' + \\ &+ \frac{2}{d} v_d \left\{ [(2d + 1) l(2, d + 2) - 2m(4, d + 4)] (Z')^2 - 2m(4, d) \left(\frac{c'}{c^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - dl(1, d) Z'' + 2[2m(4, d + 2) - dl(2, d)] \frac{c' Z'}{c^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

U LPA, sustav (4.4) svodi se na jednadžbe

$$\begin{aligned} \partial_s c &= (\eta - 2) c (c - 1) + \frac{d - 2 + \eta}{2} M c' - 4v_d \frac{d + 2 - \eta}{d(d + 2)} c^2 c'', \\ \eta &= \frac{4v_d}{d} (c')^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Protumačimo li da izraz (3.41) implicira pojavu tendencije brzog porasta U'' za konačne $|M|$ s približavanjem donjoj kritičnoj dimenziji. To implicira da je vrijednost c bliska 0. Za $c \ll 1$ vrijedi pojednostavljena jednadžba

$$\partial_s c \approx -(\eta - 2) c + \frac{d - 2 + \eta}{2} M c' \quad (4.6)$$

čije je rješenje dano potencijskom ovisnošću

$$c \propto |M|^{-\frac{2(2-\eta)}{d-2+\eta}}. \quad (4.7)$$

U donjoj kritičnoj dimenziji vrijedi $d - 2 + \eta = 0$. Vidimo da to implicira da nazivnik ovog eksponenta iščezava, te sam eksponent divergira. Dakle očekujemo

da c mora iščezavati za dovoljno velike konačne M . Uvjet donje kritične dimenzije dodatno pojednostavljuje jednadžbu toka za c (4.5) te se ona tada svodi na

$$\partial_s c = dc(c-1) - \frac{8v_d}{d+2} c^2 c'' \quad (4.8)$$

4.2 Kritični eksponenti i numeričko rješenje za $c[M]$

Postojećim programom baziranim na Newton-Raphson metodi za traženje korjena funkcija tražimo fiksne točke sustava jednadžbi toka bezdimenzionalnih veličina uz theta regulator i LPA' (4.5) i u njima rješavamo pripadne jednadžbe. Program je modifikacija numeričkog programa korištenog za razmatranja statističkih modela s nasumičnim poljem ([28], autora I. Baloga). Račun provodimo za različite dimenzije u rasponu od $d > d_l = 1$ do $d = d_u = 4$. Cilj je što više se približiti donjoj granici, te se fokusiramo na dimenzije $d \lesssim 1.4$.

Podatci su prikazani na slikama (4.1) i (4.2). Dobivene su veličine c za različite dimenzije d iznad d_l . Sve funkcije c strogo iznad gornje kritične dimenzije pokazuju slične karakteristike - c ima maksimum za $M = 0$ te trne kako se $|M|$ povećava. Uvijek postoji raspon $|M|$ iznad kojeg je vrijednost c izrazito mala.

Numerički postupak koji nam služi za pronalaženje fiksni točaka pri $d > d_l$ postaje nestabilan pri dimenziji $d \approx 1.12$. Pitanje koje si možemo postaviti stoga jest odgovara li i u kojoj mjeri donja kritična dimenzija dobivena ovom aproksimacijom d'_l , stvarnoj donjoj kritičnoj dimenziji $d_l = 1$.

Da bismo pronašli d'_l , promatramo ponašanje $d - 2 + \eta$ u ovisnosti o d . Iz numeričkih rezultata prikazanih na slici 4.1c koristimo različite metode ekstrapolacije, koje nam daju procjenu d'_l za koju je $d'_l - 2 + \eta = 0$ te također nepouzdanost te dimenzije. Dobivamo $d_l = 1.039 \pm 0.005$.

Promotrimo sad ponašanje kritičnog eksponenta $\frac{1}{\nu}$. Taj eksponent opisuje nestabilnost fiksne točke na promjenu temperature sustava [5]. Ako promatramo linearizirane perturbacije funkcije c oko rješenja fiksne točke, možemo pronaći svojstvene vrijednosti i smjerove tih perturbacija. Nestabilni su smjerovi čije su pripadne vrijednosti negativne i oni odgovaraju relevantnim operatorima skaliranja. Nalazimo da najrelevantniji smjer odgovara kritičnom eksponentu $-\frac{1}{\nu} < 0$. Zbog opaženog esencijalnog skaliranja očekujemo da u egzaktnom modelu $\frac{1}{\nu}$ iščezava za d_l . Traženjem nule $\frac{1}{\nu}$ ekstrapolacijom iz numeričkih rezultata za ovu aproksimaciju dobivamo donju

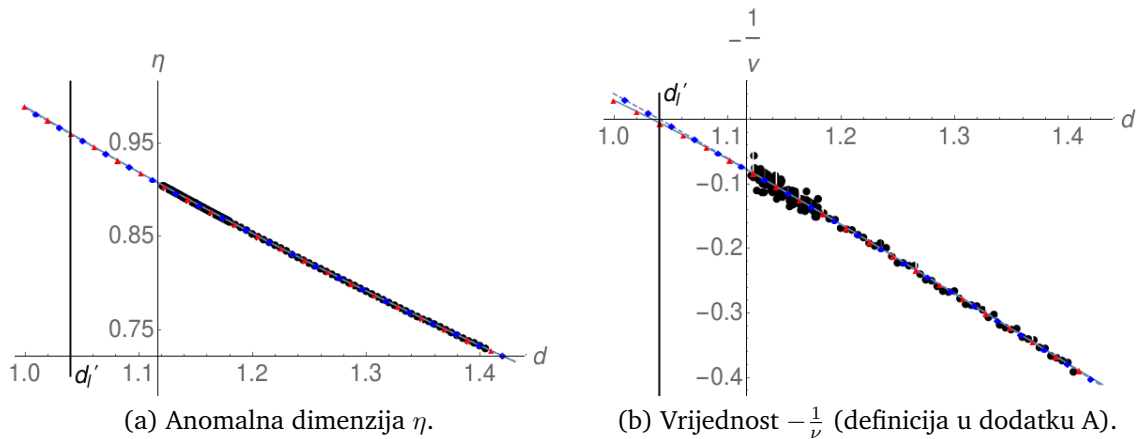
kritičnu dimenziju $d_l'' = 1.04 \pm 0.01$, što je dobra nezavisna provjera d_l' .

Napomenimo da iščezavanje $\frac{1}{\nu}$ u granici donje kritične dimenzije ondje čini fiksnu točku marginalno stabilnom. Numerička procedura pronalaženja fiksnih točaka zato postaje nestabilna na nekoj $d > d_l'$, što objašnjava zašto je bilo potrebno koristiti ekstrapolacije za određivanje vrijednosti d_l' .

Koristeći numerička rješenja za c u $d > d_l'$ želimo dobiti numeričko rješenje za c pri d_l' . U mogućnosti smo iz dobivenih vrijednosti $c[M = 0]$ nad d_l' ekstrapolirati rubni uvjet za $c[0]$ u d_l' , što je uz rubni uvjet negativnog pariteta za c' , $c'[0] = 0$, dovoljno za numeričko nalaženje rješenja jednadžbi (4.8). Nalazimo da se ponašanje $c[M]$ u d_l' slaže s očekivanim, to jest c je za male $|M|$ konačna funkcija, dok za neku konačnu magnetizaciju $|M_0|$ iščezava.

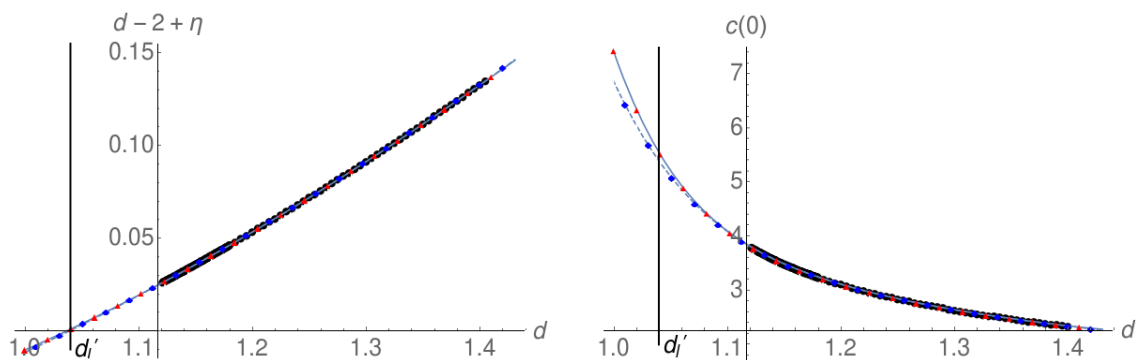
Bezdimenzionalna klizna susceptibilnost c govori o fluktuacijama u kritičnom sustavu. Pošto se polje ne reskalira, a c je konačna funkcija, doseg fluktuacija parametra reda u sustavu je jediničnog reda, a kako se polje u donjoj kritičnoj dimenziji ne reskalira, to vrijedi i za dimenzionalne fluktuacije. Ovo nam govori o činjenici da fazni prijelaz nestaje jer je veličina fluktuacija sumjerljiva vrijednosti parametra uređenja. Stoga su rezultati koje dobivamo direktnim računom u potpunom slaganju s fizikalnom slikom koju daje egzaktno rješenje na donjoj kritičnoj dimenziji koje je opisano u potpoglavlju 2.6.

