Funkcije izvodnice u kombinatorici

Režak, Monika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Monika Režak

FUNKCIJE IZVODNICE U KOMBINATORICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Boris Širola

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U matematici, ali i u drugim znanostima ili djelatnostima, razni se procesi ili pojave mogu opisati nizovima brojeva. Ti su nizovi zadani nekim specifičnim uvjetima, kao što su naprimjer rekurzivne relacije. Onda se raznim, uglavnom kombinatornim, metodama nastoje računati pojedini članovi promatranog niza, pri čemu je vrlo pogodno ako se može pronaći neka konkretna formula koja eksplicite daje opći član toga niza. Jedna od vrlo uspješnih metoda u kombinatorici je preko tzv. funkcija izvodnica. U ovom diplomskom radu bavimo se funkcijama izvodnicama koje su dobar alat koji nam pomaže odrediti eksplicitnu formulu za opći član niza. Radi lakšeg razumjevanja pogledajmo ovdje jedan konkretan primjer. Recimo da promatramo neku koloniju bakterija, i da je na početku promatranja ona imala N_0 jedinki. Promatrajmo stanje te kolonije u vremenu tako da mjerimo brojnost kolonije u konkretnom trenutku, s tim da je nakon jednog sata bilo N_1 jedinki u koloniji. Ta se vrsta bakterija razmnožava na način da ih u nekom konkretnom n-tom satu promatranja ima dvostruko više nego ih je bilo prije dva sata i još toliko koliko ih je bilo prije sat vremena. Zanima nas koliko će u toj koloniji biti bakterija nakon $m \in \mathbb{N}$ sati; i posebno, isto pitanje uz uvjet da je $N_1 = 2N_0$. Danu se zadaću može prikazati nizom brojeva $(a_n)_{\mathbb{N}}$ koji je zadan rekurzivno s

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad n \geq 0;$$

s tim da je, kako smo rekli, $a_0 = N_0$ i $a_1 = N_1$. Ovdje je ideja pokušati pronaći formalni red potencija

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

koji bi nam omogućio lakše i eksplicitno računanje brojeva a_n. Takvi se redovi potencija zovu *funkcije izvodnice*, i predmet su proučavanja ovog rada. Za konkretni primjer s kolonijom bakterija, metodama koje razvijamo kasnije, može se uz malo posla pokazati da je tražena funkcija izvodnica oblika

$$A(x) = \frac{1}{3}(N_0 + (N_1 - N_0)x)(2 + 1 + (2^2 - 1)x + (2^3 + 1)x^2 + (2^4 - 1)x^3 + \dots).$$

A onda se odavde, računanjem koeficijenta koji stoji na desnoj strani uz potenciju x^n, lako dobiva eksplicitan izraz za n-ti član traženog niza:

$$a_n = \frac{1}{3}((N_0 + N_1)2^n + (N_1 - 2N_0)(-1)^{n-1});$$

i posebno uz uvjet $N_1 = 2N_0$ imamo $a_n = N_0 2^n$. (Vezano uz ovaj primjer primjetimo kako smo za specijalan slučaj $N_1 = 2N_0$ mogli lako doći do rješenja jednostavnom matematičkom indukcijom iz gornjeg rekurzivnog uvjeta za niz (a_n). Ali, ako posljednji uvjet ne vrijedi, nije lako naslutiti da je opći član niza a_n dan gornjim izrazom; tako da nam onda metoda dokaza matematičkom indukcijom nije od neke pomoći.)

Ovaj je rad podijeljen u tri poglavlja. Počinjemo s prvim kratkim, i pripremnim poglavljem u kojem ćemo navesti neke definicije i teoreme koje ćemo primjenjivati proučavajući funkcije izvodnice. Drugo je poglavlje centralno poglavlje u ovom radu. U njemu se bavimo funkcijama izvodnicama, i to dvjema glavnim vrstama: običnim i eksponencijalnim funkcijama izvodnicama. U prvom odjeljku definiramo pojam obične funkcije izvodnice. Tu i objašnjavamo postupak pretvaranja rekurzivne formule u eksplicitnu formulu, što nam iz funkcije izvodnice daje eksplicitan član niza koji promatramo. Sve to ilustriramo na nizu primjera. U drugom odjeljku proučavamo produkt funkcija izvodnica, i posebno dokazujemo tzv. *Produktnu formulu* (Teorem 2.2.3). U trećem se odjeljku bavimo komponiranjem funkcija izvodnica. Tu prezentiranu materiju detaljno objašnjavamo, i ilustriramo primjerima. Kao centralni rezultat dokazujemo tzv. *Formulu kompozicije* (Teorem 2.3.5). Četvrti je odjeljak rezerviran za eksponencijalne funkcije izvodnice. To je posebna vrsta funkcija izvodnica koju koristimo kada nam članovi niza koje promatramo eksponecijalno rastu. Konačno, u petom odjeljku proučavamo produkte eksponecijalnih funkcija izvodnica. Tu su pravila i rezultati koje dokazujemo zapravo slični onima koji vrijede za obične funkcije izvodnice. Kao posebno zanimljiv konkretan rezultat ovog odjeljka spomenimo Teorem 2.5.6, koji daje rekurzivnu formulu za računanje tzv. Bellovih brojeva. Posljednji šest odjeljak daje neke rezultate o komponiranju eksponencijalnih funkcija izvodnica; to su Teorem 2.6.1 koji daje tzv. *Eksponencijalnu formulu*, i Teorem 2.6.4 koji daje tzv. *Formulu kompozicije za eksponencijelne funkcije izvodnice*. U trećem poglavlju dajemo neke primjene rezultata o funkcijama izvodnicama u teoriji brojeva. U prvom odjeljku proučavamo particije prirodnih brojeva, i određujemo brojeve particija broja $n \in \mathbb{N}$ uz neke dane uvjete. U drugom se odjeljku bavimo tzv. Bernoullijevim brojevima, koji imaju važnu primjenu i u kombinatorici i u teoriji brojeva. Kao glavni rezultat ovdje imamo konstrukciju funkcije izvodnice za Bernoullijeve brojeve. Osim toga dajemo i još neke važne činjenice o njima. Pri izradi ovog diplomskog rada je bila korištena knjiga [1] kao glavna literatura. U ostalim knjigama, popisanim na kraju ovog rada, se može naći još rezultata o funkcijama izvodnicama.

Ovaj diplomski rad je napravljen u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 -

Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Poglavlje 1

Pripremno poglavlje

1.1 Redovi potencija i Taylorovi redovi

U ovom odjeljku ponovit ćemo neke poznate stvari o (kompleksnim) redovima potencija, i posebno Taylorovim redovima, koje ćemo kasnije koristiti u drugom poglavlju. Ali prije toga podsjetimo se na neke osnovne pojmove iz analize, koji će nam za to trebati. Svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zove se **niz** kompleksnih brojeva. Vrijednosti $a(n) = a_n$ zovu se **članovi** niza, pri čemu se i sam niz označava s (a_n). Kažemo da je broj $\alpha \in \mathbb{C}$ **limes** niza (a_n) ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da je } |a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

I tada pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, te govorimo da niz (a_n) **konvergira** prema α. Općenitije, kažemo da je broj $\gamma \in \mathbb{C}$ **gomilište** niza (a_n) ako i samo ako $\forall \varepsilon > 0$ otvorena okolina $K(\gamma, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \gamma| < \varepsilon\}$ sadrži beskonačno mnogo članova niza. Primijetimo dobro poznatu činjenicu kako niz ima jedno gomilište ako i samo ako je on konvergentan; i, jasno, onda konvergira upravo prema tom gomilištu. Drugim riječima, u tom su slučaju limes i gomilište jedan te isti broj. Posebno, ako je (a_n) niz u skupu realnih brojeva, onda definiramo **limes superior** niza (a_n) kao supremum skupa svih gomilišta toga niza. Dakle, ako s $\Gamma = \Gamma(a)$ označimo skup svih gomilišta, onda je limes superior

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup(\Gamma).$$

Jasno, sasvim analogno definiran je i *limes inferior* niza realnih brojeva. Sljedeća jednostavna lema trebat će nam u trećem poglavlju prilikom dokaza jedne činjenice o Bernoullijevim brojevima.

Lema 1.1.1.

(i) Neka je dan niz realnih brojeva (a_n) *koji ima kao limes superior broj* $s \in \mathbb{R}$*. Tada za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji beskonačno mnogo članova niza* a_n *takvih da je* $a_n > s - \varepsilon$*.*

(ii) Posebno, pretpostavimo da je niz (a_n) *u skupu nenegativnih realnih brojeva* $[0, \infty)$*, te da je limes superior toga niza dan kao broj* $1/s$ *za neki* $s \in (0, \infty)$*. Tada za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji beskonačno mnogo članova niza* a_n *takvih da je* $a_n > 1/(s + \varepsilon)$*.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $s \in \mathbb{R}$ limes superior niza (a_n), i neka je $\varepsilon > 0$ zadan. Po definiciji supremuma, za svaki $\delta > 0$ u skupu $(s-\delta, s]$ postoji barem jedno gomilište γ niza (a_n). Posebno ako stavimo $\delta = \varepsilon/2$ dobivamo da u poluotvorenom intervalu $(s - \varepsilon/2, s]$, postoji barem jedno gomilište γ. Sada, po definiciji gomilišta niza, posebno u otvorenom intervalu $(\gamma-\varepsilon/2, \gamma+\varepsilon/2)$ ima beskonačno mnogo članova niza (a_n). Tojest, postoji podniz (a_{n_k}), tako da za $b_k := a_{n_k}$ imamo $b_k > \gamma - \varepsilon/2$. No, kako je $\gamma > s - \varepsilon/2$, zaključujemo da je

$$b_k + \frac{\varepsilon}{2} > \gamma > s - \frac{\varepsilon}{2} \implies b_k > s - \varepsilon,$$

što smo i trebali pokazati.
(ii) Označimo $s' := 1/s$; tj., imamo $\limsup_{n\to\infty} a_n = s'$. I neka je $\varepsilon > 0$ zadan proizvoljno, pri čemu možemo još pretpostaviti da je $\varepsilon < 1$. Ako nađemo neki $\varepsilon' > 0$ takav da je $s' - \varepsilon' > 1(s + \varepsilon)$, onda po tvrdnji (i) (kada s i ε zamijenimo s s' i ε') dobivamo da postoji beskonačno mnogo članova niza (a_n) takvih da je $a_n > s' - \varepsilon'$, a onda i $a_n > 1/(s + \varepsilon)$; što smo i tvrdili. Ali imamo

$$s' - \varepsilon' > \frac{1}{s+\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{s(s+\varepsilon)} > \varepsilon',$$

iz čega zbog nejednakosti $s(s+\varepsilon) < s(s+1)$ zaključujemo da je svaki $0 < \varepsilon' < \varepsilon/(s(s+1))$ dobar. Tako je tvrdnja dokazana. □

Sjetimo se sada pojma (kompleksnih) redova potencija. Više detalja, kao i dokaze rezultata koji su navedeni, može se naći naprimjer u [3, I.16]. Formalni izraz oblika

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots , \tag{1.1}$$

gdje su $z_0 \in \mathbb{C}$ i koeficijenti $a_i \in \mathbb{C}$ neki fiksirani brojevi, zove se **red potencija**. Sljedeća je dobro poznata propozicija prva korisna informacija o redovima potencija.

Propozicija 1.1.2. *Pretpostavimo da je* $z_0 \neq w_0 \in \mathbb{C}$ *neki broj takav da red potencija* (1.1) *konvergira; tj.,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w_0 - z_0)^n \in \mathbb{C}$*. Tada za svaki* $w \in \mathbb{C}$*, takav da je* $|w - z_0| < |w_0 - z_0|$*,* *red* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$ *konvergira. Drugim riječima, danim je redom potencija definirana funkcija*

$$f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad f(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n; \tag{1.2}$$

gdje smo stavili $r := |w_0 - z_0|$*, i onda* $K(z_0, r) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| < r\}$*, otvoreni krug u* $\mathbb{C}$ *oko točke* z_0 *radijusa* r*. Kao posljedicu imamo da je prirodna domena reda potencija* (1.1) *ili samo točka* $\{z_0\}$*, ili čitav skup* $\mathbb{C}$*, ili pak otvoreni krug* $K(z_0, \rho)$ *za neki realan broj* $\rho > 0$*. Broj* ρ *zove se* ***radijus konvergencije*** *reda potencija* (1.1)*, a otvoreni krug* $K(z_0, \rho)$ *zove se* ***krug konvergencije****.*

Sljedeći osnovni, i dobro poznat, rezultat govori kako izračunati radijus konvergencije reda potencija iz vrijednosti njegovih koeficijenata.

