

# Nizovi i kružnice

---

Škegro, Mirjam

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:552717>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mirjam Škegro

**NIZOVI I KRUŽNICE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Tomislav Došlić

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Tomislavu Došliću na strpljenju,  
susretljivosti, razumijevanju te pomoći prilikom pisanja  
diplomskog rada.*

*Posebno zahvaljujem roditeljima na neizmjerne podršci i ljubavi bez  
kojih sve ovo što sam postigla ne bi bilo moguće.*

*Jedno veliko HVALA braći i sestrama na pozitivnoj energiji - vi ste bili moja motivacija.  
Ovaj diplomski posvećujem svim prijateljima i prijateljicama koji su  
bili uz mene tokom mog studiranja.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Motivacija i formulacija problema</b>	<b>2</b>
1.1 Slučaj $a_0 = 0$ . . . . .	3
<b>2 Preliminarni rezultati o konvergenciji redova</b>	<b>4</b>
2.1 Definicije i teoremi . . . . .	4
<b>3 Očiti rezultati</b>	<b>6</b>
3.1 $a_n = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ . . . . .	6
3.2 Niz $(a_n)_{n \geq 0}$ je padajući . . . . .	7
3.3 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty$ . . . . .	8
<b>4 Numerički pristup - eksperiment</b>	<b>10</b>
4.1 Algoritam . . . . .	10
4.2 Primjeri . . . . .	14
<b>5 Egzaktni pristup</b>	<b>19</b>
5.1 Zbroj površina trokuta . . . . .	19
5.2 Zbroj duljina spojnice parnih i neparnih središta . . . . .	21
5.3 $a_n = n$ . . . . .	27
5.4 $a_n = q^n$ . . . . .	32
5.5 Ocjene za konvergentne nizove . . . . .	34
<b>6 Zaključak</b>	<b>38</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>39</b>

# Uvod

Godine 1611. engleski pomorac Sir Walter Raleigh tražio je formulu za izračunavanje broja topničkih kugli u hrpi na palubi svoga broda. Njegov prijatelj, engleski astronom i matematičar, Thomass Harriot dao mu je formulu, no nije znao jesu li topničke kugle skupljene u hrpi na odgovarajući način. Harriot zatim predaje problem njemačkom astronomu i matematičaru Johannesu Kepleru koji je problem promatrao u obliku ispitivanja gustoće pakiranja. Kepler je postavio pretpostavku, tzv. Keplerovu slutnju, u kojoj tvrdi da je plošno centralni razmještaj kugli najučinkovitiji. 1990. godine kineski matematičar Wu-Yi Hsiang izrađuje složen i tradicionalan dokaz Keplerove slutnje (vidi [4]), za koji su se nakon više mjeseci raspravljanja, većina matematičara odlučila da je netočan. 1994. godine Thomas Hales sa Sveučilišta u Michiganu zajedno sa svojim diplomiranim studentom Samuelom Fergusonom rješava problem. Cijeli dokaz objavljen je 1998. godine (vidi [3]). U međuvremenu su se problemom bavili i Karl Friedrich Gauss te mađarski matematičar Laszlo Fejes-Toth. Fejes - Toth je napisao knjigu (vidi [1]) u kojoj je reducirao problem na niz proračuna koji uključuju mnogo specifičnih slučajeva. On je bio prvi koji je pokazao da se dokaz Keplerove pretpostavke može svesti na analizu konačnih slučajeva i, kasnije, da se problem može riješiti pomoću računala.

Problem pakiranja objekata može se promatrati i u drugim dimenzijama. U ovom radu promatrat ćemo ravninski problem pakiranja krugova različitih polumjera. Pretpostavit ćemo da su polumjeri članovi nekog niza i ispitat ćemo, numerički i analitički, kako svojstva tog niza utječu na konvergenciju, odnosno divergenciju niza središta. Na samom kraju rada dati ćemo ocjenu konvergencije središta za one primjere u kojima pokažemo da središta konvergiraju.

# Poglavlje 1

## Motivacija i formulacija problema

U mnogim se primjerima javlja potreba efikasnog korištenja nekog resursa, ne nužno prostornog. Takve situacije se dobro modeliraju preko pakiranja. Mi ćemo ovdje promatrati situaciju u kojoj se u ravnini pakiraju krugovi.

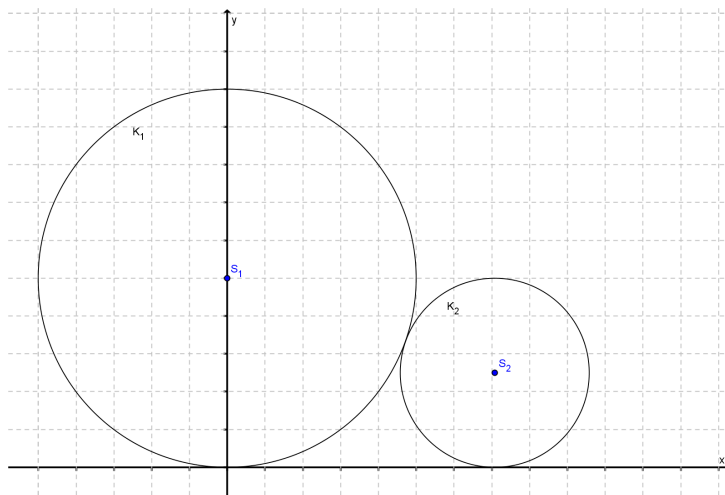
**Definicija 1.0.1.** *Familija skupova  $\{K_i, i \in I\}$  je pakiranje ako je  $\text{int}K_i \cap \text{int}K_j = \emptyset, \forall i \neq j \in I$ . U našem slučaju će familija biti prebrojiva,  $I = \mathbb{N}_0$ , i svaki  $K_i$  će biti krug zadanog polumjera  $r_i$ .*

Najveća efikasnost, tj. gustoća pakiranja, postiže se kad se skupovi  $K_i$  diraju. Gledat ćemo situaciju u kojoj se u ravnini sukcesivno formira skup krugova prema pravilu da svaki krug  $n$ -te generacije mora dirati krug iz  $(n - 1)$ -ve i iz  $(n - 2)$ -ge generacije.

Neka je dan nenegativan niz  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Uzmimo kružnicu  $K_0$  polumjera  $\frac{1}{a_0}$  sa središtem na negativnom dijelu  $y$ -osi te kružnicu  $K_1$  polumjera  $\frac{1}{a_1}$  sa središtem na pozitivnom dijelu  $y$ -osi. Neka se kružnice  $K_0$  i  $K_1$  međusobno dodiruju u ishodištu. Za  $n \geq 2$  odredimo središta svih kružnica polumjera  $\frac{1}{a_n}$  koje izvana diraju kružnice  $K_{n-1}$  i  $K_{n-2}$ . U svakom koraku imamo dva središta. Odabiremo ono koje je dalje od ishodišta. Cilj ovog diplomskog rada je ispitivanje ponašanja koordinata središta za razne nizove  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

## 1.1 Slučaj $a_0 = 0$

Polumjeri  $r_n$  su definirani s  $r_n = \frac{1}{a_n}$  za  $n \geq 0$ . U slučaju  $a_0 = 0$  je  $r_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{0} = \infty$ . Dakle, kružnica  $K_0$  ima polumjer jednak  $\infty$ , pa ćemo uzeti da  $K_0$  ima središte u  $S_0(0, -\infty)$  te je jednaka pravcu  $y = 0$ . Iz toga slijedi da  $K_2$  dodiruje  $x$ -os i kružnicu  $K_1$  čije je središte na pozitivnom dijelu  $y$ -osi. Takvu situaciju vidimo na slici 1.1.



Slika 1.1: Slučaj kada je  $a_0 = 0$



## Poglavlje 2

# Preliminarni rezultati o konvergenciji redova

### 2.1 Definicije i teoremi

Prije nego krenemo na rezultate potrebne su nam neke definicije i teoremi.

**Definicija 2.1.1.** Kažemo da niz realnih brojeva  $(a_n)_{n \geq 0}$  ima limes  $L \in \mathbb{R}$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da

$$n > 0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Ako niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  ima limes, tada kažemo da niz konvergira, u suprotnom kažemo da divergira.

**Definicija 2.1.2.** Neka je  $(a_k)_{k \geq 1}$  niz realnih brojeva. Red realnih brojeva  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  je uređeni par nizova  $(a_n, B_n)_{n \geq 1}$  gdje je  $B_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

Realni broj  $a_k$  naziva se  $k$ -ti član reda, a  $B_n$  se naziva  $n$ -ta parcijalna suma reda.

**Definicija 2.1.3.** Kažemo da red realnih brojeva  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergira prema  $B$  ako niz parcijalnih suma  $(B_n)_{n \geq 1}$  konvergira prema  $B$ . Ako niz  $(B_n)_{n \geq 1}$  divergira, tada kažemo da red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergira.

Ako red konvergira, tada  $B$  nazivamo suma reda i pišemo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = B.$$

**Definicija 2.1.4.** *Harmonički red je definiran formulom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Sljedeći teorem daje nužan uvjet za konvergenciju reda.

**Teorem 2.1.5.** *Ako red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergira, tada je  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .*

Međutim, uvjet  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$  nije dovoljan da bi garantirao konvergenciju reda. To nam pokazuje sljedeći teorem.