Iz rezultata za funkciju c računamo U'' u d_l' , čijom numeričkom integracijom uz rubni uvjet $U'[M = 0]$ dobivamo funkciju $U'[M]$. Ovi rezultati prikazani su na slici 4.2. Iz uvjeta $U'[M_0 \neq 0] = 0$ nalazimo lokalne minimume potencijala. Oni su prikazani na slici 4.1e, iz koje je vidljivo da premašuju ilustrativne rezultate dobivene ekstrapolacijom. Ovo nije neočekivano jer i sama numerička prilagodba pokazuje znatno veću neodređenost ekstrapolirane vrijednosti. Bitno je da je M_0 konačno, što uz rješenje koje dobivamo za c , potvrđuje scenarij u kojem umjesto M_0 divergira $U''[M_0]$. Naglašavamo da analitički izraz (3.41), koji govori o divergenciji $\kappa^3 \lambda^2$, mora vrijediti. Naša interpretacija tog izraza ilustrirana je na slici 4.3, gdje vidimo da je točka minimuma efektivnog potencijala ($U'[M_0 \neq 0] = 0$), također i točka divergencije druge derivacije efektivnog potencijala.



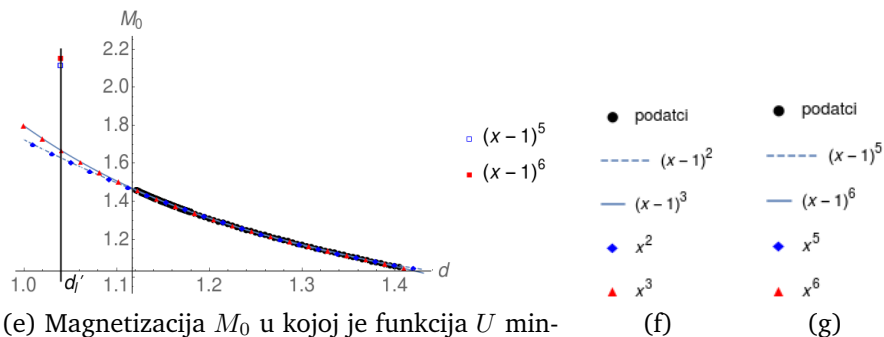
(a) Anomalna dimenzija η .

(b) Vrijednost $-\frac{1}{\nu}$ (definicija u dodatku A).



(c) Eksponent $d - 2 + \eta$ renormalizacije M^2 uz η sa slike 4.1b.

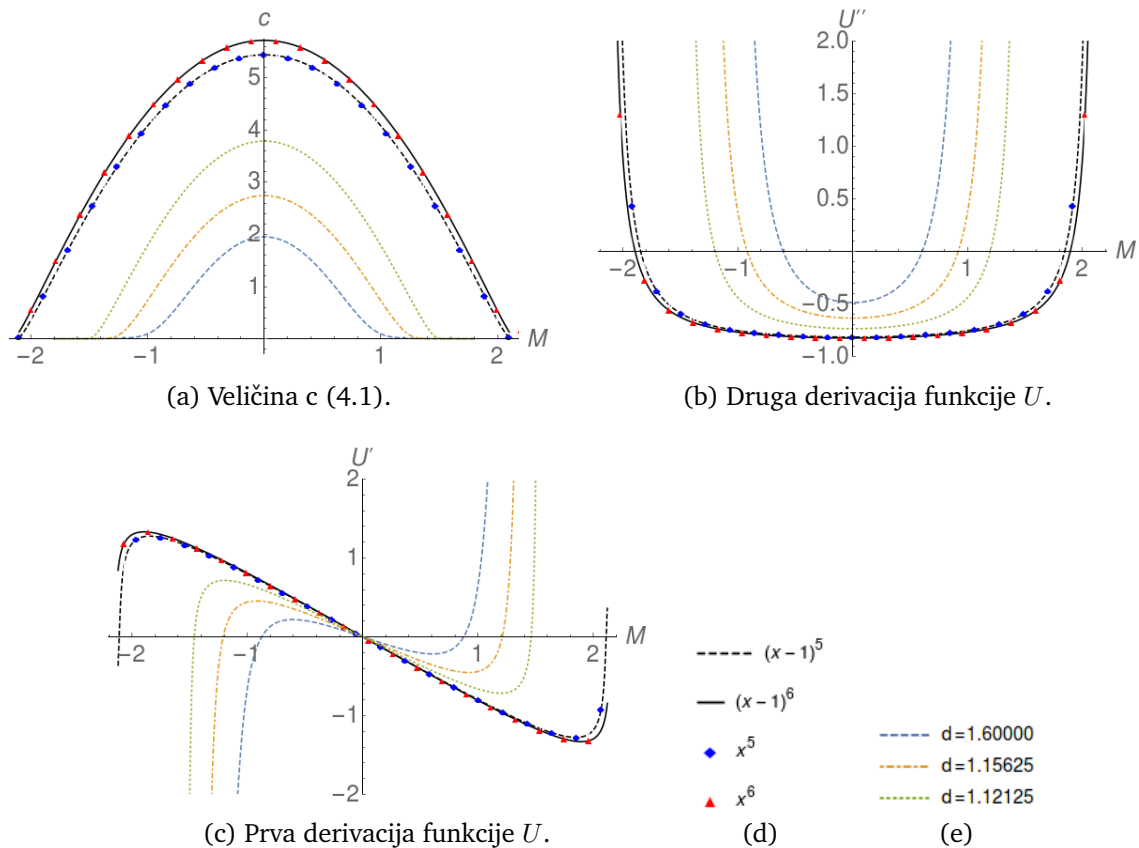
(d) Vrijednost funkcije c (4.1) za $M = 0$.



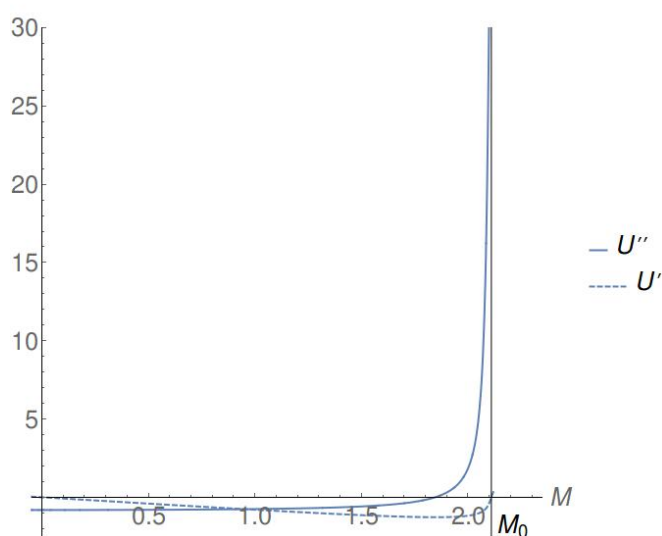
(e) Magnetizacija M_0 u kojoj je funkcija U minimalna. Dodatne oznake odnose se na M_0 nađenu iz rješenja u donjoj kritičnoj dimenziji uz rubne uvjete dobivene ekstrapolacijom iz podataka sa slike 4.1d. Podatci za x^5 i x^6 prilagodbe nisu prikazani jer se dobro poklapaju s označenim $(x - 1)^5$, $(x - 1)^6$ vrijednostima.

(f) (g)

Slika 4.1: Ovisnost nekih od veličina od ineterasa o prostornoj dimenziji d . Prilagodbe na numeričke podatke ekstrapolirane su kako bi prikazivale i područje donje kritične dimenzije. Oznake u legendama 4.1f i 4.1g odnose se na prilagodbe na funkcije oblika $a_0 + a_1(x - 1)^2 + \dots$, to jest razvoja oko $d = 1$ ili $a_0 + a_1x^2 + \dots$ (oko $d = 0$) do naznačene potencije. Legenda 4.1g odnosi se na $c(0)$, to jest sliku 4.1d, dok se 4.1f odnosi na sve ostale prilagodbe. Navedene prilagodbe služe za ekstrapolaciju podataka za donju kritičnu dimenziju koje koristimo u računu ili za usporedbu s rezultatima.



