SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Šalković

NETO PREMIJE I MATEMATIČKE REZERVE OSNOVNIH OBLIKA ŽIVOTNIH OSIGURANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, veljača 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

*Zahvaljujem svom mentoru prof.dr.sc. Damiru Bakiću na izdvojenom vremenu,
strpljenju i korisnim savjetima tijekom izrade ovog diplomskog rada.
Hvala kolegicama na godinama prijateljstva i nezaboravnim trenucima zajedničkog
učenja.
Mojim roditeljima i obitelji, neizmjerno hvala na razumijevanju i podršci.*

Sadržaj

Uvod

Jedna od stvari u životu kojoj težimo je financijska sigurnost. Ipak, život je pun nepredvidivih događaja. Ne znamo u kojem trenutku nas može zadesiti npr. smrt člana obitelji (što će ostale članove ostaviti bez prihoda ili dijela prihoda), različite zdravstvene poteškoće ili teška bolest (što će dovesti do velikih financijskih troškova za liječenje) i sl. Kakve god mjere predostrožnosti poduzimali, nikada ne možemo otkloniti takve rizike. Poduzimanjem koraka unaprijed, možemo ublažiti financijski gubitak kojeg takvi događaji donose. Jedna od najčešće korištenih mjera je upravo kupnja osiguranja.
Cilj ovog rada je izvesti formule za iznos neto premija osnovnih oblika životnih osiguranja kao i za iznos potrebne matematičke rezerve u svakom danom trenutku nakon sklapanja police. Prilikom kupnje osiguranja, sklapa se ugovor između osiguravajućeg društva (osiguravatelj) i osobe koja kupuje osiguranje (osiguranik) koji se često naziva polica osiguranja. Njome osiguravatelj pristaje na isplatu novca, što nazivamo naknadama, u određeno vrijeme, nakon pojave određenih događaja. Zauzvrat, osiguranik pristaje na plaćanje propisanih iznosa osiguravajućem društvu. Upravo te iznose nazivamo premijama, a spomenuti događaj osiguranim događajem. Ukoliko je osigurani događaj smrt osobe ili doživljenje određene dobi, govorimo o životnom osiguranju.

Rad je podijeljen u 5 poglavlja. U početnom poglavlju navodimo glavne pojmove iz financijske matematike potrebne za daljnje razumijevanje. Drugo poglavlje posvećeno je determinističkom modelu doživljenja - tablicama smrtnosti. Glavne karakteristike osnovnih oblika životnih osiguranja navodimo u trećem poglavlju te dajemo formule za njihove sadašnje vrijednosti. U centralnom dijelu rada, četvrtom poglavlju, definira se pojam neto premije te se izvode formule za izračun neto premija za neposredne doživotne vrste osiguranja. Na kraju poglavlja demonstrirano je par primjera pri čemu koristimo Tablice smrtnosti Republike Hrvatske
($https://www.dzs.hr/hrv/important/Notices/tablice\_mortaliteta\_2000-2002.pdf$).
Posljednje poglavlje objašnjava pojam matematičke rezerve i daje formule za njihov iznos u slučaju osiguranja života. Na samom kraju rada, na primjeru doživotne rente predstavljamo dva moguća pristupa kod izračuna rezervi.

Poglavlje 1

Osnove financijske matematike

U ovom poglavlju uvest ćemo i matematički definirati glavne pojmove u financijskom svijetu kako bismo kasnije mogli razumijeti na koji način se dobivaju formule za neto premije, kako se one računaju te o kojim sve parametrima ovise. Kratak pregled započinjemo kamatnim stopama, zatim ćemo objasniti akumulaciju i funkciju diskontiranja te na koji način uspoređujemo iznose iz različitih trenutaka.

1.1 Kamatne stope

Pojmovi kamata i kamatna stopa nešto je s čim se najčešće susrećemo u financijama. Kamata je, najjednostavnije rečeno, cijena upotrebe tuđih novčanih sredstava. Kada odlučimo posuditi novac netko mora biti spreman odreći se određenog iznosa na neko vrijeme kako bi nam ga posudio. Za to odricanje tražit će naknadu - ta naknada zove se kamata. Jedan ilustrativan primjer bio bi uzimanje kredita. Banka se tada odriče iznosa kojeg nam posuđuje uz određenu kamatu, tj. uz posuđeni iznos mi još trebamo vratiti i taj iznos naknade za posuđivanje(kamatu). S druge strane, kada stavljamo depozit na štednju, tada se mi odričemo iznosa kojeg dajemo banci na korištenje tijekom ugovorenog razdoblja. Istekom tog razdoblja na uloženi iznos depozita očekujemo kamatu, naknadu što su mogli koristiti naš novac. Kamata se izražava kao postotak, odnosno udio posuđenog iznosa kojeg dužnik treba platiti i taj postotak nazivamo kamatna stopa. Za jedinični vremenski interval, koji u teoriji može biti bilo koji, u praksi se često uzima 1 godina. Tako ćemo i mi uzeti. Također, ovdje ćemo pretpostaviti da se kamata isplaćuje na kraju fiksnog perioda.

Pretpostavimo da je u trenutku t investiran iznos 1 na period od 1 godine. Neka se u trenutku $t+1$ (nakon 1 godine) isplaćuje(vraća) iznos $1+i(t)$. Tada se $i(t)$ zove *kamatna stopa za jedinični vremenski period* $[t, t+1]$ ili češće, *godišnja efektivna kamatna stopa.* Nadalje, pretpostavimo da kamatna stopa $i(t)$ ne ovisi o visini uloženog kapitala. Uložimo li iznos 1 ili 100, kamatna stopa će biti jednaka. Nakon jedne godine dobit ćemo $1 + i(t)$ ili $100 + 100 \cdot i(t)$, respektivno. Općenito, investiramo li iznos C, nakon godinu dana dobit ćemo iznos $C(1 + i(t))$. Možemo se pitati, koliko ćemo dobiti nakon n godina ($n \in \mathbb{N}$) ako u trenutku $t = 0$ investiramo iznos C_0? U sustavu složene kamate, u trenutku $t = n$ vrijedi:

$$C_n = C_0(1 + i(0))(1 + i(1))(1 + i(2)) \cdots (1 + i(n-1)) \quad , n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Ako još pretpostavimo da efektivna kamatna stopa ne ovisi niti o trenutku t u kojem se investira(kažemo da je konstantna u vremenu), već samo o duljini investicije (trenutno je kod nas to jedna godina) imamo $i(t) = i, \ \forall t$. Iz gornje formule slijedi:

$$C_n = C_0(1 + i)^n \quad , n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Vrijednost C_n zovemo *akumulacija* od C_0 za n godina po godišnjoj efektivnoj kamatnoj stopi i.
Kao što smo na početku naglasili, naša vremenska jedinica je 1 godina. I dalje pretpostavljamo da kamatna stopa ne ovisi o visini investiranog iznosa zbog čega nam je dovoljno promatrati slučaj kada je investirani iznos jednak 1 (slučaj kad je investiran iznos C dobivamo proporcionalno). Sada želimo promatrati investicije u trajanju $h > 0$ pri čemu h nije nužno cijeli broj (npr. $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$ i sl.). Neka je promatrani vremenski interval $[t, t + h]$ i zanima nas povrat na investiciju u iznosu 1 investiranu u trenutku t. Neka investicija u iznosu 1 investirana u trenutku t, u trenutku $t + h$ vrijedi $A(t, t + h)$. Pišemo:

$$A(t, t + h) = 1 + hi_h(t) \tag{1.3}$$

Time smo definirali:

$$i_h(t) = \frac{A(t, t + h) - 1}{h} \tag{1.4}$$

Broj $i_h(t)$ zovemo godišnja *nominalna kamatna stopa* u trenutku t za investiciju na intervalu $[t, t + h]$. Ako stavimo $h = 1$, dobivamo $1 + i_1(t) = A(t, t + 1)$. Iz definicije godišnje efektivne kamatne stope i značenja $A(t, t + 1)$ slijedi:

$$i_1(t) = i(t) \tag{1.5}$$

Za jednu godinu (na intervalu $[t, t + 1]$) nominalna kamatna stopa $i_1(t)$ u trenutku t jednaka je efektivnoj kamatnoj stopi $i(t)$ u trenutku t. U praksi, akumulacija iznosa od trenutka t do trenutka t+h, A(t,t+h), odnosno kamatne stope su neovisne o vremenu (nije važno u kojem trenutku investiramo već je važno na koliko dugo, duljina perioda). Matematički zapisujemo $i_h(t) = i_h, \ \forall t$. U slučajevima polugodišnjih ($h = \frac{1}{2}$), kvartalnih($h = \frac{1}{4}$), mjesečnih($h = \frac{1}{12}$) ili dnevnih ($h = \frac{1}{365}$) ukamaćivanja uočavamo da je h oblika $h = \frac{1}{p}, \ p \in \mathbb{N}$. Za takve h dogovoreno je pisati:

$$i_h = i_{\frac{1}{p}} = i^{(p)}, \quad p \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

Važno je zapamtiti da je to samo dogovorena oznaka za slučaj kada je $h = \frac{1}{p}, \ p \in \mathbb{N}$. U tom slučaju formula (1.3) izgleda $A(t, t + \frac{1}{p}) = 1 + \frac{i^{(p)}}{p}$ i kaže da investicija u iznosu 1, položena u bilo kojem trenutku, po isteku $\frac{1}{p}$ godine daje povrat $1 + \frac{1}{p} \cdot i^{(p)}$. Tada kamatnu stopu $i^{(p)}$ zovemo godišnja *nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje.* Na primjer, izračunajmo iznos akumulacije investiranog iznosa 100 po godišnjoj nominalnoj kamatnoj stopi 4% nakon pola godine. Imamo:
$h = \frac{1}{2}, \ i^{(2)} = 0.04$ i akumulirani iznos jednak je
$100A(0, \frac{1}{2}) = 100(1 + \frac{i^{(2)}}{2}) = 100(1 + \frac{0.04}{2}) = 102$
Nakon pola godine investiranih 100 akumulira se do iznosa 102.

1.2 Akumulacijski faktor

Neka su t_1 i t_2 trenuci. Definiramo $A(t_1, t_2)$ kao akumulaciju (povrat) u trenutku t_2 od investicije iznosa 1 investirane u trenutku t_1. Trenutak t_1 zovemo trenutak investicije, a trenutak t_2 trenutak dospijeća. Također, definiramo $A(t, t) := 1, \ \forall t$ Akumulacije smatramo poznatim (podaci iz prošlosti) ili predvidivim za buduće trenutke. Obično se predviđaju na temelju očekivanih tržišnih uvjeta. Prisjetimo se kako već iz gornje definicije (1.3) imamo: $A(t, t + h) = 1 + hi_h(t)$ i kako je $A(t_1, t_2)$ akumulacija jediničnog kapitala pa vrijedi proporcionalnost:

$$C(t_2) = C(t_1)A(t_1, t_2) \tag{1.7}$$

Tj. ako u trenutku t_1 investiramo iznos $C(t_1)$, akumulacija u trenutku t_2 iznosit će $C(t_1)$ puta akumulacija jediničnog kapitala za to razdoblje, $A(t_1, t_2)$. Koeficijent proporcionalnosti je jedinična akumulacija $A(t, t + h)$ (u (1.7) $t = t_1, t + h = t_2$) koju nazivamo *akumulacijski faktor.*
Neka su sada $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ proizvoljni trenuci i promotrimo investiciju u iznosu 1 u trenutku t_0. Prema definiciji akumulacije, u trenutkut t_2 imamo iznos $A(t_0, t_2)$. Pogledajmo još jednu mogućnost na tom intervalu. Recimo da investiramo u trenutku t_0 do trenutka t_1 u kojem onda imamo $A(t_0, t_1)$. Zatim reinvestiramo taj iznos, tj. u trenutku t_1 investiramo iznos $A(t_0, t_1)$ do trenutka t_2. Koristeći definiciju akumulacije i proporcionalnost zaključujemo da u trenutku t_2 imamo iznos $A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)$.

Intuitivno nam je jasno da bi akumulacija u trenutku t_2, u oba slučaja, trebala biti jednak iznos. U stvarnosti to ipak nije tako zbog administrativnih troškova, poreza i sl. naknada. U teoriji konzistentnih tržišta to mora vrijediti i mi ćemo nadalje pretpostavljati da je taj uvjet zadovoljen. Tom pretpostavkom smo formirali *princip konzistencije*:

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2),\ \forall\ t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \qquad \text{(princip konzistencije)}$$

Matematičkom indukcijom pokaže se da vrijedi:

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)\cdots A(t_{n-1}, t_n)\ \forall t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 ... \leqslant t_n,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

1.3 Veza efektivne i nominalne kamatne stope

Pretpostavimo konstantnu i fiksnu godišnju efektivnu kamatnu stopu, tj. $i(t) = const. = i,\ \forall t$. Za fiksirani $p \in \mathbb{N}$, zanima nas koja godišnja nominalna kamatna stopa $i^{(p)}$, plativa p puta godišnje, nakon godine dana daje isti prinos(akumulaciju) kao efektivna kamatna stopa i. Želimo za danu efektivnu kamatnu stopu i naći njoj ekvivalentnu nominalnu kamatnu stopu $i^{(p)}$ plativu p puta godišnje pri čemu je $p \in \mathbb{N}$ fiksiran. Promatramo vremenski interval $[0, 1]$ i slučaj investicije u iznosu 1. Zbog neovisnosti kamatne stope o trenutku t i jednakosti (1.3) slijedi:

$$A\left(t, t + \frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{1}{p} i^{(p)} \ \Rightarrow A\left(0, \frac{1}{p}\right) = A\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right) = ... = A\left(\frac{p-1}{p}, 1\right) = 1 + \frac{1}{p} i^{(p)}$$

Prema pretpostavci principa konzistencije (1.8):

$$\Rightarrow 1 + i \stackrel{1.5}{=} 1 + i_1 = A(0, 1) \stackrel{1.8}{=} A\left(0, \frac{1}{p}\right) A\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right) \cdots A\left(\frac{p-1}{p}, 1\right) = \left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p$$

$$\Rightarrow 1 + i = \left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p \quad tj. \quad \Rightarrow i^{(p)} = p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right) \tag{1.9}$$

Kažemo da je efektivna kamatna stopa i ekvivalentna nominalnoj $i^{(p)}$ i obratno.
Iz upravo izvedenog važno je uočiti da *za fiksnu efektivnu kamatnu stopu* i, akumulacijski faktor za interval $[t, t + h]$ možemo iskazati:

$$A(t, t + h) = (1 + i)^h \tag{1.10}$$

U prošlom primjeru računali smo akumulaciju nakon pola godine ($h = \frac{1}{2}$) iznosa 100 uz nominalnu kamatnu stopu 4% plativu dva puta godišnje(polugodišnje). Izračunajmo sada za tu nominalnu kamatnu stopu ($i^{(2)} = 0.04$) ekvivalentnu efektivnu kamatnu stopu i te akumulaciju iznosa 100 po efektivnoj kamatnoj stopi. Prema izvedenoj formuli vrijedi:

$$i = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.04\right)^2 - 1 = 0.0404 \;\Rightarrow\; i = 4.04\%$$

Računamo akumulaciju nakon pola godine:

$$100 \cdot A\left(t, t + \frac{1}{2}\right) \overset{(1.10)}{=} 100(1 + 0.0404)^{\frac{1}{2}} = 100 \cdot 1.02 = 102$$

Zanimljivo je uočiti da vrijedi:

$$i > i^{(p)},\ \forall p > 1 \tag{1.11}$$

Štoviše, vrijedi:

$$i = i_1 > i^{(2)} > i^{(3)} > ... \tag{1.12}$$

Dokaz zadnje tvrdnje može se naći u [1] odakle i slijedimo čitavu ovu priču i preuzimamo dokaz prve tvrdnje:

Dokaz.

$$\begin{aligned} 1 + i &\overset{ekvivalentnost}{=} \left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p \overset{Binomna\_formula}{=} \sum_{k=0}^{p} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right) \left(\frac{i^{(p)}}{p}\right)^k 1^{p-k} \\ &= 1 + p\frac{i^{(p)}}{p} + \sum_{k=2}^{p} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right) \left(\frac{i^{(p)}}{p}\right)^k \geq 1 + i^{(p)} \\ &\Rightarrow i = i_1,\ i > i^{(p)}\ \forall p \geq 2 \end{aligned}$$

□

1.4 Intenzitet kamate

Vidjeli smo da za konstantnu efektivnu kamatnu stopu imamo ekvivalentnu nominalnu kamatnu stopu plativu p puta godišnje. Plativa p puta godišnje govori nam kako se unutar vremenske jedinice (godine) dogodilo p reinvestiranja. Također, naveli smo rezultat kako se s povećanjem broja reinvestiranja ekvivalentna godišnja nominalna kamatna stopa smanjuje. Što kada bismo promatrali neprekidno ukamaćivanje (reinvestiranje), tj. da se ono događa u svakom trenutku? Koja bi tada bila godišnja nominalna kamatna stopa? U tom slučaju povećavamo broj reinvestiranja $(p \mapsto \infty)$, odnosno smanjujemo duljinu perioda $\left(h = \frac{1}{p} \mapsto 0^+\right)$. Gledali bismo $\lim\limits_{h \mapsto 0^+} i_h$ i pretpostavili da taj limes postoji. Tada definiramo:

$$\delta := \lim_{p \mapsto \infty} i^{(p)}$$

Iz definicije nominalne kamatne stope $i_h = \frac{A(t,t+h)-1}{h}$ i izvedenog izraza za akumulaciju uz fiksnu efektivnu kamatnu stopu (1.10) slijedi:

$$\delta = \lim_{p \mapsto \infty} i^{(p)} = \lim_{p \mapsto \infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - (1+i)^0}{\frac{1}{p}} = \left| \begin{array}{c} definicija\ derivacije \\ funkcije\ (1+i)^x\ za\ x=0 \end{array} \right|$$
$$= ln(1+i) \quad \Rightarrow \delta = ln(1+i) \quad \Rightarrow \quad e^{\delta} = 1+i \tag{1.13}$$

Općenito, bez pretpostavke o fiksnoj kamatnoj stopi, pretpostavljamo da postoji i definiramo:

$$\delta(t) := \lim_{h \mapsto 0^+} i_h(t) \overset{(1.3)}{=} \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{A(t,t+h)-1}{h} \tag{1.14}$$

Kažemo da je $\delta(t)$ *intenzitet kamate* (po jedinici vremena) u trenutku t.
Pokazali smo da je za slučaj fiksne efektivne kamatne stope $\delta(t) = const = \delta \overset{(1.13)}{=} ln(1+i)$. Pitamo se vrijedi li $\delta(t) = ln(1+i(t))$ općenito? Vidjet ćemo da je odgovor ne, ali i uz koju pretpostavku vrijedi. Najprije ćemo navesti i dokazati rezultat koji nam daje izraz za akumulacijski faktor $A(t_1, t_2)$ pri neprekidnom ukamaćivanju i varijabilnoj kamatnoj stopi.