Teorem 1.1.3. (Cauchy-Hadamardova formula)
Radijus konvergencije ρ *reda potencija* (1.1)*, računa se kao*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Za red potencija (1.1) dobivamo funkciju definiranu na pripadnom krugu konvergencije; analogno kako je definirana funkcija f u (1.2). Sljedeća propozicija daje važnu informaciju o tako dobivenoj funkciji.

Propozicija 1.1.4. *Ako red potencija* (1.1) *ima radijus konvergencije* ρ*, onda je funkcija*

$$f : K(z_0, \rho) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

holomorfna, i njezina je derivacija

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1};$$

tj., red potencija deriviramo "član po član".

Gore smo definirali red potencija, i vidjeli da on definira holomorfnu funkciju na svom krugu konvergencije. Sljedeći osnovni teorem govori o obratnom postupku; kako danu holomorfnu funkciju prikazati redom potencija.

Teorem 1.1.5. (Taylorov teorem)
Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ *neprazan otvoren skup,* ∂U *njegov rub, i neka je funkcija* $f : U \to \mathbb{C}$

holomorfna. Za neku točku $z_0 \in U$ definirajmo broj d kao udaljenost od točke z_0 do ruba ∂U. Tada postoji red potencija, tzv. ***Taylorov red****,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

koji konvergira prema $f(z)$, za svaki $z \in K(z_0, d)$; tj., $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Poglavlje 2

Obične i eksponencijalne funkcije izvodnice

2.1 Obične funkcije izvodnice

Čovjek je oduvijek mjerio neke veličine u raznim prirodnim pojavama, ili drugim procesima koji su se događali u njegovoj okolini. Proučavajući iste uočio je da se neka pojavljivanja, po određenom principu, povećavaju ili smanjuju, odnosno zadovoljavaju određene uvjete. Jedan od načina kojim se mogu tretirati, i kontrolirati, ta pojavljivanja je preko matematičkog pojma niza brojeva. Nizovi su često zadani preko rekurzivnih relacija. Da bismo odredili neki konkretni član niza i izbacili nepotrebna računanja, potrebno je izraziti eksplicitnu formulu za opći član niza. Ponekad do toga dolazimo ispisivanjem prvih nekoliko članova niza, nakon čega naslutimo kako bi mogao izgledati opći član. A onda tu svoju slutnju nastojimo i dokazati, vrlo često metodom matematičke indukcije. Pored spomenutog, korisno je znati i neke druge načine za određivanje eksplicitnih formula za opće članove niza.
U ovom poglavlju bavimo se tzv. funkcijama izvodnicama, preko kojih se u mnogo situacija elegantno dolazi do traženog rješenja. Na početku pogledajmo jedan motivacijski primjer.

Primjer 2.1.1. *U jednom jezeru je na početku godine bilo k žaba. Tijekom svake godine broj žaba se poveća ℓ puta. A na početku svake iduće godine se m žaba iz jezera preseli u neka druga jezera. Ovdje pretpostavimo da su brojevi k, ℓ i m takvi da je $(\ell - 1)k > m$. Koliko će u tom jezeru biti žaba nakon N godina?*

Rješenje. Kod ovakvih zadataka nije teško odrediti rekurzivnu formulu koja određuje niz $(a_n)_{n\geq 0}$, pri čemu smo stavili da je $a_0 = k$ broj žaba na početku, i da je a_n broj žaba u jezeru nakon $n \geq 1$ godina. Dakle, iz uvjeta primjera imamo da je

$$a_0 = k, \qquad a_{n+1} = \ell a_n - m, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Dobivenom formulom možemo, korak po korak, izračunati broj žaba u jezeru na početku bilo koje godine. Ali uočimo manjkavost ovakvog računa. Ako bi nas naprimjer zanimao broj žaba u jezeru nakon 100 godina, morali bismo izračunati broj žaba za svaku od prethodnih 99 godina; odnosno vrijednosti prvih 99 članova niza, koje nas možda uopće ne zanimaju. Da bismo izbjegli nepotreban račun, želimo naći eksplicitnu formulu za a_n. Dakle, formulu koja neće računati član a_n rekurzivno preko a_{n-1}, nego će davati a_n eksplicite kao funkciju od n.
Promatrajući rekurzivno zadanu jednadžbu (2.1), s početnim uvjetom, uočavamo da zapravo imamo sustav od beskonačno mnogo jednadžbi koje nam računaju vrijednosti članova niza $(a_n)_{n\geq 0}$. Kako bismo obuhvatili sve informacije sadržane u tih beskonačno mnogo jednadžbi, i ujedinili ih u jednu jednadžbu, koristimo se pojmom funkcije izvodnice. Zato sada dajemo sljedeću definiciju.

Definicija 2.1.2. *Neka je $(f_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva. Formalni red potencija $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ zove se **obična funkcija izvodnica** niza $(f_n)_{n\geq 0}$.*

Napomena 2.1.3. *Primijetimo ovdje kako smo mogli promatrati i niz $(f_n)_{n\geq 0}$ kompleksnih brojeva, ili pak niz brojeva u bilo kojem drugom polju $\mathbb{F}$.*

S obzirom da ćemo u daljnjem koristiti samo obične funkcije izvodnice, koristit ćemo se kraćim terminom *funkcija izvodnica*.
U ovom primjeru definirat ćemo funkciju izvodnicu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

U nastavku ćemo spretno koristiti jednadžbu danu u (2.1) kako bismo dobili eksplicitan oblik za $G(x)$. U tu svrhu ispišimo prvih nekoliko jednadžbi, za $n \in \mathbb{N}$, te n-tu jednadžbu pomnožimo potencijom x^n. Dakle, imamo ovako:

$$\begin{aligned} a_1 &= \ell a_0 - m \ \ / \cdot x \\ a_2 &= \ell a_1 - m \ \ / \cdot x^2 \\ a_3 &= \ell a_2 - m \ \ / \cdot x^3 \\ &\cdots \qquad \cdots \end{aligned}$$

Sada, formalnim zbrajanjem svih tih jednadžbi dobivamo jednakost

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \ell \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - m \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

Na lijevoj strani gornje jednakosti imamo izraz koji je očito jednak $G(x) - a_0$. Nadalje, prvi sumand na desnoj strani jednak je $\ell x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ell x G(x)$. Za drugi sumand koristimo dobro poznati izraz za sumu geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$; i onda je drugi sumand očito jednak $mx/(1-x)$. Kad sve rečeno uzmemo u obzir, dobivamo da je

$$G(x) - a_0 = \ell x G(x) - m\frac{x}{1-x}.$$

Iz gornje se jednakosti lako izluči $G(x)$, tako da dobivamo

$$G(x) = \frac{k}{1-\ell x} - m\frac{x}{(1-x)(1-\ell x)}. \tag{2.2}$$

Nakon što smo pronašli eksplicitnu formulu za $G(x)$, određujemo eksplicitnu formulu za a_n. Uočimo da jednakost (2.2) sadržava redove potencija. Znamo da su dva reda potencija jednaka ako su im jednaki svi koeficijenti uz odgovarajuće potencije. S lijeve strane jednakosti se, po definiciji od $G(x)$, uz potenciju x^n nalazi koeficijent a_n. Kako su te dvije strane jednake, i na desnoj strani jednakosti se uz potenciju x^n nalazi koeficijent a_n. On će biti prikazan kao suma jer s desne strane jednakosti imamo dva izraza.
Razlučimo te izraze. Iz prvog izraza je lako odrediti koeficijent uz potenciju x^n.

$$\frac{k}{1-\ell x} = k\sum_{n=0}^{\infty}(\ell x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} k \cdot \ell^n \cdot x^n.$$

Dakle, koeficijent uz potenciju x^n u prvom izrazu je $k \cdot \ell^n$.
Drugi izraz je malo kompliciraniji.

$$\frac{mx}{(1-x)(1-\ell x)} = mx \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \ell^n x^n\right)$$

Uočimo da je jedan od faktora mx. Iz te činjenice odmah znamo da je koeficijent uz potenciju x^0 jednak nuli, te da bismo odredili koeficijent uz potenciju x^n s desne strane, moramo odrediti koeficijent uz potenciju x^{n-1} koju dobijemo u produktu $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \ell^n x^n)$.
Postoje dva načina na koje možemo odrediti koeficijent uz potenciju x^n. Prvi način je standardan. U njemu se primjenjuje rastav racionalnih funkcija na parcijalne razlomke.
Ideja je pronaći konstante A i B takve da vrijedi:

$$\frac{mx}{(1-x)(1-\ell x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-\ell x}.$$

Nakon što gornju jednakost pomnožimo s $(1-x)(1-\ell x)$, dobivamo:

$$mx = (-\ell A - B)x + A + B.$$

Znamo da su dva polinoma jednaka ako su im jednaki svi koeficijenti uz odgovarajuće potencije. Stoga imamo $-\ell A - B = m$ i $A + B = 0$. Kada riješimo sustav, dobivamo da je $A = -\frac{m}{\ell-1}$ i $B = \frac{m}{\ell-1}$ pa je

$$\begin{aligned}\frac{mx}{(1-x)(1-\ell x)} &= -\frac{m}{\ell-1}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{m}{\ell-1}\cdot\frac{1}{1-\ell x}\\ &= \frac{m}{\ell-1}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\ell^n x^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m}{\ell-1}(\ell^n - 1)x^n.\end{aligned}$$

Koeficijent uz potenciju x^n u drugom izrazu je $\frac{m}{\ell-1}(\ell^n - 1)$. Konačno, dobivamo da je rješenje

$$a_n = k\cdot\ell^n - m\cdot\frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}.$$

Lako provjerimo da je to zaista rješenje. Ako uvrstimo $n = 0$ u formulu, dobivamo $a_0 = k$. Također, imamo

$$a_{n+1} = \ell a_n - m = \ell\left(k\cdot\ell^n - m\cdot\frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}\right) - m = k\cdot\ell^{n+1} - m\cdot\frac{\ell^{n+1} - \ell}{\ell - 1} - m = k\cdot\ell^{n+1} - m\cdot\frac{\ell^{n+1} - 1}{\ell - 1}.$$

Sada ćemo opisati tehniku za pretvaranje rekurzivne formule u eksplicitnu formulu.

Postupak pretvaranja rekurzivne formule u eksplicitnu formulu

1. Definiranje funkcije izvodnice $G(x)$ niza $(a_n)_{n\geq 0}$.

2. Transformiranje rekurzivne formule u jednadžbu s $G(x)$. To redovito može biti napravljeno množenjem rekurzivne formule s x^n, x^{n+1}, ili ponekad s x^{n+k}, te sumiranjem po svim nenegativnim n.

3. Određivanje eksplicitne formule za $G(x)$.

4. Određivanje eksplicitne formule za a_n. Kako je a_n koeficijent uz potenciju x^n po definiciji od $G(x)$, pronalaženje koeficijenta uz potenciju x^n s druge strane jednakosti nam daje traženo rješenje.

Napomena 2.1.4. *Sada ćemo prikazati alternativni način za određivanje koeficijenta uz potenciju x^n u drugom izrazu. Već smo gore obrazložili zašto ćemo tražiti koeficijent uz potenciju x^{n-1} koju dobijemo u produktu $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\ell^n x^n)$. Postoji više načina kako* *u navednom produktu možemo dobiti potenciju kojoj je eksponent jednak* $n-1$*. Možemo uzeti 1* ($x^0 = 1$) *iz prve sume i pomnožiti ga s članom* $\ell^{n-1}x^{n-1}$ *iz druge sume. Ako uzmemo* x *iz prve sume i pomnožimo ga s članom* $\ell^{n-2}x^{n-2}$ *iz druge sume, također dobivamo član s potencijom od* x *kojoj je eksponent* $n-1$*. Općenito, ako je* i *takav da je* $0 \leq i \leq n-1$*, možemo uzeti* x^i *iz prve sume i pomnožiti ga s* $\ell^{n-i-1}x^{n-i-1}$ *iz druge sume. Dobit ćemo član* $\ell^{n-i-1}x^{n-1}$*. Tako ćemo obuhvatiti sve slučajeve u kojima u produktu dobivamo potenciju od* x *kojoj je eksponent jednak* $n-1$*. Dakle, koeficijent uz potenciju* x^{n-1} *u produktu* $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \ell^n x^n)$ *je*

$$\ell^{n-1} + \ell^{n-2} + \ell^{n-3} + \cdots + \ell + 1 = \frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}.$$

Koeficijent uz potenciju x^n *u izrazu* $\frac{mx}{(1-x)(1-\ell x)}$ *je* $m \cdot \frac{\ell^n-1}{\ell-1}$*. Jasno, dobili smo isto rješenje kao u prvom načinu rješavanja.*

Uvježbat ćemo postupak i na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.5. *Uplatili smo K kuna na štedni račun koji isplaćuje p% kamata na kraju svake godine. Na početku svake iduće godine uplaćujemo dodatnih D kuna na taj račun. Koliko će novca biti na računu nakon n godina? Koliko je najmanje godina potrebno štedjeti da bismo početni ulog barem udvostručili, ako je D jednak jednoj desetini iznosa K, a postotak kamata 4%?*

Rješenje. I u ovom primjeru je lako odrediti rekurzivnu formulu koja određuje niz $(a_n)_{n\geq 0}$. Ako s $a_0 = K$ označimo iznos računa na početku, i stavimo da je a_n stanje računa nakon $n \geq 1$ godina, dobivamo da je

$$a_0 = K, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100}a_n + D = \frac{100+p}{100}a_n + D, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Rješavat ćemo zadatak po koracima.