Slika 4.2: Ovisnost nekih od veličina od interesa o srednjem polju (magnetizaciji M). U legendi 4.2d oznake se odnose na numerička rješenja u donjoj kritičnoj dimenziji dobivena uz početne uvjete ekstrapolirane prilagodbama sa slike 4.1d (oznake $(x-1)^5$, x^5 i slično odnose se na korištenu ekstrapolaciju). Legenda 4.2e odnosi se na podatke dobivene programom u navedenim dimenzijama, ili u slučaju U' , dobivenih numeričkom integracijom tih podataka.



Slika 4.3: Prva i druga derivacija funkcije U u d_l^c usporedno. Radi preglednosti prikaz je sveden na rezultate sa slika 4.2b i 4.2c naznačene crnom iscrtkanom linijom.

5 Zaključak

U ovom radu osvrnuli smo se na kritična ponašanja u niksodimensionalnim sustavima dominiranim jakim fluktuacijama. Za ilustraciju problema smo se poslužili Isingovim modelom s poznatim egzaktnim rješenjem u donjoj kritičnoj dimenziji ispod koje sustav ne može postići kritičnost. Uporabom Hubbard-Stratonovich transformacija motivirali smo razmatranje problema preko teorije polja. Isingov model u dugovalnoj aproksimaciji odgovara ϕ^4 teoriji sa skalarnim poljem na koju se fokusiramo.

Taj problem može se tretirati formalizmom neperturbativne renormalizacijske grupe (NPRG) razvijenog za opis netrivialnih faznih prijelaza [3,36]. Jednostavnost modela i poznavanje rješenja pri donjoj kritičnoj dimenziji čine ga pogodnim za stjecanje uvida u rješenje NPRG metodom u blizini donje kritične dimenzije. S druge strane NPRG metoda je potpuno općenita te ju je moguće primjeniti na sustave čija egzaktna rješenja ne poznajemo, pa je stoga zaključivanje o ponašanju sustava blizu donje kritične dimenzije moguće poopćiti na druge probleme. Te metode nisu do sad široko primjenjivane za sustave u blizini donje kritične dimenzije. Jedan od temeljnih članaka koji se tiče te tematike je onaj H. Ballhausena, J. Bergesa i C. Wettericha [35]. U tom radu autori predviđaju divergenciju srednjeg polja M_0 za koje je efektivni potencijal U minimalan. Autori su do tog zaključka došli metodama renormalizacijske grupe uz korištenje theta regulatora, LPA' i razvoja prve derivacije U u ovisnosti o $\rho = \frac{M^2}{2}$ oko $\kappa = \frac{M_0^2}{2}$. Tvrdimo da pretpostavka da se U' može razviti, to jest pretpostavka analitičnosti, nije opravdana te da ona dovodi do zaključka o divergenciji M_0 . Ideja divergencije M_0 čini se intuitivnom u kontekstu $O(N > 2)$ modela u kojima prijelaz nestaje zbog Goldstonovih bozona [27], no nije fizikalno nužna. Na primjer, u Kosterlitz-Thouless prijelazu, koji se odnosi na granični $O(N = 2)$ slučaj pri $d = 2$, je polje M_0 konačno, iako postoji jedan Goldstonov mod. Ovdje smo našli nedivergentnu magnetizaciju M_0 uz konačnu susceptibilnost u slučaju u kojem se polje ne reskalira, što daje nestanak prijelaza koji očekujemo iz egzaktnog rješenja. Stoga divergencija M_0 nije fizikalno nužna za opis problema.

U promatranom $O(1)$ ili Isingovom modelu, koristeći istu aproksimaciju i regulator, no zadržavajući funkcionalnu ovisnost o M , dobivamo rezultate koji pokazuju pretpostavljenu neanalitičnost (divergenciju veličine U'' za konačno polje) i konačno polje M_0 , što daje kvalitativno nov matematički opis ponašanja Isingovog modela u

blizini donje kritične dimenzije. Prijelaz ovdje ne nestaje zbog Goldstonovih bozona, već zbog pojave domenskih sučelja - instantona. Korištena je dugovalna aproksimacija a nađeno je ponašanje uzrokovano lokaliziranom pojavom. Ovakav iznenađujuć rezultat nije bez presedana. U Kosterlitz-Thouless slučaju, proveden je NPRG opis kritičnog ponašanja bez izravnog pozivanja na specifična lokalizirana pobuđenja, to jest virove, te su nedavno nađene fiksne točke i esencijalno skaliranje [20]. To je dodatni argument u korist nastojanju proširenja ove metode na rješavanje sličnih problema, poput Isingovog modela s nasumičnim poljem (RFIM). U RFIM je problematika donje kritične dimenzije naročito značajna zbog aktualnih istraživanja koja ukazuju da bi ravnotežni i neravnotežni slučaj pripadali različitim klasama ekvivalencije [6, 7], a na što bi mogla ukazivati upravo među njima potencijalno različita d_l .

Istraživanje provedeno u ovom diplomskom radu ima logičan nastavak u nekoliko smjerova. Prije svega za mogućnosti poopćenja predstavljenog rješenja na druge probleme, nužno je razumjeti točan oblik divergencije funkcije $U''[M]$ u točki M_0 . Ova informacija bi mogla dovesti do eventualnog uvida koji dio jednadžbi toka je potrebno zadržati pri njihovom pojednostavljenju, a da i dalje ispravno opisuju kritično ponašanje u donjoj kritičnoj dimenziji. Također nas zanima promotriti ovaj problem u višoj razini aproksimacije, to jest koristeći drugi red derivacijskog razvoja. Ovo je logičan korak jer želimo ispitati koliko su dobiveni rezultati pouzdani.

Dodaci

Dodatak A Kritični eksponenti

Kritični eksponenti opisuju potencijску ovisnost fizikalnih veličina o vanjskom polju h i reduciranoj temperaturi $\tau = T/T_C - 1$ u kritičnim sustavima. Kritične eskponente α do δ i ν definiramo kao

$$\begin{aligned}\xi(\tau, h=0) &\propto |\tau|^{-\nu}, \\ c(\tau, h=0) &\propto |\tau|^{-\alpha}, \\ m(\tau, h=0) &\propto (-\tau)^\beta, \quad \tau < 0, \\ \chi(\tau, h=0) &\propto |\tau|^{-\gamma}, \\ m(\tau=0, h) &\propto |h|^{\frac{1}{\delta}} \operatorname{sgn}(h).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Fizikalne veličine za koje smo definirali eksponente su korelacijska duljina ξ , toplinski kapacitet c , parametar uređenja m i susceptibilnost χ . Hipoteza skaliranja [37] koja govori da je relevantan dio termodinamičkih potencijala u kritičnom području singularan i homogen u svojim argumentima (najčešće τ i h) rezultira relacijama među navedenim kritičnim eksponentima od kojih su samo dva nezavisna:

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + \gamma &= 2, \\ \alpha + \beta(1 + \delta) &= 2, \\ \beta + \gamma &= \beta\delta, \\ \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} &= \delta.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Dodatak B Hubbard-Stratonovich transformacija

Kako bismo proveli Hubbard-Stratonovich transformaciju [38] nad particijskom funkcijom Z , potrebno je riješiti sljedeći integral:

$$I_{HS} = \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\phi\mathbf{J}\phi + \beta\sigma\mathbf{J}\phi\right), \quad d\phi = \prod_{i=1}^N d\phi_i, \quad (\text{B.1})$$

gdje se integracija po ϕ_i vrši po cijeloj realnoj osi. Uveli smo vektore σ , ϕ i \mathbf{h} te matricu \mathbf{J} kao

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N), \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N), \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N); \\ \mathbf{J} &= \{J_{ij}\}, \quad J_{ij} = \begin{cases} J & i, j \text{ prvi susjedi,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Izrazi (B.2) su pomoćno sredstvo za jednostavniji zapis suma, poput $\sum_{i,j} \phi_i J_{ij} \phi_j = \phi\mathbf{J}\phi$. Dozvolili smo nehomogeno polje h_i koje se može razlikovati po čvorovima rešetke spinova, te je sad vezanje s poljem u Hamiltonijanu dano s $-\sum_i h_i \sigma_i = -\mathbf{h}\sigma$. Matrica \mathbf{J} je realna i simetrična (samo međudjelovanje je simetrično), te je stoga i dijagonalizabilna. Dijagonaliziramo ju provođenjem unitarne transformacije $\mathbf{J}' = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}$, tako da vrijedi $J'_{ij} \propto \delta_{ij}$, gdje je δ_{ij} Kroneckerov delta simbol. Analogno transformiramo polja, $\phi' = \mathbf{U}\phi$. Kako je transformacija unitarna njen je Jakobijan jediničan i ova zamjena može biti izravno upotrijebljena pri integraciji uz $D\phi \rightarrow D\phi'$. Dobivamo integral

$$I_{HS} = \int D\phi' \exp\left[-\frac{1}{2}\beta \sum_i J'_{ii} (\phi_i^2 - 2\sigma_i \phi_i)\right]. \quad (\text{B.3})$$