Teorem 1.4.1. *Neka su $\delta(t)$ i $A(t_0, t)$ neprekidne funkcije u varijabli $t \in [t_0, \infty\rangle$. Neka vrijedi princip konzistencije (1.8). Tada je:*

$$A(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt} \quad \forall\ t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \tag{1.15}$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $f(t) := A(t_0, t)$.
Iskoristimo pretpostavku da vrijedi princip konzistencije pa imamo:

$$A(t_0, t+h) = A(t_0, t)A(t, t+h) \quad \Rightarrow \quad A(t, t+h) = \frac{A(t_0, t+h)}{A(t_0, t)} \overset{def.\ f}{=} \frac{f(t+h)}{f(t)}$$

Prema definiciji intenziteta kamate imamo:

$$\delta(t) = \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{A(t,t+h)-1}{h} = \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{\frac{f(t+h)}{f(t)} - 1}{h} = \frac{1}{f(t)} \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} =$$

(po pretp. $f(t)$ je neprekidna i $\delta(t)$ je neprekidna pa limes postoji i prepoznajemo definiciju derivacije funkcije f)

$$= \frac{1}{f(t)} f'(t) = \frac{d}{dt}(ln\ f(t)) \Rightarrow \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}(ln\ f(t)) \quad \Big/ \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt = ln\ f(t) \mid_{t_1}^{t_2} = ln\ f(t_2) - ln\ f(t_1) = ln \frac{f(t_2)}{f(t_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(t_2)}{f(t_1)} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$$

(uočimo da je lijeva strana po principu konzistencije i definiciji funkcije f jednaka $A(t_1, t_2)) \Rightarrow \quad A(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$ □

U dokazu možemo uočiti kako definirana funkcija $f(t) = A(t_0, t)$ zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu: $\delta(t)f(t) = f'(t)$. Slijedi:

$$\delta(t) = \frac{\frac{d}{dt} A(t_0, t)}{A(t_0, t)}$$

zbog čega intenzitet kamate interpretiramo kao brzinu akumulacije po jedinici kapitala u trenutku t.
Prema pokazanom teoremu, akumulacija je jednaka (stavimo $t_1 = t, t_2 = t + h$): $A(t, t+h) = e^{\int_t^{t+h}} \delta(s)ds$. Sada možemo pisati:

$$i_h(t) = \frac{e^{\int_t^{t+h} \delta(s)ds} - 1}{h} \tag{1.16}$$

Od prije znamo, za $h = 1$ nominalna kamatna stopa jednaka je efektivnoj (1.5). Kada u (gore dobiven) izraz za i_h uvrstimo $h = 1$ dobivamo:

$$i(t) = e^{\int_t^{t+1} \delta(s)ds} - 1 \tag{1.17}$$

Sada, uz uvjet da je $\delta(t)$ na svakom intervalu $[t, t+1]$ konstantna i jednaka vrijednosti u lijevom rubu, tj. $\delta(s) = \delta(t), \forall s \in [t, t+1]$, iz teorema slijedi: $\delta(t) = ln(1 + i(t))$.
Vratimo se još malo slučaju fiksne efektivne kamatne stope. Tada je $\delta(t) = \delta, \forall t$. Primjenjujući teorem, za bilo koji trenutak t i $n \in \mathbb{R}, n \geq 0$ dobivamo:

$$A(t, t+n) = e^{\int_t^{t+n} \delta ds} = e^{n \cdot \delta} \tag{1.18}$$

Uvrstimo li $n = 1$, ponovo dobivamo već pokazanu jednakost (1.13): $1 + i = e^{\delta}$. Gornju formulu onda zapisujemo:

$$\begin{aligned} A(t, t+n) &= e^{n \cdot \delta} = \left(e^{\delta}\right)^n \overset{1.13}{=} (1+i)^n, \quad \forall n \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad A(t, t+n) &= (1+i)^n, \quad \forall n \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Važno je uočiti da vrijedi za sve realne brojeve n, a ne samo za cijele brojeve što je bio slučaj na početku poglavlja (1.2).
Rezimirajmo. Definirali smo godišnju efektivnu($i(t)$) i godišnju nominalnu($i_h(t)$) kamatnu stopu. Pokazali smo da je nominalna za $h = 1$ jednaka efektivnoj. Za $h = \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}$ nominalnu dogovorno pišemo $i^{(p)}(t)$ te zovemo nominalna plativa p puta godišnje. Zatim smo definirali akumulacijski faktor $A(t, t+h), h \in \mathbb{R}$ koji se pojavljuje i u definiciji nominalne kamatne stope. Teorem nam je potom dao izraz $A(t, t+h) = e^{\int_t^{t+h} \delta(s)ds}$ pri čemu je $\delta(s)$ intenzitet kamate. Pomoću tog rezutata izrazili smo efektivnu kamatnu stopu preko intenziteta kamate: $i(t) = e^{\int_t^{t+1} \delta(s)ds} - 1$ te nominalnu kamatnu stopu također: $i_h(t) = \frac{e^{\int_t^{t+h} \delta(s)ds} - 1}{h}$. U slučaju fiksne(konstantne) efektivne kamatne stope (i) pokazali smo da je intenzitet isto konstantan (δ) i vrijedi $1 + i = e^{\delta}$, $A(t, t+h) = e^{h\delta} = (1+i)^h, h \in \mathbb{R}$. Također, u tom slučaju našli smo ekvivalentnu nominalnu kamatnu stopu danu s $i^{(p)} = p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right)$ i pokazali: $i^{(p)} < i, \forall p > 1$. Na kraju, uočimo da je akumulacija iznosa $C(t)$ investiranog u trenutku t pri konstantnoj kamatnoj stopi i, u trenutku $t + h$ jednaka:
$C(t + h) = C(t)(1 + i)^h$ za bilo koji $h \in \mathbb{R}$.

1.5 Funkcija diskontiranja i sadašnja vrijednost

Zamislimo da u trenutku t_1 znamo kako u trenutku t_2 želimo kupiti određenu stvar i da će nam za to trebati iznos C. Odlučili smo u trenutku t_1 štedjeti, staviti na depozit iznos koji će, akumulirani, u trenutku t_2 biti jednak C. Koliki iznos u trenutku t_1 trebamo staviti na štednju? Neka je taj iznos X.
Ranije smo teoremom pokazali da je $A(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$ akumulacija u trenutku t_2 iznosa 1 investiranog u t_1 . Ukoliko u trenutku t_1 izvestiramo iznos X, u trenutku t_2 akumulirani iznos je $X \cdot A(t_1, t_2)$. Želimo da je on jednak C. Imamo $XA(t_1, t_2) = C$ iz čega slijedi da je traženi iznos kojeg u trenutku t_1 trebamo staviti na štednju:

$$\frac{C}{A(t_1, t_2)} \overset{teorem}{=} Ce^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}.$$

Tu vrijednost

$$Ce^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt} \tag{1.20}$$

zovemo *diskontirana vrijednost* u trenutku t_1 iznosa C koji dospijeva u trenutku t_2.
U posebnom slučaju, kada gledamo diskontiranu vrijednost u trenutku $t = 0$ ("sada"), vrijednost

$$Ce^{-\int_0^t \delta(s)ds} \tag{1.21}$$

nazivamo *sadašnja vrijednost iznosa C koji dospijeva u trenutku t.*
Definiramo funkciju $v(t)$ koja za dani trenutak t daje sadašnju vrijednost iznosa 1 (koji dospijeva u trenutku t). Definiramo:

$$v(t) := e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \; \forall t \geq 0 \tag{1.22}$$

Formulu za sadašnju vrijednost (1.21) onda pišemo: $Cv(t), t \geq 0$.

Uzmimo da je $\delta(t) = 0.06 \cdot 0.9^t, \forall t$. Izračunajmo sadašnju vrijednost iznosa $C = 100$ koji dospijeva nakon 3 i pol godine. Isto tako, želimo izračunati koliko bismo trebali investirati nakon 3 godine (u trenutku $t = 3$) kako bismo za 8 godina imali iznos 500.
Za dani $\delta(t)$ računamo najprije funkciju $v(t)$:
$v(t) = e^{-\int_0^t 0.06 \cdot 0.9^s ds} = e^{-0.06 \cdot \frac{1}{ln(0.9)}(0.9^t - 1)}$
Sadašnja vrijednost iznosa 1 koji dospijeva nakon 3 i pol godine je:
$v(3.5) = e^{-0.06 \cdot \frac{1}{ln(0.9)}(0.9^{3.5} - 1)} = 0.838927$ i tražena sadašnja vrijednost iznosa 100 jednaka je: $100 \cdot v(3.5) = 83.89$.
U našem drugom izračunu tražimo diskontiranu vrijednost u trenutku $t_1 = 3$ iznosa 500 koji dospijeva u trenutku $t_2 = 8$. Prema (1.20) to je jednako:
$500e^{-\int_3^8 0.06 \cdot 0.9^t dt} = 500e^{\frac{-0.06}{ln(0.9)}(0.9^8 - 0.9^3)} = 421.83$

Uočimo neka svojstva funkcije $v(t)$. Najprije primjetimo kako vrijedi

$$v(t) = A(0,t)^{-1} = \frac{1}{A(0,t)} \quad \forall t \geq 0$$

Pitamo se, što je sa slučajem $t < 0$? Ima li definicija funkcije tada smisla? Ako ima, čemu je to jednako? Neka je $t < 0$.

$$v(t) \stackrel{def.}{=} e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \stackrel{svojstvo\_integrala}{=} e^{\int_t^0 \delta(s)ds} \stackrel{Tm.\_1.4.1.}{=} A(t,0), \; \forall t < 0 \tag{1.23}$$

Vrijednost $A(t, 0)$, za $t < 0$, je upravo akumulacija iznosa 1 na intrevalu $[t, 0]$.
Za negativne t, funkcija $v(t)$ ima smisla i jednaka je akumulaciji jediničnog kapitala od prošlog trenutka t do sadašnjeg trenutka $t = 0$. I dalje je to sadašnja vrijednost(vrijednost u trenutku $t = 0$) iznosa 1, ali za $t < 0$ je njegova akumulacija (jer uzimamo da je iznos 1 investiran u prošlosti), a za $t > 0$ je diskontirana vrijednost(jer 1 dospijeva u budućnosti).

Kao maloprije, uzmimo $\delta(t) = 0.06 \cdot 0.9^t, \forall t$. Recimo da smo prije 5 godina investirali iznos 1000. Koliko imamo sada?
Računamo sadašnju vrijednost investicije od prije 5 godina, tj. akumulaciju iznosa 1000 na intervalu $[-5, 0]$:
$1000 \cdot A(-5,0) = 1000e^{\int_{-5}^{0} 0.06 \cdot 0.9^t dt} \overset{1.23}{=} 1000v(-5) = 1000e^{\frac{-0.06}{ln(0.9)}(0.9^{-5}-1)} = 1484.2873$
Pogledajmo slučaj kada je δ konstantan. Neka je $\delta(t) = const. = \delta$. Tada je: $1000v(-5) = 1000 \cdot A(-5,0) = 1000e^{\int_{-5}^{0} \delta dt} = 1000e^{5\delta}$. Isti rezultat dobivamo ako zamislimo da je trenutak investicije sadašnji($t = 0$) te računamo akumulaciju iznosa 1000 nakon 5 godina: $1000A(0,5) = 1000e^{\int_{0}^{5} \delta dt} = 1000e^{5\delta}$. Mijenjanje trenutka, tj. prikladan odabir "sadašnjeg trenutka" ovdje nam omogućuje vremenska invarijantnost δ (odnosno kamatne stope i). Ne ovise o trenutku u kojem se investicija dogodila što na početku primjera nismo imali.
Formalizirajmo taj specijalan slučaj. Neka je efektivna kamatna stopa konstantna, $i(t) = cont. = i, \forall t$. Tada je i intenzitet kamate konstantan, $\delta(t) = \delta, \forall t$. Definicija funkcije $v(t)$ tada kaže:

$$v(t) = e^{-\delta t}, \ \forall t \tag{1.24}$$

Za konstantan δ, $e^{-\delta}$ je konstantna vrijednost za koju (iz 1.13) slijedi da je jednaka: $e^{-\delta} = \frac{1}{1+i}$. Tu konstantu označimo sa v i zovemo *diskontni faktor*. Imamo:

$$v(t) = (e^{-\delta})^t = (uz\ definiciju\ v := e^{-\delta}) = v^t, \ \forall t$$
$$v(t) = v^t = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t, \forall t \tag{1.25}$$

Ovdje još definiramo *diskontnu ili anticipativnu kamatnu stopu*(po jedinici vremena):

$$d := 1 - v = 1 - v(1) \tag{1.26}$$

Ukoliko u trenutku $t = 0$ investiramo iznos $1 - d = v$, nakon jediničnog intervala (u našem slučaju godine dana) akumulirani iznos bit će 1. Imamo:
$1 = v(1+i) = (1-d)(1+i) = 1+i-d(1+i) \ \Rightarrow \ d(1+i) = i$, odnosno, $d = \frac{i}{1+i} = iv$.
Znači, d je diskontirana vrijednost iznosa (i) kojeg trebamo oduzeti svakoj jedinici investicije na kraju perioda da bismo dobili početni uloženi iznos (1). Intuitivnije interpretiramo: d je kamata koju platimo unaprijed (u trenutku $t = 0$) kako bismo u trenutku $t = 1$ dobili isplaćen zajam u iznosu 1. Iznos d je sadašnja vrijednost iznosa i koji dospijeva jednu godinu kasnije. Uočimo relacije:

$$v = 1 - d = e^{-\delta},$$
$$v(t) = (1-d)^t,$$
$$d = \frac{i}{1+i} = iv \tag{1.27}$$

Neka je sada dan $\delta(t) = const. = \delta = 0.6$. Ponovo računamo iznos koji u trenutku $t = 3$ trebamo investirati kako bismo, uz konstantnu efektivnu kamatnu stopu, nakon 5 godina (dakle, u trenutku $t = 8$) imali iznos 500. Ovog puta, to ćemo izračunati u dva koraka, preko sadašnjih vrijednosti (vrijednosti u trenutku $t = 0$). Najprije računamo sadašnju vrijednost iznosa 500. Potom tu sadašnju vrijednost akumuliramo do trenutka u kojem nas vrijednost zanima, $t = 3$:

$$500v(8) = 500e^{-8\cdot 0.06} = 309.3917$$

Akumulacija u trenutku $t = 3$:

$$309.3917 \cdot A(0,3) = 309.3917 \cdot e^{\int_0^3 \delta dt} = 309.3917 \cdot \left(e^{-\int_0^3 \delta dt}\right)^{-1} = 309.3917 \cdot v(3)^{-1}$$
$$= 309.3917 \frac{1}{e^{-3\cdot 0.06}} = 370.409$$

Uočimo da je tražena vrijednost dana izrazom:

$$500v(8)v(3)^{-1} = 500\frac{v(8)}{v(3)}$$

Općenito, *vrijednost u trenutku t_1 iznosa C koji dospijeva u trenutku t_2* jednaka je:

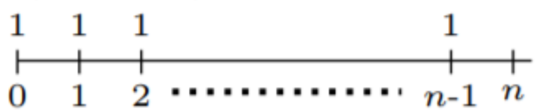
$$C\frac{v(t_2)}{v(t_1)} \ \forall t_1, t_2 \tag{1.28}$$

Izraz vrijedi bez obzira na odnos trenutaka t_1 i t_2. To nam proizlazi iz činjenice da je vrijednost u trenutku t_1 iznosa C koji dospijeva u trenutku t_2 neovisna o odnosu t_1 i t_2(u oba slučaja iznosi $Ce^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$ zbog svojstva integrala) i mogućnosti računanja te vrijednosti preko sadašnjih vrijednosti. Recimo da nas zanima vrijednost u trenutku $t_1 = 5$ iznosa 1000 koji dospijeva u $t_2 = 3$. Zapravo se radi o akumulaciji od 1000 na intervalu $[3, 5]$. Akumulaciju možemo izračunati tako da najprije izračunamo vrijednost iznosa 1000 u trenutku $t = 0$(diskontiramo), a zatim dobiveni iznos akumuliramo do trenutka $t_1 = 5$. Dobivamo:
$1000v(3) \cdot A(0,5) = 1000v(3)v(5)^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1000\frac{v(3)}{v(5)} \left(= \frac{v(t_2)}{v(t_1)}\right)$
Intuitivno, (1.28) nam jasno slijedi iz:
(sadašnja vrijednost od C)= (vrijednost od C u t_α)$v(t_\alpha)$ = (vrijednost od C u t_β)$v(t_\beta)$
$\Rightarrow$ (vrijednost od C u t_α) =(vrijednost od C u t_β)$\frac{v(t_\beta)}{v(t_\alpha)}$, $\forall\ t_\alpha, t_\beta$
Prema našoj definiciji (1.21) vrijednost $v(t)$ za $t \geq 0$ je diskontirana vrijednost iznosa 1 (koji dospijeva u trenutaku t). Uvidjeli smo da je $v(t)^{-1} = \frac{1}{v(t)}$, za $t \geq 0$, akumulacija na intervalu $[0, t]$. Pokazali smo smislenost definicije i za negativne t.