**Teorem 2.1.6.** *Harmonički red divergira.*

*Dokaz.* Očigledno je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ , pa je ispunjen nužan uvjet za konvergenciju. No, dokažimo teorem. Za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{n}{2}.$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je  $2^{n-1} + k \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$  za svaki  $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ , stoga je

$$\frac{1}{2^{n-1}+k} \geq \frac{1}{2^n}, k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}.$$

Relacija  $S_{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$  pokazuje da niz parcijalnih suma nije ograničen odozgo jer je

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Zaključujemo da niz  $(S_n)$  divergira, stoga je harmonički red divergentan iako je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ . □

**Teorem 2.1.7.** *Neka su  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  i  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergentni redovi, i neka je  $c \in \mathbb{R}$ . Tada vrijedi*

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ,
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Teorem 2.1.8.** *Red  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , konvergira ako i samo ako je  $p > 1$ .*

*Dokaz.* Vidi [2]. □

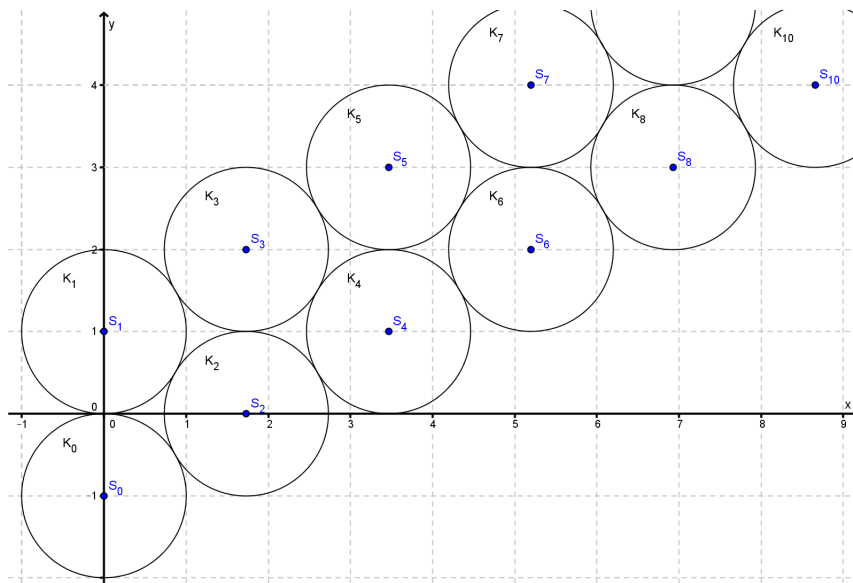
Iz Teorema 2.1.8 slijedi ukoliko je  $p \leq 1$  tada red  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , divergira.

# Poglavlje 3

## Očiti rezultati

### 3.1 $a_n = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$

Polumjeri  $r_n$  su definirani:  $r_n = \frac{1}{a_n}$  za svaki  $n \geq 0$ . Slijedi:  $r_n = 1$  za svaki  $n \geq 0$ . Nije teško prikazati kružnice u koordinatnom sustavu:



Slika 3.1: Prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = 1$

Koordinate središta su:  $S_0(0, -1)$ ,  $S_1(0, 1)$ ,  $S_2(\sqrt{3}, 0)$ ,  $S_3(\sqrt{3}, 2)$ ,  $S_4(2\sqrt{3}, 1)$ ,  $S_5(2\sqrt{3}, 3)$ ,  $S_6(3\sqrt{3}, 2)$ ,  $S_7(3\sqrt{3}, 4)$ ,...

Eksplisitna formula za koordinate središta  $S_n(p_n, q_n)$  je:

$$p_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \sqrt{3}, n \in \mathbb{N}$$

$$q_n = 3 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - n - 1, n \in \mathbb{N}.$$

Prema slici 3.1 očito je da središta divergiraju.

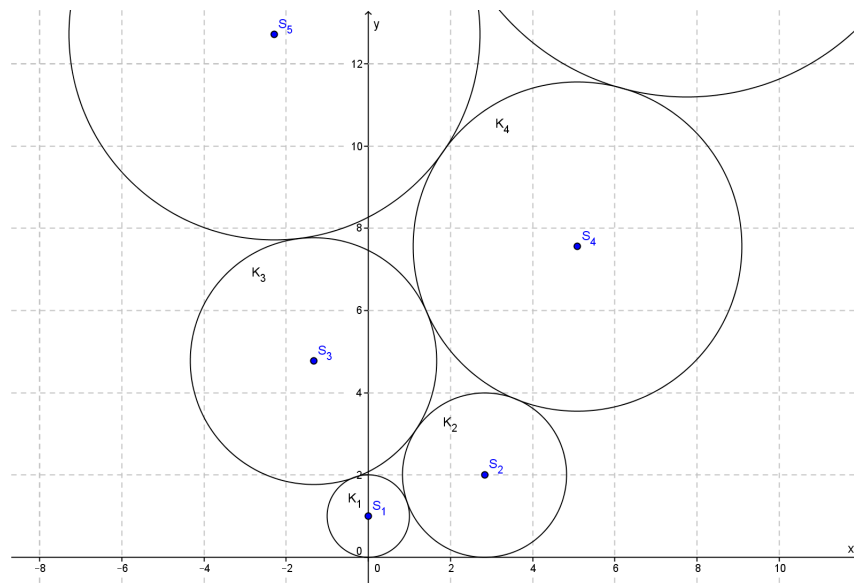
### 3.2 Niz $(a_n)_{n \geq 0}$ je padajući

Neka je  $a_n$  takav da  $a_n > a_{n+1}$  za svaki  $n \geq 0$ . Kako je niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  padajući slijedi da je niz polumjera  $(r_n)_{n \geq 0}$  rastući.

Na sljedećem primjeru pokazat ćemo očitu divergenciju središta.

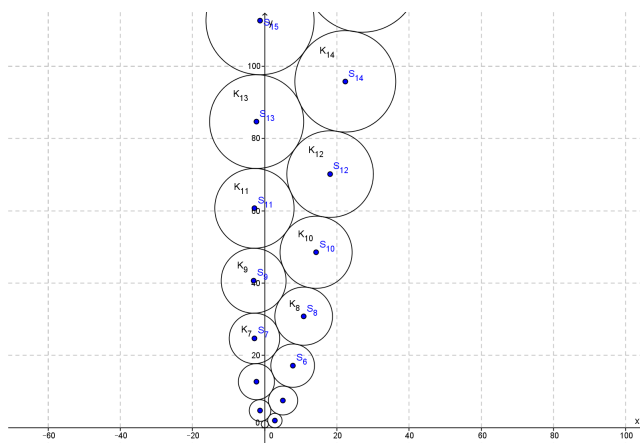
**Primjer 3.2.1.** Neka je  $a_n = \frac{1}{n}$  za svaki  $n \geq 0$ .

Slijedi:  $r_n = n$  za svaki  $n \geq 0$ . Uočimo da je ovdje  $r_0 = 0$ , dakle  $S_0$  je  $(0, -\infty)$ . Kad to prikažemo u Geogebri dobivamo sljedeće:



Slika 3.2: Prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = \frac{1}{n}$

Kad vidimo širu sliku:



Slika 3.3: Širi prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = \frac{1}{n}$

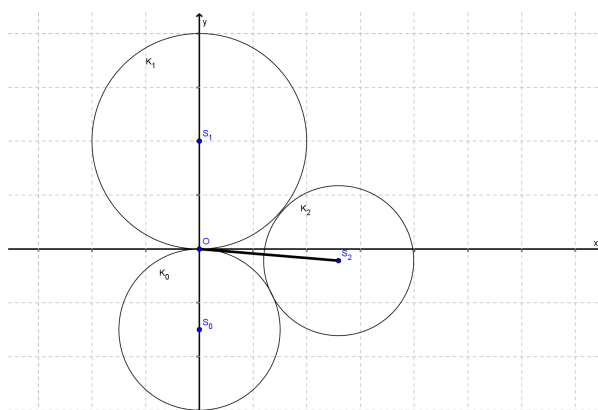
Prema slikama 3.2 i 3.3 očigledno je da će se zbog povećanja polumjera središta međusobno sve više udaljavati, tj. divergirati.

### 3.3 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty$

Promatramo slučaj kada niz polumjera konvergira, tj.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty$ . Pokazat ćemo da tada niz središta kružnica također konvergira.

Tvrđnju pokazujemo matematičkom indukcijom. Pretpostavimo  $a_0 > 0$ .

Baza indukcije: Najlakše je vidjeti preko slike.

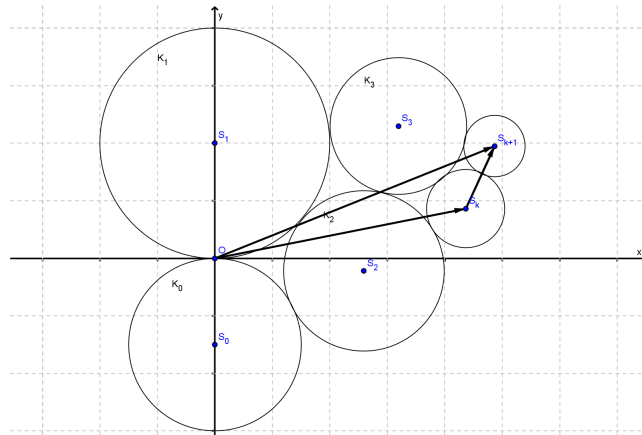


Slika 3.4: Prikaz baze indukcije

Prema slici 3.4 očito je da je  $|OS_2| \leq |S_0S_1| + |S_1S_2|$ .