(1) Neka je $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$.
(2) Nakon množenja rekurzivne formule s x^{n+1} i sumiranja po svim nenegativnim n, dobivamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{100+p}{100} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} Dx^{n+1}.$$

Ako zamijenimo $n+1$ s n, lijeva strana jednakosti je jednaka $G(x) - a_0$. Prvi izraz s desne strane jednakosti je jednak $\frac{100+p}{100}xG(x)$, a drugi izraz je jednak $\frac{Dx}{1-x}$. Iz toga slijedi:

$$G(x) - a_0 = \frac{100+p}{100}xG(x) + \frac{Dx}{1-x}.$$

(3) Određujemo eksplicitnu formulu za $G(x)$:

$$G(x) = \frac{K}{1 - \frac{100+p}{100}x} + \frac{Dx}{(1-x)(1 - \frac{100+p}{100}x)}.$$

(4) Da bismo odredili eksplicitnu formulu za a_n, dovoljno je odrediti koeficijente uz potenciju x^n s desne strane jednakosti. Primjećujemo da je

$$\frac{K}{1 - \frac{100+p}{100}x} = K\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{100+p}{100}\Big)^n x^n$$

pa je traženi koeficijent u ovom izrazu jednak $K \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$. Za drugi izraz primjećujemo da je

$$\frac{Dx}{(1-x)(1 - \frac{100+p}{100}x)} = Dx \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{100+p}{100}\Big)^n x^n\right). \tag{2.3}$$

Da bismo u ovom izrazu pronašli koeficijent uz potenciju x^n, koristit ćemo prethodno objašnjen alternativni način; vidjeti Napomenu 2.1.4. I u ovom primjeru imamo faktor koji nam određuje koju potenciju u produktu $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{100+p}{100})^n x^n\right)$ trebamo tražiti. Potpuno analogno prethodnom primjeru određujemo da je koeficijent uz potenciju x^{n-1} u produktu $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{100+p}{100})^n x^n\right)$ jednak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{100+p}{100}\right) + 1 &= \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - 1}{\left(\frac{100+p}{100}\right) - 1} \\
&= \frac{(100+p)^n - 100^n}{p \cdot 100^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Koeficijent uz potenciju x^n u promatranom drugom izrazu (2.3) je $D \cdot \frac{(100+p)^n - 100^n}{p \cdot 100^{n-1}}$. U konačnici dobivamo da je

$$a_n = K \cdot \Big(\frac{100+p}{100}\Big)^n + D \cdot \frac{(100+p)^n - 100^n}{p \cdot 100^{n-1}}.$$

Odgovor na drugo pitanje dobivamo uvrštavanjem zadanih vrijednosti u dobivenu eksplicitnu formulu za opći član niza a_n. Zadano je $p = 4$ i $D = K/10$. Uvrštavanjem u dobivenu eksplicitnu formulu za a_n, uvjet $a_n = 2K$ postaje:

$$K \cdot \left(\frac{100+4}{100}\right)^n + \frac{K}{10} \cdot \frac{(100+4)^n - 100^n}{4 \cdot 100^{n-1}} = 2K.$$

Dijeljenjem jednadžbe s K te sređivanjem drugog razlomka s lijeve strane jednakosti dobivamo:

$$1.04^n + \frac{1}{10} \cdot \frac{1.04^n - 1}{4 \cdot 100^{-1}} = 2.$$

Daljnjim sređivanjem dobivamo:

$$n = \frac{\log(\frac{9}{7})}{\log 1.04} \approx 6.41$$

Dakle, potrebno je štedjeti 7 godina da bismo početni ulog barem udvostručili.

U sljedećem primjeru ćemo primijeniti račun s funkcijom izvodnicom gdje nam je zadana rekurzivna formula s više uvjeta.

Primjer 2.1.6. *Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ zadan je rekurzivno s $a_0 = c$, $a_1 = d$ i $a_{n+2} = (k+1)a_{n+1} - ka_n + m$, za neke nenegativne realne brojeve k i m. Odredimo eksplicitnu formulu za opći član niza a_n.*

Rješenje. Definirajmo funkciju izvodnicu $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Nakon što pomnožimo zadanu rekurzivnu formulu s x^{n+2}, te sumiramo po svim nenegativnim n, dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = (k+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} - k\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + m\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}.$$

što je jednako

$$G(x) - a_1 x - a_0 = (k+1)x(G(x) - a_0) - kx^2 G(x) + \frac{mx^2}{1-x}.$$

Nakon što uvrstimo $a_0 = c$ i $a_1 = d$ u jednakost, dobivamo:

$$(kx^2 - (k+1)x + 1)G(x) = c + (d - ck - c)x + \frac{mx^2}{1-x},$$

i onda

$$G(x) = \frac{c}{(1-x)(1-kx)} + \frac{(d-ck-c)x}{(1-x)(1-kx)} + \frac{mx^2}{(1-x)^2(1-kx)}.$$

Razlučimo izraze s desne strane jednakosti. Iz prvog izraza ćemo lako odrediti koeficijent uz potenciju x^n koristeći alternativni način rješavanja objašnjen u Napomeni 2.1.4. Prvi izraz je jednak

$$\frac{c}{(1-x)(1-kx)} = c \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n\right).$$

Radeći kao u spomenutoj Napomeni 2.1.4, dobit ćemo da je koeficijent uz potenciju x^n u produktu $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n)$ jednak

$$k^n + k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k + 1 = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Koeficijent uz potenciju x^n u izrazu $\frac{c}{(1-x)(1-kx)}$ je $c \cdot \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$.
Iz drugog izraza ćemo analogno odrediti koeficijent uz potenciju x^n. Drugi izraz je jednak

$$\frac{(d - ck - c)x}{(1 - x)(1 - kx)} = (d - ck - c)x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n\right).$$

Iz činjenice da je jedan faktor $(d - ck - c)x$, znamo da je koeficijent uz potenciju x^0 jednak nuli, te da bismo odredili koeficijent uz potenciju x^n, moramo odrediti koeficijent uz potenciju x^{n-1} koju dobijemo u produktu $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n)$. Analogno rješavanju u prvom izrazu, zaključujemo da je koeficijent uz potenciju x^{n-1} u produktu $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n)$ jednak

$$k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \cdots + k + 1 = \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Koeficijent uz potenciju x^n u izrazu $\frac{(d-ck-c)x}{(1-x)(1-kx)}$ je $(d - ck - c) \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$.
U trećem izrazu ćemo primjeniti rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke.

$$\frac{mx^2}{(1 - x)^2(1 - kx)} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{(1 - x)^2} + \frac{C}{1 - kx}$$

Nakon što gornju jednakost pomnožimo s $(1 - x)^2(1 - kx)$, dobivamo:

$$mx^2 = A(1 - x)(1 - kx) + B(1 - kx) + C(1 - x)^2.$$

Daljnjim sređivanjem i primjenom teorema o jednakosti polinoma dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} kA + C &= m \\ (k + 1)A + kB + 2C &= 0 \\ A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

Kada riješimo sustav, dobivamo da je $A = \frac{m(k-2)}{(k-1)^2}$, $B = \frac{-m}{k-1}$ i $C = \frac{m}{(k-1)^2}$, pa je

$$\frac{mx^2}{(1 - x)^2(1 - kx)} = \frac{m(k - 2)}{(k - 1)^2} \cdot \frac{1}{1 - x} + \frac{-m}{k - 1} \cdot \frac{1}{(1 - x)^2} + \frac{m}{(k - 1)^2} \cdot \frac{1}{1 - kx}.$$

Da bismo drugi izraz s desne strane gornje jednakosti zapisali kao sumu potencija, promotrit ćemo jednakost

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Kada tu jednakost deriviramo, dobivamo:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots . \tag{2.4}$$

Primjenom već korištenih rastava geometrijskih redova za $1/(1-x)$ i $1/(1-kx)$, te jednakosti (2.4), dobivamo

$$\frac{mx^2}{(1-x)^2(1-kx)} = \frac{m}{k-1}\left(\frac{k-2}{k-1}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \frac{1}{k-1}\sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n\right).$$

Koeficijent uz potenciju x^n u izrazu $\frac{mx^2}{(1-x)^2(1-kx)}$ je $\frac{m}{k-1}\left(\frac{k-2}{k-1} - (n+1) + \frac{k^n}{k-1}\right)$. U konačnici dobivamo da je traženo rješenje

$$\begin{aligned} a_n &= c \cdot \frac{k^{n+1}-1}{k-1} + (d - ck - c)\cdot\frac{k^n - 1}{k-1} + \frac{m}{k-1}\left(\frac{k-2}{k-1} - (n+1) + \frac{k^n}{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{k-1}\left(d\cdot(k^n - 1) - ck\cdot(k^{n-1} - 1) + m\left(\frac{k-2}{k-1} - (n+1) + \frac{k^n}{k-1}\right)\right). \end{aligned}$$

2.2 Produkt funkcija izvodnica

U prethodnom odjeljku smo prikazali kako, koristeći funkcije izvodnice, možemo odrediti opći član niza definiranog rekurzivnom relacijom. No, u svim primjerima je bila samo jedna funkcija izvodnica. U ovom odjeljku ćemo prikazati kako tretirati produkt više funkcija izvodnica.

Prvo ćemo definirati produkt dviju funkcija izvodnica. Tu zapravo radimo analogno kao u Napomeni 2.1.4.

Lema 2.2.1. *Neka su $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ nizovi realnih brojeva i neka su $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ njihove odgovarajuće funkcije izvodnice. Definirajmo niz $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ kojem je odgovarajuća funkcija izvodnica $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Tada vrijedi*

$$A(x)B(x) = C(x).$$

Odnosno, koeficijent uz potenciju x^n u produktu $A(x)B(x)$ je $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Dokaz. Kada množimo beskonačne sume $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ i $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$, množimo ih na način da svaki član prve sume pomnožimo sa svakim članom druge sume pa te produkte zbrojimo. Svaka dva pomnožena člana su oblika $a_i x^i b_j x^j$. Da bismo u produktu dvaju članova dobili potenciju kojoj je eksponent n, mora vrijediti $j = n - i$ pa je oblik $a_i x^i b_j x^j$ jednak $a_i b_{n-i} x^n$, što smo i htjeli dokazati. □

Teorem koji slijedi je kombinatorna posljedica prethodne leme. No prije nego iskažemo teorem, načinimo malu digresiju kako bismo lakše razumjeli teorem.

Napomena 2.2.2. *Za broj $n \in \mathbb{N}$ će skup $L_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ predstavljati skup od prvih n prirodnih brojeva.*

Digresija. Označimo s a_n broj načina na koji u skupu L_n možemo izabrati k-člane podskupove; ovdje je $k \in \mathbb{N}$ neki fiksiran broj. Dobro je poznato da je $a_n = \binom{n}{k}$, broj kombinacija bez ponavljanja od po k elemenata u n-članom skupu. Jasno, za $n < k$ je $\binom{n}{k} = 0$. Tako posebno imamo da je funkcija izvodnica koja računa broj takvih struktura, tj. broj k-članih podskupova u L_n, jednaka

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \binom{k}{k} x^k + \binom{k+1}{k} x^{k+1} + \cdots + \binom{n}{k} x^n + \cdots .$$

Isto tako, označimo s b_n broj načina na koji elemente u L_n možemo poredati u niz; tj., broj načina na koji elemente u L_n možemo napisati kao uređenu n-torku. Dobro je poznato da je $b_n = n!$. I onda je pripadna funkcija izvodnica koja računa broj takvih struktura, tj. broj uređenih n-torki od elemenata u L_n, jednaka

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 1!x + 2!x^2 + \cdots + n!x^n + \cdots .$$

Sada pretpostavimo da smo skup L_n napisali kao disjunktnu uniju skupova $S_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ i $T_i = \{i+1, i+2, \ldots, n\}$, za $i = 0, 1, \ldots, n$. Znači, parovi (S_i, T_i) tih skupova su $S_0 = \emptyset$ i $T_0 = L_n$, $S_1 = \{1\}$ i $T_1 = \{2, 3, \ldots, n\}$, itd. Posebno je zadnji par $S_n = L_n$ i $T_n = \emptyset$. Pogledajmo sada neku konkretnu disjunktnu uniju $L_n = S_i \cup T_i$, te onda pogledajmo na koliko načina možemo u S_i izabrati k-člane podskupove, a u isto vrijeme članove iz T_i poredati u uređene nizove, od po $n - i$ elemenata. Očito je taj broj jednak $\binom{i}{k}(n-i)!$ za $i < n$, odnosno 0 za $i = n$. (Naime, prazan skup $T_n = \emptyset$ "možemo poredati u 0-torke" na 0 načina.) Ako sada s c_n označimo broj svih mogućih tako dobivenih parova (α, β), gdje je α neki k-člani podskup u nekom skupu S_i i β neka uređena $(n-i)$-torka u skupu T_i, onda je očito $c_0 = c_1 = \cdots = c_k = 0$, te

$$c_{k+j} = \binom{k}{k} j! + \binom{k+1}{k}(j-1)! + \cdots + \binom{k+j-1}{k} 1!, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Označimo pripadnu funkciju izvodnicu s

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n x^n.$$

Ali onda se odmah vidi da je $A(x)B(x) = C(x)$; tj.,

$$\left(\binom{k}{k}x^k + \binom{k+1}{k}x^{k+1} + \cdots\right)\left(1!x + 2!x^2 + \cdots\right) = c_{k+1}x^{k+1} + c_{k+2}x^{k+2} + \cdots .$$

Sada iskažimo najavljeni teorem.