Prema (1.23) to je upravo akumulacija iznosa 1 na intervalu $[t, 0]$. Također, definirano je $v(0) := 1$. Zbog ove poveznice, neki autori (npr. u [3]) ne definiraju i funkciju akumulacije i funkciju $v(t)$. Definiraju funkciju $v(s, t)$ za koju vrijedi princip konzistencije a značenje poprima ovisno o odnosu s i t. Za $s > t$ kažu da je $v(s, t)$ vrijednost iznosa 1 u trenutku s koji je investiran u trenutku t (to je ekvivalentno našoj akumulaciji $A(t, s)$). Za slučaj $s < t$, $v(s, t)$ predstavlja vrijednost iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t (kod nas je to diskontirana vrijednost). Funkciju $v(s, t)$ zovu *funkcija diskontiranja*. Zatim fiksiraju trenutak $s = 0$ i vrijednosti $v(0, t), \forall t$ su zapravo naše $v(t), \forall t$,tj. funkcija sadašnje vrijednosti iznosa 1.

1.6 Financijske rente

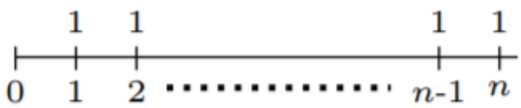
U praksi, više ćemo se susretati s novčanim tokovima nego pojedinim uplatama/isplatama i zanimat će nas njihove sadašnje vrijednosti. Često ćemo htjeti usporediti vrijednosti dva novčana toka. Novčani tok je niz uplata ili isplata u određenim vremenskim intervalima. Znači, više uplata ili isplata koje se ne događaju u istom trenutku. Zbog toga, da bismo dva novčana toka mogli usporediti, računat ćemo vrijednost svakoga u istom trenutku t. Dva toka će biti jednaka ukoliko njihove vrijednosti budu jednake. U većini slučajeva računat ćemo sadašnje vrijednosti novčanih tokova.
Za jednostavan primjer uzet ćemo seriju od n jednakih isplata u jednakim vremenskim intervalima. Pretpostavit ćemo konstantnu kamatnu stopu i. Za vremenski interval uzimamo jednu godinu. Neka se isplata događa na početku svake godine. Možemo si grafički predočiti:



Ono što nas zanima je: koliko takav novčani tok vrijedi u trenutku prve isplate(trenutak t=0)? Odnosno, koja je sadašnja vrijednost ovakvog novčanog toka? Koliki iznos bismo tražili u zamjenu da početkom svake godine (počevši od sada) isplaćujemo nekome iznos 1 n godina? Očito vrijedi:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v(1) + v(2) + ... + v(n-2) + v(n-1) \\
&= 1 + v + v^2 + v^3 + ... + v^{n-1} \\
&= \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} \\
\Rightarrow \ \ddot{a}_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Ukoliko se isplaćuje iznos C, sadašnja vrijednost jednaka je: $C\ddot{a}_{\overline{n}|}$.
Takvu seriju n jednakih isplata/uplata u jednakim vremenskim intervalima za koje znamo da će se sigurno dogoditi (neovisno o smrti ili doživljenju neke osobe) naziva se *financijska renta*(eng. annuity-certain). Mi ćemo se kasnije više posvetiti životnim rentama (life annuity) kao obliku životnog osiguranja. Tada isplate neće biti izvjesne i ovisit će o doživljenju ili smrti neke osobe. Razlikujemo rente *plative unaprijed* (prenumerando rente) i *plative unatrag* (postnumerando rente). Renta koju smo gore opisali plativa je unaprijed, isplate se događaju na početku vremenskog intervala. Važno je uočiti da će, zbog konstantne kamatne stope, vrijednost rente plative unaprijed u trenutku prve isplate (bez obzira koji to trenutak bio) biti jednak gore izvedenoj sadašnjoj vrijednosti. Kažemo da je stvar translaciono invarijantna. Na primjer, zamislimo isplate koje počinju u trenutku $t = k$. Računajući vrijednost rente plative unaprijed u trenutku $t = k$, dobili bismo vrijednost jednaku onoj u (1.29).
Kod rente plative unatrag isplate se događaju na kraju svake godine. Nju grafički prikazujemo:



i vrijednost u trenutku prije trenutka prve isplate je:

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|} &= v(1) + v(2) + ... + v(n-1) + v(n) \\
&= v + v^2 + ... + v^n = v(1 + v + v^2 + ... + v(n-1)) \\
&= v\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{\frac{1}{v}-1} = \frac{1-v^n}{i}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Mogli smo već uočiti (a i pokaže se) da vrijedi:

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|} &= v\ddot{a}_{\overline{n}|} \ \Rightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|} \\
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + a_{\overline{n-1}|} \ \forall n \geq 2
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Napomenimo kako malo slovo a u oznakama ukazuje da se radi o renti (annuity), dok dvije točkice iznad označavaju rentu plativu unaprijed.
Postoje još i vječne rente, one kod kojih trajanje isplata nije ograničeno na n godina već $n \mapsto \infty$. U tom slučaju, kod računanja vrijednosti rente, susrećemo se s geometrijskim redom, ali zbog $i > 0 \Rightarrow v = \frac{1}{1+i} < 1$ taj red konvergira i vrijedi:
$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + ... = v\frac{1}{1-v} = \frac{1}{i}$, za plativu unaprijed:
$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + ... = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$.

Pogledajmo jedan ilustrativan primjer. Osoba kojoj nedostaje nekoliko godina do mirovine, recimo m, uplaćivala je treći(dobrovoljni) mirovinski stup i odlučila da joj akumulirani iznos, po umirovljenju, dobrovoljni mirovinski fond ne isplati odjednom već u jednakim godišnjim isplatama idućih n godina. Neka je i dalje pretpostavka konstantne efektivne kamatne stope i. Koliki akumulirani iznos bi osoba trebala imati sada (m godina prije početka isplate) da bi joj fond u budućnosti isplaćivao na početku svake godine iznos C? Izračunat ćemo za slučaj kada bi iznos isplate bio 1. Za iznos C dobivamo proporcionalno. Vrijednost isplata u trenutku m (trenutku prve isplate) bila bi $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ i tu vrijednost diskontiramo na sadašnji trenutak ($t = 0$) $\Rightarrow {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|}$. Vrijednost ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$ sadašnja je vrijednost rente plative unaprijed koja traje n godina uz rok odgode m godina. Analogno, postoji odgođena renta plativa unatrag koja isplaćuje iznos 1 i njena je sadašnja vrijednost: ${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|}$.

Duljina jednakih vremenskih intervala kod renti može biti i manja od godine dana. Renta se može isplaćivati npr. mjesečno. To je slučaj rente koja se isplaćuje p puta godišnje (za $p = 12$). I dalje može biti plativa unaprijed(na početku svakog mjeseca) ili plativa unatrag(na kraju mjeseca).
Pogledajmo rentu plativu unaprijed koja se isplaćuje p puta godišnje, u godišnjem iznosu 1, tijekom n godina(u intervalu $[0, n]$). U godišnjem iznosu 1 i plativa p puta godišnje značilo bi da se na početku svakog intervala (duljine $\frac{1}{p}$ kojih ukupno ima np) isplaćuje iznos $\frac{1}{p}$. Jer govorimo o renti plativoj unaprijed, isplate se događaju u trenucima $0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p} ..., 1, \frac{p+1}{p}, ... \frac{np-1}{p}$. Koristeći pretpostavku konstantne kamatne stope i te prije pokazanih jednakosti, imamo:

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{np-1} \frac{1}{p} v^{\frac{t}{p}} = \frac{1}{p} \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{p}}} = \frac{1 - v^n}{p(1 - (1 - d)^{\frac{1}{p}})} = \frac{1 - v^n}{d^{(p)}} \\ = \frac{1 - v^n}{i} \frac{i}{d^{(p)}} = \frac{i}{d^{(p)}} a_{\overline{n}|} \qquad (1.32)\end{aligned}$$

Posebno, za mjesečne rente plative unaprijed vrijedi:

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(12)}_{\overline{n}|} &= \frac{i}{d^{(12)}} a_{\overline{n}|}, \quad \textit{odnosno} \\ &= \frac{1-v^n}{d^{(12)}} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Analogno možemo dobiti za plative unatrag: $a^{(p)}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i^{(p)}} = \dfrac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}$ kao i za ostale (odgođene, vječne i sl.) što se može naći u [1].

Poglavlje 2

Tablica smrtnosti

Premije se računaju na temelju vjerojatnosti nastupanja osiguranog događaja. Ključan pojam ovdje jest vjerojatnost slučajnog događaja. Za aktuare koji se bave područjem životnog osiguranja važno je procijeniti vjerojatnost doživljenja određene dobi ili vjerojatnost smrti za osobu određene dobi na temelju skupine pojedinaca. Kako smo u uvodu naveli, mi smo se odlučili slijediti deterministički model. Taj nam je model, za početak, intuitivniji i uglavnom zadovoljavajuć jer u stvarnosti kod računanja premija neki drugi čimbenici (poput administrativnih troškova, inflacije, zakonodavstva i sl.) imaju veći utjecaj od smrtnosti. Tablica u kojoj su dane procijenjene vjerojatnosti poznata je kao tablica smrtnosti.

Neka je l_0 proizvoljan nenegativan broj. Pretpostavimo da promatramo skupinu od l_0 novorođenih (pojedinaca u dobi 0) te da u toj skupini nema novih rađanja niti useljavanja niti iseljavanja. Tijekom vremena, članovi promatrane skupine umiru i ona se smanjuje. Želimo predvidjeti koliko njih će, od početnog broja l_0, u svakoj sljedećoj godini i dalje biti živo. U skladu s konceptom determinističkog modela, pretpostavimo da se tražene vrijednosti mogu egzaktno odrediti premda u stvarnosti to nije tako, već se nadamo da ćemo uz prikladnu statistiku dobiti dovoljno dobre procjene. Neka x označava dob i neka je l_x oznaka za broj novorođenih koji će doživjeti dob x (tj. broj svih pripadnika promatrane skupine, trenutne dobi 0, koji će doživjeti najmanje dob x). Neka je d_x broj pojedinaca promatrane skupine koji će umrijeti između dobi x i x+1 (koji će doživjeti dob x, ali neće doživjeti dob x+1), drugim riječima, broj smrti u dobnom intervalu $[x, x+1\rangle$. Uočimo kako je veza između l_x i d_x, za svaki x dana s:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \text{ , tj.}$$

$$l_{x+1} = l_x - d_x \tag{2.1}$$

Tablica smrtnosti je tablica u kojoj su dane vrijednosti l_x i d_x pri čemu je x nenegativan cijeli broj ($x \in \mathbb{N}_0$). U nastavku donosimo dio tablice smrtnosti(mortaliteta) Republike Hrvatske za razdoblje 2000.-2002. koju izdaje Državni zavod za statistiku. Cijela tablica može se naći ovdje [5]. Tom tablicom koristit ćemo se dalje u ovom radu za potrebe primjera.

2. TABLICE MORTALITETA REPUBLIKE HRVATSKE, 2000. – 2002.

Starost	Skupine živih	Skupine umrlih	Sirove vjerojatnosti smrti	Izglađene vjerojatnosti smrti	Vjerojatnosti doživljenja	Broj živih	Broj mrtvih
	V_x	M_x	q'_x	q_x	p_x	l_x	d_x
				Ukupno			
0	84 739	294	0,003469	0,003469	0,996531	100 000	347
1	90 966	39	0,000429	0,000429	0,999571	99 653	43
2	93 968	27	0,000287	0,000255	0,999745	99 610	25
3	98 610	23	0,000233	0,000233	0,999767	99 585	23
4	102 051	21	0,000206	0,000202	0,999798	99 562	20
⋮							
95	1 532	415	0,270888	0,433650	0,566350	1 501	651
96	924	247	0,267316	0,486759	0,513241	850	414
97	597	183	0,306533	0,546374	0,453626	436	238
98	361	97	0,268698	0,613289	0,386711	198	121
99	213	62	0,291080	0,688400	0,311600	77	53
100	...	...	...	1,000000	0,000000	24	24

Slika 2.1: Primjer tablice smrtnosti

Neka je l_x broj osoba u dobi x. Recimo da njih l_{x+n} doživi dob $x+n$. Tada nam, prema definiciji iz vjerojatnosti, kvocijent $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ daje vjerojatnost da će osoba dobi x doživjeti dob $x+n$. Za nenegativne cijele brojeve n i x definiramo:

$$ {}_np_x := \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{2.2} $$

Riječ je o uvjetnoj vjerojatnosti, ${}_np_x$ je vjerojatnost doživljenja dobi $x+n$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x. Nadalje, definiramo uvjetnu vjerojatnost smrti u dobnom intervalu $[x, x+n\rangle$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x. Imamo:

$$ {}_nq_x := \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \tag{2.3} $$

Dakle, to nam daje vjerojatnost da će osoba dobi x umrijeti između dobi x i $x+n$. Intuitivno je jasno, a slijedi i iz 2.3 i 2.2:

$$_nq_x = 1 -_n p_x \tag{2.4}$$

Za $n = 1$ lijevi indeks izostavljamo zbog lakše notacije i česte upotrebe. Pišemo q_x za $_1q_x$ i p_x za $_1p_x$. Iz isječka tablice na slici 2.1 bilo bi $_1p_0 = p_0 = \dfrac{99653}{100000} = 0.99653$, $q_3 =_1 q_3 = \dfrac{l_3 - l_4}{l_3} = \dfrac{99585 - 99562}{99585} = 0.00023$
Vrijednost q_x nazivamo *stopa smrtnosti osobe u dobi x.* Uočimo ovdje da vrijedi:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \Rightarrow d_x = q_x \cdot l_x \tag{2.5}$$

i

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \Rightarrow l_{x+1} = p_x \cdot l_x \tag{2.6}$$

Važno je razumjeti kako vrijednosti stupca l_x same za sebe nemaju važnost. Smisao tek dobivaju u usporedbi s početnim l_0 i u usporedbi svakog l_x-a s prethodnim l_{x-1}. Sve vrijednosti u stupcu mogli bismo pomnožiti nekim brojem bez utjecaja na stope smrtnosti koje tablica predstavlja. Kažemo da imaju relativni smisao jer ono što je nama zapravo važno uglavnom su međusobni omjeri vrijednosti l_x (q_x, p_x). Iz tog razloga niti nije važno da l_x budu cijeli brojevi. Najčešće ipak jesu (što možemo vidjeti i u tablici iz primjera (2.1), [5]) jer se empirijski podaci zaokružuju kako ne bismo pričali o npr. 34,12 osoba.
Još jedna činjenica koju trebamo spomenuti je kako dob(starost) kojom započinje tablica smrtnosti može biti proizvoljna, $x_0 > 0$. Npr. moguće je kod nekih osiguravajućih društava ili u mirovinskom osiguranju naći tablicu s početnom dobi 40 ili više godina. Umjesto polazne skupine novorođenčadi, možemo promatrati npr. skupinu pojedinaca u dobi 40, 50, 55 i sl. Za najmanju dob x_0 kojom počinje tablica, broj l_{x_0} nazivamo korijen tablice. Obično se uzima neki zaokruženi broj, npr. 100 000, 1 000 000.. U našem primjeru, početna dob je 0 i korijen tablice $l_0 = 100\ 000$.
Dob za koju vrijednost l_x postaje zanemarivo mala (u odnosu na l_0) označavamo s ω i nazivamo granična dob tablice. Proglašava se $l_\omega = 0$, a posljednja dob u tablici je $\omega - 1$. Intuitivno, granična dob ω je prva dob x koju niti jedan pojedinac iz početne promatrane skupine nije doživio. Vrijednost ω varira obzirom na tablicu smrtnosti, ali je običaj uzeti $\omega = 110$. U Hrvatskoj, možemo vidjeti na slici (2.1), običaj je bio uzeti $\omega = 101$.
U praksi, tablica smrtnosti konstruirana je dobivanjem najprije vrijednosti q_x za $x = 0, 1, 2, ..., \omega - 1$. Dobivanje tih vrijednosti statistički je problem kojeg ovdje

nećemo detaljno analizirati. U osnovi, provodi se istraživanje u kojem se promatra koliko dugo osobe pojedine dobi žive i predviđaju se vrijednosti q_x za populaciju za koju vjerujemo da je podvrgnuta istim stopama smrtnosti kao ona čijim smo ih promatranjem dobili. Na primjer, ako promatramo skupinu od 1 000 osoba u dobi od točno 50 godina i 10 od njih umre u narednoj godini, možemo procijeniti $q_{50} = \frac{10}{1000} = 0,01$. Ovo je u potpunosti pojednostavljeno i proces je mnogo složeniji. Niti je u praksi u nekom trenutku lagano skupiti grupu ljudi točno određene dobi, niti je lagano promatrati ih cijelu godinu. Pojedinci će se obično pridružiti promatranju u različitim vremenima, a bit će i odustajanja od sudjelovanja i iz drugih razloga, ne samo smrti. Sada nam je jasno kako je uvodni primjer promatranja skupine novorođenčadi, dok svi članovi ne umru, u stvarnosti nemoguć. Trajanje promatranja je dugotrajno, uvjeti - higijenski, socijalni, ekonomski, razina medicinske skrbi, razvoj tehnologije i sl. tijekom tog perioda značajno se promijene što utječe na uočenu stopu smrtnosti i čini ju irelevantnom za populaciju jednakih značajki u budućnosti. Dio statistike, zvan analiza doživljenja (eng. survival analysis) bavi se tim problemom određivanja vrijednosti q_x.

Tablica mortaliteta Republike Hrvatske [5] koju koristimo u ovom radu konstruirana je upravo na način da su najprije dobivene vrijednosti q_x. U dokumentu [5] može se pročitati na koji način. Ukratko, na temelju popisa stanovništva iz 2001. godine, pomoću određenih formula, dobivene su vrijednosti V_x i M_x (koje se također mogu vidjeti tabelirane na slici 2.1). One predstavljaju empirijske vrijednosti za l_x i d_x, respektivno. Potom su formulom $\frac{M_x}{V_x}$ izračunane tzv. sirove vjerojatnosti smrti. Sirove vjerojatnosti smrti zatim su izglađene, citiramo: „kako bi se otklonile posljedice grešaka slučajne naravi. Te greške najčešće su posljedica nedovoljno velikih skupina živih i umrlih za pojedine dobne skupine, kao i nedovoljne točnosti osnovnih podataka, posebno o godinama starosti umrlih." Izglađivanjem dobile su se tražene vrijednosti q_x koje mi u ovom radu uzimamo kao dane.
Pomoću danih q_x i korijena tablice l_0 tablica smrtnosti može biti konstruirana induktivno, počevši sa l_0, pomoću formula (2.5) i (2.1).
Ovdje još možemo spomenuti da je tablicu smrtnosti moguće konstruirati i samo iz vrijednosti p_x i proizvoljnog korijena tablice l_0 što slijedi iz formule (2.6).
U knjizi [3] autor navodi kako su tablice smrtnosti, u praksi, određene samo s vrijednostima q_x koje su dovoljne za daljnja računanja i obično nije potrebno izračunavati l_x i d_x. Prednost tradicionalnog oblika, kaže, leži uglavnom u intuitivnom značenju.