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi  $|OS_k| \leq \sum_{n=0}^k \frac{1}{a_n}$ .

Korak indukcije: Promotrimo sliku 3.5.



Slika 3.5: Prikaz koraka indukcije

Koristeći vektorsko zbrajanje vrijedi:  $\overrightarrow{OS_{k+1}} = \overrightarrow{OS_k} + \overrightarrow{S_kS_{k+1}}$ . Koristeći pretpostavku indukcije vrijedi:  $\overrightarrow{OS_{k+1}} \leq \sum_{n=0}^k \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}}$

Tvrđnja je dokazana.

Dakle, za dokaz konvergencije središta kružnica dovoljno je dokazati da niz polumjera kružnica konvergira.

**Napomena 3.3.1.** *Od sada pa na dalje promatramo samo strogo rastuće nizove  $(a_n)_{n \geq 0}$ .*

# Poglavlje 4

## Numerički pristup - eksperiment

Ručno računanje središta svake kružnice oduzelo bi nam previše vremena. U ovom poglavlju pokazati ćemo da se koordinate središta jednostavno daju sročiti u algoritam koji će nam za dani niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  dati vrijednosti koordinata  $S_n(p_n, q_n)$ , za  $n \in \mathbb{N}_0$ . Kasnije ćemo funkcioniranje tog algoritma pokazati na nekoliko primjera.

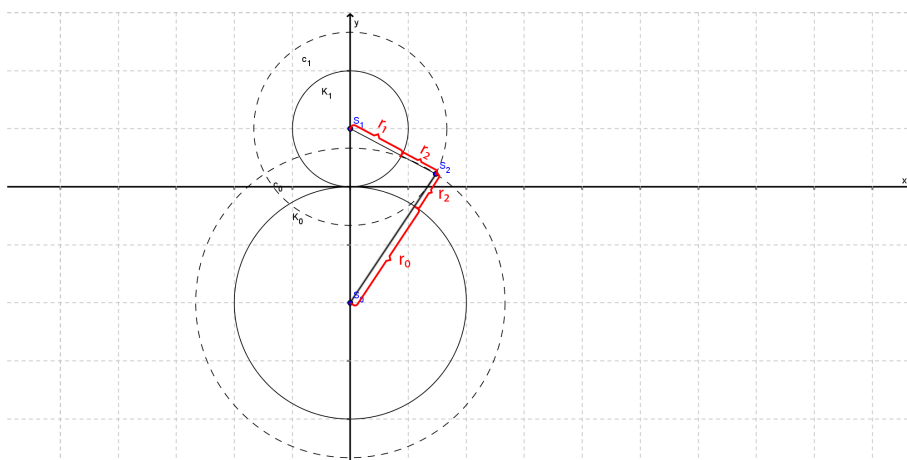
### 4.1 Algoritam

#### 1. slučaj: $a_0 > 0$

Neka je dan niz  $(a_n)_{n \geq 0}$ , te niz radijusa  $(r_n)_{n \geq 0} = (\frac{1}{a_n})_{n \geq 0}$ . Definiramo kružnicu  $K_0$  sa središtem  $S_0(0, -\frac{1}{a_0})$  i radijusom  $r_0 = \frac{1}{a_0}$  i kružnicu  $K_1$  sa središtem  $S_1(0, \frac{1}{a_1})$  i radijusom  $r_1 = \frac{1}{a_1}$ . Za  $n \geq 2$  središte  $S_n(p_n, q_n)$  je presjek kružnica  $c_{n-2}(S_{n-2}, r_{n-2} + r_n)$  i  $c_{n-1}(S_{n-1}, r_{n-1} + r_n)$ . Točnije, rješavamo sustav:

$$\begin{cases} (x - p_{n-2})^2 + (y - q_{n-2})^2 = (r_{n-2} + r_n)^2 \\ (x - p_{n-1})^2 + (y - q_{n-1})^2 = (r_{n-1} + r_n)^2. \end{cases}$$

Grafički je to prikazano na slici 4.1.

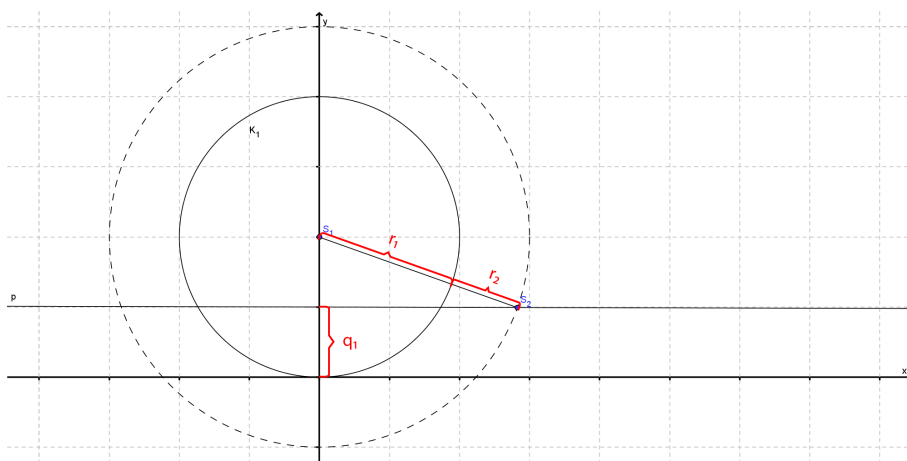


Slika 4.1: Grafički prikaz jednadžbe

Vratit ćemo se na rješavanje ovog sustava nakon što objasnimo što će biti ako je  $a_0 = 0$ .

## 2. slučaj: $a_0 = 0$

U točki 1.1. smo prokomentirali da će u ovom slučaju  $S_0$  biti  $(0, -\infty)$ . Zanima nas kako dobiti algoritam za  $S_n$  kada je  $n > 0$ . Neka je dan niz  $(a_n)_{n \geq 1}$ , te niz polumjera  $(r_n)_{n \geq 1} = (\frac{1}{a_n})_{n \geq 1}$ . Definiramo kružnicu  $K_1$  sa središtem  $S_1(0, \frac{1}{a_1})$  i polumjerom  $r_1 = \frac{1}{a_1}$ . Kružnica  $K_2$  ima polumjer  $r_2 = \frac{1}{a_2}$  i dodiruje kružnicu  $K_1$  i  $x - os$ .



Slika 4.2: Grafički prikaz jednadžbe



Dakle, iz slike 4.2 uočavamo da središte  $S_2(p_2, q_2)$  dobivamo rješavanjem sustava:

$$\begin{cases} (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = (r_1 + r_2)^2 \\ y = r_2. \end{cases}$$

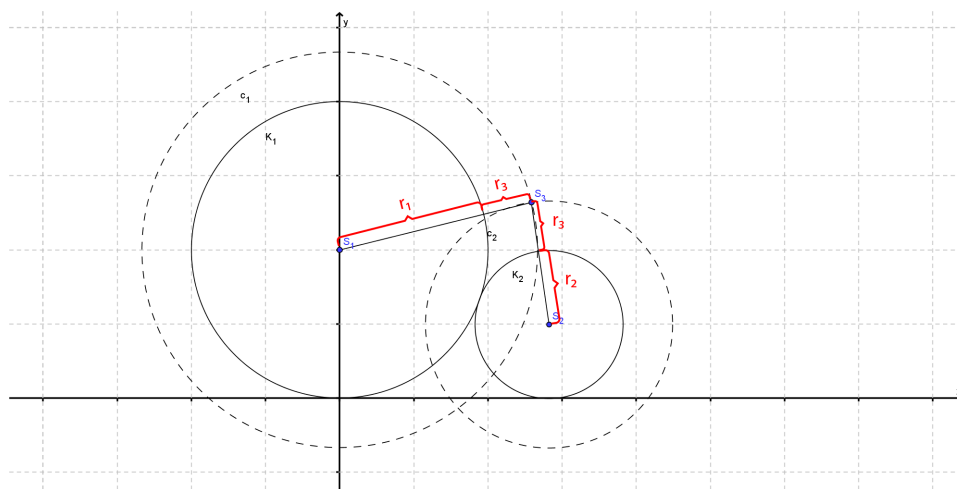
Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p_1x + p_1^2 + (r_2 - q_1)^2 &= (r_1 + r_2)^2 \\ x^2 - 2p_1x + p_1^2 + r_2^2 - 2r_2q_1 + q_1^2 &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 \\ x^2 - 2p_1x + p_1^2 - 2r_2q_1 + q_1^2 - r_1^2 - 2r_1r_2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{2p_1 \pm \sqrt{4p_1^2 - 4(p_1^2 - 2r_2q_1 + q_1^2 - r_1^2 - 2r_1r_2)}}{2}. \end{aligned}$$

Slijedi:

$$x_{1,2} = p_1 \pm \sqrt{(r_1 + q_1)(2r_2 + r_1 - q_1)},$$

tj.,  $p_2 = \max\{x_1, x_2\} = p_1 + \sqrt{(r_1 + q_1)(2r_2 + r_1 - q_1)}$ , a  $q_2 = r_2$ .  
Za  $n \geq 3$  središte  $S_n(p_n, q_n)$  je presjek kružnica  $c_{n-2}(S_{n-2}, r_{n-2} + r_n)$  i  $c_{n-1}(S_{n-1}, r_{n-1} + r_n)$ .