Teorem 2.2.3. *(*Produktna formula*)*
Neka je a_n broj načina na koji se u n-članom skupu L_n mogu dobiti neke strukture, nazovimo ih tipa 1*, te neka je b_n broj načina na koji se u skupu L_n mogu dobiti neke druge strukture, nazovimo ih* tipa 2*. Označimo s $A(x)$ i $B(x)$ pripadne funkcije izvodnice koje su određene nizovima brojeva (a_n) i (b_n). Pogledajmo sada sve particije skupa L_n u (disjunktnu) uniju $L_n = S_i \cup T_i$, gdje su $S_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ i $T_i = \{i+1, i+2, \ldots, n\}$, za $i = 0, 1, \ldots, n$. (Primijetimo da je posebno $S_0 = T_n = \emptyset$.) U svakoj takvoj particiji pogledajmo broj načina na koji u konkretnom S_i možemo dobiti strukture tipa 1, a u T_i strukture tipa 2. I neka je onda c_n ukupan broj tako dobivenih struktura tipa 1 za neki S_i i dobivenih struktura tipa 2 za odgovarajući T_i, kada je i bilo koji indeks iz skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$. Ako sada s $C(x)$ označimo funkciju izvodnicu koja je određena s nizom tih brojeva (c_n), onda je*

$$A(x)B(x) = C(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da u skupu L_n radimo strukture tipa 1. Onda je a_n broj načina na koji se mogu dobiti te strukture, a $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pripadna funkcija izvodnica. U tom istom skupu radimo strukture tipa 2, pa je b_n broj načina na koji se mogu dobiti te strukture, a $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ pripadna funkcija izvodnica. Znamo pomnožiti te dvije sume. U svakom produktu dobivamo broj načina na koji se može dobiti treća vrsta strukture koju čine parovi struktura tipa 1 i tipa 2. S obzirom da paralelno radimo strukture tipa 1 i tipa 2 na particijama skupa L_n, promatrat ćemo samo one produkte u kojima dobivamo potenciju x^n. (Ako bismo L_n podijelili na skupove od 1 i $n-1$ elemenata, radili bismo paralelno strukture a_1 i b_{n-1}, itd.). Po Lemi 2.2.1 znamo da je koeficijent uz potenciju x^n u produktu $A(x)B(x)$ jednak $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. Ta suma opisuje c_n. Zaključujemo da je $A(x)B(x) = C(x)$. □

Zbog daljnjih potreba sjetimo se generalizirane forme binomnog teorema. Najprije, za realan broj $s \in \mathbb{R}$ definiramo poopćene binomne koeficijente

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

i posebno je $\binom{s}{0} = 1$. Sada promatrajmo funkciju

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^s.$$

Lako se računaju više derivacije te funkcije:

$$f^{(k)}(x) = s(s-1)\cdots(s-k+1)(1+x)^{s-k}.$$

I onda se za Taylorov razvoj $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, funkcije $f(x)$ oko $x_0 = 0$, računaju koeficijenti $c_k = f^{(k)}(0)/k!$. To znači da je pripadni Taylorov razvoj

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = 1 + sx + \binom{s}{2} x^2 + \cdots + \binom{s}{k} x^k + \cdots .$$

Primjer 2.2.4. *Semestar na fakultetu traje n dana. Na početku svakog semestra, dekan dijeli semestar na dva dijela. To radi na način da prvih k dana čini teorijski dio, a drugih $n-k$ dana praksa uz uvjet da je $1 \leq k \leq n-2$. Zatim bira jedan praznik u prvom dijelu semestra i dva praznika u drugom dijelu semestra. Na koliko načina dekan, uz dane uvjete, može rasporediti semestar?*

Rješenje. Označimo s c_n broj načina na koji dekan može rasporediti semestar. Odmah vidimo da je $c_n = \sum_{k=1}^{n-2} k\binom{n-k}{2}$. Želimo pojednostaviti eksplicitnu formulu za opći član niza c_n pa ćemo promatrati svaki problem pojedinačno. Odmah vidimo da imamo k načina na koje možemo izabrati jedan praznik u prvom dijelu semestra ($a_k = k$) i $\binom{m}{2}$ načina na koje možemo izabrati dva praznika u drugom dijelu semestra ($b_m = \binom{m}{2}$), gdje je $m = n-k$. Pripadne funkcije izvodnice ovih nizova su $A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ i $B(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \binom{m}{2} x^m$. Analognim računom kao u (2.4) dolazimo do jednakosti

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{i} \quad B(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}.$$

Po Teoremu 2.2.3 znamo da za pripadnu funkciju izvodnicu niza $(c_n)_{n\geq 3}$ vrijedi jednakost $C(x) = A(x)B(x)$ pa je

$$C(x) = A(x)B(x) = \frac{x^3}{(1-x)^5} = x^3(1-x)^{-5}.$$

Primjenom generalizirane forme binomnog teorema dobivamo:

$$\begin{aligned}\binom{-5}{n} = \frac{(-5)(-5-1)\cdots(-5-(n-1))}{n!} &= (-1)^n \frac{5(5+1)\cdots(5+(n-1))}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(n+4)!}{4!n!} = (-1)^n \binom{n+4}{4}.\end{aligned}$$

I onda je, koristeći Taylorov razvoj,

$$C(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-5}{n} (-1)^n x^n = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n+1}{4} x^n.$$

Traženo rješenje je $c_n = \binom{n+1}{4}$.

Primjer 2.2.5. *Pretpostavimo da dekan bira neke dane u oba dijela semestra za samostalno učenje. Na koliko načina može rasporediti semestar?*

Rješenje. Označimo s c_n broj načina na koji dekan može rasporediti semestar. I ovdje ćemo ćemo promatrati svaki problem pojedinačno. Odmah vidimo da imamo 2^k načina na koje možemo izabrati neke dane za učenje u prvom dijelu semestra ($a_k = 2^k$) i 2^m načina na koje možemo izabrati neke dane za učenje u drugom dijelu semestra ($b_m = 2^m$), gdje je $m = n - k$. Pripadne funkcije izvodnice ovih nizova su $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ i $B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m x^m$. Primjenom izraza za sumu geometrijskog reda dolazimo do jednakosti

$$A(x) = B(x) = \frac{1}{1 - 2x}.$$

Po Teoremu 2.2.3 znamo da za pripadnu funkciju izvodnicu niza $(c_n)_{n \geq 0}$ vrijedi jednakost $C(x) = A(x)B(x)$ pa je

$$C(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{(1 - 2x)^2}.$$

Analognim računom kao u (2.4) dolazimo do jednakosti $C(x) = \frac{1}{2}A'(x)$ pa je

$$C(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right)' = 2^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot 2^n x^n.$$

Traženo rješenje je $c_n = (n + 1) \cdot 2^n$.

2.3 Kompozicija funkcija izvodnica

Na početku ovog odjeljka pogledajmo sljedeći primjer. Neka je $L_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, kako smo bili rekli, skup prvih n prirodnih brojeva. Označimo s $\mathcal{A}_n$ skup svih uređenih parova (x, y), takvih da su $x, y \in L_n$ i da je $x \neq y$. Naglasimo kako je u uređenom paru bitno koji je element na prvom, a koji na drugom mjestu para. Isto tako, neka je a_n broj uređenih parova u skupu $\mathcal{A}_n$. Posebno je

$$\mathcal{A}_2 = \{(1, 2), (2, 1)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{A}_3 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$$

I jasno, općenito je $a_n = n(n - 1)$. Primijetimo isto tako da je $a_1 = 0$.

Gledajmo sada sljedeću konstrukciju. Recimo da smo skup L_n “razbili” u particiju na $k \leq n$ “cjelobrojnih segmenata”; tj., da imamo

$$L_n = \{1, 2, \ldots, n_1\} \cup \{n_1 + 1, \ldots, n_2\} \cup \cdots \cup \{n_{k-1} + 1, \ldots, n_k = n\},$$

za neke $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k = n$. Označimo dobivene “cjelobrojne segmenate”

$$S_n^1 = \{1, 2, \ldots, n_1\}, \quad S_n^2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_2\}, \quad \ldots, \quad S_n^k = \{n_{k-1} + 1, \ldots, n\},$$

i onda gornju particiju zapisujemo kao

$$L_n = S_n^1 \cup \cdots \cup S_n^k. \tag{2.5}$$

Zapravo, gledat ćemo sve moguće particije za konkretan L_n. Naprimjer, za $n = 2, 3$ i 4 imamo:

$$L_2 = \{1\} \cup \{2\} \quad \text{i} \quad L_3 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{3\},$$

te

$$\begin{aligned} L_4 &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4\} \\ &= \{1\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3\} \cup \{4\}. \end{aligned}$$

Znači, za L_2 imamo 2 particije, za L_3 imamo 4 particije, i za L_4 imamo 8 particija. Jasno, za općeniti L_n imat ćemo 2^{n-1} particija. Tu je bitno primijetiti kako za jednu od particija od L_n uzimamo i sam L_n. Sada pogledajmo neku tipičnu particiju π od L_n; recimo da je π dana kao u (2.5). I onda pogledajmo broj načina na koji u svakom S_n^i možemo napraviti uređene parove. Očito su ti brojevi dani kao $a_{n_1}, a_{n_2-n_1}, \dots, a_{n-n_{k-1}}$, redom. I zatim stavimo

$$a_\pi := a_{n_1} a_{n_2-n_1} \cdots a_{n-n_{k-1}}.$$

(Recimo za particiju $\sigma = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\}$ od L_4 je $a_\sigma = a_1 a_1 a_2 = 0 \cdot 0 \cdot 2 = 0$, dok je za particiju $\pi = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$ od L_4 broj $a_\pi = a_2 a_2 = 2 \cdot 2 = 4$.) Konačno, definirajmo broj h_n kao zbroj svih a_π, kada π prolazi skupom svih particija od L_n. Gledajući gornje particije od L_2 i L_3, zaključujemo da je jedini netrivijalan doprinos u računanju brojeva h_2 i h_3 dobiven od samih particija L_2 i L_3. Zato je

$$h_2 = a_2 \quad \text{i} \quad h_3 = a_3.$$

S druge strane, kada gledamo svih 8 particija od L_4, jedini netrivijalan doprinos dobivamo od same particije L_4 i od gore promatrane particije $\pi = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$. Kao posljedicu imamo da je

$$h_4 = a_2 a_2 + a_4 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16.$$

Zapravo, u ovom primjeru imat ćemo netrivijalan doprinos u zbroju koji definira h_n samo od particija u kojima nema jednočlanih "cjelobrojnih segmenata"; tj., od onih particija (2.5) u kojima svaki skup S_n^i ima barem 2 elementa.

Sada uvedimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.3.1. *Neka je $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ formalni red potencija te neka je $G(x)$ formalni red potencija kojem je slobodni član jednak nuli. Tada definiramo*

$$F(G(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (G(x))^n = f_0 + f_1 G(x) + f_2 G(x)^2 + \cdots .$$

Sljedeći teorem prezentira glavnu primjenu metode komponiranja funkcija izvodnica. Za njegovo bolje razumijevanje dobro će nam doći gore promatrani primjer.