Osim dobi, ima još mnogo čimbenika koji utječu i koji će utjecati na život, odnosno smrtnost u budućnosti. Primjerice: spol, zdravstveno stanje, način života, društveni status, okolina u kojoj se živi... Kako u praksi uključiti te čimbenike pri konstruiranju tablica? S namjerom da se ostali čimbenici uzmu u obzir, uobičajeno je formiranje više različitih tablica smrtnosti. Promatranje skupine pojedinaca ograniči

se na skupinu sa zajedničkom karakteristikom koja se želi izdvojiti. U [3] navedeno je nekoliko važnijih čimbenika izdvojenih u praksi. Naravno, najpoznatiji je spol. Navodi se da je za srednji raspon godina uočen dulji očekivani životni vijek žena od očekivanog životnog vijeka muškaraca u istoj dobi za 5-7 godina. Iz tog razloga uobičajena je posebna izrada tablice smrtnosti za žene i posebna za muškarce.
Također, razni statistički dokazi poslijednjih godina ukazuju na opasnost pušenja zbog čega kod nekih osiguravajućih kuća postoje zasebne tablice za pušače i nepušače.
Jedan vrlo važan čimbenik za područje osiguranja je i vrsta sklopljene police. Osobe koje žele sklopiti policu životnog osiguranja moraju prije proći određene zdravstvene preglede koje zahtjeva osiguravajuće društvo. Za one osobe koje su, na kraju, sklopile policu, očekuje se manja stopa smrtnosti za nadolazeće godine od osoba slučajno odabranih iz populacije kao cjeline. Isto tako, za kupce životnih renti vjeruje se da će živjeti dulje uz obrazloženje da osobi lošeg zdravstvenog stanja nije u interesu kupiti takav proizvod. Kako za potrebe osigurnja, tako i za životne rente izrađuju se tablice smrtnosti na temelju podataka kojima raspolaže osiguravajuće društvo. Promatraju se samo skupine ljudi koje su kupile određeni proizvod osiguravajućeg društva. Tako zaključujemo da tablice smrtnosti konstruirane za opću populaciju iz popisa stanovništva (poput [5]) nisu prikladne za osiguravajuće kuće no, mi ćemo u ovom radu za potrebe ilustrativnog primjera koristiti spomenutu za Hrvatsku. Pogledati prikladnu tablicu i ubaciti vrijednost za određenu stopu u formule koje ćemo izvesti, ne predstavlja težak zadatak. Ipak, treba naglasiti da je izbor odgovarajuće tablice također važan posao aktuara.

U nastavku, često će nas zanimati koja je vjerojatnost da će osoba dobi x umrijeti između dobi $x+n$ i $x+n+k$. Pokazat ćemo da je možemo izraziti na tri različita načina. Koriste se sva tri, a odabiremo onaj koji nam je najprikladniji obzirom na dane podatke (kao što to i obično biva u matematici). Sljedeća tri izraza za tzv. uvjetnu vjerojatnost smrti u dobnom intervalu $[x+n, x+n+k\rangle$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x, u oznaci ${}_{n|k}q_x$, su ekvivalentna:

$$ {}_{n|k}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+k}}{l_x} \tag{2.7} $$

$$ {}_{n|k}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+k}}{l_x} \overset{2.2}{=} {}_n p_x - {}_{n+k} p_x \tag{2.8} $$

$$ {}_{n|k}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+n+k}}{l_{x+n}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot (1 - {}_k p_{x+n}) \overset{2.2,2.4}{=} {}_n p_x \cdot {}_k q_{x+n} \tag{2.9} $$

U knjizi [3] dana su i intuitivna objašnjenja svakoga. Promotrimo najprije (2.7). Brojnik je jednak razlici $l_{x+n} - l_{x+n+k}$ koja predstavlja broj osoba koje su umrle između dobi $x+n$ i $x+n+k$. Podijelimo li tu razliku s brojem osoba s kojima smo započeli promatrati skupinu (l_x), dobivamo traženu vjerojatnost. U sljedećem izrazu (2.8), izražavamo vjerojatnost događaja da će osoba u dobi x doživjeti $x+n$ godina, ali neće doživjeti $x+n+k$ godina. Dobiveni izraz je rezultat primjene rezultata iz vjerojatnosti: $\mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+k}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n+k})$ pri čemu nam A_n predstavlja događaj da će osoba dobi x doživjeti dob $x+n$. Analogno, A_{n+k} je događaj da će osoba dobi x doživjeti dob $x+n+k$. Jasno je da tada pretpostavka $A_{n+k} \subset A_n$ za gornju formulu iz vjerojatnosti vrijedi jer osobe koje su doživjele dob $x+n+k$ sigurno su doživjele dob $x+n$ dok obrat ne mora vrijediti. U trećem izrazu (2.9) uočavamo dvije faze. Da bi osoba (koja je sada dobi x) umrla između dvije specifične dobi($x+n$ i $x+n+k$), najprije mora doživjeti dob $x+n$. Zatim osoba dobi $x+n$ treba umrijeti u sljedećih k godina. Izraz proizlazi iz formule za uvjetnu vjerojatnost:

$$\begin{gathered}
\text{A=osoba dobi } x \text{ doživi } x+n \text{ godina, } \mathbb{P}(A) =_n p_x \\
\text{B=osoba dobi } x \text{ umire u sljedećih } n+k \text{ godina, } \mathbb{P}(B \mid A) =_k q_{x+n} \\
A \cap B = \text{ osoba dobi } x \text{ doživi } x+n \text{ i umre u sljedećih } k \text{ godina} \\
\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A) =_n p_x \cdot_k q_{x+n}
\end{gathered}$$

Ovdje je još zgodno pokazati korisnu formulu, tzv. pravilo umnoška:

$${}_np_x \overset{2.2}{=} \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1+n-1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1+n-1}}{l_{x+1}} \overset{2.2}{=} p_x \cdot_{n-1} p_{x+1} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots p_{x+n-1}$$

Pokazali smo:

$${}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots p_{x+n-1}$$

Općenito, za sve nenegativne cjelobrojne n, k i x, vrijedi:

$${}_{n+k}p_x =_n p_x \cdot_k p_{x+n} \tag{2.10}$$

Priča je analogna gornjoj diskusiji za zadnji izraz: da bi osoba dobi x doživjela dob $x+n+k$ najprije treba doživjeti dob $x+n$, a potom doživjeti još k godina.

U dosadašnjoj raspravi vidjeli smo da su poznate(odnosno, predviđaju se) i u tablicama navode vrijednosti funkcije l_x samo u cjelobrojnim točkama $x \in [0, \infty\rangle \cap \mathbb{N}_0$. Kada bismo razmišljali o interpretaciji funkcije kao broju živih u dobi x, mogli bismo zaključiti da je to zapravo padajuća step funkcija koja se smanjuje za 1 sa svakom smrću unutar promatrane godine. Ipak, ono što smo već naglasili, važan je relativan odnos l_x-eva jer nas zanimaju vjerojatnosti. Zbog toga se u teoriji pretpostavlja da je funkcija l_x neprekidna, čak glatka (derivabilna) funkcija. Vrijednosti u necjelobrojnim točkama x dobivaju se nekom od interpolacija. Prva koje ćemo se sjetiti je

linearna interpolacija.
Neka je $t \in [0,1]$. Imamo:

$$l_{x+t} \approx (1-t)\, l_x + t l_{x+1} = l_x - t\,(l_x - l_{x+1}) \overset{2.1}{=} l_x - t \cdot d_x \tag{2.11}$$

Važno je reći kako ovom interpolacijom dobivamo po dijelovima linearnu funkciju koja je neprekidna, ali nije derivabilna (ne postoji derivacija u čvorovima interpolacije, tj. u cjelobrojnim točkama). S gledišta teorije, bitno je zahtjevati da funkcija l_x bude derivabilna jer na toj pretpostavci počiva definicija intenziteta smrtnosti (koju ćemo uvesti malo kasnije) i rezultati vezani uz nju. Postoje numeričke metode (npr. interpolacija kubičnim splajnom) kojima možemo dobiti derivabilnu funkciju. Ipak, u praksi je zadovoljavajuća i dovoljna neprekidnost koju dobivamo ovom najjednostavnijom interpolacijom zbog čega nećemo ulaziti dublje u numeričku analizu. Funkcija dobivena linearnom interpolacijom na intervalima $[x, x+1\rangle$ ima linearan pad. Ovom interpolacijom pretpostavlja se uniformna distribucija smrti unutar dobnog intervala $[x, x+1\rangle$. Iz izraza $l_{x+t} \approx l_x - t \cdot d_x$ proizlazi da će od ukupnog broja smrti unutar tog dobnog intervala do trenutka(dobi) $x+t$ nastupiti $t \cdot d_x$ smrti. Npr. ukoliko uzmemo $t = \frac{1}{4}$ tada će do $x + \frac{1}{4}$ nastupiti $\frac{d_x}{4}$ smrti. Općenito, za $t = \frac{1}{k}$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}$, do $x + \frac{1}{k}$ nastupiti će $\frac{d_x}{k}$ smrti. Ukoliko d_{x+t} i ovdje interpretiramo kao broj smrti tijekom jedne godine, odnosno broj smrti u dobnom intervalu $[x+t, x+1+t\rangle$ tada linearna interpolacija funkcije l_x povlači linaernu interpolaciju funkcije d_x.

Dokaz. pretpostavka: vrijedi (2.11)
trebamo pokazati da za $t \in [0,1]$ vrijedi: $d_{x+t} \approx (1-t)\, d_x + t d_{x+1}$
Imamo:
$d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+1+t} \overset{2.11}{\approx} (1-t)\, l_x + t l_{x+1} - (1-t)\, l_{x+1} - t l_{x+2} = (1-t)\,(l_x - l_{x+1}) + t\,(l_{x+1} - l_{x+2}) \overset{2.1}{=} (1-t)\, d_x + t d_{x+1}$ □

Također, uz linearnu interpolaciju funkcije l_x, vrijedi:

$${}_t q_x \overset{2.11}{\approx} \frac{l_x - (l_x - t d_x)}{l_x} = \frac{t d_x}{l_x} \overset{2.5}{=} t \cdot q_x \tag{2.12}$$

$${}_t p_x = 1 -{}_t q_x = 1 - t \cdot q_x \tag{2.13}$$

Pogledajmo jedan primjer. Pretpostavimo uniformnu distribuciju smrti kroz godinu i na temelju tablice mortaliteta Hrvatske izračunajmo vjerojatnost da će osoba dobi 44.5 godine umrijeti u sljedećih 3 mjeseca (${}_{0.25}q_{44.5}$). Imamo:

$${}_{0.25}q_{44.5} \overset{2.4}{=} 1 -{}_{0.25} p_{44.5}$$

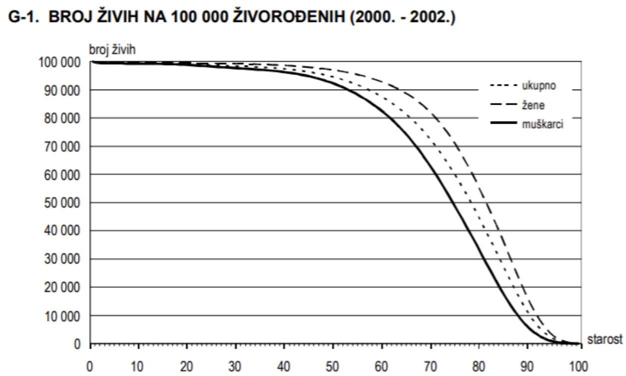
Zbog:

$$_{t+s}p_x \overset{2.2}{=} \frac{l_{x+t+s}}{l_x} = \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \overset{2.2}{=}_s p_{x+t} \cdot_t p_x \Rightarrow_s p_{x+t} = \frac{_{t+s}p_x}{_t p_x}$$

i pretpostvke uniformne distribucije smrti(linearne interpolacije za l_x), za $x = 44$, $t = 0.5, s = 0.25$ vrijedi:

$$_{0.25}q_{44.5} = 1 - \frac{_{0.75}p_{44}}{_{0.5}p_{44}} \overset{2.13}{=} 1 - \frac{1 -_{0.75} q_{44}}{1 -_{0.5} q_{44}} \overset{2.12}{=} 1 - \frac{1 - 0.75 \cdot q_{44}}{1 - 0.5 \cdot q_{44}} \overset{iz\ tablice}{=}$$
$$1 - \frac{1 - 0.75 \cdot 0.002896}{1 - 0.5 \cdot 0.002896} = 0.000725$$

Autor u [2] upozorava da može doći do nedosljednosti kada bismo i q_x i l_x i d_x linearno interpolirali (ne bi više vrijedilo $q_x = \frac{d_x}{l_x}$) čega treba biti svjestan.
Sada pretpostavimo da smo necjelobrojne vrijednosti interpolirali uz zahtjev da dobijemo glatku funkciju $l_x := l\,(x)$ (spomenuli smo da je to moguće). Njen graf uglavnom izgleda ovako (slika iz [5]):



Graf predstavlja padajuću neprekidnu funkciju i odražava činjenicu da u većini tablica vrijednost l_x strmije pada pri dječjoj dobi i negdje nakon dobi od 75 godina. Trebali bismo uočiti barem dvije točke infleksije na grafu.
Zbog zahtjeva kod interpolacije, dobivena funkcija ima derivaciju (glatka je). Omjer derivacije funkcije l_x u točki x (brzina smanjenja u točki x) i vrijednosti funkcije u točki(dobi) x nazivamo *intenzitet smrtnosti* u točki x, u oznaci μ_x. Za $x \in \langle 0, \omega \rangle$ definiramo funkciju $\mu_x := \mu\,(x)$ s:

$$\mu_x := -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx}l_x = -\frac{d}{dx}ln\,(l_x)\ \Rightarrow \mu_x = -\left[ln\,(l_x)\right]' \tag{2.14}$$

U definiciji je predznak minus kako bismo osigurali da je $\mu_x > 0$. Znamo da je funkcija l_x padajuća i znamo iz rezultata matematičke analize da je tada njena derivacija negativna. Jer je korijen tablice (l_0) proizvoljan za svaku tablicu, a želimo intenzitet smrtnosti neovisan o njegovoj vrijednosti, u definiciji imamo faktor $\frac{1}{l_x}$. Kada bismo, npr. imali dvije tablice s istim uvjetnim vjerojatnostima doživljenja, a različitim korijenom, funkcije l_x bile bi proporcionalne, a intenzitet smrtnosti isti.

Dokaz. $\tilde{l}_x = c \cdot l_x$
$\Rightarrow \tilde{\mu}_x \overset{def.}{=} -\frac{1}{\tilde{l}_x}\frac{d}{dx}\tilde{l}_x = -\frac{1}{c \cdot l_x}c\frac{d}{dx}l_x = \mu_x$ □

Pogledajmo sada malo drugačije napisanu formulu (2.14).

$$\frac{d}{dx}l_x = -l_x \cdot \mu_x$$

Pišimo varijablu t umjesto x i integrirajmo po $[0, \omega]$:

$$\textstyle\int_x^\omega l_t\mu_t dt = \int_x^\omega -l_t' dt = -l_t|_x^\omega = l_x - l_\omega \overset{l_\omega = 0}{=} l_x$$

$$\Rightarrow l_x = \int_x^\omega l_t\mu_t dt \tag{2.15}$$

Nekad pišemo : $l_x = \int_x^\infty l_t\mu_t dt$ što je ekvivalentno gore napisanoj jednadžbi jer vrijedi $l_t = 0, \forall t \geqslant \omega$. Zatim iz (2.15) i svojstva integrala slijedi:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \overset{2.15}{=} \int_x^{x+1} l_t\mu_t dt \tag{2.16}$$

Pogledajmo sada i :

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x -\left[ln\left(l_t\right)\right]' dt = -ln\left(l_t\right)|_0^x = -ln\left(\frac{l_x}{l_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{l_x}{l_0} = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$\Rightarrow l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_t dt}, \forall x \geqslant 0 \tag{2.17}$$

Za $x, n \in \mathbb{N}$ iz (2.17) slijedi:

$$l_{x+n} = l_0 e^{-\int_0^{x+n} \mu_t dt}$$

$$\overset{2.17}{\Rightarrow} \frac{l_{x+n}}{l_x} = e^{-\int_0^{x+n} \mu_t dt + \int_0^x \mu_t dt} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt}$$

pa zbog definicije (2.2) imamo:

$${}_np_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt} \tag{2.18}$$

što ima smisla i za necjelobrojne x i n. Zatim imamo:

$$
\begin{aligned}
l_x - l_{x+n} &= -l_t|_x^{x+n} = -\int_x^{x+n} l_t' dt = \int_x^{x+n} l_t\mu_t dt \\
\overset{2.3}{\Rightarrow}_n q_x &= \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int_x^{x+n} l_t\mu_t dt = \int_x^{x+n} \frac{l_t}{l_x}\mu_t dt \\
\Rightarrow_n q_x &= \int_x^{x+n} {}_{t-x}p_x\mu_t dt
\end{aligned}
$$

napravimo supstituciju y=t-x i slijedi:

$$\Rightarrow_n q_x = \int_0^n {}_y p_x \mu_{x+y} dy \tag{2.19}$$

Za n=1 je:

$$q_x = \int_0^1 {}_y p_x \mu_{x+y} dy \tag{2.20}$$

Puno jednostavnije ${}_nq_x$ možemo dobiti iz ${}_nq_x = 1 -_n p_x \overset{2.18}{=} 1 - e^{-\int_0^n \mu_{x+t}dt}$.
U slučaju da je $\mu_t = const = \mu$, što se često u praksi koristi kao dovoljno dobra aproksimacija, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
{}_np_x &\overset{2.18}{=} e^{-n\mu} \\
{}_nq_x &= 1 -_n p_x = 1 - e^{-n\mu}
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Primjetimo kako (2.21) dobijemo i kada riješimo (2.19) uz μ_t konstantan.
Riješimo jedan zadatak kao ilustraciju korištenja izvedenih formula. Pretpostavimo da je osoba u dobi od 55 godina izložena konstantnom intenzitetu smrtnosti $\mu = 0.02$ do dobi od 62 godine nakon čega se pretpostavlja da je izložena intenzitetu smrtnosti prema tablici mortaliteta RH koju koristimo za primjere. Izračunajmo, za tu osobu, vjerojatnost smrti prije navršene 60-te godine, vjerojatnost doživljene dobi 70 godina i vjerojatnost smrti između 60-te i 65-te godine.
Najprije tražimo ${}_5q_{55}$:

$${}_5q_{55} = 1 -_5 p_{55} \overset{2.21}{=} 1 - e^{-5\cdot 0.02} = 1 - e^{-0.1} = 0.09516$$