Slika 4.3: Grafički prikaz jednadžbe

Iz slike 4.3 uočavamo da je potrebno riješiti sustav:

$$\begin{cases} (x - p_{n-2})^2 + (y - q_{n-2})^2 = (r_{n-2} + r_n)^2 \\ (x - p_{n-1})^2 + (y - q_{n-1})^2 = (r_{n-1} + r_n)^2. \end{cases}$$

Uočavamo da je ovo, matematički, isti sustav do kojeg nas je doveo prvi slučaj. Riješimo ga.

## Nastavak algoritma

Raspisivanjem dobijemo:

$$\begin{cases} x^2 - 2xp_{n-2} + p_{n-2}^2 + y^2 - 2yq_{n-2} + q_{n-2}^2 = r_{n-2}^2 + 2r_{n-2}r_n + r_n^2 \\ x^2 - 2xp_{n-1} + p_{n-1}^2 + y^2 - 2yq_{n-1} + q_{n-1}^2 = r_{n-1}^2 + 2r_{n-1}r_n + r_n^2. \end{cases}$$

Oduzimanjem jednadžbi dobivamo:

$$(-2p_{n-2} + 2p_{n-1})x + (-2q_{n-2} + 2q_{n-1})y = r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2 + (2r_{n-2} - 2r_{n-1})r_n - p_{n-2}^2 + p_{n-1}^2 - q_{n-2}^2 + q_{n-1}^2,$$

iz čega slijedi:

$$y = \frac{p_{n-2} - p_{n-1}}{q_{n-1} - q_{n-2}}x + \frac{r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2 + (2r_{n-2} - 2r_{n-1})r_n - p_{n-2}^2 + p_{n-1}^2 - q_{n-2}^2 + q_{n-1}^2}{2q_{n-1} - 2q_{n-2}}.$$

Za  $n \geq 2$  (1. slučaj) ili  $n \geq 3$  (2. slučaj) definiramo:

$$k_{n-2} := \frac{p_{n-2} - p_{n-1}}{q_{n-1} - q_{n-2}},$$

$$l_{n-2} := \frac{r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2 + (2r_{n-2} - 2r_{n-1})r_n - p_{n-2}^2 + p_{n-1}^2 - q_{n-2}^2 + q_{n-1}^2}{2q_{n-1} - 2q_{n-2}}.$$

Uvrstimo  $y$  u prvu jednadžbu i dobivamo:

$$x^2 - 2xp_{n-2} + p_{n-2}^2 + (k_{n-2}x + l_{n-2})^2 - 2q_{n-2} + q_{n-2}^2 = r_{n-2}^2 + 2r_{n-2}r_n + r_n^2$$

$$x^2 - 2xp_{n-2} + p_{n-2}^2 + k_{n-2}^2x^2 + 2k_{n-2}l_{n-2}x - 2q_{n-2}k_{n-2}x - 2q_{n-2}l_{n-2} + q_{n-2}^2 = r_{n-2}^2 + 2r_{n-2}r_n + r_n^2.$$

Jednadžba se svodi na kvadratnu:

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0,$$

gdje su, za  $n \geq 2$  (1. slučaj) ili  $n \geq 3$  (2. slučaj):

$$a_{n-2} = 1 + k_{n-2}^2$$

$$b_{n-2} = 2k_{n-2}l_{n-2} - 2p_{n-2} - 2q_{n-2}k_{n-2}$$

$$c_{n-2} = -r_{n-2}^2 - 2r_{n-2}r_n - r_n^2 + p_{n-2}^2 - 2q_{n-2}l_{n-2} + q_{n-2}^2 + l_{n-2}^2.$$

Slijedi:

$$x_{1,2} = \frac{-b_{n-2} \pm \sqrt{b_{n-2}^2 - 4a_{n-2}c_{n-2}}}{2a_{n-2}},$$

tj.,  $p_n = \max\{x_1, x_2\}$ , a  $q_n = y$ . Razlog zbog kojeg smo odabrali da je  $p_n$  maksimum od  $x_1$  i  $x_2$  je taj jer biramo središte koja se nalazi dalje od ishodišta.

Dobivamo, za  $n \geq 2$  (1. slučaj) ili  $n \geq 3$  (2. slučaj):

$$p_n = \frac{-b_{n-2} + \sqrt{b_{n-2}^2 - 4a_{n-2}c_{n-2}}}{2a_{n-2}},$$

$$q_n = k_n p_n + l_n.$$

Ovime dobivamo rekurzivnu formulu za izračun koordinata središta. Pomoću programskog paketa Matlab možemo isprogramirati rekurzivnu formulu koja nam za bilo koji niz brojeva  $(a_n)_{n \geq 0}$  daje niz središta  $(S_n)_{n \geq 0}$ , gdje je  $S_n = (p_n, q_n)$ .

**Napomena 4.1.1.** Kod iz programskog paketa Matlab nalazi se u priritku.

## 4.2 Primjeri

U sljedećim primjerima pokazat ćemo kako smo pomoću Matlab-a došli do nizova središta kružnica za razne nizove  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

**Primjer 4.2.1.** Neka je  $a_n = 2^n$ .

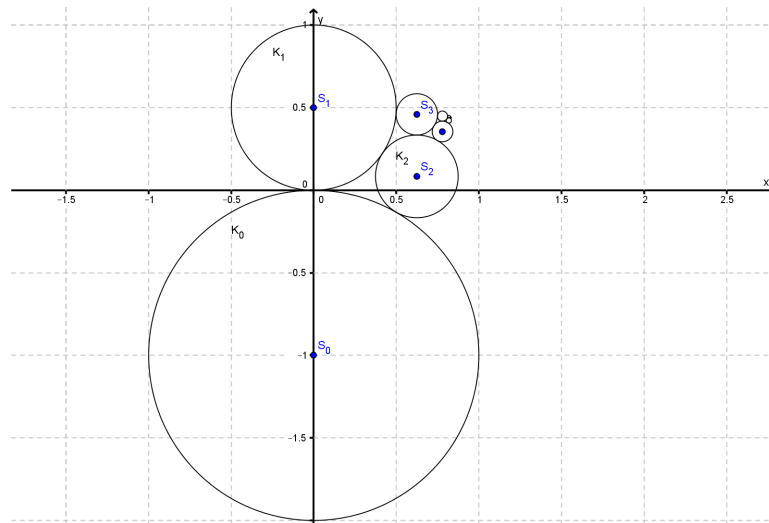
Matlab nam daje sljedeće rezultate:

$n$	$p_n$	$q_n$	$r_n$
0	0	$-\infty$	1
1	0	0.5	0.5
2	0.62361	0.083333	0.25
3	0.62361	0.458333	0.125
4	0.779512	0.354167	0.0625
5	0.779512	0.447917	0.03125
6	0.818488	0.421875	0.015625
7	0.818488	0.445312	0.007813
8	0.828231	0.438802	0.003906
9	0.828231	0.444661	0.001953
10	0.830667	0.443034	0.000977
...	...	...	...

Uočavamo da su  $p$ -ovi sve sličniji. Isto vrijedi za  $q$ -ove. Polumjeri su sve bliže nuli. Iz svega toga naslućujemo konvergenciju.

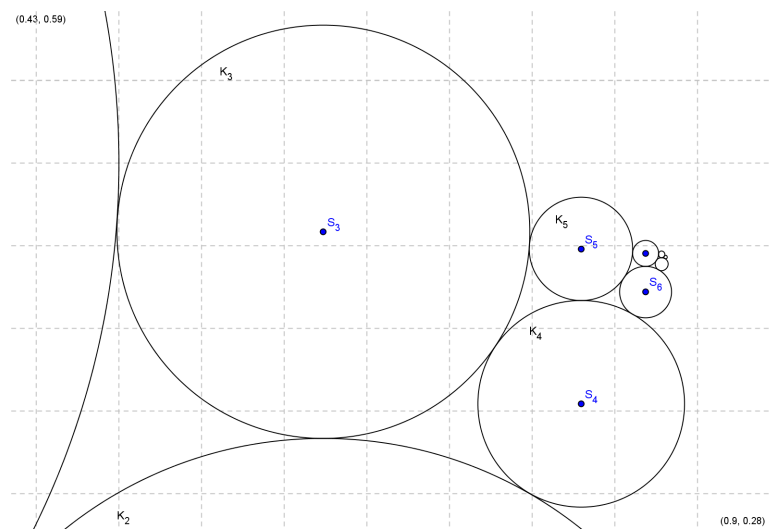
Uočimo da je  $p_0 = p_1, p_2 = p_3, p_4 = p_5 \dots$ . U Poglavlju 5.4. pokazat ćemo da za  $a_n = q^n, q > 1$  vrijedi  $p_n = p_{n+1}$  za svaki paran  $n$ .