Teorem 2.3.2. *Neka je a_n broj načina na koji se u n-članom skupu L_n mogu dobiti neke strukture, pri čemu pretpostavimo da je posebno $a_0 = 0$. Označimo s $A(x)$ pripadnu funkciju izvodnicu koja je određena nizom brojeva (a_n). Pogledajmo sada sve moguće particije π skupa L_n oblika $S_n^1 \cup \cdots \cup S_n^k$, onako kako smo to imali u (2.5), pri čemu je $k \leq n$ i svaki S_n^i je neprazan skup. Na svakom od tih skupova S_n^i gledajmo sve moguće strukture koje promatramo, i broj takvih označimo s $a_n^i(\pi)$. Zatim stavimo $a(\pi) := \prod_{i=1}^k a_n^i(\pi)$, i konačno $h_n := \sum_\pi a(\pi)$, gdje sumiramo po svim mogućim particijama od L_n. Posebno uzimamo da je $h_0 = 1$. Ako sada s $H(x)$ označimo funkciju izvodnicu koja je određena nizom tih brojeva (h_n), onda je*

$$H(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

Dokaz. Kada skup L_n podijelimo na k dijelova, dobivamo particiju sačinjenu od k skupova, te na njima radimo neke strukture. Po Teoremu 2.2.3 dobivamo da je $A(x)^k$ pripadna funkcija izvodnica koja računa broj takvih struktura. Ovisno o tome na koliko smo skupova dijelili skup L_n te radili strukture na tim skupovima, sumiranjem po svim $k \in \mathbb{N}$, dobivamo $\sum_{k=1}^\infty A(x)^k$. Kako je $a_0 = 0$, niti jedan red potencija $A(x)^k$ nema slobodni član različit od nule. Ali po definiciji od $H(x)$ je $h_0 = 1$ pa je

$$H(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A(x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} A(x)^k = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

□

Napomena 2.3.3. *Uočimo kako u Teoremu 2.3.2 ne dozvoljavamo particije koje su sačinjene od praznih skupova. Kako skup L_n možemo dijeliti na proizvoljan broj skupova, mogli bismo imati beskonačno mnogo particija. U Teoremu 2.2.3 skup L_n dijelimo tako da particije čine dva skupa. Zbog toga nemamo ograničenja.*

Primjer 2.3.4. *U liniji stoji n vojnika. Časnik dijeli liniju na više mjesta te formira manje (neprazne) jedinice. Zatim imenuje jednu osobu za zapovjednika u svakoj jedinici. Neka je h_n broj načina na koji može to učiti. Pronađimo zatvorenu formulu za h_n.*

Rješenje. Označimo s h_n broj načina na koji časnik može rasporediti vojsku. Odmah vidimo da imamo k načina na koje možemo izabrati zapovjednika u jedinici od k osoba pa je $a_k = k$ i onda je $A(x) = \sum_{k=1}^\infty kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$. Po Teoremu 2.3.2 imamo

$$H(x) = \frac{1}{1 - A(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = 1 + \frac{x}{1 - 3x + x^2},$$

gdje je $H(x)$ funkcija izvodnica niza $(h_n)_{n\geq 0}$.
Da bismo odredili koeficijent uz potenciju x^n s desne strane jednakosti, promatrat ćemo izraz $\frac{1}{1-3x+x^2}$. Koristit ćemo rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Korijeni jednadžbe $1-3x+x^2$ su $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ pa je

$$\frac{1}{1-3x+x^2} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} - \frac{B}{x-\beta}.$$

Nakon što gornju jednakost pomnožimo s $(x-\alpha)(x-\beta)$, dobivamo:

$$1 = (A-B)x - A\beta + B\alpha.$$

Iz teorema o jednakosti polinoma slijedi da je $A - B = 0$ i $-A\beta + B\alpha = 1$. Kada riješimo sustav, dobivamo da je $A = B = 1/\sqrt{5}$, pa je

$$\frac{1}{1-3x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right).$$

Uočimo da je $\alpha \cdot \beta = 1$, pa množenjem prvog razlomka (s desne strane) gornje jednakosti s β i drugog razlomka s α, dobivamo:

$$\frac{1}{1-3x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \beta\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right).$$

Slijedi da je koeficijent uz potenciju x^n u izrazu $\frac{1}{1-3x+x^2}$ jednak $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$. S obzirom da nas zanima koeficijent uz potenciju x^n u izrazu $\frac{x}{1-3x+x^2}$, dobivamo da je traženo rješenje

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n > 0.$$

Pogledajmo na kraju specijalan slučaj kada u jedinici imamo samo 4 vojnika. Zapravo, ako te vojnike numeriramo brojevima od 1 do 4, onda namjesto njih možemo gledati skup L_4. Na početku ovog odjeljka smo vidjeli da imamo 8 particija skupa L_4. I za svaku od njih se lako mogu računati svi mogući načini na koje “izabiremo zapovjednike”. Naprimjer, za particiju $\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}$ imamo 1 način, za particiju L_4 imamo 4 načina, itd. Ukupno se dobije $h_4 = 21$ način. S druge strane, kako smo rekli, imamo $A(x) = x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$. Ako bismo sada računali

$$H(x) = A(x) + A(x)^2 + A(x)^3 + A(x)^4 + \cdots,$$

vidjeli bismo sljedeće. U $A(x)$ je monom koji sadrži potenciju x^4 izraz $4x^4$; u $A(x)^2$ se monom koji sadrži potenciju x^4 dobiva kao $(2x^2)^2 + x\cdot 3x^3 + 3x^3\cdot x = 10x^4$; u $A(x)^3$ se monom koji sadrži potenciju x^4 dobiva kao $x \cdot x \cdot 2x^2 + x \cdot 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot x \cdot x = 6x^4$; u $A(x)^4$ se monom koji sadrži potenciju x^4 dobiva kao $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$; dok za više potencije $A(x)^j$, za $j \geq 5$, ne možemo dobiti monom koji sadrži potenciju x^4. Zaključujemo da je $h_4 = 4 + 10 + 6 + 1 = 21$; jasno, kako smo i prije računali. Kako smo gore vidjeli, isto tako imamo da je

$$\begin{aligned} h_4 &= \frac{1}{2^4\sqrt{5}}((3+\sqrt{5})^4 - (3-\sqrt{5})^4) = \frac{1}{2^4\sqrt{5}}(2(4 \cdot 3^3\sqrt{5} + 4 \cdot 3\sqrt{5}^3)) \\ &= \frac{1}{2}(3^3 + 3 \cdot 5) = \frac{42}{2} = 21. \end{aligned}$$

Naravno, i opet smo dobili isti rezultat, $h_4 = 21$. Odavde se vidi prednost načina računanja brojeva h_n u ovom primjeru, preko prethodnog teorema. Naime, već naprimjer za jedinicu od $n = 10$ vojnika, ukupan broj načina na koji tu jedinicu možemo dijeliti na nekoliko manjih, i onda u svakoj od njih izabirati zapovjednika, je dosta velik; i bilo bi ga mukotrpno računati na prva dva opisana načina. (Primijetimo da je broj particija te vojne jedinice, koje moramo gledati, jednak $2^9 = 512$.) S druge strane, računamo

$$h_{10} = \frac{1}{2^{10}\sqrt{5}}((3+\sqrt{5})^{10} - (3-\sqrt{5})^{10}) = 6765.$$

Primjetimo da smo u Teoremu 2.3.2 radili pojedinačno strukture na svakom skupu neke particije. Sada nas zanima kako bismo mogli složiti neku strukturu na skupovima koji su elementi neke particije. Sljedeći teorem poopćava prethodni teorem.

Teorem 2.3.5. *(*Formula kompozicije*)*
Neka je a_n broj načina na koji se u n-članom skupu L_n mogu dobiti neke strukture, nazovimo ih tipa 1*, te pretpostavimo da je $a_0 = 0$. Isto tako, neka je b_n broj načina na koji se u skupu L_n mogu dobiti neke druge strukture, nazovimo ih* tipa 2*, pri čemu je sada $b_0 = 1$. Označimo s $A(x)$ i $B(x)$ pripadne funkcije izvodnice koja su određene nizovima brojeva (a_n) i (b_n). Pogledajmo sada sve moguće particije skupa L_n, isto kao u Teoremu 2.3.2. I onda neka je g_n broj načina na koji na svakom skupu proizvoljne particije od L_n možemo dobiti prvo strukture tipa 1, a zatim na skupu svih skupova koji čine particiju dobiti strukture tipa 2. Posebno stavimo da je $g_0 = 1$. Ako sada s $G(x)$ označimo funkciju izvodnicu koja je određena nizom tih brojeva (g_n), onda je*

$$G(x) = B(A(x)).$$

Dokaz. Kada skup L_n podijelimo na k dijelova, dobivamo k-članu particiju, te na svakom skupu te particije pojedinačno radimo strukture tipa 1. Po Teoremu 2.2.3 dobivamo da je $A(x)^k$ pripadna funkcija izvodnica koja računa broj takvih struktura. Istovremeno na toj k-članoj particiji radimo strukture tipa 2. Dobivamo da je b_k broj načina tako dobivenih struktura. Ovisno o tome na koliko smo skupova dijelili skup L_n te radili strukture tipa 1 i tipa 2, sumiranjem po svim nenegativnim k, dobivamo da je G(x)=$\sum_{k=0}^{\infty} b_k A(x)^k$ što smo i htjeli dokazati. □

U sljedećem primjeru ćemo koristiti prethodno opisan teorem.

Primjer 2.3.6. *U liniji stoji n vojnika. Časnik dijeli liniju na više mjesta te formira manje (neprazne) jedinice. Zatim bira skup jedinica za noćnu stražu (dozvoljava se i prazan skup). Na koliko načina časnik može ovako rasporediti vojsku?*

Rješenje. Označimo s g_n broj načina na koji časnik može rasporediti vojsku. Odmah vidimo da imamo jedan način na koji možemo izabrati sve vojnike unutar neke jedinice. Kako biramo vojnike u svakoj pojedinačnoj jedinici od ukupno k jedinica imamo k faktora po 1 pa je $a_k = 1$. Kako je $a_0 = 0$, imamo $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}$. Znamo da je broj podskupova nekog skupa od m elemenata jednak 2^m pa je $b_m = 2^m$ broj načina na koji možemo izabrati skup jedinica za noćnu stražu. Pripadna fukcija izvodnica ovog niza je $B(x) = \frac{1}{1-2x}$. Primjenom Teorema 2.3.5 dobivamo

$$G(x) = B(A(x)) = \frac{1}{1 - \frac{2x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-3x} = \frac{1}{1-3x} - \frac{x}{1-3x},$$

gdje je $G(x)$ funkcija izvodnica niza $(g_n)_{n\geq 0}$. Daljnjim računanjem dobivamo

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} x^n. \end{aligned}$$

Traženo rješenje je $g_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, za $n \geq 1$.

2.4 Eksponencijalne funkcije izvodnice

U nekim zadatcima ne možemo dobiti zatvorenu eksplicitnu formulu koristeći običnu funkciju izvodnicu. Nekad zatvorena formula ne postoji, a nekad nam je potrebna drugačija funkcija izvodnica. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.4.1. *Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ zadan je rekurzivno s $a_0 = 1$ i $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$, za $n \geq 0$. Odredimo zatvorenu formulu za opći član niza a_n.*

Ako pokušamo ovu rekurzivnu formulu pretvoriti u eksplicitnu koristeći običnu funkciju izvodnicu, nećemo dobiti zatvorenu formulu. Razlog tome je što niz eksponencijalno raste. Zato sada dajemo sljedeću definiciju.

Definicija 2.4.2. *Neka je $(f_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva. Formalni red potencija $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$ zove se **eksponencijalna funkcija izvodnica** niza $(f_n)_{n\geq 0}$.*

Napomena 2.4.3. *Naziv ”eksponencijalno” dolazi iz činjenice da je eksponencijalna funkcija izvodnica niza $f_n = 1$ jednaka e^x.*

Rješenje. (Primjer 2.4.1) U ovom primjeru definirat ćemo eksponencijalnu funkciju izvodnicu

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Postupak rješavanja ovakvih zadataka je analogan postupku rješavanja zadataka gdje se primjenjuju obične funkcije izvodnice. Dakle, nakon što pomnožimo zadanu rekurzivnu formulu s $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, te sumiramo po svim nenegativnim n, dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n-1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{x^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Koristeći dobro poznatu jednakost $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ dobivamo da je

$$A(x) - 1 = xA(x) - x^2 e^x + x e^x.$$

Određujemo eksplicitnu formulu za $A(x)$:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1-x} + x e^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.
\end{aligned}$$

Da bismo odredili eksplicitnu formulu za a_n, dovoljno je odrediti koeficijente uz $\frac{x^n}{n!}$ s desne strane jednakosti. Koeficijent uz $\frac{x^n}{n!}$ u prvom izrazu je jednak $n!$, a u drugom izrazu je jednak n. Dobivamo da je traženo rješenje:

$$a_n = n! + n.$$

2.5 Produkt eksponencijalnih funkcija izvodnica

Kao u odjeljcima u kojima su opisani teoremi koji vrijede za obične funkcije izvodnice, slična pravila vrijede i za eksponencijalne funkcije izvodnice. I ovdje ćemo prvo definirati produkt dviju eksponencijalnih funkcija izvodnica.