Zatim računamo:

$${}_{15}p_{55} \overset{2.10}{=}{}_7 p_{55} \cdot_8 p_{62} = e^{-7*0.02} \cdot \frac{l_{70}}{l_{62}} = e^{-0.14} \cdot \frac{71201}{84747} = 0.7304$$

I zadnje što nas zanima je:

$$_{5|5}q_{55} \overset{2.8}{=}_5 p_{55} -_{10} p_{55} = e^{-0.1} -_7 p_{55} \cdot_3 p_{62} = e^{-0.1} - e^{-0.14} \cdot \frac{l_{65}}{l_{62}} = 0.077989$$

U praksi, kako smo već raspravljali, vrijednosti za l_x tabelirane su samo za cjelobrojne nenegativne x i nisu poznate za necjelobrojne. Prema tome, niti vrijednosti funkcije μ_x nisu poznate i ne možemo funkciju eksplicitno odrediti. Ono što možemo je procijeniti vrijednosti za μ_x. Koristit ćemo formule maloprije izvedene:

$$_np_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt}$$

Odnosno, za n=1

$$p_x = e^{-\int_x^{x+1} \mu_t dt} \quad /ln\,()$$
$$\Rightarrow ln\,(p_x) = -\int_x^{x+1} \mu_t dt$$

Znamo da je interpretacija integrala funkcije μ_t na segmentu $[x, x+1]$ površina ispod grafa funkcije. Ako μ_t na tom segmentu aproksimiramo njenom vrijednošću u sredini intervala, tj. vrijednošću u točki $x + \dfrac{1}{2}$ vrijedi:

$$ln\,(p_x) = -\int_x^{x+1} \mu_t dt \approx -\mu_{x+\frac{1}{2}}$$

Ako sada aproksimiramo μ_t na intervalu $[x-1, x+1]$ vrijednošću u sredini intervala (μ_x) slijedi:

$$-\frac{1}{2}\,(lnp_x + lnp_{x-1}) = \frac{1}{2}\left(\int_x^{x+1} \mu_t dt + \int_{x-1}^{x} \mu_t dt\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{x-1}^{x+1} \mu_t dt\right) \approx \frac{1}{2} \cdot 2\mu_x$$
$$\Rightarrow \mu_x \approx -\frac{1}{2}\,(lnp_x + lnp_{x-1}) \tag{2.22}$$

Vrijednosti p_x za cjelobrojne x pronalazimo u tablici, a znamo ih naći i za necjelobrojne x uz pretpostavku interpolacije funkcije l_x. Drugi način procjene intenziteta smrtnosti je pretpostaviti da je funkcija l_x dovoljno puta derivabilna i aproksimirati je polinomom određenog stupnja koristeći Taylorov razvoj kako bismo dobili izraz za l'_x koji nam treba u definiciji μ_x. Za primjer, aproksimirat ćemo je polinomom drugog

stupnja.
Taylorov razvoj daje:

$$l_{x+h} \approx l_x + hl'_x + \frac{h^2}{2!}l''_x$$

$$l_{x-1} \approx l_x - l'_x + \frac{1}{2}l''_x \qquad (1)$$

$$l_{x+1} \approx l_x + l'_x + \frac{1}{2}l''_x \qquad (2)$$

Oduzimanjem (1)-(2) slijedi:

$$l_{x-1} - l_{x+1} \approx -2l'_x \qquad \Rightarrow l'_x \approx -\frac{1}{2}\left(l_{x-1} - l_{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot l'_x \approx \frac{1}{2l_x}\left(l_{x-1} - l_{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_x \approx \frac{1}{2l_x}\left(d_{x-1} + d_x\right) \qquad (2.23)$$

Neka je npr. l_x zadan formulom $l_x = 100\sqrt{100-x}$. Odredimo μ_{84} egzaktno i približno(na oba načina koja smo spominjali). Najprije odredimo egzaktno. Za to nam treba derivacija funkcije l_x: $l'_x = \frac{-100}{2\sqrt{100-x}}$

$\Rightarrow \quad \mu_x = \dfrac{-1}{l_x}l'_x = \dfrac{-1}{100\sqrt{100-x}} \cdot \dfrac{-100}{2\sqrt{100-x}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{100-x}$

$\Rightarrow \quad \mu_{84} = \dfrac{1}{32} = 0.03125$

Izračunajmo aproksimacije:

$l_{85} = 100\sqrt{100-85}$

$l_{83} = 100\sqrt{100-83}$

$\mu_{84} \approx -\dfrac{1}{2}\left(lnp_{84} + lnp_{83}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(ln\dfrac{l_{85}}{l_{84}} + ln\dfrac{l_{84}}{l_{83}}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(lnl_{85} - lnl_{83}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\left(lnl_{85} - lnl_{83}\right) = 0.03129$

Uz aproksimaciju funkcije l_x polinomom drugog stupnja:

$\mu_{84} \approx \dfrac{l_{83} - l_{85}}{2l_{84}} = \dfrac{\left(\sqrt{17} - \sqrt{15}\right)}{2\sqrt{16}} = 0.03127$

U prethodnom primjeru imali smo pretpostavku da je l_x opisana analitički, imamo matematički izraz za nju. To u praksi nije baš moguće naći iz tabeliranih vrijednosti. Postojali su mnogi pokušaji koji nisu bili dovoljno precizni. Ipak, neki dobiveni rezultati imali su veliku praktičnu važnost, posebice kada nije bilo računala, saznajemo u

[2]. Matematički izraz za neku od tabeliranih funkcija l_x, q_x, μ_x ili p_x obično nazivamo *zakonom smrtnosti*. Najpoznatiji zakoni smrtnosti su oni Gompertz-a i Makeham-a.
Gompertz(1825):

$$\mu_x = Bc^x \tag{2.24}$$

Nađimo izraz za l_x:

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x Bc^t dt = \frac{1}{ln\ c} Bc^t|_0^x = \frac{B(c^x - 1)}{ln\ c} = \left(g = const., ln\ g = \frac{-B}{ln\ c}\right)$$
$$= -(c^x - 1) ln\ g$$
$$\text{zbog } \frac{l_x}{l_0} = e^{-\int_0^x \mu_t dt} \Rightarrow \frac{l_x}{l_0} = g^{c^x - 1}$$

Uvedemo $k := \frac{l_0}{g} \Rightarrow \quad l_x = kg^{c^x}$.
Makeham(1860) predlaže modifikaciju:

$$\mu_x = A + Bc^x \tag{2.25}$$

Ako ponovimo sličan postupak kao gore, stavimo g, k kao gore i $s = e^{-A}$ dobit ćemo:

$$l_x = ks^x g^{c^x}.$$

Spomenimo još onaj najstariji, *De Moivreov* iz 1725. koji je dao izraz za l_x :

$$l_x = k(\omega - x) \tag{2.26}$$

Ovdje izvedimo izraz za μ_x:

$$\mu_x = \frac{-1}{l_x}(l_x)' = \frac{k}{k(\omega - x)} = \frac{1}{\omega - x}.$$

U [2] skreće se pažnja na činjenicu da svaki od ovih zakona smrtnosti daje formu matematičkog izraza, parametri nisu specificirane konstante već ih se treba dobiti iz empirijskih podataka. Obično vrijedi: $0.001 < A < 0.003, 10^{-6} < B < 10^{-3} i 1.08 < c < 1.12$. Na kraju, spomenut ćemo još neke važne zakone smrtnosti koje navodi Neill:

Dvostruki geometrijski zakon (1867):

$$\mu_x = A + Bc^x + Mn^x \tag{2.27}$$

Makeham II. (1889):

$$\mu_x = A + Hx + Bc^x \tag{2.28}$$

Perk (1931):

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x} \tag{2.29}$$

Weibull (1939):

$$\mu_x = Kx^\alpha, \quad x > 0, \alpha \geqslant 0, K > 0 \tag{2.30}$$

Ovim završavamo poglavlje. Tablica smrtnosti, kao što smo vidjeli, model je doživljenja izražen pomoću očekivanog broja preživjelih od početnog broja l_0. Odražava utjecaj dobi na vjerojatnost smrti ili doživljenja, a različite tablice pokušavaju uzeti u obzir i neke druge čimbenike života koji utječu na spomenute vjerojatnosti. Realističniji model smrtnosti dan je stohastičkim modelom prema kojem pretpostavljamo da su vrijednosti koje želimo slučajne varijable i zapravo bismo trebali procijeniti distribuciju dobi umiranja određene populacije. Time se u ovom radu nismo bavili. Više se može istražiti u knjizi [3].

Poglavlje 3

Osnovni oblici životnih osiguranja

Pod pojmom životnih osiguranja podrazumijevamo proizvode koji osiguravaju slučaj smrti neke osobe ili doživljenje određene dobi. To su osiguranje doživljenja (eng. pure endowment), životne rente (eng. life annuities), osiguranje za slučaj smrti(poznato još kao osiguranje života, eng. life insurance) te mješovito osiguranje (kombinacija osiguranja za slučaj smrti i doživljenja). Rekli smo da osiguranje obično kupujemo kako bismo se zaštitili od rizika financijskog gubitka prilikom nastupanja neizvjesnog događaja. Ovdje je neizvjestan događaj smrt osobe ili doživljenje određene dobi. Npr. odlučujemo se sada uplatiti određeni iznos osiguravajućem društvu u zamjenu za isplatu ugovorenog iznosa, neposredno nakon naše smrti, npr. našoj djeci. Na taj ih način štitimo od izostanka financijske sigurnosti nakon smrti roditelja. Kakav financijski gubitak možemo trpiti prilikom doživljenja određene dobi? Zamislimo osobu koja želi u starosti biti financijski stabilna i imati dovoljno novaca za kvalitetan život. Razmišljajući unaprijed, dok radi i zarađuje novac, spremna je izdvojiti određenu svotu i platiti sada kako bi joj osiguravajuće društvo svaki mjesec ili svake godine (ili u bilo kojim drugim ugovorenim intervalima) isplaćivalo ugovoreni iznos do njene smrti. Time se štiti od nedovoljno prihoda u godinama kada će biti u mirovini. U zamjenu za određeni iznos koji osiguravajuće društvo traži da platimo (zovemo ga premija) ono se obvezuje, na ugovoreni način, isplatiti ugovoreni iznos nakon nastupanja osiguranog događaja u budućnosti. Broj, vremenski intervali i iznos isplata ovise o vrsti proizvoda kao i osigurani događaj(osigurava li se smrt osobe ili doživljenje određene dobi). Osiguravajuće društvo, da bi odredilo premiju koju će tražiti, za određeni proizvod najprije će izračunati sadašnju vrijednost svojih troškova koje će u budućnosti imati za ugovoreni novčani tok(ugovorene isplate). U ovom poglavlju izvest ćemo upravo formule kojima se to računa za pojedini proizvod. Obratimo pozornost da isplate ovdje ovise o vjerojatnosti smrti ili doživljenja za razliku od financijskih renti (u poglavlju 1) gdje su isplate siguran događaj. Zbog toga, sadašnje vrijednosti ovisit će o pretpostavljenoj kamatnoj stopi i, ali i o vjerojatnosti nastupanja smrti/doživljenja osigurane osobe zbog čega smo se bavili tablicama smrtnosti u prethodnom poglavlju. Računat ćemo zapravo očekivanu sadašnju vrijednost. Općenito, ona će biti jednaka:

$$s.v.\text{od F(t)} = F(t)I(t)P(t), \text{ dok će za niz isplata biti:}$$
$$s.v. = \sum_t F(t)I(t)P(t) \tag{3.1}$$

pri čemu $s.v.$ stoji kao kratica za sadašnju vrijednost, $F(t)$ za iznos koji će trebati isplatiti u trenutku t (a uvjetovan je doživljenjem ili smrti osigurane osobe), $I(t)$ je sadašnja vrijednost iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t i $P(t)$ vjerojatnost isplate u trenutku t(vjerojatnost nastupanja osiguranog događaja). $I(t)$ ovisi o kamatnoj stopi koja može biti promjenjiva. Mi i dalje pretpostavljamo konstantnu i zbog čega će nam biti (prema (1.22)) $I(t) = v^t$. I dalje ovisi o izboru adekvatne kamatne stope čime se mi nećemo baviti. $P(t)$ će kod nas biti ${}_tp_x$ ili ${}_tq_x$ pri čemu "sadašnji trenutak" smatramo trenutak kada je osoba u dobi x i želi sklopiti osiguranje. Također, izborom adekvatne tablice smrtnosti ovdje se ne bavimo. Iako su pitanja kojima se ne bavimo vrlo važna, isto tako su vrlo teška jer ovise o prognoziranju tržišnih uvjeta ili pak distribuciji dobi umiranja. Nama je prvenstveno ovdje cilj iznjedriti formule kojima se služimo kada smo izbor već napravili.

3.1 Doživotne rente

Životna(osobna) renta (u daljnjem tekstu, skraćeno renta) je niz isplata u jednakim vremenskim intervalima pri čemu je pojedina isplata uvjetovana doživljenjem trenutka u kojem se isplaćuje. Jednostavnije rečeno, kada osigurana osoba umre, daljnje isplate prestaju. Takvu rentu, koja se isplaćuje do smrti osobe, nazivamo doživotna renta. Kroz cijelo ovo poglavlje promatrat ćemo godišnje isplate (vremenski interval bit će 1 godina). Primjer iz uvoda u poglavlje, o osobi koja brine o svojoj financijskoj stabilnosti nakon umirovljenja, bio bi primjer kupnje jedne doživotne rente. Uz njih, postoje i privremene rente. Kod njih, isplate prestaju nakon (ugovorenih) n godina ili prije, ako nastupi smrt osigurane osobe unutar tog razdoblja. Trenutak prve isplate također možemo birati pri ugovaranju. Renta se može početi isplaćivati odmah nakon kupnje (takve rente nazivamo neposredne) ili nakon određenog broja godina od kupnje (odgođene rente). Kao i kod financijskih renti, iznos može biti isplaćivan na kraju vremenskog intervala (rente plative unatrag) ili na početku intervala (rente plative unaprijed). Pažnju ćemo posvetiti neposrednim doživotnim rentama i izvesti formule za plative unaprijed i plative unatrag te odgođenim doživotnim rentama. Za ostale vrste renti samo ćemo navesti izvedene formule jer se dobiju slično. Cijeli postupak za ostale može se naći u [2]. Ono što još treba napomenuti je kako iznos isplata može biti varijabilan ili konstantan. Mi se bavimo konstantnim i u tom slučaju dovoljno je naći izraz za sadašnju vrijednost rente koja se isplaćuje u iznosu 1 (ponovo, vrijednost za ostale iznose isplate C dobivamo proporcionalno, množeći dobivene izraze sa C).