U Geogebri je to prikazano na sljedeći način:



Slika 4.4: Prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = 2^n$

Zumiranjem slike 4.4 uočavamo:



Slika 4.5: Zumirani prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = 2^n$

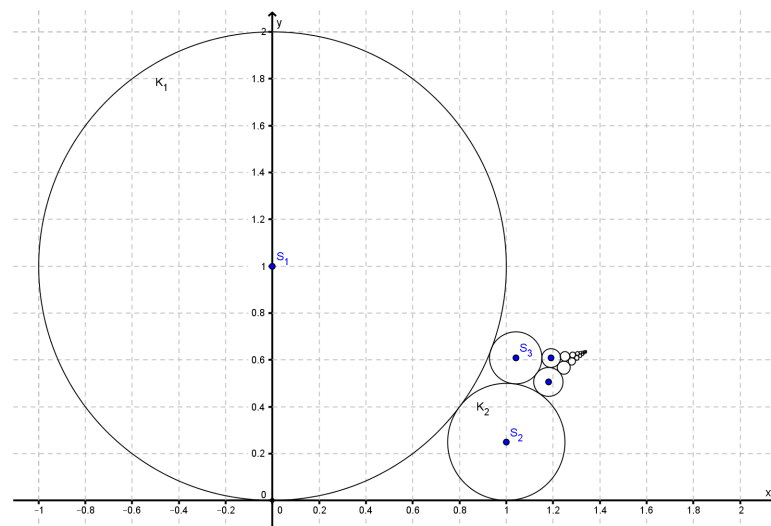
U ovom primjeru naslućujemo konvergenciju središta.

**Primjer 4.2.2.** Neka je  $a_n = n^2$ .

Rezultati dobiveni pomoću Matlab-a:

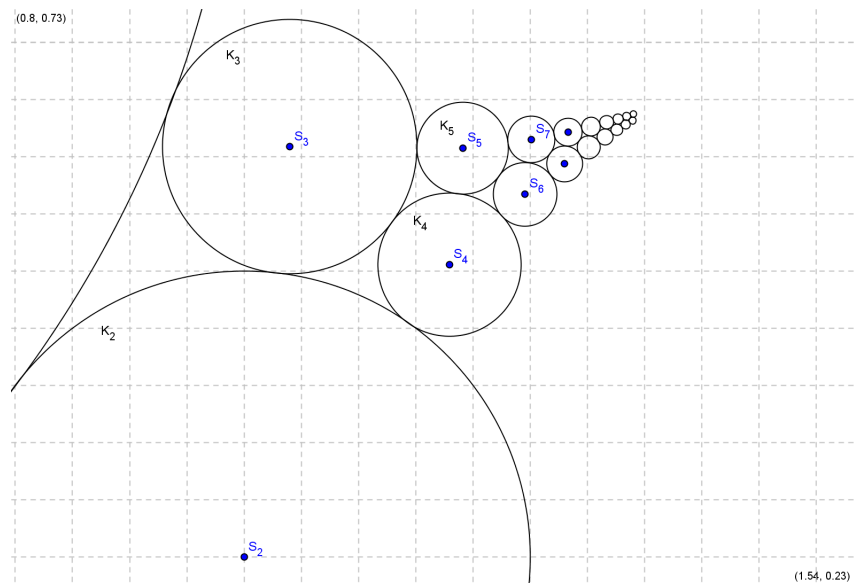
$n$	$p_n$	$q_n$	$r_n$
0	0	$-\infty$	$\infty$
1	0	1	1
2	1	0.25	0.25
3	1.04	0.608889	0.111111
4	1.179628	0.505715	0.0625
5	1.191105	0.60757	0.04
6	1.245629	0.567309	0.027778
7	1.251031	0.615191	0.020408
8	1.280019	0.593789	0.015625
9	1.283155	0.621583	0.012346
10	1.301132	0.608311	0.01
11	1.30318	0.62646	0.008264
12	1.315415	0.617426	0.006944
...	...	...	...

Iz vrijednosti dobivenih u tablici naslućujemo da središta konvergiraju. Kružnice prikazane u Geogebri:



Slika 4.6: Prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = n^2$

Kad sliku 4.6 zumiramo dobivamo:

Slika 4.7: Zumirani prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = n^2$ 

Po slici 4.7 možemo naslutiti da središta konvergiraju.

**Primjer 4.2.3.** Neka je  $(a_n)_{n \geq 0}$  *Fibonaccijev niz*.

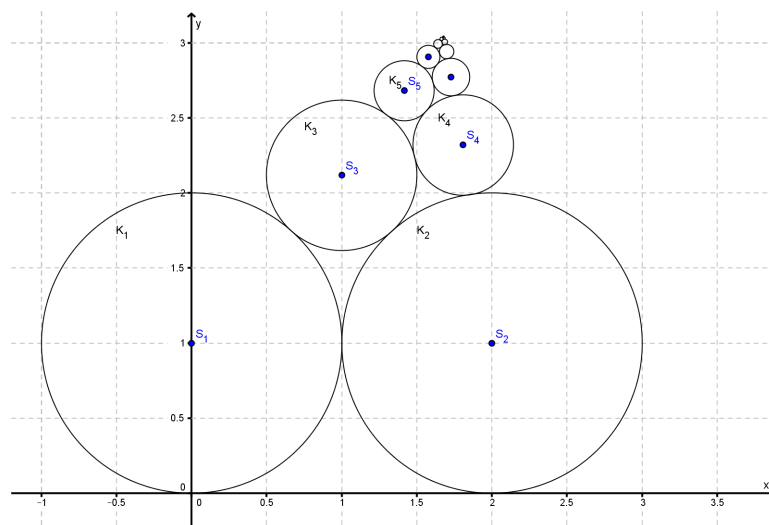
Fibonaccijev niz je niz brojeva definiran na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_n + a_{n-1}, \text{ za } n \geq 2. \end{aligned}$$

Vrijednosti za  $p$ ,  $q$  i  $r$  dobiveni pomoću Matlaba:

$n$	$p_n$	$q_n$	$r_n$
0	0	$-\infty$	$\infty$
1	0	1	1
2	2	1	1
3	1	2.118034	0.5
4	1.808607	2.319525	0.333333
5	1.416279	2.680805	0.2
6	1.728566	2.770815	0.125
7	1.57813	2.905507	0.076923
8	1.697615	2.940637	0.047619
9	1.640121	2.991903	0.029412
10	1.685771	3.005363	0.018182
11	1.663809	3.024935	0.011236
...	...	...	...

Sve manji polumjeri, sve sličniji vrijednosti  $p$ -ova i  $q$ -ova daju naslutiti konvergenciju. Prikaz u Geogebri:



Slika 4.8: Prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $(a_n)_{n \geq 0}$  Fibonaccijev niz

Iz slike 4.8 naslućujemo da središta konvergiraju.

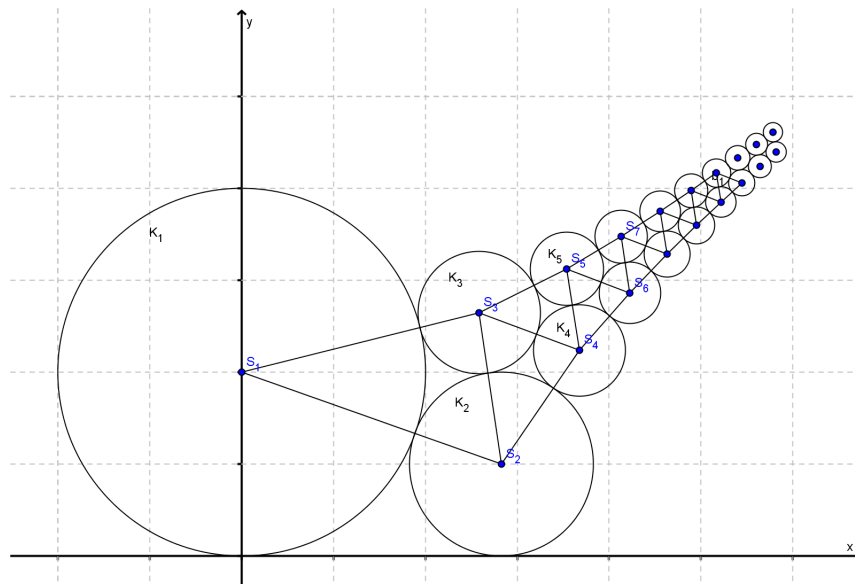
**Napomena 4.2.4.** Od sada pa na dalje  $F_n$  predstavlja  $n$ -ti Fibonaccijev broj.

# Poglavlje 5

## Egzaktni pristup

### 5.1 Zbroj površina trokuta

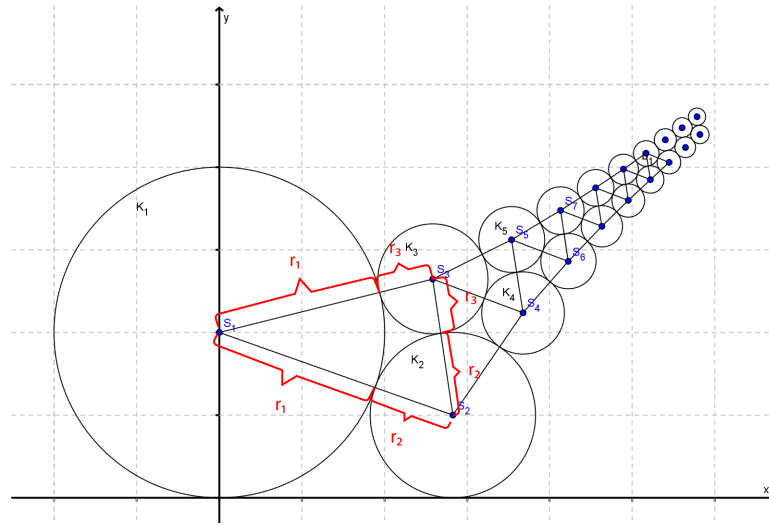
Kad bismo spojili susjedna središta dobili bismo mrežu trokuta kao što je prikazano na slici 5.1.