Lema 2.5.1. *Neka su $(a_i)_{i\geq 0}$ i $(b_k)_{k\geq 0}$ nizovi realnih brojeva i neka su $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$ i $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$ njihove odgovarajuće eksponencijalne funkcije izvodnice. Definirajmo niz $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$ kojem je odgovarajuća eksponencijalna funkcija izvodnica $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$. Tada vrijedi*

$$A(x)B(x) = C(x).$$

Odnosno, koeficijent uz $x^n/n!$ u produktu $A(x)B(x)$ je $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$.

Dokaz. Dokaz se provodi slično kao u Lemi 2.2.1. Kada množimo beskonačne sume $A(x)$ i $B(x)$, množimo ih na način da svaki član prve sume pomnožimo sa svakim članom druge sume pa te produkte zbrojimo. Svaka dva pomnožena člana su oblika

$$a_i \frac{x^i}{i!} \cdot b_j \frac{x^j}{j!} = a_i b_j \cdot \frac{x^{i+j}}{i!j!} \cdot \frac{(i+j)!}{(i+j)!} = \binom{i+j}{i} \cdot a_i b_j \cdot \frac{x^{i+j}}{(i+j)!}.$$

Da bismo u produktu dvaju članova dobili izraz stupnja n, mora vrijediti $j = n - i$ pa je oblik $\binom{i+j}{i} \cdot a_i b_j \cdot \frac{x^{i+j}}{(i+j)!}$ jednak $\binom{n}{i} \cdot a_i b_{n-i} \cdot \frac{x^n}{n!}$, što smo i htjeli dokazati. □

Teorem 2.5.2. *(*Produktna formula za eksponencijalne funkcije izvodnice*)*
Neka je a_n broj načina na koji se u n-članom skupu L_n mogu dobiti neke strukture, nazovimo ih tipa 1*, te neka je b_n broj načina na koji se u skupu L_n mogu dobiti neke druge strukture, nazovimo ih* tipa 2*. Označimo s $A(x)$ i $B(x)$ pripadne eksponencijalne funkcije izvodnice koje su određene nizovima brojeva (a_n) i (b_n). Pogledajmo sada sve particije skupa L_n u (disjunktnu) uniju $L_n = S \cup T$. U svakoj takvoj particiji pogledajmo broj načina na koji u konkretnom S možemo dobiti strukture tipa 1, a u T strukture tipa 2. I neka je onda c_n ukupan broj tako dobivenih struktura tipa 1 za neki S i dobivenih struktura tipa 2 za odgovarajući T. Ako sada s $C(x)$ označimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu koja je određena s nizom tih brojeva (c_n), onda je*

$$A(x)B(x) = C(x).$$

Dokaz. Ako skup S ima i elemenata, imamo $\binom{n}{i}$ načina na koje možemo izabrati elemente za skup S i $\binom{n-i}{n-i}$ načina na koje možemo izabrati elemente za skup T iz skupa L_n. Onda je a_i broj načina na koji se može dobiti struktura tipa 1 na skupu S, a b_{n-i} broj načina na koji se može dobiti struktura tipa 2 na skupu T. To vrijedi za svaki i iz intervala $0 \leq i \leq n$. Da bismo dobili broj načina na koji možemo dobiti strukturu treće vrste od ovako podijeljenih skupova S i T, pomnožimo $\binom{n}{i}a_i$ i b_{n-i}. Sumiranjem po svim i takvim da je $0 \leq i \leq n$ dobivamo da je $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$. Po Lemi 2.5.1 zaključujemo da je $A(x)B(x) = C(x)$. □

Napomena 2.5.3. *Uočimo da se Teorem 2.2.3 i Teorem 2.5.2 razlikuju po izboru elemenata u skupovima koji čine particije. U Teoremu 2.2.3 zahtijevamo da su elementi linearano poredani (dani u godini, ljudi u redu, ...). Na takvom rasporedu elemenata dijelimo skup L_n na dva dijela, odnosno na dva skupa. U Teoremu 2.5.2 nemamo takve zahtjeve. Možemo proizvoljno birati elemente iz skupa L_n za skupove koji čine particije.*

Primjer 2.5.4. *Nogometni trener trenira $n \geq 1$ igrača. Prvo ih dijeli u dvije grupe, a onda svaku od tih grupa raspoređuje u liniju. Zatim svakom članu prve grupe daje crvenu ili bijelu ili plavu majicu. Svi igrači druge grupe ostaju u svojim zelenim majicama. Na koliko različitih načina trener tako može rasporediti igrače?*

Rješenje. Označimo s c_n ukupan broj načina na koji trener može rasporediti igrače. Pretpostavimo da trener bira k igrača za prvu grupu. S a_k označimo broj načina na koji tih k igrača može uzeti crvenu ili bijelu ili plavu majicu. Prvo, tih k igrača možemo na $k!$ načina poredati u liniju. I onda, za svakog igrača imamo 3 izbora za majicu. Znači da je $a_k = 3^k k!$, i onda je pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica jednaka

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k k! \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1-3x}.$$

Slično, pretpostavimo da je u drugoj grupi m igrača. S b_m označimo broj načina na koji tih m igrača može biti raspoređeno u liniji. Tada je $b_m = m!$, i pripadna je eksponencijalna funkcija izvodnica jednaka

$$B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m! \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{1-x}.$$

Po Teoremu 2.5.2 znamo da za pripadnu funkciju izvodnicu niza $(c_n)_{n\geq 1}$ vrijedi jednakost $C(x) = A(x)B(x)$ pa je

$$C(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{1-3x} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} x^m.$$

Primjenom poznatog algoritma dobivamo da je koeficijent uz $x^n/n!$ jednak

$$c_n = n! \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Zbog daljnjih potreba prvo ćemo se sjetiti kako se derivira formalni red potencija "član po član":

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \right)' = (a_0)' + \frac{(a_1 x)'}{1!} + \cdots + \frac{(a_n x^n)'}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}. \tag{2.6}$$

A zatim definirajmo još jednu važnu vrstu brojeva.

Definicija 2.5.5. *Broj svih particija skupa L_n u neprazne podskupove označavamo s $B(n)$, i on se zove n-ti* ***Bellov broj****. Posebno stavljamo da je $B(0) = 1$.*

Za te Bellove brojeve imamo ovaj rezultat koji omogućava njihovo rekurzivno računanje.

Teorem 2.5.6. *Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi rekurzija*

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i).$$

Dokaz. Gledajmo element $n+1 \in L_{n+1}$. Ako imamo bilo koju particiju skupa L_{n+1}, element $n+1$ se nalazi u točno jednom skupu S te particije. Ako je $card(S) = k \in \{1, \ldots, n+1\}$, onda se iz skupa $L_n = L_{n+1} \setminus \{n+1\}$ može preostalih $k-1$ elemenata skupa S izabrati na $\binom{n}{k-1}$ načina. A preostalih $n+1-k$ elemenata, koji nisu u skupu S, možemo rasporediti u particije na $B(n+1-k)$ načina. Slijedi da je

$$B(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B(n+1-k).$$

Ili ako promijenimo indeks sumacije tako da stavimo $i = n+1-k$, što je ekvivalentno s $k-1 = n-i$, onda je

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} B(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i);$$

što dokazuje teorem. □

Kao jednostavnu posljedicu prethodnog teorema računamo da je

$$B(0) = B(1) = 1, \quad B(2) = 2, \quad B(3) = 5, \quad B(4) = 15, \quad B(5) = 52, \ldots$$

Sada je sve spremno za sljedeći primjer.

Primjer 2.5.7. *Neka je $B(x)$ eksponencijalna funkcija izvodnica niza Bellovih brojeva $B(n)$. Dokažimo da je $B(x) = e^{e^x-1}$.*

Rješenje. Iz prethodnog teorema znamo da za Bellove brojeve imamo rekurziju

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} B(i)\binom{n}{i},$$

uz početni uvjet $B(0) = 1$. U ovom primjeru definirat ćemo eksponencijalnu funkciju izvodnicu

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n)\frac{x^n}{n!}.$$

Nakon što pomnožimo zadanu rekurziju s $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, te sumiramo po svim negativnim n, dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(n+1)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} B(i)\binom{n}{i}\frac{x^n}{n!}.$$

Iz jednakosti (2.6) i Leme 2.5.1 slijedi da je

$$B'(x) = B(x)e^x$$

$$\frac{B'(x)}{B(x)} = e^x.$$

Nakon integriranja gornje jednakosti dobivamo da je $\ln B(x) = e^x + C$, za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$. Ako uvrstimo $x = 0$, dobivamo da je $\ln B(0) = e^0 + C$, tj. $C = -1$. Slijedi da je $\ln B(x) = e^x - 1$, odnosno vrijedi jednakost $B(x) = e^{e^x-1}$.

2.6 Kompozicija eksponencijalnih funkcija izvodnica

Kao u prethodnom odjeljku i ovdje teoremi korespondiraju s teoremima običnih funkcija izvodnica.

Teorem 2.6.1. *(*Eksponencijalna formula*)*
Neka je a_n broj načina na koji se u n-članom skupu L_n mogu dobiti neke strukture, pretpostavimo da je $a_0 = 0$. Označimo s $A(x)$ pripadnu eksponencijalnu funkciju izvodnicu koja je određena nizom brojeva (a_n). Neka je h_n broj načina na koji možemo skup L_n podijeliti na particije koje čini proizvoljan broj nepraznih skupova i na tim particijama radimo strukture na svakom skupu. Stavimo da je $h_0 = 1$. Ako sada s $H(x)$ označimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu koja je određena nizom tih brojeva (h_n), onda je

$$H(x) = e^{A(x)}.$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Teorema 2.3.2. Kada skup L_n podijelimo na k skupova, dobivamo particiju sačinjenu od k skupova, te na njima radimo neke strukture. Po Teoremu 2.5.2 dobivamo da je $A(x)^k/k!$ pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica koja računa broj takvih struktura. Ovisno o tome na koliko smo skupova dijelili skup L_n te radili strukture na tim skupovima, sumiranjem po svim $k \in \mathbb{N}$, dobivamo $\sum_{k=1}^{\infty} A(x)^k/k!$. Kako je $a_0 = 0$, niti jedan red potencija $A(x)^k/k!$ nema slobodni član različit od nule. Ali po definiciji od $H(x)$ je $h_0 = 1$ pa je

$$H(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(x)^k}{k!} = e^{A(x)}.$$

□

Primjer 2.6.2. *Na koliko različitih načina možemo rasporediti n osoba u grupe tako da sjede za okruglim stolovima?*

Rješenje. Označimo s h_n broj načina na koji možemo rasporediti osobe. S a_k označimo broj načina na koji k osoba možemo rasporediti oko okruglog stola. Tada je $a_k = (k-1)!$ i njegova pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Po Teoremu 2.6.1 imamo

$$H(x) = e^{\ln(1/(1-x))} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \frac{x^n}{n!},$$

gdje je $H(x)$ eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(h_n)_{n\geq 0}$.
Traženo rješenje je $h_n = n!$.

U sljedećem primjeru ćemo koristiti produktnu formulu za eksponencijalne funkcije izvodnice i eksponencijalnu formulu.