Promatramo neposrednu doživotnu rentu plativu unaprijed sa iznosom isplate 1 za osigurnu osobu dobi x. U trenutku kupnje rente osoba će primiti isplatu 1, nakon godinu dana ponovo 1 ukoliko doživi dob $x+1$, nakon dvije godine iznos 1 uz uvjet da je doživjela dob $x+2$ itd. Sadašnja vrijednost bit će suma sadašnjih vrijednosti osiguranja doživljenja dobi $x+1$, $x+2$...
Zato ćemo najprije diskutirati sadašnju vrijednost za osiguranje doživljenja(eng. pure endowment) dobi $x+n$, $n \in \mathbb{N}$ za osobu koja je sada u dobi x. Osiguranje doživljenja jest osiguranje jednokratne isplate (=osigurane svote) u nekom trenutku u budućnosti(nas zanima u dobi $x+n$), ako je osigurana osoba u tom trenutku živa. Interval od dana ugovaranja osiguranja i trenutka isplate osigurane svote nazivamo period osiguranja (u našem promatranom slučaju n godina). Zanima nas slučaj kada je osigurana svota 1. Sadašnja vrijednost takvog osiguranja, u oznaci $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, jednaka je:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = 1 \cdot v^n \cdot {}_n p_x \overset{2.2}{=} v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}, \text{ što možemo zapisati na način:}$$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{v^x}{v^x} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} \tag{3.2}$$

Uvodimo zamjensku funkciju D_x koju definiramo formulom $D_x := v^x l_x$ pa slijedi:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{3.3}$$

Uočimo ovisnost funkcije D_x o kamatnoj stopi i preko v^x. Vrijednosti D_x za nenegativne cjelobrojne x (predstavlja dob) tabeliraju se za određene kamatne stope i. Uvođenje ove funkcije i tabeliranje njenih vrijednosti bilo je važno u vremenima kada još nije bilo računala jer je pojednostavljivalo računanje.
Objasnimo još oznaku $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$. Veliko A stoji za jednokratnu isplatu, x je dob osobe u trenutku ugovaranja osiguranja ("sada") dok $\overset{1}{\overline{n}|}$ govori da je period osiguranja n godina i ako osoba doživi dob $x+n$ isplatit će se iznos 1. Važno je shvatiti da se ništa neće isplatiti ako smrt nastupi prije dobi $x+n$.
Vratimo se sada neposrednim doživotnim rentama. Označimo sa $\ddot{a}_x$ traženu sadašnju vrijednost (vrijednost u trenutku kada osoba dobi x kupuje rentu) neposredne doživotne

godišnje rente u iznosu 1, plative unaprijed. Prema maloprije opisanome vrijedi:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + A_{\substack{1\\x:\overline{1}|}} + A_{\substack{1\\x:\overline{2}|}} + A_{\substack{1\\x:\overline{3}|}} + ... \\ \Rightarrow\ \ddot{a}_x &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} A_{\substack{1\\x:\overline{t}|}} = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ipak, suma će biti konačna jer vrijedi $D_\omega = v^\omega l_\omega \overset{l_\omega=0}{=} 0$ i za svaki $x > \omega$, $l_x = 0$ pa prema definiciji i $D_x = 0$. U gornjoj sumi, za $t \geq \omega - x$ članovi će biti jednaki 0. Zato je:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x}{D_x} + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\left(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_{\omega-1}\right) \tag{3.5}$$

Definiramo još jednu zamjensku(tzv.komutacijsku) funkciju N_x formulom:

$$N_x := \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + ...$$

Sada sređena formula glasi:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{3.6}$$

Uočimo, iz definicije N_x slijedi $N_x = 0, \forall x \geq \omega$. Vrijednosti N_x također nalazimo tabelirane u istoj tablici kao i D_x i još neke komutacijske oznake koje ćemo uvesti kasnije. Tablica u kojoj ih nalazimo naziva se aktuarska tablica. Kako te vrijednosti u definiciji sadrže vrijednosti l_x, temelje se na odabranoj tablici smrtnosti. Jer ovise o izboru kamatne stope i ima ih više. Za određenu kamatnu stopu formira se jedna tablica. U [4] se mogu naći aktuarske tablice temeljene na Tablici mortaliteta RH ([5]) koju smo koristili u poglavlju 2. Navedene aktuarske tablice koristit ćemo dalje u radu prilikom demonstracije ilustrativnih primjera. Danas, uz računala, one nisu toliko važne, no nekad su se tabelirale čak i vrijednosti $\ddot{a}_x$ i a_x. Simbol a_x predstavlja sadašnju vrijednost neposredne doživotne rente plative unatrag s konstantnim iznosom isplate 1 za osobu sada u dobi x. Za razliku od plative unaprijed, prva isplata je godinu dana nakon kupnje rente (jer su isplate na kraju godine) pa u formuli nemamo početne jedinice:

$$\begin{aligned} a_x &= A_{\substack{1\\x:\overline{1}|}} + A_{\substack{1\\x:\overline{2}|}} + A_{\substack{1\\x:\overline{3}|}} + ... \\ \Rightarrow\ a_x &= \sum_{t=1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\left(D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_{\omega-1}\right) \\ \Rightarrow\ a_x &= \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}}\frac{D_{x+1}}{D_x} = \ddot{a}_{x+1}\frac{v^{x+1}}{v^x}\frac{l_{x+1}}{l_x} = v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Posljednja jednakost kaže da je sadašnja vrijednost("sada" - trenutak kada osoba ima x godina) neposredne doživotne rente plative unatrag (prva isplata na kraju godine, ako osoba doživi dob $x+1$) jednaka vrijednosti ekvivalentne rente, ali plative unaprijed, za osobu dobi $x+1$ pomnoženu vjerojatnošću da osoba dobi x doživi tu jednu godinu te diskontiranu na sadašnji trenutak.
Doživotne rente mogu biti i odgođene. Pretpostavimo da je rok odgode m godina. To znači da će se renta početi isplaćivati tek nakon m godina. Ukoliko kupimo doživotnu rentu plativu unaprijed s rokom odgode m godina i godišnjim iznosom isplate 1 kada smo u dobi x, prvu isplatu osiguravajuće društvo nam isplaćuje tek u dobi $x+m$. Dalje će se isplate događati početkom svake godine do naše smrti kao i kod neposrednih. Važno je shvatiti kako u periodu između kupnje rente i prve isplate (tijekom tih m godina) nema isplata. Isto tako, ako umremo u periodu odgode, isplate se nikad ne dogode jer su uvjetovane našim doživljenjem. Kod ekvivalentne rente plative unatrag, prva isplata je u trenutku $x+m+1$.
Sadašnja vrijednost gore opisane odgođene doživotne rente plative unaprijed s godišnjim iznosom isplate 1 i rokom odgode m godina za osobu u dobi x je:

$$\begin{aligned} {}_{m|}\ddot{a}_x &= \ddot{a}_{x+m} \cdot {}_m p_x \cdot v^m \\ &\overset{(3.6)}{=} \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} \cdot \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot v^m \cdot \frac{v^x}{v^x} \\ &= \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} \cdot \frac{v^{x+m} l_{x+m}}{v^x l_x} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+m}}{D_x} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nakon što prođe rok odgode od m godina, renta je ista kao i neposredna pa smo gornju formulu dobili gledajući vrijednost neposredne doživotne rente u trenutku $x+m$ i diskontiranjem dobili vrijednost u sadašnjem trenutaku(x). Zbog uvjeta doživljenja, još smo trebali pomnožiti s vjerojatnošću doživljenja trenutka $x+m$. Analognim razmišljanjem dobivamo formulu za rentu plativu unatrag:

$${}_{m|}a_x = a_{x+m} \cdot {}_m p_x \cdot v^m = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \tag{3.9}$$

Zamislimo osobu u dobi od 45 godina koja je odlučila kupiti životnu rentu. Prvu isplatu želi primiti kada navrši 65 godina jer će tada ići u mirovinu. Na početku svake godine voljela bi dobivati 60 000 kuna i tako 15 godina. Ukoliko ranije umre ili primi 15 isplata, isplate prestaju. Pretpostavimo konstantnu kamatnu stopu $i = 4\%$. Kolika bi bila sadašnja protuvrijednost takve rente?
Izračunajmo sadašnju vrijednost rente. Osoba sada ima 45 godina. Prva isplata dogodit će se za 20 godina i svaka sljedeća isplaćivat će se početkom godine. Isplate

prestaju ukoliko osoba umre. Prepoznajemo odgođenu životnu rentu plativu unaprijed. No, više od 15 isplata nije moguće. Takva renta čije plaćanje prestaje nakon dogovorenog broja godina ili ranije (ako osoba umre) je privremena životna renta. U ovom primjeru imamo odgođenu privremenu rentu. Kada ne bi postojao rok odgode, renta bi bila neposredna privremena.
Formula za sadašnju vrijednost neposredne privremene životne rente plative unatrag s godišnjim iznosom 1 za osobu dobi x, u oznaci $a_{x:\overline{n}|}$, glasi:

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= A_{\substack{1\\ x:\overline{1}|}} + A_{\substack{1\\ x:\overline{2}|}} ... + A_{\substack{1\\ x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + ... \frac{D_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Za plativu unaprijed vrijedi:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{3.11}$$

Za odgođene privremene s godišnjim iznosom 1 i rokom odgode m godina te trajanjem n godina, plativu unatrag i plativu unaprijed, respektivno, vrijedi:

$${}_{m|n}a_x = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|} = ... = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} \tag{3.12}$$

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \tag{3.13}$$

U primjeru je $m = 20$, $n = 15$, $x = 45$ i godišnji iznos $C = 60\ 000$. Prema formuli (3.13), sadašnja vrijednost, koja se u primjeru traži, iznosi:

$$\begin{aligned} 60\ 000 \cdot {}_{20|15}\ddot{a}_{45} &= 60\ 000 \cdot \frac{N_{65} - N_{80}}{D_{45}} \overset{iz\ tablice\ [4]\ za\ i=4\%}{=} 60\ 000 \cdot \frac{59288.67 - 7785.55}{16178.25} = \\ &= 191\ 008.74 \end{aligned}$$

Osiguravajuće društvo bi za takvu rentu, bez ikakvih drugih uračunatih troškova i zarade, sada tražilo jednokratnu uplatu od 191 008.74 kune.

3.2 Osiguranje za slučaj smrti

Osiguranje za slučaj smrti (osiguranje života, eng. Life insurance) ugovor je kojim se osiguravatelj obvezuje isplatiti određenu svotu novca po smrti osigurane osobe. Novac, u praksi, bude isplaćen za vrlo kratko vrijeme nakon nastupanja smrti, odmah nakon obavljenih potrebnih administrativnih procedura nakon smrti. U svrhu jednostavnijeg i razumljivijeg matematičkog modela, mi ćemo pretpostaviti da se novac isplati na kraju godine u kojoj se smrt dogodila. Npr. ako osiguranik ugovori osiguranje života 1. siječnja i umre za tjedan dana, naša pretpostavka znači da će se isplata dogoditi tek 31. prosinca. O modelu za realističniju situaciju, s isplatom odmah, može se čitati u [3]. Treba uočiti razliku od životnih renti o kojima smo pričali u prethodnom potpoglavlju. Kod životnih renti riječ je o obvezi niza isplata ovisnih o doživljenju koje prestaju nakon smrti osigurane osobe. Ovdje je obveza jedne isplate i to nakon smrti osigurane osobe (prije smrti ništa se ne isplaćuje). I ovdje postoji više vrsta polica. Tako možemo sklopiti policu doživotnog osiguranja za slučaj smrti (eng. Whole life insurance) kod kojeg se jednokratna isplata sigurno dogodi, ali kada, ovisi o trenutku smrti osigurane osobe. Postoji mogućnost osiguranja života i na određenih, recimo n godina (eng. Term life insurance). Kod takvog osiguranja isplaćuje se novac samo ako smrt nastupi unutar osiguranog perioda od n godina. Znači, može se dogoditi da se isplata nikad ne dogodi. Ako npr. osoba sa 60 godina sklopi takvo osiguranje na 25 godina i doživi više od 85 godina, ništa se ne isplaćuje.

Promotrimo doživotno osiguranje života za osobu u dobi x. Pretpostavimo da se u slučaju njene smrti u intervalu $[x+t, x+t+1]$ isplaćuje iznos 1 u trenutku $x+t+1$. Vjerojatnost smrti osobe u tom intervalu (prema diskutiranom u poglavlju 2) jednaka je ${}_{t|1}q_x$. Prema (2.7) vrijedi ${}_{t|1}q_x = \frac{l_{x+t}-l_{x+t+1}}{l_x} = \frac{d_{x+t}}{l_x}$. Tada je sadašnja vrijednost obveze jednaka: $1 \cdot v^{t+1} \cdot {}_{t|1}\, q_x$. Slijedi da je ukupna sadašnja vrijednost obveze osiguravajućeg društva za doživotno osiguranje života osobe dobi x:

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{v^x}{v^x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \\
&= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t+1} d_{x+t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t+1} d_{x+t}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Ponovo definiramo komutacijske funkcije:

$$
\begin{aligned}
C_x &:= v^{x+1} d_x \\
M_x &:= C_x + C_{x+1} + \dots + C_{\omega-1}
\end{aligned}
$$

i dobivamo kratko zapisanu formulu:

$$
A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{3.15}
$$

Moguća je i ovdje odgoda od m godina. Za doživotno osiguranje života s odgodom od m godina za osobu dobi x i isplatom 1, sadašnja vrijednost je:

$$
{}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \tag{3.16}
$$

Za privremeno osiguranje, tj. osiguranje života s određenim trajanjem(n godina) za osobu dobi x i osiguranim iznosom 1 imamo:

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \ {}_{t|}q_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{3.17}$$

Ako još dodamo odgodu od m godina sadašnja vrijednost je:

$$_{m|}A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \tag{3.18}$$

Oznaka je slična oznaci za osiguranje doživljenja. Ovdje je jedinica iznad x, a ne iznad n. Jedinica iznad oznake za dob (x) ovdje znači da je osigurana svota 1 koja se isplaćuje ako osoba dobi x umre unutar sljedećih n godina, u intervalu $[x, x+n\rangle$. Napomenimo još da se ne isplaćuje naknada ukoliko osigurana osoba ima osiguranje života s odgodom od m godina i umre unutar radzdoblja odgode, odnosno u intervalu $[x, x+m\rangle$.

3.3 Mješovito osiguranje

Pod pojmom mješovito osiguranje mogu se naći osiguranja koja su kombinacija do sad navedenih životnih osiguranja ili čak kombinacija životnog osiguranja i nekog financijskog proizvoda. Vidjet ćemo u sljedećem poglavlju jedan primjer kombinacije doživotne rente i financijske rente s ograničenim trajanjem.
Sada ćemo pogledati kombinaciju osiguranja života i doživljenja (eng. Endowment). Radi se o privremenom osiguranju za slučaj smrti u vremenu od dobi x do dobi $x+n$ i osiguranju doživljenja dobi $x+n$. Neka je osigurani iznos 1 i on se tada isplaćuje ako osoba umre u osiguranom intervalu $[x, x+n\rangle$ ili ako doživi dob $x+n$. Sadašnja vrijednost takvog osiguranja računa se kao zbroj sadašnjih vrijednosti pojedinog slučaja:

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{3.19}$$

Moguće je da naknada u slučaju smrti bude C_1 i bude različita od ugovorenog iznosa za doživljenje C_2. Primjerice, za naknadu $C_1 = 25\ 000$ i ugovoreni iznos za doživljenje dobi $x+n$, $C_2 = 50\ 000$, sadašnja vrijednost je: $25\ 000 \cdot A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + 50\ 000 \cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$.

Poglavlje 4

Neto premije

4.1 Definicija

Definicija u [1] kaže: „Iznosi koje osigurana osoba (osiguranik) plaća osiguravajućem društvu (osiguravatelju), u zamjenu za osigurani iznos u slučaju smrti ili doživljenja, nazivaju se premije. Za premije kažemo da su neto premije ako je suma njihovih sadašnjih vrijednosti jednaka sadašnjoj vrijednosti obaveza (naknada osiguraniku, odnosno ugovorenih osiguranih iznosa) osiguravatelja."
Kao što smo i ranije rekli, prilikom ugovaranja neke vrste životnog osiguranja, osiguravajuće društvo se obvezuje na isplatu naknade ili osigurane svote (bilo jednokratno kao npr. kod osiguranja života ili u odgovarajućim vremenskim intervalima kao kod životnih renti) u slučaju nastupanja osiguranog događaja. Kako bi mogli ispuniti svoje obaveze i u zamjenu za preuzimanje rizika, od osoba koje žele određeno osiguranje traže određeni iznos. Taj iznos osiguranik može platiti odjednom (jednokratna premija) ili u više obroka (svaki iznos koji se uplaćuje je jedna premija). Obično se premije plaćaju u pravilnim vremenskim razmacima(npr. na početku svake godine) u jednakim iznosima. Tako je obično kod osiguranja smrti, osiguranja doživljenja ili odgođenih renti. Iznimka su neposredne rente kod kojih obveze osiguravajućeg društva krenu odmah zbog čega se premija plaća pri kupnji u cjelosti (jednokratno). Pritom je važno naglasiti da se premije plaćaju uvijek unaprijed (otud valjda i naziv). Uočimo, prema gore danoj definiciji, jednokratna neto premija za određenu vrstu osiguranja je zapravo sadašnja vrijednost svih budućih isplata(obaveza) osiguravajućeg društva prema osiguraniku. Upravo to smo izvodili i računali u prethodnom poglavlju za osnovne oblike životnih osiguranja. Za slučaj kada se plaća više premija u pravilnim vremenskim razmacima i jednakim iznosima, iz definicije proizlazi da treba biti zadovoljena sljedeća jednadžba:

$$\begin{pmatrix} \text{Očekivana sadašnja vrijednost} \\ \text{svih neto premija} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Očekivana sadašnja vrijednost} \\ \text{svih obaveza osiguravatelja} \end{pmatrix}$$

U praksi, osiguravajuća društva osim troškova obveza prema osiguraniku imaju i neke druge popratne troškove. Naravno, žele i neku maržu(zaradu). Sve to uračunavaju u iznos premija. Premije koje sadrže i dodne troškove nazivaju se *bruto premije.* One nisu tema ovog rada. Mi ćemo proučavati kako se računaju *neto premije* - premije potrebne za isplatu budućih obveza koje ne sadrže nikakve dodatne troškove. Također, ograničit ćemo se na godišnje neto premije.

4.2 Formule za iznos neto premija

Vodeći se gore navedenom generalnom jednadžbom izvodimo formule za iznos neto premije pojedinog osnovnog oblika životnog osiguranja. Oznake koje se koriste za iznos premije analogne su prethodnim oznakama za sadašnje vrijednosti. Razlika je da se umjesto slova A piše slovo P.
Već smo zaključili, formule za iznos jednokratnih neto premija izveli smo u prethodnom poglavlju. Iznos jednokratne premije jednak je sadašnjoj vrijednosti svih budućih obaveza. Zbog toga, za neposredne doživotne rente u iznosu 1, iznos premije za osobu dobi x jednak je a_x za rentu plativu unatrag, odnosno $\ddot{a}_x$ za rentu plativu unaprijed. Za neposredne privremene u iznosu 1 na n godina, jednokratna premija za osobu dobi x iznosi $a_{x:\overline{n}|}$ za rentu plativu unatrag i $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ za rentu plativu unaprijed.
U nastavku gledamo premije koje se plaćaju godišnje. Promotrimo odgođenu doživotnu rentu plativu unatrag, u iznosu 1 s rokom odgode m godina za osobu dobi x. Neka se premija plaća u razdoblju odgode (m godina). Neka je oznaka za premiju ${}_mP_x$ gdje x označava dob, a m koliko godina se premija plaća. Prema generalnoj formuli slijedi:

$$\begin{aligned} {}_mP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} &= {}_{m|}a_x \\ \Rightarrow \ {}_mP_x &= \frac{{}_{m|}a_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

U početnoj jednadžbi, na lijevoj strani imamo očekivanu sadašnju vrijednost svih premija. Premija u iznosu ${}_mP_x$ plaća se prvih m godina uvijek unaprijed i to možemo shvatiti kao neposrednu privremenu rentu osiguranika osiguravatelju. Otud izraz za sadašnju vrijednost ${}_mP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$. Desna strana nam je jasna iz rasprave u prethodnom poglavlju. Istom logikom dobivamo godišnju premiju koja se plaća u razdoblju odgode(m godina) za odgođenu doživotnu rentu plativu unaprijed:

$${}_mP_x = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

Iznos premija, za osobu dobi x za odgođenu privremenu rentu (u iznosu 1) plativu unatrag, odnosno unaprijed, koje se plaćaju prvih $t < m$ godina jednak je:

$$ {}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = {}_{m|n}\, a_x \Rightarrow {}_tP_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+t}}, \text{ za plativu unatrag} $$

$$ {}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = {}_{m|n}\, \ddot{a}_x \Rightarrow {}_tP_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+t}}, \text{ za plativu unaprijed} $$

Razmotrimo sada doživotno neposredno osiguranje života (osiguranje za slučaj smrti) za osobe u dobi x osiguranog iznosa 1. Neka je godišnja premija P_x. Imamo:

$$ \begin{aligned} P_x \cdot \ddot{a}_x &= A_x \\ P_x &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x} \end{aligned} \tag{4.2} $$

Ako se premija plaća samo kroz prvih t godina/obroka tada imamo:

$$ {}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = A_x \;\Rightarrow\; {}_tP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}. $$

U slučaju takvog osiguranja samo s odgodom od m godina vrijedi:

$$ {}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = {}_{m}A_x \;\Rightarrow\; {}_tP_x = \frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+t}} $$

Za osiguranje za slučaj smrti na određeno vrijeme od n godina, godišnja premija za osobu u dobi x, u oznaci $P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$, jednaka je:

$$ P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \;\Rightarrow\; P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.3} $$

Ako se premije plaćaju samo $t < n$ godina slijedi: ${}_tP_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$.