Slika 5.1: Prikaz mreže trokuta

Na slici 5.1 promotrimo trokut  $S_1S_2S_3$ . Duljine njegovih stranica prikazani su na slici 5.2.





Slika 5.2: Prikaz mreže trokuta s označenim duljinama stranica

Pomoću Heronove formule možemo izračunati površinu trokuta  $S_1S_2S_3$ .

$$P = \sqrt{s[s - (r_1 + r_2)][s - (r_1 + r_3)][s - (r_2 + r_3)]},$$

gdje je  $s$  poluopseg trokuta  $S_1S_2S_3$ ,

$$s = \frac{r_1 + r_2 + r_1 + r_3 + r_2 + r_3}{2} = \frac{2(r_1 + r_2 + r_3)}{2} = r_1 + r_2 + r_3$$

Dakle,

$$P = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 + r_3 - r_1 - r_2)(r_1 + r_2 + r_3 - r_1 - r_3)(r_1 + r_2 + r_3 - r_2 - r_3)}$$

$$P = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_3r_2r_1}$$

Analogno, površina trokuta  $S_2S_3S_4$  je  $P_2 = \sqrt{(r_2 + r_3 + r_4)r_4r_3r_2}$ . Općenito,

$$P_k = \sqrt{(r_k + r_{k+1} + r_{k+2})r_{k+2}r_{k+1}r_k}, \text{ za } k \in \mathbb{N}.$$

Lako se pokaže da se  $P_k$  može zapisati i na sljedeći način:  $P_n = \frac{\sqrt{a_n a_{n-1} + a_{n-1} a_{n+1} + a_{n+1} a_n}}{a_{n-1} a_n a_{n+1}}$  za  $n \in \mathbb{N}$ .

Nije teško u programskom paketu Matlab isprogramirati rekurzivnu formulu koja će za dani niz  $(a_n)_{n \geq 0}$  dati površine  $(P_n)_{n \geq 1}$ .

Ako  $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$  divergira, onda zbroj površina svih trokuta divergira pa se svi ti trokuti ne mogu smjestiti u kružnicu konačnog polumjera. Recimo, za  $a_n = \sqrt{n}$  imamo  $P_n \approx \frac{\sqrt{3}}{n}$ , a red  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n}$  divergira. Ovo izgleda kao granični slučaj.

Za  $a_n = n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  konvergira, dobije se  $P_n \approx \frac{\sqrt{3}}{n^2}$ .

Zaključujemo da je divergencija reda  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  dovoljan uvjet za divergenciju središta, no ne i nužan.

U Poglavlju 5.3. ćemo se uvjeriti da za  $a_n = n$  središta divergiraju.

**Napomena 5.1.1.** Kod iz programskog paketa Matlab nalazi se u privitku.

Pokažimo na primjerima iz Poglavlja 4 kako će se ponašati površine trokuta.

**Primjer 5.1.2.** Pomoću Matlab koda, za  $a_n$  iz Poglavlja 4, dobivamo sljedeće vrijedosti površina trokuta:

-	$a_n = 2^n$	$a_n = n^2$	$a_n = F_n$
$n$	$P_n$	$P_n$	$P_n$
1	0.116927	0.194444	1.118034
2	0.029232	0.027119	0.552771
3	0.007308	0.007703	0.185592
4	0.001827	0.003008	0.074068
5	0.000457	0.001414	0.027802
6	0.000114	0.000752	0.010689
7	0.000029	0.000436	0.004073
...	...	...	...

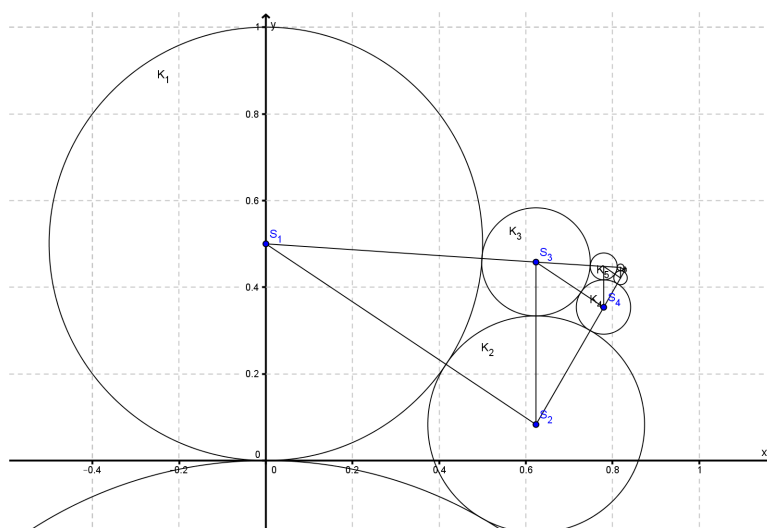
Znamo da za  $a_n = 2^n$ ,  $a_n = n^2$  te  $a_n = F_n$  niz središta konvergira, pa moraju i konvergirati i redovi  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ .

## 5.2 Zbroj duljina spojnice parnih i neparnih središta

Kako bismo dokazali konvergenciju, promatrati ćemo zbroj duljina spojnice parnih, odnosno neparnih središta kružnica. Ukoliko pokažemo da su ti zbrojevi konačni, u nastavku poglavlja vidjeti ćemo kako će nam to pomoći u dokazivanju konvergencije središta kružnica.

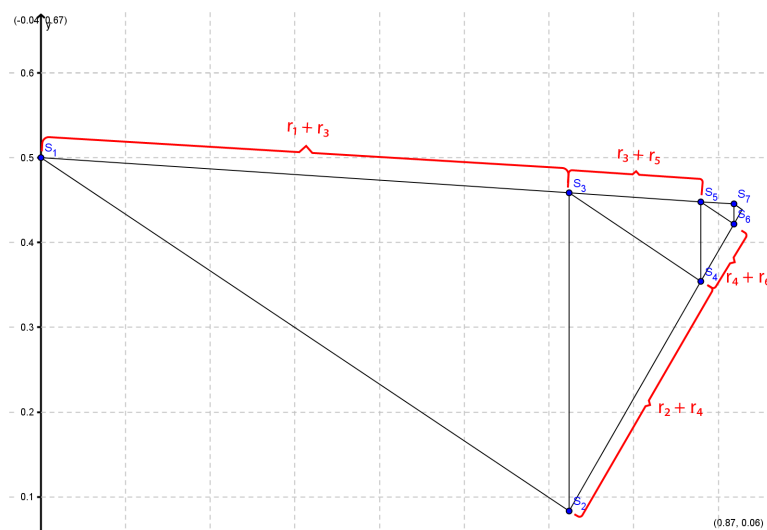
**Primjer 5.2.1.** Neka je  $a_n = 2^n$ .

Konvergenciju dokazujemo zbrajanjem dužina stranica  $|S_0S_2| + |S_2S_4| + |S_4S_6| + \dots$ . Na slikama 5.3, 5.4 i 5.5 uočimo trokute dobivene spajanjem susjednih središta te dužine njihovih stranica:



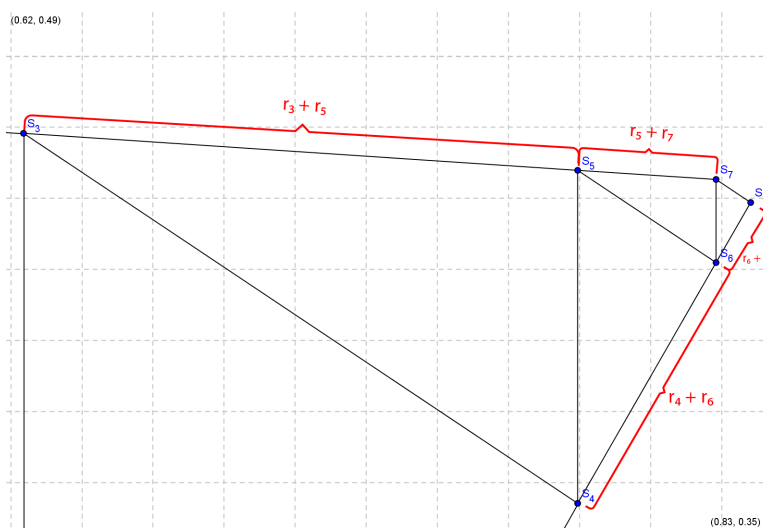
Slika 5.3: Prikaz kružnica i trokuta za  $a_n = 2^n$

Znamo duljine spojnica parnih, odnosno neparnih središta:



Slika 5.4: Prikaz mreže trokuta za  $a_n = 2^n$

Kada zumiramo sliku 5.4 dobivamo sljedeće:


 Slika 5.5: Zumirani prikaz mreže trokuta za  $a_n = 2^n$ 

Iz slika 5.4 i 5.5 vrijedi:  $|S_0S_2| = r_0 + r_2 = 1 + (\frac{1}{2})^2$ ,  $|S_2S_4| = r_2 + r_4 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4$ ,  $|S_4S_6| = r_4 + r_6 = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6$ . Ako nastavimo analogno dalje dobivamo:

$$\begin{aligned} 1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6 + \dots &= \\ &= (1 + (\frac{1}{2})^2)(1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \dots) = \\ &= \frac{1 + (\frac{1}{2})^2}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dakle,  $|S_0S_2| + |S_2S_4| + |S_4S_6| + \dots = \frac{5}{3}$   
Zbroj parnih stranica je konačan, tj. konvergira.