Izraz B.3 ključan je korak koji demonstrira korisnost ove transformacije, budući da su u njemu polja razvezana. Nadalje je potrebno eksponent podintegralne funkcije dopuniti do potpunog kvadrata, čime dobivamo N -tu potenciju Gaussovog integrala. Ukupno imamo

$$I_{HS} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}^N \exp\left(\frac{1}{2}\beta\sigma\mathbf{J}\sigma\right). \quad (\text{B.4})$$

Predfaktor eksponencijalne funkcije, proizlazi iz supstitucije $\phi'_i \rightarrow \sqrt{\beta J'_{ii}/2} (\phi'_i - \sigma'_i)$, osim $\sqrt{\pi}^N$ od integracije. Korišteno je da je produkt $\prod_{i=1}^N J'_{ii}$ upravo determinanta ove matrice koja ne ovisi o koordinatnoj reprezentaciji operatora [lijepše to sročiti, objasniti kakve su to matrice, ovo nije baš operator i to lijepše reci]. Sad je razvidna korist računa integrala (B.1) budući da dobivamo identitet

$$\exp\left(\frac{1}{2}\beta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\right) = \sqrt{\det\mathbf{J}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^N} \int d\boldsymbol{\phi} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\boldsymbol{\phi}\mathbf{J}\boldsymbol{\phi} + \beta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}\boldsymbol{\phi}\right). \quad (\text{B.5})$$

Ovaj identitet omogućuje zaobilaznje inače problematičnog računa u $\boldsymbol{\sigma}$ nelinearnog dijela particijske funkcije.

Hubbard-Stratonovich transformacija sastoji se od uvrštavanja ovog identiteta u izraz za particijsku funkciju Isingovog modela i općenito je korisna za razvezivanje međudjelovanja po parovima. Normalizacija particijske funkcije je proizvoljna budući da su od interesa izvedene veličine u kojima se ona krati u omjerima. Tako u narednim računima ispuštamo sve prefaktore u računu particijske funkcije. Kako su neki od njih funkcije temperature ili jačine međudjelovanja, potrebno je voditi računa o tome da se Z pri generiranju momenata derivira jedino po izvorima h_i . Korištenjem identiteta (B.5) za račun particijske funkcije dobivamo

$$Z = \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} \exp(-\beta H[\boldsymbol{\sigma}]) = \int d\boldsymbol{\phi} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\boldsymbol{\phi}\mathbf{J}\boldsymbol{\phi}\right) \sum_{i=1}^N \ln\{\cosh[\beta(\mathbf{h} + \boldsymbol{\phi}\mathbf{J})_i]\}. \quad (\text{B.6})$$

Ovdje uvodimo djelovanje $S[\boldsymbol{\phi}]$ preko izraza

$$Z = \int d\boldsymbol{\phi} \exp(-\beta S[\boldsymbol{\phi}]), \quad (\text{B.7})$$

koje nam omogućuje energijska razmatranja preko polja $\boldsymbol{\phi}$. Iako ovaj izraz još nije pretjerano uporaban, interesantan je zbog tumačenja da stupnjevi slobode $\boldsymbol{\sigma}$ osjete novo, fluktuirajuće polje $\mathbf{h} + \boldsymbol{\phi}\mathbf{J}$ s težinama $\exp(-\beta\boldsymbol{\phi}\mathbf{J}\boldsymbol{\phi}/2)$. Provedvši sumu po $\{\boldsymbol{\sigma}\}$, to jest prešavši na sumu po stupnjevima slobode i i uvrstivši $\sigma_i = \pm 1$, uz ispuštanje prefaktora 2^N za djelovanje se dobiva

$$S[\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\mathbf{J}\boldsymbol{\phi} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^N \ln\{\cosh[\beta(\mathbf{h} + \boldsymbol{\phi}\mathbf{J})_i]\}. \quad (\text{B.8})$$

Pri dobivanju izraza (B.8) nisu korištene aproksimacije. Izraz predstavlja egzaktnu transformaciju koja nam omogućava razmatranje djelovanja kao funkcije polja ϕ_i neovisnog o spinskim varijablama umjesto Hamiltonijana Isingovog modela (2.1).

Dodatak C Isingov model i ϕ^4 teorija

Postavljamo koordinate u d -dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^d m_{ij} \mathbf{a}_j$ koje predstavljaju položaj i -tog čvora u rešetki. Ovdje su \mathbf{a}_j vektori razmatrane hiperkubične rešetke u d dimenzija konstante $a = |\mathbf{a}_j|$, a m_{ij} cijeli brojevi. Uvodimo skalarnu funkciju $\phi(\mathbf{x})$ takvu da vrijedi $\phi_i = \phi(\mathbf{x}_i)$. Analogno uvodimo i funkciju $h(\mathbf{x})$. Izraz (B.8) još ne daje opipljiv uvid u problem. Kako bismo naslutili generalno ponašanje modela razmatramo dugovalnu granicu, to jest sporo varirajuće skalarno polje $\phi(\mathbf{x})$ kao po čvorovima sporo varirajuću funkciju, te ju kao takvu proširujemo na kontinuiranu prostornu varijablu \mathbf{x} . Pri tome provodimo i zamijenu $\sum_{i=1}^N \rightarrow \int d\mathbf{x}$, gdje se integral provodi po cijelom direktnom prostoru jer razmatramo termodinamičku granicu. U dugovalnoj aproksimaciji Fourierovom transformatu djelovanja $S[\phi]$ u izrazu za međudjelovanje $J(\mathbf{k})$ zadržavamo članove do (uključujući) reda $\mathcal{O}(k^2)$ gdje je $k = |\mathbf{k}|$.

Tek pri traženju oblika međudjelovanja zapravo koristimo vrstu rešetke. U ovom formalizmu za međudjelovanje imamo

$$J_{ij} \rightarrow J(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = J(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|), \quad (\text{C.1})$$

budući da ono u modelu (2.1) ovisi, osim o samoj mjeri jačine međudjelovanja J , o tome jesu li čvorovi susjedni ili ne. Svak čvor hiperkubične rešetke ima po dva susjeda na svakoj od d osi koja prolazi kroz njega u smjeru jednog od vektora \mathbf{a}_j , koji u narednom izrazu (C.2) označujemo s m . To nam omogućuje da zapišemo

$$J(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) = J \sum_{m=1}^d [\delta(x_{i,m} - x_{j,m} - a) + \delta(x_{i,m} - x_{j,m} + a)] \prod_{n \neq m} \delta(x_{i,n} - x_{j,n}). \quad (\text{C.2})$$

Ovdje je $x_{\alpha,\beta}$ β -komponenta prostornog vektora \mathbf{x}_α . Iz izraza (C.2) i integralne reprezentacije Dirackove δ -funkcije dobivamo Fourierov transformat međudjelovanja:

$$\begin{aligned}
J(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp[i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{k}] J(\mathbf{k}) = \\
&= 2J \sum_{m=1}^d \int \frac{dk_m}{2\pi} \exp[i(x_{i,m} - x_{j,m}) k_m] \cos(k_m a) \prod_{n \neq m} \int \frac{dk_n}{2\pi} \exp[i(x_{i,n} - x_{j,n}) k_n] = \\
&= 2J \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp[i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{k}] \left[\sum_{m=1}^d \cos(k_m a) \right] \\
&\implies J(\mathbf{k}) = 2J \sum_{m=1}^d \cos(k_m a).
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Uzevši u obzir dugovalnu aproksimaciju aproksimaciju imamo

$$J(\mathbf{k}) = 2J \sum_{m=1}^d \left[1 - \frac{1}{2} a^2 k_m^2 + \mathcal{O}(k_m^4) \right] \approx Jz \left[1 - \left(\frac{a}{\sqrt{z}} \right) k^2 \right], \tag{C.4}$$

gdje je $z = 2d$ koordinacijski broj čvorova. Zanima nas kritično ponašanje te stoga gledamo $h = 0$ slučaj. Koristimo razvoj $\ln[\cosh(x)] = x^2/2 - x^4/12 + \mathcal{O}(x^6)$ i rezultate perturbativne renormalizacijske grupe [26] koji nam govore da su operatori dobiveni korištenjem ovog razvoja u (B.8) dani $\mathcal{O}(x^6)$ članovima irelevantni, što ćemo koristiti u kasnijem računu. Razmatramo li kritični režim ili njegovu okolinu gdje irelevantni operatori ne doprinose opisu sutava, za djelovanje dobivamo

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \mathbf{J} \phi - \frac{1}{2} \beta \phi \mathbf{J}^2 \phi - \beta \mathbf{h} \mathbf{J} \phi + \frac{1}{12} \beta^3 \sum_{i=1}^N (\phi \mathbf{J})_i^4. \tag{C.5}$$

Nadalje provodimo zamjenu suma u izrazu (C.5). Vršimo Fourierovu transformaciju tako dobivenih podintegralnih konvolucija. Pri tome koristimo integralnu reprezentaciju δ -funkcije i realnost promatranih veličina (što daje $\phi(-\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k})$ i $J(-\mathbf{k}) = J(\mathbf{k})$).