Analognim principom razmišljanja kao i do sad, dobivamo premije za mješovito osiguranje (eng. Endowment) na rok od n godina:

$$ P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.4} $$

$$ \text{i } {}_tP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}, \text{ za premije koje se plaćaju samo } t \text{ godina.} \tag{4.5} $$

4.3 Primjeri

Primjer 4.3.1. *Osoba, u dobi 40, ugovorila je doživotnu rentu čiji je godišnji iznos 10 000 kuna i isplate kreću s navršenih 65 godina života. Ukoliko osoba umre prije 65. godine, ništa se ne isplaćuje. Godišnje premije plaćat će idućih 25 godina počevši odmah. Nakon 15 godina, iznos premije se prepolovi. Koliki je iznos početne neto premije? Koristite aktuarske tablice RH ([4]) za žene i uzmite 2% kamatnu stopu.*

Ako se iznos početne neto premije P smanjuje na $\frac{1}{2}P$, izjednačavanje sadašnje vrijednosti premija i obaveza daje:

$$10\ 000 \cdot {}_{25|}\ddot{a}_{40} = P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}|} + \frac{1}{2} \cdot P \cdot {}_{15|10}\ddot{a}_{40}$$

$$10\ 000 \cdot \frac{N_{65}}{D_{40}} = P \cdot \left(\frac{N_{40} - N_{55}}{D_{40}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N_{55} - N_{65}}{D_{40}} \right)$$

$$P = 10\ 000 \cdot \frac{N_{65}}{N_{40} - \frac{1}{2}N_{55} - \frac{1}{2}N_{65}} \overset{[4],i=2\%,\text{žene}}{=} \frac{10\ 000 \cdot 351343.49}{1214718.26 - \frac{1}{2} \cdot 636556.33 - \frac{1}{2} \cdot 351343.49}$$

$$P = 4874.57$$

Početna neto premija iznosi 4874.57 kuna godišnje, a nakon 15 godina iznos postaje 2437.28 kuna.

Primjer 4.3.2. *Pronađite iznos godišnje neto premije koja se plaća 10 godina za doživotno osiguranje života osobe sada u dobi 25 godina. Osigurani iznos neka je 10 000kn. Pronađite iznos neto premije i za osobu koja pri ugovaranju ima 55 godina. Uzimamo aktuarske tablice koje koristimo u svrhu ilustrativnih primjera ([4]). Koriste se komutacijski simboli za žene i kamatna stopa* $i = 2\%$.

Računamo:

$$P_{25} \cdot \ddot{a}_{25:\overline{10}|} = 10\ 000 \cdot A_{25}$$

$$P_{25} \cdot \frac{N_{25} - N_{35}}{D_{25}} = 10\ 000 \cdot \frac{M_{25}}{D_{25}}$$

$$P_{25} = \frac{10\ 000 \cdot M_{25}}{N_{25} - N_{35}} \overset{[4]}{=} \frac{10\ 000 \cdot 21217.72}{2006328.65 - 1452268.22} = 382.9496$$

Dok za osobu dobi 55 analogno vrijedi:

$$P_{55} = \frac{10\ 000 \cdot M_{55}}{N_{55} - N_{65}} = \frac{10\ 000 \cdot 19509.63}{636556.33 - 351343.49} = 684.0376$$

Primjer 4.3.3. *Izračunajte godišnju premiju za 20-godišnje mješovito osiguranje s osiguranom svotom* 10 000*kn za osobu staru 40 godina.*

$n = 20$, $x = 40$ i uvrstimo u formulu (4.4):

$$P_{40:\overline{20}|} = 10\ 000 \cdot \frac{M_{40} - M_{60} + D_{60}}{N_{40} - N_{60}} = 10\ 000 \cdot \frac{20816.61 - 18629.12 + 28126.22}{1214718.26 - 484352.35}$$
$$P_{40:\overline{20}|} = 415.048$$

Primjer 4.3.4. *Pretpostavite da je $q_{60} = 0.012445$, $q_{61} = 0.013619$ te $i = 2\%$. Prema dvogodišnjoj polici osiguranja za slučaj smrti, ako smrt nastupi u prvoj godini osiguranja, na kraju te godine isplaćuje se naknada iznosa 800kn. Za smrt u drugoj godini osiguranja isplaćuje se iznos 750kn. Ukoliko osoba doživi 62 godine, isplaćuje se naknada za doživljenje u iznosu 700kn. Osiguranje se plaća godišnjim premijama dvije godine. Izračunajte iznos neto premije.*

Sadašnja vrijednost(vrijednost u trenutku kada osoba ima 60 godina i sklopi policu osiguranja) naknada za slučaj smrti iznosi:

$$\begin{aligned}
&800 \cdot v \cdot q_{60} + 750 \cdot v^2 \cdot p_{60} \cdot q_{61} = \\
&= 800 \cdot \frac{1}{1.02} \cdot 0.012445 + 750 \cdot \left(\frac{1}{1.02}\right)^2 \cdot (1 - 0.012445) \cdot 0.013619 \\
&= 19.4563
\end{aligned}$$

Sadašnja vrijednost naknade za doživljenje je:

$$700 \cdot p_{60} \cdot p_{61} \cdot v^2 = 700 \cdot (1 - 0.012445) \cdot (1 - 0.013619) \cdot \left(\frac{1}{1.02}\right)^2 = 655.3958$$

Sadašnja vrijednost premija:

$$P \cdot \ddot{a}_{60:\overline{2}|} = P \cdot (1 + 1 \cdot v \cdot p_{60}) = P \cdot \left(1 + \frac{1}{1.02} \cdot (1 - 0.012445)\right) = P \cdot 1.96819$$

Treba vrijediti:

$$P \cdot 1.96819 = 19.4563 + 655.3958 \ \Rightarrow\ P = \frac{19.4563 + 655.3958}{1.96819} = 342.8795$$

Primjer 4.3.5. *Osoba stara 30 godina ima pravo na odgođenu životnu rentu od 10 000kn godišnje za razdoblje od 5 godina. Renta se isplaćuje u godišnjim obrocima od kojih prvi dospijeva za 11 godina. Ova osoba želi sklopiti ugovor o osiguranju života kojim bi isplata rente po datumima dospijeća bila zajamčena u slučaju da zbog smrti izgubi pravo na rentu. Izračunajte godišnju neto premiju ograničenu na 10 godišnjih uplata. Koristite komutacijske simbole za žene izračunate za kamatnu stopu 2%.*

Opet polazimo od jednakosti sadašnjih vijednosti obaveza i premija.
sadašnja vrijednost isplata koje osoba ne doživi (obaveze osiguravatelja) = sadašnja vrijednost premija

$$\begin{pmatrix}\text{sadašnja vrijednost isplata}\\ \text{koje osoba ne doživi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{sadašnja vrijednost}\\ \text{izvjesnih isplata}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{sadašnja vrijednost isplata}\\ \text{koje osoba doživi}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{sadašnja vrijednost isplata}\\ \text{koje osoba ne doživi}\end{pmatrix} = 10\ 000 \cdot {}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|} - 10\ 000 \cdot {}_{11|}\ddot{a}_{30:\overline{5}|}$$

Sadašnja vrijednost premija $= P\ddot{a}_{30:\overline{10}|}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & P\ddot{a}_{30:\overline{10}|} = 10\ 000 \cdot {}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|} - 10\ 000 \cdot {}_{11|}\ddot{a}_{30:\overline{5}|}\\
\Rightarrow\quad & \ddot{a}_{30:\overline{10}|} = \frac{N_{30}-N_{40}}{D_{30}} = \frac{1715350.10 - 1214718.26}{54764.09} = 9.14111\\
& {}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|} = v^{11} \cdot \frac{1-v^5}{1-v} = \left| v = \frac{1}{1.02} \right| = 3.866678\\
& {}_{11|}\ddot{a}_{30:\overline{5}|} = \frac{D_{41}}{D_{30}} \cdot \frac{N_{41}-N_{46}}{D_{41}} = \frac{43711.47}{54767.09} \cdot \frac{1170083.64 - 960485.02}{43711.47} = 3.82709\\
\Rightarrow\quad & P = \frac{10\ 000 \cdot \left({}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|} - {}_{11|}\ddot{a}_{30:\overline{5}|}\right)}{\ddot{a}_{30:\overline{10}|}} = 43.3077
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.6. *Osoba u dobi 40 godina ugovorila je takvo osiguranje da se doživotna renta, u godišnjem iznosu* 12 000*kn, isplaćuje unaprijed od navršene 65. godine života. Ukoliko osoba premine u razdoblju do 65. godine, isplatit će se naknada u iznosu* 7 000*kn na kraju godine smrti. Premija se plaća 25 godina. Pronađite iznos neto premije. (Ovo je jedno mješovito osiguranje koje je kombinacija neposrednog osiguranja života na određeno vrijeme i odgođene doživotne rente.)*

$$\begin{aligned}
P\ddot{a}_{40:\overline{25}|} &= 7\ 000 \cdot A^{\ 1}_{40:\overline{25}|} + 12\ 000 \cdot {}_{25|}\ddot{a}_{40}\\
P \cdot \frac{N_{40}-N_{65}}{D_{40}} &= 7\ 000 \cdot \frac{M_{40}-M_{65}}{D_{40}} + 12\ 000 \cdot \frac{N_{65}}{D_{40}}\\
P &= \frac{7\ 000 \cdot (M_{40}-M_{65}) + 12\ 000 \cdot N_{65}}{N_{40}-N_{65}}\\
&= \frac{7\ 000 \cdot (20816.61 - 17408.62) + 12\ 000 \cdot 351343.49}{1214718.26 - 351343.49}\\
&= 4910.9355
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.7. *Neka osoba u dobi od 65 godina odlazi u mirovinu. Do tog trenutka, akumulirani iznos jednak je C=100 000 i može birati na koji način će joj se isplatiti. Osoba se odlučila na doživotnu godišnju rentu sa zajamčenim periodom isplate 5 godina. To znači da će se prvih 5 godina mirovina isplaćivati neovisno je li osoba živa ili nije (ako nije, mirovina će se isplatiti nasljedniku). Nakon zajamčenog perioda, isplaćuje se samo ako je osoba živa (nadalje funkcionra kao obična doživotna renta). Renta je plativa unaprijed. Koliki će biti godišnji iznos isplate?*

Uočimo, ovo možemo promatrati kao kombinaciju financijske rente s ograničenim trajanjem 5 godina i odgođene doživotne rente s periodom odgode 5 godina. Tako i računamo. Izjednačimo sadašnje vrijednosti do sada akumulirane svote(C) i ukupnih budućih obaveza. Označimo iznos godišnje rente sa R. Riječ je o renti plativoj unaprijed. Računamo:

$$
\begin{aligned}
C &= R \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|} + R \cdot {}_{5|}\ddot{a}_{65} \\
100\ 000 &= R \cdot \left(\frac{1 - v^5}{d} + \frac{N_{75}}{D_{65}} \right) \\
\Rightarrow \ R &= \frac{100\ 000}{\frac{1-(1+i)^{-5}}{i \cdot v} + \frac{237\ \ 866.42}{24\ \ 297.71}} \\
R &= 17\ 281.048
\end{aligned}
$$

Godišnji iznos isplate neposredne rente plative unaprijed sa sigurnim isplatama u prvih 5 godina bit će jednaka 17 281.048kn.

Poglavlje 5

Matematičke rezerve

Zamislimo da velik broj osoba u dobi x, njih $\lambda \cdot l_x$ kupi doživotno osiguranje za slučaj smrti i svi neka uplaćuju godišnju premiju u iznosu P_x. Osiguravajuće društvo premije koje osiguranici uplate na početku godine investira kako bi se, po određenoj kamatnoj stopi, akumulirale s ciljem da akumulirani iznos na kraju godine bude dovoljan za isplatu obaveza. Vidjeli smo da se neto premije računaju s obzirom na procijenjenu kamatnu stopu i odabranu tablicu smrtnosti. Pokušava se što bolje procijeniti kamatna stopa po kojoj će osiguravajuće društvo moći investirati i akumulirati premije te uzeti tablica smrtnosti koja najbolje opisuje smrtnost skupine. Cilj je što preciznije prognozirati očekivane obaveze za određenu godinu. Manja kamatna stopa implicira veću premiju jer se iznos sporije akumulira i obratno. Pri većoj kamatnoj stopi, iznos se brže akumulira zbog čega je (za isti iznos obaveze) potrebna manja premija. S druge strane, veća vjerojatnost nastupanja osiguranog događaja(u ovom primjeru smrti osobe) implicirat će veći očekivani iznos obaveza, a time i potrebnu veću premiju. Pretpostavit ćemo da osiguravajuće društvo na sredstva u svom posjedu ostvaruje točno onu kamatnu stopu i s obzirom na koju su izračunate premije i da odabrana tablica opisuje smrtnost promatrane skupine(tj. ostvaruju se predviđena kamatna stopa i predviđena smrtnost). Rizik smrti rastuća je funkcija, tj. vjerojatnost smrti osobe, q_x, s godinama raste. Što je q_x veći, to očekujemo više umrlih osoba u intervalu $[x, x+1\rangle$, odnosno veći trošak obaveza na kraju te godine, u trenutku $x+1$. Iz tog razloga, iznos premija trebao bi iz godine u godinu rasti. U početnim godinama iznos premije trebao bi biti manji, a u kasnijim veći. U prethodnom poglavlju komentirali smo kako u praksi to nije slučaj, a pretpostavili smo i plaćanje premija u jednakim iznosima svake godine. Ipak, njihov iznos izračunat je tako da ukupna sadašnja vrijednost odgovara sadašnjoj vrijednosti ukupnih obaveza. Posljedica je da na kraju početnih godina akumulirani iznos uplaćenih premija premašuje akumulirani iznos isplaćenih svota, dok u kasnijim godinama imamo obratnu situaciju - iznos uplaćenih premija nije dovoljan za pokrivanje troškova obaveza. Taj manjak nadoknađuje se akumuliranim viškom (pozitivnom razlikom iz prijašnjih godina) iz početno uplaćenih premija. Zato je važno da u svakom trenutku t tu razliku vrijednosti uplaćenih premija i vrijednosti isplaćenih obaveza osiguravajuće društvo drži u svom posjedu, "rezervira" za kasnije potrebe. Taj iznos nazivamo *ukupna neto premijska rezerva*. Ukupna rezerva na kraju godine t podijeljena brojem polica tog trenutka na snazi zove se *neto premijska rezerva po slučajno odabranoj polici* ili *vrijednost police* ili *matematička rezerva*. Uočimo, zbog definicije i načina izračuna neto premije vrijedi: $\left(\text{ ukupne obaveze }\right)_t = \left(\text{ ukupne premije }\right)_t$, pri čemu $()_t$ znači "vrijednost u trenutku t". Nadalje imamo:

$$\begin{pmatrix} \text{uplaćene} \\ \text{premije} \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \text{nedospjele uplate} \\ \text{premija} \end{pmatrix}_t = \left(\text{ isplaćene obaveze }\right)_t + \left(\text{ buduće obaveze }\right)_t$$

iz čega slijedi:

$$\begin{pmatrix} \text{uplaćene} \\ \text{premije} \end{pmatrix}_t - \left(\text{ isplaćene obaveze }\right)_t = \left(\text{ buduće obaveze }\right)_t - \begin{pmatrix} \text{nedospjele uplate} \\ \text{premija} \end{pmatrix}_t$$

Vidimo da razlika vrijednosti uplaćenih premija i isplaćenih obaveza u trenutku t mora biti jednaka razlici vrijednosti budućih isplata i nedospjelih uplata premija u trenutku t. Prethodno smo razliku s lijeve strane posljednje jednakosti definirali kao *matematičku rezervu* zbog čega zaključujemo da se iznos za vrijednost matematičke rezerve, za svaki trenutak t, može izračunati i kao razlika između vrijednosti budućih isplata i nedospjelih uplata premija. Takva metoda računanja rezerve naziva se *prospektivna* (izračun temeljen na transakcijama koje nas još očekuju u budućnosti). Rezerva dobivena prvom metodom naziva se *retrospektivna rezerva* (izračun na temelju realiziranih, prošlih transakcija). Jasno je (vidi [3]) da retrospektivnu metodu možemo koristiti samo u slučaju neto premijske rezerve kada su ukupne premije i obaveze aktuarski jednake.