Analogno računamo  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots$

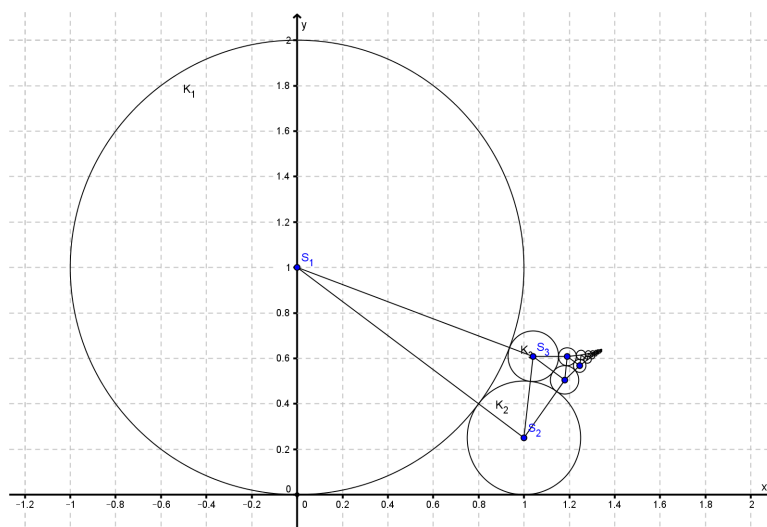
Iz slika 5.4 i 5.5 vrijedi:  $|S_1S_3| = r_1 + r_3 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3$ ,  $|S_3S_5| = r_3 + r_5 = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5$ ,  $|S_5S_7| = r_5 + r_7 = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^7$ . Time dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^7 + \dots &= \\ &= (1 + (\frac{1}{2})^2)(\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + (\frac{1}{2})^2)(1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + (\frac{1}{2})^2}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

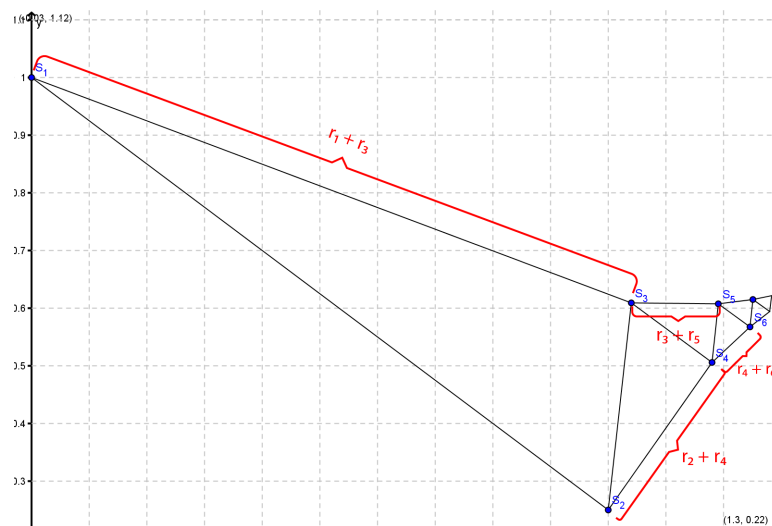
Dakle,  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots = \frac{5}{6}$   
Zbroj neparnih stranica je konačan, tj. konvergira.  
Time je dokazano da za  $a_n = 2^n$  središta kružnica konvergiraju.

**Primjer 5.2.2.** Neka je  $a_n = n^2$ .

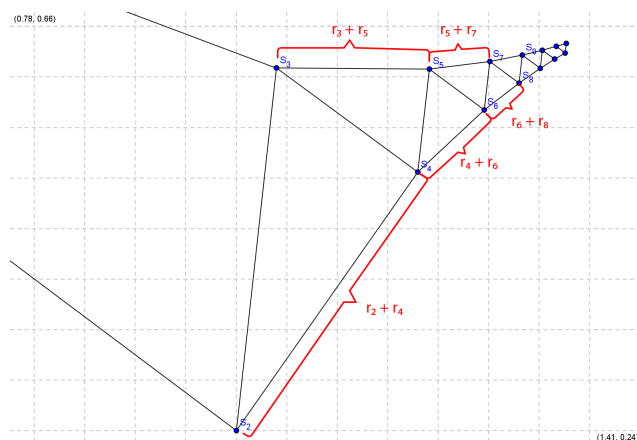
Računski konvergenciju pokazujemo zbrajanjem dužina stranica  $|S_2S_4|+|S_4S_6|+|S_6S_8|+ \dots$  kao što je prikazano na slici 5.6.



Slika 5.6: Prikaz kružnica i trokuta za  $a_n = n^2$



Slika 5.7: Prikaz mreže trokuta za  $a_n = n^2$



Slika 5.8: Zumirani prikaz mreže trokuta za  $a_n = n^2$

Iz slika 5.7 i 5.8 vrijedi  $r_2 + r_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ ,  $r_4 + r_6 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ,  $r_6 + r_8 = \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \dots = \\ & = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \\ & = \frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{6^2} + 2 \cdot \frac{1}{8^2} + \dots = \\ & = \frac{1}{4} + 2 \cdot \left( \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right) = \\ & = \frac{1}{4} + 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2k} \right)^2 = \\ & = \frac{1}{4} + 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \\ & = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Znamo da je  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (vidi [2]).

Dakle,  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} \approx 0.6449$ .

Zbroj parnih stranica je konačan.

Vrijedi:  $|S_2S_4| + |S_4S_6| + |S_6S_8| + \dots \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0.6449 = 0.57245$ .

Analogno računamo zbroj duljina neparnih stranica, tj.  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots$

Po slikama 5.7 i 5.8 vidimo da vrijedi:  $|S_1S_3| = r_1 + r_3 = 1 + \frac{1}{9}$ ,  $|S_3S_5| = r_3 + r_5 = \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$ ,  $|S_5S_7| = r_5 + r_7 = \frac{1}{25} + \frac{1}{49}$

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{49} + \dots = \\ & = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \\ & = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{5^2} + 2 \cdot \frac{1}{7^2} + \dots = \\ & = 1 + 2 \cdot \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \\ & = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+1} \right)^2 \end{aligned}$$

Znamo da je  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$  (vidi [2]).

Dakle,  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+1} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} \right)^2 - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1 \approx 0.2337$ .

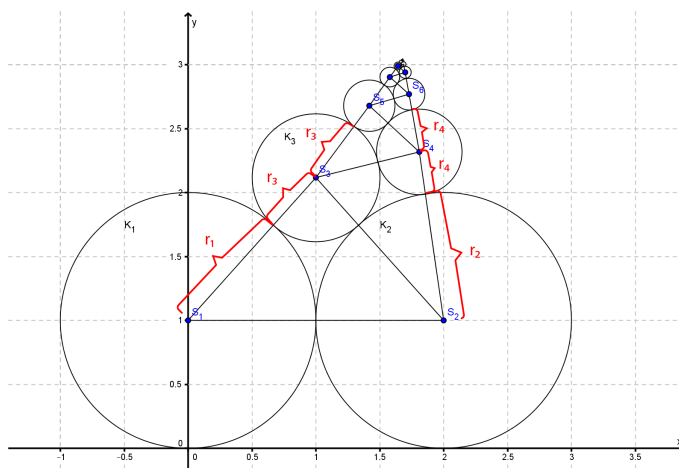
Zbroj duljina neparnih stranica je konačan.

Vrijedi:  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots \approx 1 + 2 \cdot 0.2337 \approx 1.4674$ .

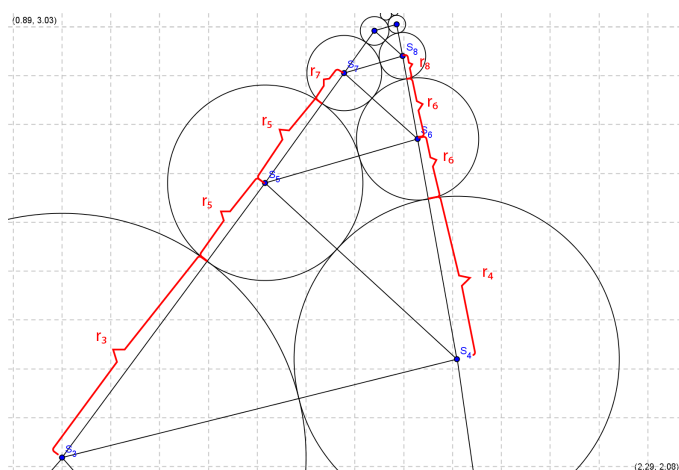
Dokazali smo da za  $a_n = n^2$  središta kružnica konvergiraju.

**Primjer 5.2.3.** Neka je  $a_n = F_n$ .

Slično kao u prethodna dva primjera računamo zbroj duljina spojnica parnih, odnosno neparnih središta. Promotrimo sliku 5.9 i zumiranu sliku 5.10.