Primjer 2.6.3. *Niz $(f_n)_{n\geq 16}$ određuje broj particija skupa L_n čiji su skupovi veličine 3, 4 i 9. Odredimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu $F(x)$.*

Rješenje. S a_n, b_n i c_n označimo brojeve načina na koje možemo složiti elemente skupa L_n u skupove particija koji su redom veličine 3, 4 i 9. Neka su $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ njihove pripadne eksponencijalne funkcije izvodnice. Prvo ćemo promatrati jedan jednostavan niz. S t_n označimo broj načina na koji se može složiti skup particije koji je veličine 3. (Particiju čini jedan skup.) Očito je $t_3 = 1$, a $t_n = 0$ za sve $n \neq 3$. Pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica ovog niza je $T(x) = x^3/3!$. Primjenom eksponencijalne formule dobivamo:

$$A(x) = e^{T(x)} = e^{\frac{x^3}{3!}}.$$

Analognim postupkom dobivamo da je $B(x) = x^4/4!$ i $C(x) = x^9/9!$.
Sada skup L_n dijelimo na 3 skupa i na prvom skupu radimo particije čiji su skupovi veličine 3, na drugom skupu particije čiji su skupovi veličine 4, a na trećem skupu particije čiji su skupovi veličine 9. Primjenom produktne formule za eksponencijalne funkcije izvodnice dobivamo:

$$F(x) = A(x)B(x)C(x) = e^{\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^9}{9!}}.$$

Teorem 2.6.4. *(*Formula kompozicije za eksponencijalne funkcije izvodnice*)*
Neka je a_n broj načina na koji se u n-članom skupu L_n mogu dobiti neke strukture, nazovimo ih tipa 1 *te pretpostavimo da je $a_0 = 0$. Neka je b_n broj načina na koji se u skupu L_n mogu dobiti neke druge strukture, nazovimo ih* tipa 2 *i neka je $b_0 = 1$. Označimo s $A(x)$ i $B(x)$ pripadne eksponencijalne funkcije izvodnice koje su određene nizovima brojeva (a_n) i (b_n). U svakoj particiji skupa L_n čiji su neprazni skupovi pogledajmo broj načina na koji u svakom pojedinačnom skupu particije možemo dobiti strukture tipa 1, a u odgovarajućoj particiji strukture tipa 2. I neka je onda g_n ukupan broj načina tako dobivenih struktura tipa 1 za svaki skup iz particije i dobivenih struktura tipa 2 za odgovarajuću particiju. Stavimo da je $g_0 = 1$. Ako sada s $G(x)$ označimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu koja je određena nizom tih brojeva (g_n), onda je*

$$G(x) = B(A(x)).$$

Dokaz. I ovdje je dokaz analogan dokazu Teorema 2.3.5. Kada skup L_n podijelimo na k dijelova, dobivamo k-članu particiju, te na svakom tom skupu pojedinačno radimo strukture tipa 1. Po Teoremu 2.5.2 dobivamo da je $A(x)^k/k!$ pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica koja računa broj takvih struktura. Istovremeno na toj k-članoj particiji radimo strukture tipa 2. Dobivamo da je b_k broj načina tako dobivenih struktura. Ovisno o tome na koliko smo skupova dijelili skup L_n te radili strukture tipa 1 i tipa 2, sumiranjem po svim nenegativnim k, dobivamo da je G(x)=$\sum_{k=0}^{\infty} b_k A(x)^k/k!$ što smo i htjeli dokazati. □

Primjer 2.6.5. *Na stolu se nalazi n različitih karata. Dijelimo karte u grupe tako da grupe imaju paran broj karata. Zatim slažemo karte unutar svake grupe. Naposljetku, slažemo grupe u liniju. Na koliko različitih načina to možemo učiniti?*

Rješenje. Označimo s g_n broj načina na koji možemo složiti karte. S a_k označimo broj načina na koji možemo složiti k karata unutar neke grupe. Tada je $a_k = k!$ kada je $k = 2l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. (Za $k \neq 2l$ je $a_k = 0$.) Pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica je jednaka

$$A(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

S b_m označimo broj načina na koji možemo složiti m grupa u liniju. Tada je $b_m = m!$. Pripadna eksponencijalna funkcija izvodnica je jednaka

$$B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m! \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1 - x}.$$

Prema Teoremu 2.6.4 vrijedi jednakost $G(x) = B(A(x))$ pa je

$$\begin{aligned} G(x) = B(A(x)) &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1 - x^2}{1 - 2x^2} = 1 + \frac{x^2}{1 - 2x^2} \\ &= 1 + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2x^2)^m = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} 2^m x^{2m+2}, \end{aligned}$$

gdje je $G(x)$ eksponencijalna funkcija izvodnica niza $(g_n)_{n \geq 0}$.
Koeficijent uz $x^n/n!$ je jednak $g_n = 2^{m-2} \cdot (2m)!$ kada je $n = 2m$, odnosno traženo rješenje je

$$g_n = 2^{\frac{n}{2}-2} \cdot n!.$$

Poglavlje 3

Funkcije izvodnice u teoriji brojeva

U ovom poglavlju prikazat ćemo neke primjene rezultata o funkcijama izvodnicama na teoriju brojeva. U prvom odjeljku bavimo se particijama prirodnih brojeva i određujemo brojeve particija od n uz unaprijed postavljene uvjete, a u drugom odjeljku posebno proučavamo tzv. Bernoullijeve brojeve te određujemo rekurzivnu formulu preko koje ih računamo.

3.1 Particije prirodnih brojeva

U teoriji brojeva, ali i u kombinatorici, pojavljuju se problemi o particijama prirodnih brojeva; vidi npr. [2, Chapter 8]. Naime, ako je $n \in \mathbb{N}$, uređena k-torka $(a_1, \ldots, a_k)$ prirodnih brojeva $a_i \in \mathbb{N}$ takvih da je $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ je **particija** od n ako je

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Tako naprimjer za $n = 6$ imamo particije

$$\begin{aligned}
6 &= 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 \\
&= 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2 \\
&= 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}$$

Definirajmo

$$p(n) := \text{broj particija od } n.$$

Zanimljiva, ali u isto vrijeme vrlo netrivijalna, zadaća je računanje brojeva $p(n)$, za $n \in \mathbb{N}$. Tako je naprimjer $p(6) = 11$, što odmah slijedi pobrajanjem gornjih particija broja 6. Isto tako, možemo stavljati razne uvjete na particije brojeva koje nas zanimaju. Naprimjer, možemo zahtijevati da je svaka particija $(a_1, \ldots, a_k)$ takva da je $m \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$, za neki unaprijed određen broj $m \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$p_m(n) := \text{broj particija od } n \text{ u kojoj je svaki sumand} \leq m.$$

Ako naprimjer gledamo $m = 2$ i $n = 6$, onda se iz gornjeg popisa particija od 6 vidi da su sada tražene particije

$$2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1$$

Znači da je $p_2(6) = 4$.
Sljedeći teorem daje funkcije izvodnice brojeva $p_m(n)$.

Teorem 3.1.1. *Ako je realan broj x takav da je $|x| < 1$, onda vrijedi identitet*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_m(n)x^n.$$

Dokaz. Koristeći teorem o geometrijskom redu, imamo identitet

$$\frac{1}{1-x^\ell} = 1 + x^\ell + x^{2\ell} + \cdots .$$

I onda vidimo da je lijeva strana u identitetu iz iskaza teorema jednaka

$$(1 + x + \cdots + x^{n_1} + \cdots)(1 + x^2 + \cdots + x^{2n_2} + \cdots)\cdots(1 + x^m + \cdots + x^{mn_m} + \cdots).$$

Množenjem svih tih izraza dobivamo sumu oblika

$$1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots .$$

Posebno, uz x^n stoji koeficijent c_n koji je jednak broju svih rješenja $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}_0^m$ jednadžbe

$$n_1 + 2n_2 + \cdots + mn_m = n.$$

Isto tako primijetimo da svako takvo rješenje $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ daje jednu particiju od n oblika

$$\underbrace{m + \cdots + m}_{n_m\times} + \underbrace{(m-1) + \cdots + (m-1)}_{n_{m-1}\times} + \cdots + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n_1\times}.$$

Tojest, imamo $n_j \in \mathbb{N}_0$ sumanada j, za svaki $1 \leq j \leq m$. Ali to zapravo znači da je $c_n = p_m(n)$. $\square$

Kao ilustraciju, ali i za bolje razumijevanje dokaza gornjeg teorema, pogledajmo primjer kada je $m = 2$. Sada je lijeva strana u iskazu teorema jednaka

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots).$$

Ako izmnožimo izraze na desnoj strani gornje jednakosti, vidimo da x^6 možemo dobiti ovako:

$$1 \cdot x^6 = x^2 \cdot x^4 = x^4 \cdot x^2 = x^6 \cdot 1.$$

Znači, rješenja jednadžbe $n_1 + 2n_2 = 6$ su

$$(n_1, n_2) \in \{(0,3), (2,2), (4,1), (6,0)\};$$

i ona daju skup particija broja 6 jednak

$$\{2 + 2 + 2, 2 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\},$$

koji smo i prije dobili. I onda je $p_2(6) = 4$, što smo također već prije vidjeli.

Vezano uz particije, kažimo i sljedeće. Pretpostavimo da imamo particiju broja n danu s $n = a_1 + \cdots + a_k$, gdje je $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$. Ta se particija zorno može prikazati tzv. **Youngovim dijagramom** veličine n,

$$\begin{array}{l}
\square\ \square \quad\quad \cdots \quad\quad \square \\
\square\ \square \quad \cdots \quad \square \\
\quad\ \cdots \quad \cdots \\
\square\ \square \cdots \square
\end{array}$$

tako da imamo k redaka, a u i-tom retku gornjeg dijagrama imamo a_i kvadratića $\square$. Naprimjer, particiju $8 = 4 + 3 + 1$ prikazujemo kao

$$\begin{array}{llll}
\square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \\
\square & & &
\end{array}$$

Na Youngovim dijagramima, te pripadnim particijama, definirana je operacija **konjugiranja** (ili **transponiranja**) ovako. Ako je dan neki Youngov dijagram π, koji je particija od n, tada se konjugat π^t dobiva tako da "zarotiramo" oblik π oko zamišljene dijagonale koja prolazi gornjim lijevim i donjim desnim vrhom prvog kvadratića u prvom redu. Naprimjer, ako s π označimo gornju particiju broja 8, onda je konjugirana particija π^t jednaka

$$\begin{array}{lll}
\square & \square & \square \\
\square & \square & \\
\square & \square & \\
\square & &
\end{array}$$

Vezano uz prethodni teorem dokažimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.1.2. *Broj particija broja $n \in \mathbb{N}$ u najviše m sumanada jednak je $p_m(n)$, broju particija broja n u sumande koji su svi $\leq m$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}_m$ skup svih particija broja n oblika $n = a_1 + \cdots + a_k$ takvih da je $k \leq m$. Isto tako, neka je $\mathcal{B}_m$ skup svih particija $n = b_1 + \cdots + b_\ell$ takvih da je svaki $b_i \leq m$. Ako je dana neka particija $\pi \in \mathcal{A}_m$, nju prikazujemo Youngovim dijagramom koji ima najviše m redaka. Ali ako sada napravimo konjugat π^t dobit ćemo particiju broja n koja u svakom retku ima najviše m kvadratića $\square$. Drugim riječima, imamo da je $\pi^t \in \mathcal{B}_m$. Ta korespondencija $\pi \mapsto \pi^t$ je evidentno bijekcija sa skupa $\mathcal{A}_m$ na skup $\mathcal{B}_m$. To posebno znači da je

$$p_m(n) := card(\mathcal{B}_m) = card(\mathcal{A}_m);$$

i propozicija je dokazana. $\square$

Analogno Teoremu 3.1.1, može se dokazati i sljedeći teorem.

Teorem 3.1.3. *Ako je realan broj x takav da je $|x| < 1$, onda vrijedi identitet*

$$\phi(x) := \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n;$$

tj., $\phi(x)$ je funkcija izvodnica niza brojeva $(1, p(1), p(2), \ldots)$.
Isto tako, ako definiramo

$$q(n) := \text{broj particija broja } n \text{ u neparne sumande},$$

onda je

$$\psi(x) := \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(n)x^n;$$

tj., $\psi(x)$ je funkcija izvodnica niza brojeva $(1, q(1), q(2), \ldots)$.

Kao ilustraciju Teorema 3.1.3, pogledajmo primjer particija broja 10 u neparne sumande. Sve moguće takve particije su ove:

$$\begin{aligned}
10 &= 9+1 = 7+3 = 7+1+1+1 \\
&= 5+5 = 5+3+1+1 = 5+1+1+1+1+1 \\
&= 3+3+3+1 = 3+3+1+1+1+1 \\
&= 3+1+1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

S druge strane, ako gledamo kako dobiti potenciju x^{10} u produktu

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots),$$

onda su sve mogućnosti ove:

$$\begin{aligned} x^{10} &= 1 \cdot 1 \cdot x^{10} = 1 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot x^7 = x \cdot x^9 = x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^9 \\ &= x^2 \cdot x^3 \cdot x^5 = x^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^7 = x^4 \cdot x^6 \\ &= x^5 \cdot 1 \cdot x^5 = x^7 \cdot x^3 = x^{10}. \end{aligned}$$

(Ovdje koristimo notaciju $x^{t_1} \cdot x^{t_2} \cdots x^{t_r}$, za produkt u kojem iz j-tog reda, u gornjem produktu redova, uzimamo faktor x^{t_j}; tj., $x^{t_j} = x^{(2j-1)s_j}$, za odgovarajući $s_j \in \mathbb{N}_0$.) Koji god od ta dva skupa pobrojili, dobivamo da je $q(10) = 10$.