U nastavku želimo izvesti formule. Uzmimo ponovo da se, općenito, osiguralo $\lambda \cdot l_x$ osoba u dobi x i svima je obračunata premija P_x. Promotrimo situaciju t godina poslije. Tada je ukupna vrijednost police osiguranja života (osiguranja za slučaj smrti) sa osiguranom svotom 1, po definiciji jednaka:

$$\begin{pmatrix} \text{akumulirana} \\ \text{vrijednost premije} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{akumulirana vrijednost} \\ \text{dospjelih šteta} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= P_x \cdot (\lambda l_x (1+i)^t + \lambda l_{x+1}(1+i)^{t-1} + \lambda l_{x+2}(1+i)^{t-2+} + \cdots + \lambda l_{x+t-1}(1+i)) - \\ &- 1 \cdot (\lambda d_x (1+i)^{t-1} + \lambda d_{x+1}(1+i)^{t-2} + \cdots + \lambda d_{x+t-1}) =: {}_tV_x \cdot \lambda l_{x+t} \end{aligned}$$

Uvedeni simbol, ${}_tV_x$, predstavlja *vrijednost police po osiguranoj osobi koja je živa u trenutku t.*
Zapišimo malo ljepše gornju jednakost ($(1+i)^t = v^{-t}$):

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x =& \frac{1}{\lambda l_{x+t}} \cdot P_x \lambda \left(l_x v^{-t} + l_{x+1} v^{-t+1} + \cdots + l_{x+t-1} v^{-1} \right) - \\
& \frac{1}{\lambda l_{x+t}} \cdot \lambda \left(d_x v^{-t+1} + d_{x+1} v^{-t+2} + \cdots + d_{x+t-1} \right) \ / \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} \\
\overset{D_x = l_x v^x, C_x = d_x v^{x+1}}{\Rightarrow} {}_tV_x =& P_x \frac{1}{D_{x+t}} \left(D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+t-1} \right) - \\
& \frac{1}{D_{x+t}} \left(C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+t-1} \right) \\
\overset{def.\ N_x, M_x}{\Rightarrow} {}_tV_x =& P_x \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Formulu koju smo upravo dobili za iznos rezerve neposrednog osiguranja života izveli smo *retrospektivnom metodom.* Važno je uočiti kako ona vrijedi za privremeno i doživotno osiguranje jer gledamo akumulacije do unaprijed određene fiksne godine t. Za osiguranu svotu jednaku C, gornju formulu množimo tim iznosom. Napomenimo još da je prvi član formule, $P_x \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$, zapravo formula za akumulaciju uplaćenih premija do trenutka t. Sada uvrstimo izvedene formule za iznos premije u formulu (5.1) kako bismo dobili krajnje formule u pojedinim slučajevima osiguranja života.
(a) Doživotno osiguranje života:

$$
P_x = \frac{M_x}{N_x} \quad \overset{5.1}{\Rightarrow} \quad {}_tV_x = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}
\tag{5.2}
$$

(b) Privremeno osiguranje života:

$$
P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \overset{5.1}{\Rightarrow} \quad {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}
\tag{5.3}
$$

Formula vrijedi i za privremeno mješovito osiguranje za trenutak t manji od osiguranog perioda n ($t < n$). Na kraju trenutka n isplaćuje se iznos za doživljenje što nije uračunato u ovoj formuli. Ako je osigurana svota C, sljedeću formulu množimo s tim iznosom:

$$
\begin{aligned}
P_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \overset{5.1}{\Rightarrow} \\
{}_tV_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Izvedimo sada prospektivnom metodom. Ovdje računamo:
$\begin{pmatrix} \text{vrijednost} \\ \text{budućih isplata} \end{pmatrix}_t - \begin{pmatrix} \text{vrijednost nedospjelih} \\ \text{uplata premija} \end{pmatrix}_t$
Svaki slučaj moramo posebno računati. Za doživotno osiguranje života slijedi:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot l_{x+t} \cdot {}_tV_x &:= 1 \cdot \left(\lambda \cdot d_{x+t}v + \lambda \cdot d_{x+t+1}v^2 + \lambda \cdot d_{x+t+2}v^3 \cdots\right) \\
&\quad - P_x \left(\lambda l_{x+t} + \lambda l_{x+t+1}v + \lambda l_{x+t+2}v^2\right) \quad / \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} \\
\Rightarrow {}_tV_x &= \frac{1}{D_{x+t}} (C_{x+t} + C_{x+t+1} + \cdots) - \frac{P_x}{D_{x+t}} (D_{x+t} + D_{x+t+1} + D_{x+t+2} + \cdots) \\
\Rightarrow {}_tV_x &= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}, \quad \text{tj.} \quad {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}
\end{aligned}$$

Kad uvrstimo izraz za premiju, $P_x = \frac{M_x}{N_x}$ slijedi formula

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \tag{5.5}$$

Za privremeno osiguranje života imamo:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot l_{x+t} \cdot {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} &:= 1 \cdot \left(\lambda \cdot d_{x+t}v + \lambda \cdot d_{x+t+1}v^2 + \cdots + \lambda \cdot d_{x+n-1}v^{n-t}\right) \\
&\quad - P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \left(\lambda l_{x+t} + \lambda l_{x+t+1}v + \cdots + \lambda l_{x+n-1}v^{n-t-1}\right) \quad / \cdot \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}} \\
\Rightarrow {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} &= \frac{1}{D_{x+t}} (C_{x+t} + C_{x+t+1} + \cdots + C_{x+n-1}) - \frac{P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{D_{x+t}} (D_{x+t} + \cdots + D_{x+n-1}) \\
\Rightarrow {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}
\end{aligned}$$

Uz prije izvedeno, $P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$, formula je

$$ {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \tag{5.6}$$

Sličnim raspisivanjem za mješovito osiguranje dobivamo:

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \tag{5.7}$$

i uvrštavanjem prije izvedenih formula izračunavamo rezervu. Kako smo prije pokazali, retrospektivna rezerva mora biti jednaka prospektivnoj u svakom trenutku t. Nećemo ovdje provjeravati sve gornje parove, ali demonstracije radi, pokažimo da vrijedi kod formula doživotnog osiguranja. Krenimo od (5.5).

Dokaz. ${}_tV_x^{retrospektivno} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} + \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x \cdot N_x}{N_x \cdot D_{x+t}} =$
$= \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} ={}_t V_x^{prospektivno}$ □

Do sad smo objašnjavali rezervu na primjeru doživotnog osiguranja za slučaj smrti. Definicija je ista, a način razmišljanja analogan za svaki oblik životnog osiguranja. U primjeru koji slijedi računat ćemo iznos matematičke rezerve za odgođenu doživotnu rentu, na kraju svake godine t. Kod životne rente će veća vjerojatnost smrti q_x (manja vjerojatnost doživljenja) implicirati manje troškove isplata za osiguravajuće društvo. Kao što znamo, iznos godišnje životne rente se isplaćuje samo osobama koje su u tom trenutku žive, a veći q_x povlači očekivani manji broj živih osiguranika, tj. aktivnih polica.

Primjer 5.0.1. *Zamislimo 1 000 osoba točno u dobi od 60 godina koje u isto vrijeme osiguravaju doživotnu rentu koja počinje s isplatama na početku njihove 65. godine. Neka je godišnji iznos jednak R=10 000kn i renta plativa unaprijed. Premije neka se plaćaju u roku odgode, prvih 4 godine od ugovaranja. Nađimo godišnju neto premiju po polici te ukupnu premijsku rezervu i vrijednost police(rezervu po polici) na kraju svake godine t. Uzimamo aktuarske tablice koje koristimo u svrhu ilustrativnih primjera ([4]) i tablice smrtnosti RH za žene ([5]). Koristimo komutacijske simbole za žene i kamatnu stopu* $i = 2\%$.

S P_x označimo neto vrijednost premije po polici. Riječ je o doživotnoj renti s odgodom 4 godine. Izjednačavanjem sadašnjih vrijednosti svih premija i naknada imamo jednadžbu:

$$P_{60} \cdot \ddot{a}_{60:\overline{4}|} = 10\ 000 \cdot {}_{4|}\ddot{a}_{60}$$
$$P_{60} \cdot \frac{N_{60} - N_{64}}{D_{60}} = 10\ 000 \cdot \frac{N_{64}}{D_{60}}$$
$$P_{60} = 10\ 000 \cdot \frac{N_{64}}{N_{60} - N_{64}}$$
$$P_{60} = 10\ 000 \cdot \frac{376\ 414.92}{484\ 352.35 - 376\ 414.92}$$
$$P_{60} = 34\ 873.43732$$

Godišnja neto premija po polici iznosi 34 873.43732kn.

Sada pogledajmo situaciju nakon točno 1 godine (neposredno prije uplate 2. premije). Običaj je da se u ovakvim računima na "kraju godine" zamisli trenutak neposredno po svim izvršenim isplatama i prije svih uplata godišnje premije.
Računamo prospektivnom metodom. Razlike sadašnjih vrijednosti budućih naknada(obaveza osiguravatelja) i budućih premija(obaveza osiguranika) nakon jedne

godine je:

$$
\begin{aligned}
&10\ 000 \cdot {}_{3|}\ddot{a}_{61} - P_{60} \cdot \ddot{a}_{61:\overline{3}|} = 10\ 000 \cdot \frac{N_{64}}{D_{61}} - 34\ 873.43732 \cdot \frac{N_{61} - N_{64}}{D_{61}} \\
&= 10\ 000 \cdot \frac{376\ 414.92}{27\ 364.37} - 34\ 873.43732 \cdot \frac{456\ 226.13 - 376\ 414.92}{27\ 364.37} = 35\ 844.34689
\end{aligned}
$$

Rezerva po polici nakon prve godine je jednaka 35 844.34689kn.
Kako je 1 000 osoba osiguralo doživotnu rentu(od kojih je nakon 1 godine ostalo živih 1 000 $\cdot \frac{l_{61}}{l_{60}}$, koji će nadalje plaćati buduće premije i primati buduće naknade), osiguravatelj u rezervi mora imati ukupno:

$$
1\ 000 \cdot \frac{l_{61}}{l_{60}} \cdot 35\ 844.34689 = 35\ 844\ 346.89 \cdot \frac{91775}{92478} = 35\ 571\ 865.05
$$

Ukupna neto premijska rezerva nakon prve godine treba biti jednaka 35 571 865.05kn.
Nakon točno 2 godine(neposredno prije uplate 3. premije) imamo:

$$
\begin{aligned}
&\left(10\ 000 \cdot {}_{2|}\ddot{a}_{62} - P_{60} \cdot \ddot{a}_{62:\overline{2}|}\right) \cdot 1\ 000 \cdot \frac{l_{62}}{l_{60}} = \\
&= 1\ 000 \cdot \left(10\ 000 \cdot \frac{376\ 414.92}{26\ 604.88} - 34\ 873.43732 \cdot \frac{428\ 861.76 - 376\ 414.92}{26\ 604.88}\right) \cdot \frac{91007}{92478} \\
&= 71\ 579\ 582.94
\end{aligned}
$$

Dakle, na kraju 2. godine u rezervi treba biti iznos 71 579 582.94kn. Podijelimo li taj broj sa brojem aktivnih polica(1 000 $\cdot \frac{l_{62}}{l_{60}}$), dobivamo rezervu po polici na kraju druge godine: 72 736.5661kn. Na kraju 3. godine, ukupna rezerva je:

$$
\begin{aligned}
&1\ 000 \cdot \frac{l_{63}}{l_{60}} \cdot \left(10\ 000 \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{63} - P_{60} \cdot \ddot{a}_{63:\overline{1}|}\right) \\
&= 1\ 000 \cdot \frac{90170}{92478} \cdot \left(10\ 000 \cdot \frac{376\ 414.92}{25\ 841.96} - 34\ 873.43732\right) = 108\ 021\ 981.8
\end{aligned}
$$

Rezerva po polici nakon treće godine iznosi 110 786.9228kn.
Na kraju četvrte godine (nakon što su obaveze isplaćene, a prije uplata premija kojih više nema-zadnja premija platila se na početku četvrte godine) ukupna rezerva treba biti:

$$
1\ 000 \cdot \frac{l_{64}}{l_{60}} \cdot \left(10\ 000 \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{64}\right) = 1\ 000 \cdot \frac{89241}{92478} \cdot \left(10\ 000 \cdot \frac{351\ 343.49}{25\ 071.43}\right) = 135\ 231\ 792.5
$$

Vrijednost po polici je tada 140 136.9966kn.
Za svaki $t \geq 4$ ukupna neto premijska rezerva treba biti 1 000 $\cdot \frac{l_{60+t}}{l_{60}} \cdot 10\ 000 \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{60+t}$.

Podijelimo li s brojem aktivnih polica u tom trenutku, dobivamo iznos rezerve po polici za svaki $t \geq 4$, $10\ 000 \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{60+t}$.

Pogledajmo sada retrospektivnu metodu. Definirajmo $\lambda := \dfrac{1\ 000}{l_x}$ $(\lambda \cdot l_{60} = 1000)$.
Pogledajmo slučaj za $t < n$ pri čemu je n broj godina odgode, odnosno broj godina koliko se plaćaju premije, a t broj godina od ugovaranja. Isplaćenih renti tada nema. Rezerva je jednaka akumuliranim premijama koje računamo:

$$S_{x+t} = \lambda \cdot l_x \cdot P_x \cdot (1+i)^t + \lambda \cdot l_{x+1} \cdot P_x \cdot (1+i)^{t-1} + \cdots + \lambda \cdot l_{x+t-1} \cdot P_x \cdot (1+i)$$
$$S_{x+t} = \lambda \cdot P_x \left(l_x v^{-t} + l_{x+1} v^{-t+1} + \cdots + l_{x+t-1} v^{-1} \right) / \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}}$$
$$S_{x+t} = \frac{\lambda \cdot P_x}{v^{x+t}} \left(D_x + D_{x+1} + \cdots D_{x+t-1} \right) / \frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} \quad \Rightarrow \quad S_{x+t} = \lambda l_{x+t} \cdot P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

Za slučaj $t \geq n$, zadnja premija je plaćena u trenutku $n-1$ nakon ugovaranja i vrijednost akumuliranih premija t godina nakon ugovaranja je jednaka:

$$S_{x+t} = \lambda \cdot P_x \left(l_x v^{-t} + l_{x+1} v^{-t+1} + \cdots + l_{x+n-1} v^{-t+(n-1)} \right) / \frac{v^{x+t}}{v^{x+t}}$$
$$S_{x+t} = \frac{\lambda \cdot P_x}{v^{x+t}} \left(D_x + D_{x+1} + \cdots D_{x+n-1} \right) / \frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} \quad \Rightarrow \quad S_{x+t} = \lambda l_{x+t} \cdot P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

Sličnim razmišljanjem dobijemo vrijednost akumuliranih plaćenih obaveza do $x+t$: $\lambda l_{x+t} \cdot R \cdot \frac{N_{x+n} - N_{x+t+1}}{D_{x+t}}$. Zato za ukupnu retrospektivnu rezervu u našem primjeru vrijedi:

$$Ukupna_{60+t}^{retrospektivno} = \begin{cases} \lambda l_{60+t} \cdot P_{60} \cdot \frac{N_{60} - N_{60+t}}{D_{60+t}} & t < 4 \\ \lambda l_{60+t} \left(P_{60} \cdot \frac{N_{60} - N_{64}}{D_{60+t}} - R \cdot \frac{N_{64} - N_{60+t+1}}{D_{60+t}} \right) & t \geq 4 \end{cases}$$

Uvrstimo $t = 2$ i dobivamo iznos ukupne neto premijske rezerve na kraju druge godine izračunate retrospektivnom metodom: 71 579 582.92kn. Na kraju četvrte godine, za uvršteni $t = 4$, ona iznosi 135 231 792.5kn. Uočimo jednakost iznosa koje smo upravo dobili i onih prije dobivenih prospektivnom metodom.

Bibliografija

[1] D. Bakić i D. Franciŝković, http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/mirela/FAM/FAM-2013-12-zadnje.pdf, posjećeno 14 .11. 2018.

[2] A. Neill, *Life contingencies*, Heinemann, 1977.

[3] S. D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics*, Wiley, 2010.

[4] Hrvatski zavod za mirovinsko osiguranje, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2013_02_17_292.html, posjećeno 4. 10. 2018.

[5] Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske, https://www.dzs.hr/hrv/important/Notices/tablice_mortaliteta_2000-2002.pdf, posjećeno 4. 10. 2018.

Sažetak

Na početku ovog rada definirani su osnovni teorijski elementi financijske matematike: kamatne stope, akumulacijski faktor, sadašnja vrijednost, financijske rente. Nakon toga izložene su osnovne činjenice o strukturi i konstrukciji tablica smrtnosti. Sve to bilo je potrebno kako bi se u centralnom dijelu rada izvele formule za neto premije osnovnih oblika životnih osiguranja. Tu podrazumijevamo osiguranje doživljenja, životne rente i osiguranje za slučaj smrti. Naglasak je bio na doživotnim i neposrednim vrstama, dok su za ostale navedene formule. Potom je uveden i opisan pojam matematičke rezerve te su izvedene formule za njen iznos u svakom danom trenutku nakon sklapanja police osiguranja života.
Tijekom cijelog rada, definicije i formule popraćene su kratkim ilustrativnim primjerima.

Summary

At the beginning of this thesis, fundamental theoretical elements of financial mathematics were defined: interest rate, accumulation factor, present value, annuity-certain. Subsequently, basic facts on the structure and construction of mortality tables are presented. All this was necessary to understand and bring out the formula for the net premiums of pure endowments, life annuities and life insurances in the central part of the work. The emphasis was on the forms payable immediate, yearly throughout life. Then, concept of the mathematical reserve was introduced and described. Moreover, formulas for its amount at any given time after commencement of the life insurance policy were derived. Throughout the work, definitions and formulas are followed by brief illustrative examples.

Životopis

Rođena sam 26. prosinca 1993. godine u Celju, Republika Slovenija. Nakon završetka Osnovne škole Augusta Cesarca u Krapini, upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Krapina. Godine 2012. upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu kojeg završavam 2016. godine. Svoje obrazovanje nastavljam upisujući diplomski studij Financijska i poslovna matematika. U srpnju 2018. počinjem raditi studentski posao u Privrednoj banci Zagreb gdje u prosincu zasnivam radni odnos kao pripravnica u Upravljanju rizicima.