Time dobivamo sljedeće identitete

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{k}} \phi^2(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbf{x}} \phi^2(\mathbf{x}), \\
\int_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) k^2 \phi(\mathbf{k}) &= - \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}), \\
\left[\prod_{i=1}^3 \int_{\mathbf{k}_i} \phi(\mathbf{k}_i) \right] \phi\left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{k}_j\right) &= \int_{\mathbf{x}} \phi^4(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{C.6}$$

uz pokrate

$$\int_{\mathbf{k}} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}, \quad \int_{\mathbf{x}} = \int d\mathbf{x}. \tag{C.7}$$

Korištenjem identiteta (C.6) vraćamo integraciju u direktni prostor i dobivamo kompaktniji oblik djelovanja

$$\begin{aligned}
\beta S[\phi] &= (\beta Jz) \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \left\{ \phi(\mathbf{x}) \left[(1 - \beta Jz) - \left(\frac{a}{\sqrt{z}}\right)^2 \nabla^2 \right] \phi(\mathbf{x}) \right\} + \\
&\quad - (\beta Jz) \int_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{3} (\beta Jz)^3 \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{4} \phi^4(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Uvodimo pokrate $r = \beta Jz(1 - \beta Jz)$ i $u = (\beta Jz)^3/3$. U blizini kritičnog režima predviđenog aproksimacijom srednjeg polja, to jest za $T \approx T_C^{MF}$ u djelovanju koristimo približnu vrijednost $\beta Jz \approx \beta_C^{MF} Jz = 1$. Uporaba rezultata perturbativne renormalizacijske grupe o irelevantnim operatorima već zahtijeva blizinu kritičnosti, te ovime ne namećemo nova ograničenja. Ova aproksimacija je neprikladna u parametru r jer bi u tom slučaju iščeznuo, a član koji množi je fizikalno relevantan. Tako uz $u \approx 1/3$ i $r \approx 1 - T_c/T \approx (T - T_c)/T_c$ dobivamo poklapanje s Ginzburg-Landauovim funkcionalom djelovanja ϕ^4 teorije. Derivacijom partijske funkcije po izvorima izražene preko Hamiltonijana kao funkcije spinskih varijabli (izraz (2.1)) ili ovako dobivenog djelovanja (izraz (C.8)) dobiva se fizikalno tumačenje polja, to jest veličina $\langle \phi \rangle$ konceptualno odgovara $\langle \sigma_i \rangle$, te $\phi(\mathbf{x})$ stoga također nazivamo parametrom uređenja.

Dodatak D Gaussova teorija i Ginzburgov kriterij

Gaussova teorija opisuje kritično ponašanje u Isingovom modelu za $d \geq d_u = 4$. U svrhu računa partijske funkcije u Gaussovoj teoriji pomoću Fourierovog transfor-

mata

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{q}} \phi(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}), \quad \int_{\mathbf{q}} = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}, \quad (\text{D.9})$$

razvezujemo modove u Hamiltonijanu (2.9):

$$\begin{aligned} H &= a_0 V + a_2 \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} \phi(\mathbf{k}_1) \phi(\mathbf{k}_2) \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{x}] + \\ &+ c \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{k}_1} \int_{\mathbf{k}_2} i\mathbf{k}_1 \phi(\mathbf{k}_1) i\mathbf{k}_2 \phi(\mathbf{k}_2) \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{x}] = \\ &= a_0 V + \int_{\mathbf{q}} (a_2 + cq^2) \phi^2(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Pri računu je korištena integralna reprezentacija Dirackove δ -funkcije,

$$(2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \int d\mathbf{x} \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{x}], \quad (\text{D.11})$$

te da iz realnosti polja slijedi $\phi(-\mathbf{q}) = \phi(\mathbf{q})$. Oznaka V predstavlja volumen sustava.

Uvrštavamo (D.10) u izraz za particijsku funkciju [napiši granice integrala]

$$\begin{aligned} Z &= \int d\phi(\mathbf{q}) \exp\{-\beta H[\phi(\mathbf{q})]\} = \\ &= \exp(-\beta a_0 V) \int d\phi(\mathbf{q}) \exp\left[-\beta \int_{\mathbf{q}} (a_2 + cq^2) \phi^2(\mathbf{q})\right] = \\ &= \exp(-\beta a_0 V) \prod_{\mathbf{q}} \int d\phi(\mathbf{q}) \exp[-\beta (a_2 + cq^2) \phi^2(\mathbf{q})] = \\ &= \exp(-\beta a_0 V) \prod_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta (a_2 + cq^2)}}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Sad smo u mogućnosti naći "two-point" korelacijsku funkciju $G(\mathbf{x})$. Računamo ju u momentnom prostoru

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}) &= \langle \phi(\mathbf{q})^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \int d\phi(\mathbf{q}) \phi^2(\mathbf{q}) \exp[-\beta (a_2 + cq^2) \phi^2(\mathbf{q})] \times \\ &\quad \times \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{q}} \int d\phi(\mathbf{k}) \exp[-\beta (a_2 + ck^2) \phi^2(\mathbf{k})] = \\ &= \frac{1}{2\beta (a_2 + cq^2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Za korelacijsku funkciju u direktnom prostoru inverznim Fourierovim transformatom

dobivamo

$$G(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|}{\xi}\right), \quad \xi = \sqrt{\frac{c}{a_2}} \propto |\tau|^{-1/2}. \quad (\text{D.14})$$

Nađen je $\nu = 1/2$ (uz kritični eksponent ν i reduciranu temperaturu τ definirane u dodatku A). Iz izraza za particijsku funkciju (D.12) izravno slijedi izaz za slobodnu energiju

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = a_0 V - \frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[\frac{\pi}{\beta (a_2 + cq^2)} \right]. \quad (\text{D.15})$$

Računamo i toplinski kapacitet

$$\begin{aligned} C^{Gauss} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{k_B}{2} \int_{\mathbf{q}} 1 + \frac{k_B T^2}{2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial T} \right)^2 \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{(a_2 + cq^2)^2} + \\ &\quad - k_B T \frac{\partial a_2}{\partial T} \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{a_2 + cq^2} = \\ &= \frac{k_B}{2(2\pi)^d} \xi^{4-d} \left[c^2 T^2 \left(\frac{\partial a_2}{\partial T} \right)^2 I_2 - 2cT \frac{\partial a_2}{\partial T} \xi^{-2} I_1 + \xi^{-4} I_0 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Koristili smo da $\partial a_2 / \partial T$ ne ovisi o temperaturi, budući da vrijedi $a_2 \propto T - T_C$. Uvedena je i pokrata

$$I_n = \int \prod_{i=1}^d dq'_i \frac{1}{\left(1 + \sum_{j=1}^d q'_j \right)^n}. \quad (\text{D.17})$$

Integrali I_n su konačni brojevi. U aproksimaciji srednjeg polja dobivamo za isti kapacitet pri $h = 0$

$$C^{MF} = \begin{cases} \Delta C^{MF} \equiv \frac{3}{2} N k_B, & T - T_C^{MF} \rightarrow 0^-; \\ 0, & T - T_C^{MF} > 0. \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

Korišten je razvoj izraza (2.5)

$$m \approx \beta z J m - \frac{1}{3} (\beta z J m)^3 \implies m^2 \approx 3 \left(\frac{T}{T_C^{MF}} \right)^3 \left(\frac{T_C^{MF} - T}{T} \right), \quad (\text{D.19})$$

koji je uvršten u izraz $C^{MF} = \partial E / \partial T = -(N J z \partial m^2 / \partial T) / 2$. S druge strane, u blizini

prijelaza ξ divergira ($\nu = 1/2$, (D.14)) te je jedini relevantan dio onaj uz najvišu potenciju korelacijske duljine, to jest $\propto \xi^{4-d}$. Stoga za omjer kapaciteta dobivenog iz Gaussove teorije i skoka u kapacitetu pri faznom prijelazu u aproksimaciji drednjeg polja dobivamo da u blizini faznog prijelaza o temperaturi ovisi kao

$$\frac{C^G}{\Delta C^{MF}} \propto \xi^{4-d} \propto \frac{1}{(T_C - T)^{\frac{4-d}{2}}}. \quad (\text{D.20})$$

Izraz (D.20) koristimo za Ginzburgov kriterij.