Dobro je primijetiti kako prethodni teorem pokazuje da zapravo imamo dva načina na koje možemo računati brojeve $p(n)$; i analogno za brojeve $q(n)$. No, ukoliko bismo naprimjer htjeli izračunati (bez primjene računala) brojeve $p(100)$ i $q(100)$, oba su načina praktički vrlo mukotrpna za provesti. Tu se onda prirodno nameće pitanje da se proba naći neki alternativni način računanja brojeva $p(n)$, ili $q(n)$; a isto tako i razne "varijacije" tih brojeva koje računaju broj particija brojeva $n \in \mathbb{N}$, uz neke dane uvjete. Napomenimo kako naprimjer za brojeve $p(n)$, kada je n velik, nema neke poznate metode koja bi egzaktno računala te brojeve. Međutim, postoje neki vrlo netrivijalni rezultati koji govore kako se funkcija $n \mapsto p(n)$ ponaša asimptotski kada $n \to \infty$. Za ilustraciju navedimo bez dokaza sljedeći rezultat, čiji se dokaz može naći naprimjer u [2, Chapter 8,6]

Teorem 3.1.4. *Asimptotsko ponašanje funkcije $n \mapsto \ln p(n)$ dano je formulom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln p(n)}{\sqrt{n}} = \pi\sqrt{2/3}.$$

Posebno, iz ovog teorema dobivamo približnu vrijednost, ili bolje rečeno "red veličine", broja $p(100)$:

$$\frac{\ln p(100)}{\sqrt{100}} \approx \pi\sqrt{2/3} \;\Rightarrow\; p(100) \approx e^{10\pi\sqrt{2/3}} \approx 1,38 \times 10^{11}.$$

(Sada je jasno da nam za "računanje na prste" broja $p(100)$ ne bi bio "jedan život ni približno dovoljan". Jer kada bismo netom iza rođenja odmah počeli popisivati tražene particije, i to tako da svake sekunde nađemo jednu, te da to radimo "24 sata na dan", u 100 godina života popisali bismo otprilike 3153600000 particija!)

3.2 Bernoullijevi brojevi

U ovom odjeljku prezentiramo neke rezultate iz [3, I.19.90], koji su prezentirani u [9] u malo drugačijoj formi.
Pretpostavimo da imamo redove potencija $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$ i $g(z) = \sum_{m\geq 0} b_m(z-z_0)^m$, gdje su $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, koji oba konvergiraju na otvorenom krugu $K(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}$, za neki radijus $r > 0$. Još pretpostavimo:

($\heartsuit$) $g(z)$ nema nultočaka na $K(z_0, r)$; tj., $g(z) \neq 0$, za svaki $z \in K(z_0, r)$.

Onda definirajmo funkciju
$$F(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$
Jasno da je F, kao kvocijent dvije analitičke funkcije f i g, također analitička funkcija; tj., F ima razvoj u Taylorov red
$$F(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n.$$
Sada je prirodno postaviti sljedeće pitanje:

- *Kako računati koeficijente c_n, ako znamo koeficijente a_n i b_n?*

Napomena 3.2.1. *Radi jednostavnosti pisanja, od sada nadalje pretpostavljamo da je $z_0 = 0$; tj., imamo redove potencija $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$, $g(z) = \sum_{m\geq 0} b_m z^m$ i $F(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$.*

Da bismo dobili odgovor na gornje pitanje, usporedimo koeficijente uz potencije z^i u jednakosti redova
$$(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots).$$
Odmah vidimo da tako dobivamo
$$c_0 b_0 = a_0, \quad c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1, \quad c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2, \ldots.$$
Općenito,
$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0 = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$
I onda dobivamo posebno
$$c_0 = \frac{a_0}{b_0} \quad \text{i} \quad c_1 = \frac{a_1 - c_0 b_1}{b_0} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}.$$

Ako napišemo prvih $n+1$ gornjih jednakosti (3.1), dobivamo sustav s nepoznanicama $c_0, c_1, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned}
&c_0 b_0 = a_0\\
&c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1\\
&c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2\\
&\quad \ldots \qquad \ldots\\
&c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0 = a_n
\end{aligned}$$

Imajući na umu Cramerovo pravilo, prvo primijetimo da je matrica toga sustava

$$M = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Jasno, $\det M = b_0^{n+1} \neq 0$. I onda neka je M_n matrica koja se dobije tako da u M posljednji stupac zamijenimo stupcem $(a_0, a_1, \ldots, a_n)^t$. (Ovdje "t" označava transponiranje retka $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.) Dakle,

$$M_n = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & a_0\\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & a_1\\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Po Cramerovom pravilu je onda

$$c_n = \frac{\det M_n}{\det M} = \frac{\det M_n}{b_0^{n+1}}. \tag{3.2}$$

Isto tako primijetimo da se iz (3.1) odmah dobije rekurzivna formula za računanje c_n pomoću već dobivenih koeficijenata $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Sasvim precizno, imamo

$$c_n = \frac{1}{b_0}(a_n - c_0 b_n - c_1 b_{n-1} - \cdots - c_{n-1} b_1).$$

Sada ćemo gornju proceduru za računanje koeficijenata c_n primijeniti u jednom vrlo zanimljivom slučaju. Promatrajmo funkciju

$$F(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Ako stavimo $f(z) = 1$ i $g(z) = (e^z - 1)/z$, onda je $F(z) = f(z)/g(z)$. Jasno, $f(z) = 1$ je (konstantan) polinom, i to je Taylorov red funkcije f u okolini točke $z_0 = 0$. Isto tako, dobro je poznato da je Taylorov red funkcije g jednak

$$g(z) = \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \cdots .$$

Znači da su koeficijenti u tim Taylorovim razvojima:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{i} \qquad b_n = \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde slijedi da su koeficijenti c_n u Taylorovom redu $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ dani s $c_0 = 1$, i rekurzivno

$$c_0 \frac{1}{(n+1)!} + c_1 \frac{1}{n!} + \cdots + c_{n-1} \frac{1}{2!} + c_n = 0.$$

Iz (3.2) u ovom konkretnom slučaju dobivamo eksplicite da je

$$\begin{aligned} c_n &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1/2! & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/3! & 1/2! & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/(n+1)! & 1/n! & 1/(n-1)! & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} 1/2! & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/3! & 1/2! & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/(n+1)! & 1/n! & 1/(n-1)! & \cdots & 1/2! \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Ovdje smo u posljednjoj jednakosti koristili Laplaceov razvoj determinante po zadnjem stupcu.

Definicija 3.2.2. *Brojevi*

$$B_n := c_n n!, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

zovu se ***Bernoullijevi brojevi****.*

Bernoullijevi brojevi imaju vrlo važnu ulogu u matematici; posebno u kombinatorici i teoriji brojeva. Prije negoli kažemo nešto više o njima, primijetimo kako smo u gornjim razmatranjima zapravo dokazali sljedeći rezultat.

Teorem 3.2.3. *Funkcija* $F(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ *ima Taylorov razvoj*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi, \tag{3.3}$$

gdje su B_n Bernoullijevi brojevi. Posebno, $F(z)$ je funkcija izvodnica Bernoullijevih brojeva, ili preciznije rečeno, brojeva $B_n/n!$.

Napomena 3.2.4. *Zapravo, mi nismo dali precizan dokaz da funkcija $F(z)$ ima Taylorov razvoj, dan s (3.3), na skupu $|z| < 2\pi$. To se vidi ovako. Prvo se sjetimo Eulerove formule $e^{\imath w} = \cos w + \imath \sin w$, za $w \in \mathbb{C}$. Ako sada stavimo $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$ realni i imaginarni dio od z, onda je*

$$e^z = e^x \cdot e^{\imath y} = e^x(\cos y + \imath \sin y).$$

Onda slijedi da je

$$e^z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y = 1 \quad i \quad e^x \sin y = 0.$$

Iz posljednjeg se para jednadžbi lako dobije da je onda $x = 0$ i $y = 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Drugim riječima, pokazali smo da su sve nultočke funkcije $e^z - 1$ oblika $z_k = 2k\pi\imath$, za $k \in \mathbb{Z}$. Odavde, iz opće teorije analitičkih funkcija (Taylorov teorem o razvoju holomorfne funkcije u red potencija) slijedi da je radijus konvergencije Taylorovog reda od $F(z)$ u okolini točke $z_0 = 0$ jednak udaljenosti od $z_0 = 0$ do najbližeg singulariteta funkcije $F(z)$. Ali ti najbliži singulariteti su upravo nultočke $\pm 2\pi\imath$ nazivnika $e^z - 1$, u funkciji $F(z)$. Znači, radijus konvergencije je $\rho = |\pm 2\pi\imath - 0| = 2\pi$.

Iz (3.1) i definicije Bernoullijevih brojeva odmah se vidi da imamo rekurzivnu relaciju za B_n-ove:

$$B_0\binom{n+1}{0} + B_1\binom{n+1}{1} + \cdots + B_n\binom{n+1}{n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dobivamo rekurzivnu formulu za računanje Bernoullijevih brojeva:

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{n+1}B_{n-k},$$

uz početni uvjet $B_0 = 1$.
Onda se lako računa:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \ldots$$

Primijetimo kako $B_3 = B_5 = B_7 = 0$ nije slučajnost. Naime, vrijedi sljedeća posljedica prethodnog teorema.

Korolar 3.2.5. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $B_{2n+1} = 0$. I onda kao posljedicu imamo da je Taylorov red*

$$F(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 2\pi.$$

Dokaz. Po prethodnom teoremu imamo da je

$$\frac{ze^z}{e^z - 1} = \frac{-z}{e^{-z} - 1} = F(-z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Slijedi da je

$$-z = F(z) - F(-z) = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Usporedbom koeficijenata uz z^{2n+1}, za $n \in \mathbb{N}$, korolar slijedi. □

Napomena 3.2.6. *Gledajući gore izračunate vrijednosti Bernoullijevih brojeva B_0, B_1, B_2, B_4, B_6 i B_8, moglo bi se pomisliti da će vrijednosti $|B_{2n}|$ biti ograničene. Međutim, to nije tako. Naime, sjetimo se sljedeće činjenice. Ako kompleksna holomorfna funkcija $f(z)$ ima Taylorov red $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ koji konvergira na nekom otvorenom krugu oko z_0 radijusa ρ, onda po Cauchy-Hadamardovoj formuli imamo da je*

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

Sada, za našu funkciju $F(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$, po gornjem teoremu imamo da su koeficijenti $a_{2n} = B_{2n}/(2n)!$, za $n \in \mathbb{N}$. S druge strane, rekli smo, i komentirali tu činjenicu, da je radijus konvergencije pripadnog Taylorovog reda jednak $\rho = 2\pi$. Kao posljedicu navedenoga, imamo da je

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[2n]{\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Primjenom Leme 1.1.1(ii) slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo članova niza (a_{2n}) takvih da je $\sqrt[2n]{a_{2n}} > 1/(2\pi + \varepsilon)$. Drugačije rečeno, potenciranjem zadnje nejednakosti na $2n$-tu potenciju, vidimo da postoji beskonačno mnogo vrijednosti $n \in \mathbb{N}$ takvih da je

$$|B_{2n}| > \frac{(2n)!}{(2\pi + \varepsilon)^{2n}}.$$

Tu još jedino treba primijetiti kako je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{(2\pi + \varepsilon)^{2n}} = +\infty.$$

Bibliografija

[1] Miklos Bona, *A walk through combinatorics: An introduction to enumeration and graph theory*, University of Floria, SAD, 2006.

[2] L. K. Hua, *Introduction to number theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[3] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable: Three volumes in one*, Chelsea Publishing Company, New York, 1985.

[4] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, University of Pennsylvania, SAD, 2006.

[5] N. A. Loehr, *Combinatorics*, Chapman and Hall, United Kingdom, 2017.

[6] E. A. Bender, S. G. Williamson, *Foundations of combinatorics with applications*, Dover Publications, New York, 2006.

[7] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2009.

[8] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Combinatorial enumeration*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[9] B. Širola, Rukopis predavanja iz predmeta *Teorija analitičkih funkcija*

Sažetak

U ovom radu govorimo o funkcijama izvodnicama i njihovoj primjeni pri određivanju eksplicitne formule za opći član niza. Na samom početku dajemo jedan motivacijski primjer u kojem je potrebno odrediti formulu za opći član niza gdje uvodimo i definiramo običnu funkciju izvodnicu. Nadalje, popisujemo sve popratne teoreme koje primjenjujemo u raznim primjerima kombinatoričkih problema. Na isti način uvodimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu. Na kraju promatramo funkciju izvodnicu u teoriji brojeva te pomoću nje dolazimo do rekurzivne formule za Bernoullijeve brojeve.

Summary

In this graduate thesis we are talking about generating functions and their use with determining the explicit formula for the general sequence member. Right at the beginning we will show a motivational example in which it's necessary to determine the general formula for the general sequence member where we introduce and define the ordinary generating function. Furthermore, we will describe all following theorems which will be applied in different examples of combinatorial problems. In the same way we will introduce the exponential generating function. At the end we will observe the generating function in number theory and use it to get to the recursive formula for Bernoullis numbers.

Životopis

Zovem se Monika Režak. Rođena sam 05. kolovoza 1990. u Banja Luci, u Republici Bosni i Hercegovini. Odrasla sam u malom selu nadomak Sunje. Osnovnu školu Sunja sam završila u istoimenome mjestu. Nakon toga sam upisala Gimaziju Sisak, prirodoslovno-matematički smjer. Godine 2011. sam na Prirodoslovno matematičkom fakultetu (PMF) upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički. Titulu sveučilišne prvostupnice (baccalaureus) edukacije matematike stekla sam 2015. godine, te iste godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.