Dodatak E $\Gamma_k [M]$ u mikroskopskoj granici

Kombiniramo izraze (3.6) i (3.7) kako bismo zapisali

$$Z_k [B] = \exp (W_k [B]) = \exp \left(-\Gamma_k [M] + \int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} M_{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} \right) \quad (\text{E.21})$$

uz pokrate oblika $f(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}$. Izražavamo klizno efektivno djelovanje i uvrštavamo izraz (3.3) za Z_k uz regulator (3.2):

$$\begin{aligned} \exp (-\Gamma_k [M]) &= \exp \left(-\int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} M_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} R(\mathbf{x} + \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} \right) \times \\ &\quad \times \int D\phi \exp \left(-H[\phi] + \int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{x}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi_{\mathbf{y}} \right) = \\ &= \int D\phi \exp \left(-H[\phi] + \int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} (\phi_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{y}} - M_{\mathbf{x}} M_{\mathbf{y}}) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

$\Gamma_k [M]$ je funkcional srednjeg polja, stoga trebamo izraziti B_x preko ostalih veličina. Funkcionalnom derivacijom definicijskog izraza kliznog efektivnog djelovanja (3.7)

po srednjem polju M_z dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma_k[M_{\mathbf{x}}]}{\delta M_{\mathbf{z}}} + \frac{\delta W_k[B_{\mathbf{x}}]}{\delta M_{\mathbf{z}}} &= \frac{\delta\Gamma_k[M_{\mathbf{x}}]}{\delta M_{\mathbf{z}}} = \\
&= \int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \\
&= B_{\mathbf{z}} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{z} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{z}) M_{\mathbf{x}} = B_{\mathbf{z}} - \int_{\mathbf{x}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{z}) M_{\mathbf{x}}.
\end{aligned} \tag{E.23}$$

prvi korak računa (E.23) slijedi jer W_k nije funkcional srednjeg polja, a zadnji iz parnosti funkcije praga R_k . Tako smo izrazili magnetsko polje preko željenih veličina:

$$B_{\mathbf{x}} = \frac{\delta\Gamma_k[M_{\mathbf{y}}]}{\delta M_{\mathbf{x}}} + \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) M_{\mathbf{y}}. \tag{E.24}$$

uvrštavanjem magnetskog polja (E.24) u račun (E.22) dobiva se

$$\begin{aligned}
\exp(-\Gamma_k[M]) &= \int D\phi \exp\left(-H[\phi] + \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta\Gamma_k[M_{\mathbf{y}}]}{\delta M_{\mathbf{x}}} (\phi_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{x}}) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} (\phi_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{x}}) R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\phi_{\mathbf{y}} - M_{\mathbf{y}})\right),
\end{aligned} \tag{E.25}$$

gdje je korišteno

$$2 \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \phi_{\mathbf{x}} = \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \phi_{\mathbf{x}} + \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) M_{\mathbf{x}}. \tag{E.26}$$

Kako u mikroskopskoj granici od interesa f_k u potpunosti iščezava, slijedi $R_{k \rightarrow \lambda} \rightarrow +\infty$. Stoga vrijedi

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} (\phi_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{x}}) R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\phi_{\mathbf{y}} - M_{\mathbf{y}})\right) \stackrel{k \rightarrow \lambda}{\approx} \delta(\phi_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{x}}). \tag{E.27}$$

Uvrštavanjem (E.27) u izraz za klizno efektivno djelovanje (E.25) dobivamo

$$\exp(-\Gamma_k[M]) \stackrel{k \rightarrow \lambda}{=} \tag{E.28}$$

$$\stackrel{k \rightarrow \lambda}{=} \int D\phi \delta(\phi - M) \exp\left(-H[\phi] + \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta\Gamma_k[M_{\mathbf{y}}]}{\delta M_{\mathbf{x}}} (\phi_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{x}})\right) = \exp(-H[M]), \tag{E.29}$$

čime smo zadovoljili zahtjev (3.8).

Dodatak F Jednadžbe toka

U sljedećim izrazima radi jednostavnosti ne zapisujemo eksplicitno ovisnost o kliznoj skali k , osim u funkciji praga R_k , ni funkcionalnu ovisnost o poljima M i B . Iz izravno dobivene jednadžbe Polchinskog (3.9) raspisujemo Wetterichevu jednadžbu (3.11). Prvo deriviramo Legendreovu transformaciju (3.7) uz konstantno polje B i dobivamo

$$\begin{aligned} \partial_k|_B \Gamma + \partial_k|_B W = & \int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} \partial_k|_B M_{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} \partial_k R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} + \\ & - \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{x}} \partial_k|_B M_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

R_k ne ovisi ni o M ni o B pa je ovo puna derivacija po k . dalje pojednostavljujemo izraz (F.30) i izlučujemo željenu funkcionalnu derivaciju kliznog efektivnog djelovanja po magnetizaciji:

$$\begin{aligned} \partial_k|_M \Gamma & \stackrel{(3.14)}{=} \partial_k|_B \Gamma - \int_{\mathbf{x}} \partial_k|_B M_{\mathbf{x}} \frac{\delta \Gamma}{\delta M_{\mathbf{x}}} = \\ & \stackrel{(F.30)}{=} - \partial_k|_B W - \int_{\mathbf{x}} \partial_k|_B M_{\mathbf{x}} \frac{\delta \Gamma}{\delta M_{\mathbf{x}}} + \int_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}} \partial_k|_B M_{\mathbf{x}} + \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} \partial_k R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{x}} \partial_k|_B M_{\mathbf{y}} = \\ & \stackrel{(E.24)}{=} - \partial_k|_B W - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} \partial_k R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} = \\ & \stackrel{(3.9)}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} [\partial_k R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \left(\frac{\delta^2 W}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{y}}} + \frac{\delta W}{\delta B_{\mathbf{x}}} \frac{\delta W}{\delta B_{\mathbf{y}}} \right) + \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} M_{\mathbf{x}} \partial_k R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) M_{\mathbf{y}} = \\ & \stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} [\partial_k R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \frac{\delta^2 W}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{y}}}. \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

Gdje $\partial_k|_B \Gamma$ iščezava jer Γ nije funkcional polja B . Još je potrebno prikazati drugu derivaciju W preko Γ . U tu svrhu raspisujemo:

$$\frac{\delta}{\delta M_{\mathbf{z}}} \left(\frac{\delta W}{\delta B_{\mathbf{x}}} \right) = \frac{\delta M_{\mathbf{x}}}{\delta M_{\mathbf{z}}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (\text{F.32})$$

S druge strane raspisujemo derivaciju po M preko derivacija po B :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta M_{\mathbf{z}}} \frac{\delta W}{\delta B_{\mathbf{x}}} &= \int_{\mathbf{y}} \frac{\delta^2 W}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{y}}} \frac{\partial B_{\mathbf{y}}}{\delta M_{\mathbf{z}}} = \\
&\stackrel{(E.24)}{=} \int_{\mathbf{y}} \frac{\delta^2 W}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{y}}} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta M_{\mathbf{y}} \delta M_{\mathbf{z}}} + \int_{\boldsymbol{\sigma}} R_k(\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}) \frac{\delta M_{\boldsymbol{\sigma}}}{\delta M_{\mathbf{z}}} \right] = \\
&= \int_{\mathbf{y}} \frac{\delta^2 W}{\delta B_{\mathbf{x}} \delta B_{\mathbf{y}}} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta M_{\mathbf{y}} \delta M_{\mathbf{z}}} + R_k(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \right] \stackrel{(F.32)}{=} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}),
\end{aligned} \tag{F.33}$$

gdje je korišteno da R_k ne ovisi o M . Ovime smo dobili izraz (3.16). Sada je jasno da je druga derivacija W po B inverz izraza $\delta_{M_{\mathbf{y}}} \delta_{M_{\mathbf{x}}} \Gamma + R_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, što uvrštavamo u (F.31) i dobivamo Wetterichevu jednadžbu (3.11). Razmotrimo li izraze (3.11) i (3.35), jasno je da je za naći jednadžbu toka veličina U'' ili c (4.1) potrebno naći izraze za $\Gamma^{(n)}$ za $1 \leq n \leq 4$. Pri tome uvodimo pokrate:

$$\begin{aligned}
F' &= \frac{\delta F}{\delta M_{\mathbf{x}_1}}, \quad \nabla = \nabla_{\mathbf{x}_1}, \quad M = M_{\mathbf{x}_1}, \\
U &= U_k[M_{\mathbf{x}_1}], \quad Z = Z_k[M_{\mathbf{x}_1}], \quad \Gamma = \Gamma_k[M_{\mathbf{x}_1}].
\end{aligned} \tag{F.34}$$

Izravnim se računom dobiva

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{x}_1}^{(1)} &= U' - \frac{1}{2} Z' (\nabla M)^2 - Z \nabla^2 M, \\
\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}^{(2)} &= \left[U'' - \frac{1}{2} Z'' (\nabla M)^2 - Z' \nabla^2 M \right] \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \\
&\quad - Z' \nabla M \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - Z \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \\
\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3}^{(3)} &= \left[U''' - \frac{1}{2} Z''' (\nabla M)^2 - Z'' \nabla^2 M \right] \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) + \\
&\quad - Z'' \nabla M \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) + \\
&\quad - Z' \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) + \\
&\quad - Z' \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3), \\
\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4}^{(4)} &= \left[U^{iv} - \frac{1}{2} Z^{iv} (\nabla M)^2 - Z''' \nabla^2 M \right] \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4) + \\
&\quad - Z''' \nabla M \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(4)}) + \\
&\quad - Z'' \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(4)}) + \\
&\quad - Z'' \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(4)}),
\end{aligned} \tag{F.35}$$

gdje se σ odnosi na permutacije. Uvrštavanjem uniformne magnetizacije u izraze (F.35) imamo $\nabla M = \nabla^2 M = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{x}_1}^{(1)} &= U' \\
\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}^{(2)} &= U'' \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - Z \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \\
\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3}^{(3)} &= U''' \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) - Z' \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) + \\
&\quad - Z' \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3), \\
\Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4}^{(4)} &= U^{iv} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4) + \\
&\quad - Z'' \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) \nabla \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(4)}) + \\
&\quad - Z'' \sum_{\sigma} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(2)}) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(3)}) \nabla^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{\sigma(4)}).
\end{aligned} \tag{F.36}$$

Uniformna $M = konst.$ omogućuje provođenje Fourierovih transformata za (F.36), budući da su sad $U^{(n)}$ i $Z^{(n)}$ konstantni:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)} &= U' \\
\Gamma_{\mathbf{p}_1}^{(2)} &= U'' + \mathbf{p}_1^2 Z \\
\Gamma_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(3)} &= U''' + (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) Z' \\
\Gamma_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3}^{(4)} &= U^{iv} + (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3) Z''
\end{aligned} \tag{F.37}$$

U izrazu (F.37) zapažamo ovisnost o jednom momentu manje nego što je bilo prostornih varijabli u (F.35), što je posljedica zakona očuvanja količine gibanja koji slijede iz translacijske invarijantnosti problema za prostornu uniformnost magnetizacije. Ta invarijantnost rezultira i oblikom propagatora $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Inverz (3.12) se za $M = konst.$ u momentnom prostoru može naći algebarski, te imamo

$$G_{\mathbf{q}} = \frac{1}{R_{\mathbf{q}} + \Gamma_{\mathbf{q}}^{(2)}}. \tag{F.38}$$

Dobivene rezultate za derivacije Γ po srednjem polju uvrštavamo u naredne dimenzionalne jednadžbe toka za sustav s uniformnom magnetizacijom:

$$\partial_k \Gamma_{\mathbf{x}_1}^{(1)} = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{x}_2} \int_{\mathbf{x}_3} \Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3}^{(3)} G_{\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_2} \tag{F.39}$$

i

$$\begin{aligned}
\partial_k \Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}^{(2)} &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \left[\int_{\mathbf{x}_3} \int_{\mathbf{x}_4} \Gamma_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_3}^{(4)} G(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4) + \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbf{x}_3} \int_{\mathbf{x}_4} \int_{\mathbf{x}_5} \int_{\mathbf{x}_6} \Gamma_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_3}^{(3)} G(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_5) \Gamma_{\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_1}^{(3)} G(\mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_4) \right],
\end{aligned} \tag{F.40}$$

gdje je u (F.40) korišteno

$$\frac{\delta G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\delta M_{\mathbf{x}_3}} = - \int_{\mathbf{x}_4} \int_{\mathbf{x}_5} G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4) \Gamma_{\mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_3}^{(3)} G(\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_2). \tag{F.41}$$

Derivacije označene tildom definirane su u podpoglavlju 3.5.1 kao derivacijej koje djeluju samo na R ili r (3.18). Izraz (F.41) dobivamo funkcionalnom derivacijom

identiteta (3.16) po magnetizaciji.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbf{x}_3} G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \Gamma_{\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4}^{(3)} + \int_{\mathbf{x}_3} \frac{\delta G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)}{\delta M_{\mathbf{x}_4}} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta M_{\mathbf{x}_3} \delta M_{\mathbf{x}_2}} + R(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \right] = \\
&= \int_{\mathbf{x}_3} G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \Gamma_{\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4}^{(3)} + \int_{\mathbf{x}_3} \frac{\delta G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)}{\delta M_{\mathbf{x}_4}} G^{-1}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2).
\end{aligned} \tag{F.42}$$

U sljedećem koraku izraz (F.42) množimo s $G(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_5)$ i integriramo po \mathbf{x}_2 kako bismo iskoristili identitet $\int_{\mathbf{x}_2} G^{-1}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) G(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_5) = \delta(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_5)$, čime se izravno dobiva izraz (F.41). Uvrštavamo (F.37) u njihove Fourierove transformate:

$$\begin{aligned}
\partial_k \Gamma^{(1)} &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}(-\mathbf{q})}^{(3)} G_{\mathbf{q}} \\
\partial_k \Gamma_{\mathbf{p}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_k \int_{\mathbf{q}} \left[\Gamma_{\mathbf{p}(-\mathbf{p})\mathbf{q}}^{(4)} G_{\mathbf{q}} - \Gamma_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(3)} G_{(\mathbf{q}+\mathbf{p})} \Gamma_{(-\mathbf{p})(-\mathbf{q})}^{(3)} G_{\mathbf{q}} \right].
\end{aligned} \tag{F.43}$$

U sljedećem koraku prebacujemo jednadžbe u bezdimenzionalne veličine (3.18). Očekivano, potencije k -a su jednake u svim pribrojnicima te se krata. Nadalje ispuštamo tildu koja indicira bezdimenzionalnost. U računu s bezdimenzionalnim veličinama, kao što je rečeno, treba paziti na parcijalne derivacije, jer pri tome držimo konstantnim dimenzionalne veličine, te je potrebno koristiti zamjene poput

$$\begin{aligned}
\partial_s \Big|_q &= \partial_s \Big|_y - 2y \partial_y \Big|_s \\
\tilde{\partial}_s f(R_k(q^2)) &\rightarrow \tilde{\partial}_y f(r(y)) = - \left(\eta r + 2 \frac{dr}{dy} \right) \frac{df}{dr}.
\end{aligned} \tag{F.44}$$

Rotacijska invarijantnost omogućuje pojednostavljenje nekih integrala uz korištenje

$$\int_{\mathbf{q}} f(q^2) = 2v_d k^{d+d_f} \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{d}{2}-1} f(y). \tag{F.45}$$

Time dobivamo bezdimenzionalne jednadžbe toka uz $M = konst.$

$$\begin{aligned}
\partial_s U &= -dU + \frac{d-2+\eta}{2} MU' + 2v_d l(0, d), \\
\partial_s U' &= (\eta-2)U' + \frac{d-2+\eta}{2} MU'' - 2v_d [l(1, d)U''' + l(1, d+2)Z'], \\
\partial_s U'' &= (\eta-2)U'' + \frac{d-2+\eta}{2} MU''' + \\
&\quad - 2v_d [l(1, d)U^{iv} + l(1, d+2)Z'' - l(2, d)(U''')^2 + \\
&\quad - 2l(2, d+2)Z'U''' - l(2, d+4)(Z')^2],
\end{aligned} \tag{F.46}$$

gdje je tok U dobiven Fourierovim transformatom iz (3.11) i (3.35). Eksplicitni izrazi za funkcije l i m u ovom slučaju glase

$$\begin{aligned}
l(n \geq 0, d) &= -\frac{1}{2}(n + \delta_{n0}) \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{d}{2}} \frac{\eta r + 2y \frac{dr}{dy}}{[y(r+z) + U'']^{n+1}}, \\
m(n > 0, d) &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{d}{2}} \frac{Z + r + y \frac{dr}{dy}}{[y(r+z) + U'']^n} \times \\
&\quad \times \left\{ ny \frac{(Z + r + y \frac{dr}{dy})(\eta r + 2y \frac{dr}{dy})}{y(r+z) + U''} + \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[\eta r + y(\eta + 4) \frac{dr}{dy} + 2y^2 \frac{d^2 r}{d^2 y} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{F.47}$$

Nakon uvdenja theta regulatora (3.37) i dalje nije moguće analitički provesti integrale funkcija l i m , no moguće ih je prikazati preko nepotpunih beta funkcija $B(\alpha; x, y)$:

$$\begin{aligned}
l(n \geq 0, d) &= \frac{2}{d}(n + \delta_{n0}) \left[\eta I\left(n, \frac{d}{2}\right) - (\eta-2) I\left(n+1, \frac{d}{2}-1\right) \right], \\
m(n > 0, d) &= d I\left(n, \frac{d}{2}-3\right) + (d+2)(Z-1) I\left(n, \frac{d}{2}-2\right) + \\
&\quad - 4(Z-1) I\left(n, \frac{d}{2}-1\right) - \eta(Z-1) I\left(n, \frac{d}{2}\right) + \\
&\quad - I\left(n+1, \frac{d}{2}-2\right) - 2n(Z-1)^2 I\left(n+1, \frac{d}{2}-1\right) + \\
&\quad - \frac{1}{2} I\left(n+1, \frac{d}{2}\right) - \frac{1}{2} n \eta (Z-1)^2 I\left(n+1, \frac{d}{2}+1\right).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Faktori I su uvedeni kao pokrata:

$$I(a, b) = \int_0^1 dy y^b G^a(y) = (1 + U'')^{-a} \left(-\frac{1 + U''}{Z - 1} \right)^{b+1} B \left(-\frac{1 + U''}{Z - 1}; b + 1, -a + 1 \right),$$
$$B(\alpha; x, y) = \int_0^\alpha dt t^{x-1} (1 - t)^{y-1}.$$

(5.49)

Bibliography

- [1] Pawłowski, J. M.; Reichert, M.; Wetterich, C.; Yamada, M. Higgs scalar potential in asymptotically safe quantum gravity.// Phys. Rev. D 99, 086010 (2019)
- [2] Yakhot, V.; Orszag, S. A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory.//J Sci Comput (1986) 1: 3.
- [3] Stanley, H. E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford, 1971.
- [4] Goldenfeld, N. Lectures On Phase Transitions And The Renormalization Group. 1st ed., Addison-Wesley, 1992.
- [5] Cardy, J. Scaling and Renormalization in Statistical Physics. 1st ed., Cambridge University Press, 1996.
- [6] Balog, I.; Tarjus, G.; Tissier M. Criticality of the random field Ising model in and out of equilibrium: A nonperturbative functional renormalization group description.// Phys. Rev. B 97, 094204 (2018)
- [7] Spasojević, Đ.; Janičević, S.; Knežević, M. Numerical Evidence for Critical Behavior of the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model// Phys. Rev. Lett. 106, 175701 (2011)
- [8] Ising, E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Z. Physik (1925) 31: 253.
- [9] Ikeda, H.; Hirakawa, K. Neutron scattering study of two-dimensional Ising nature of K_2CoF_4 .// Solid State Commun. 14, 529 (1974)
- [10] Kac, M.; Thompson C. J. On the mathematical mechanism of phase transition.// Proc Natl Acad Sci U S A. 1966 Apr; 55(4): 676–683.
- [11] Onsager, L. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition.// Phys. Rev. 65, 117 (1944)
- [12] Kleinert, H.; Schulte-Frohlinde, V. Critical Properties of ϕ^4 -Theories.// World Scientific, Singapore, 2001.
- [13] Ma, S-K. Modern Theory of Critical Phenomena. Westview, 2000.

- [14] El-Showk, S.; Paulos, M. F.; Poland, D.; Rychkov, S.; Simmons-Duffin, D.; Vichi, A. Solving the 3D Ising model with the conformal bootstrap.// Phys. Rev. D 86, 025022 (2012)
- [15] El-Showk, S.; Paulos, M. F.; Poland, D.; Rychkov, S.; Simmons-Duffin, D.; Vichi, A. Solving the 3d Ising Model with the Conformal Bootstrap II. *c*-Minimization and Precise Critical Exponents.// J Stat Phys (2014) 157: 869.(2014)
- [16] Delamotte, B.; Tissier, M.; Wschebor, N. Scale invariance implies conformal invariance for the three-dimensional Ising model.// Phys. Rev. E 93, 012144 (2016)
- [17] Rulquin, C.; Urbani, P.; Biroli, G.; Tarjus, G.; Tarzia M. Nonperturbative fluctuations and metastability in a simple model: from observables to microscopic theory and back.// Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Vol. 2016, (2016)
- [18] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Statistical Physics. 3rd ed., part 1, Butterworth Heinemann, Oxford, 1980.
- [19] Plischke, M.; Bergersen, B. Equilibrium Statistical Physics. 3rd ed., World Scientific Publishing, Singapore, 2006.
- [20] Jakubczyk, P.; Dupuis, N.; Delamotte B. Reexamination of the nonperturbative renormalization-group approach to the Kosterlitz-Thouless transition.// Phys. Rev. E 90, 062105 (2014)
- [21] Raju, A.; Clement, C. B.; Hayden, L. X.; Kent-Dobias, J. P.; Liarte, D. B.; Rocklin, Z.; Sethna, J. P. Normal Form for Renormalization Groups.// Phys. Rev. X 9, 021014 (2019)
- [22] Berges, J.; Tetradis, N.; Wetterich C. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics.// Phys.Rept.363:223-386,2002
- [23] Delamotte, B. An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group.// Schwenk A., Polonyi J. (eds) Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems. Lecture Notes in Physics, vol 852. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.

- [24] Codello, A.; D’Odorico G. $O(N)$ -universality classes and the Mermin-Wagner theorem.// Phys.Rev.Lett. 110 (2013) 141601
- [25] Morris, T. R. The derivative expansion of the renormalization group.// Nucl.Phys.Proc.Suppl. 42 (1995) 811-814.
- [26] Cheung, A. Phase Transitions and Collective Phenomena, lecture notes, 2011.
- [27] Zinn-Justin, J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. 4th ed., Clarendon Press, 2002.
- [28] Tarjus, G.; Balog, I.; Tissier, M. Critical scaling in random-field systems: 2 or 3 independent exponents?// 2013 EPL 103 61001
- [29] Wiese, K. J.; Le Doussal, P. Functional Renormalization for Disordered Systems, Basic Recipes and Gourmet Dishes// Markov Processes Relat. Fields 13 (2007) 777-818
- [30] Aoki, K-I.; Morikawa, K.; Souma, W.; Sumi, J-I.; Terao, H. Rapidly Converging Truncation Scheme of the Exact Renormalization Group.// Progress of Theoretical Physics, Vol. 99, 3(1998), str. 451–466.
- [31] Peláez, M.; Wschebor N. Ordered phase of the $O(N)$ model within the nonperturbative renormalization group.// Phys. Rev. E 94, 042136 (2016)
- [32] Codello, A.; Defenu, N.; D’Odorico, G. Critical exponents of $O(N)$ models in fractional dimensions.// Physical Review D. Vol. 91, 105003 (2015)
- [33] Borchardt, J.; Knorr, B. Solving functional flow equations with pseudospectral methods.// Physical Review D. Vol 94, 025027 (2016).
- [34] Gersdorff, G. v.; Wetterich C. Nonperturbative renormalization flow and essential scaling for the Kosterlitz-Thouless transition.// Phys.Rev. B 64 (2001) 054513
- [35] Ballhausen, H.; Berges, J.; Wetterich, C. Critical Phenomena in Continuous Dimension.// Phys.Lett. B582 (2004) 144-150
- [36] Pfeuty, P.; Toulouse, G. Introduction to the renormalization group and to critical phenomena. 1st ed., Wiley, Cambridge, 1977.

- [37] Barber, M. N. Finite-size Scaling. // Phase Transitions and Critical phenomena. Vol. 8, str. 145., Academic press, 1983.
- [38] Hubbard, J. Calculation of Partition Functions.// Phys. Rev. Lett. 3, 77 (1959)