Slika 5.9: Prikaz kružnica i trokuta za  $a_n = F_n$



Slika 5.10: Zumirani prikaz mreže trokuta za  $a_n = F_n$

Računamo prvo zbroj duljina spojnica parnih središta, tj.  $|S_2S_4| + |S_4S_6| + |S_6S_8| + \dots$ . Iz slika 5.9 i 5.10 uočavamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} |S_2S_4| + |S_4S_6| + |S_6S_8| + \dots &= \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_6} + \frac{1}{F_6} + \frac{1}{F_8} + \dots = \\ &= \frac{1}{F_2} + 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} \end{aligned}$$

Pomoću Wolfram Alphe dobivamo da je  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} \approx 0.535371$  (vidi [5] i Dodatak). Dakle,  $|S_2S_4| + |S_4S_6| + |S_6S_8| + \dots \approx 1 + 2 \cdot 0.535371 \approx 2.070742$ .

Pokazali smo da je zbroj duljina spojnica parnih središta konačan.

Slično, računamo zbroj duljina spojnica neparnih središta, tj.  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots$ .

Sa slika 5.9 i 5.10 vidimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} |S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_5} + \frac{1}{F_5} + \frac{1}{F_7} + \dots = \\ &= \frac{1}{F_1} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} \end{aligned}$$

Wolfram Alpha nam daje vrijednost  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} \approx 0.824515$  (vidi [5] i Dodatak). Dakle,  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots = 1 + 2 \cdot 0.824515 \approx 2.64903$ .

Pokazali smo da je zbroj duljina spojnica neparnih središta također konačan.

Središta kružnica za  $a_n = F_n$  konvergiraju.

### 5.3 $a_n = n$

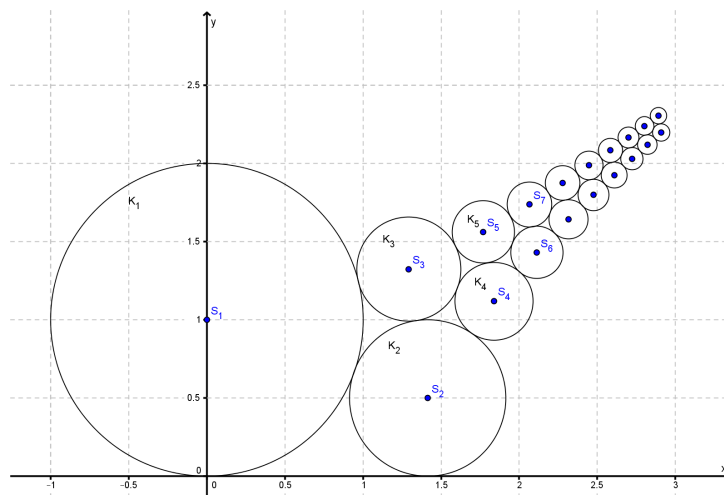
U ovom Poglavlju ćemo posebno riješiti slučaj kada je  $a_n = n$ .

Pokretanjem Matlab koda za  $p, q, r$  te površinu  $P$  dobivamo sljedeće:

$n$	$p_n$	$q_n$	$r_n$	$P_n$
0	0	$-\infty$	$\infty$	-
1	0	1	1	0.552771
2	1.414214	0.5	0.5	0.212459
3	1.293242	1.324506	0.333333	0.114261
4	1.838873	1.118195	0.25	0.071686
5	1.770309	1.562941	0.2	0.049258
6	2.112845	1.432122	0.166667	0.035961
7	2.065137	1.737947	0.142857	0.027421
8	2.315264	1.642112	0.125	0.021606
9	2.278709	1.875377	0.111111	0.017466
10	2.47581	1.799751	0.1	0.014414
11	2.446189	1.988348	0.090909	0.012098
12	2.608852	1.925889	0.083333	0.0103
...	...	...	...	...

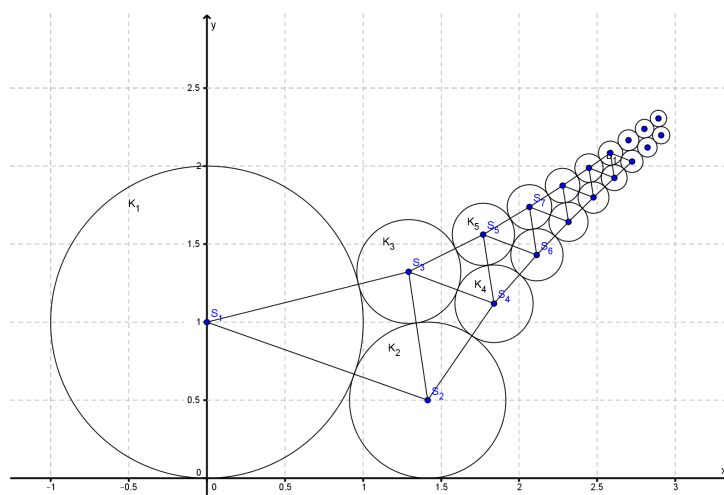


Vidimo da se polumjeri i površine smanjuju, te  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  konvergira. Kad to prikažemo u Geogebri dobivamo sljedeće:

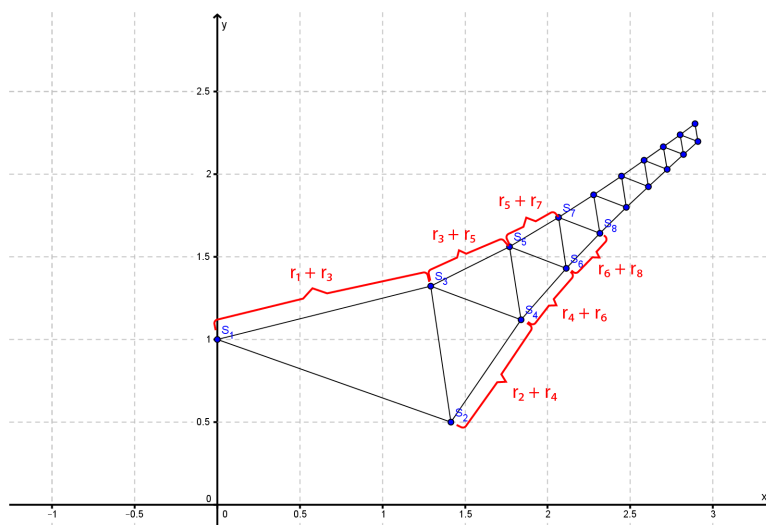


Slika 5.11: Prikaz kružnica u koordinatnom sustavu za  $a_n = n$

Prema slici 5.11 izgleda kao da središta kružnica teže u beskonačnost, tj. divergiraju. Promotrimo sada spojnice parnih, odnosno neparnih središta. Uočavamo mrežu trokuta:



Slika 5.12: Prikaz kružnica i trokuta za  $a_n = n$



Slika 5.13: Prikaz mreže trokuta za  $a_n = n$

Očito vrijedi:  $r_2 + r_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ,  $r_4 + r_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ ,  $r_6 + r_8 = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$   
 Ako gledamo zbroj duljina stranica  $|S_2S_4| + |S_4S_6| + |S_6S_8| + \dots$   
 tj.,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

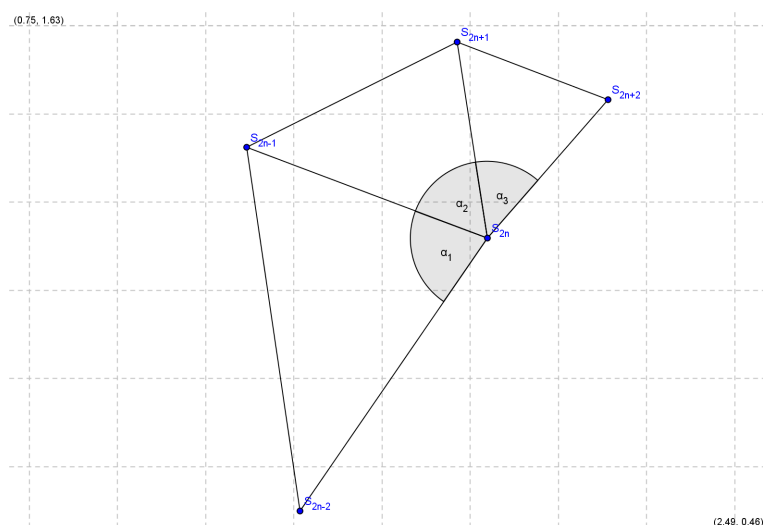
Po Teoremu 2.1.6 znamo da harmonički red divergira, dakle, zbroj duljina parnih stranica divergira.

Promotrimo zbroj duljina neparnih stranica, tj.  $|S_1S_3| + |S_3S_5| + |S_5S_7| + \dots$  dobivamo:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots = \\ & = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{7} + \dots = \\ & = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

Računamo:  $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1} dx = \infty$   
 Pokazali smo da zbroj dužina neparnih stranica divergira. No, još uvijek ne možemo zaključiti da za  $a_n = n$  središta divergiraju.

Prikažimo općenito mrežu troukuta:


 Slika 5.14: Općeniti prikaz mreže trokuta za  $a_n = n$ 

Na slici 5.14 uočimo kutove  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Cilj nam je naći donju ocjenu za zbroj tih kutova, tj. za  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Promotrimo trokut  $S_{2n-2}S_{2n-1}S_{2n}$ . Koristeći formulu iz Poglavlja 5.1 dobivamo da je površina tog trokuta jednaka

$$P_{2n-1} = \frac{\sqrt{12n^2-12n+2}}{2n(2n-1)(2n-2)}, n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći formulu  $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ , gdje su  $a$ ,  $b$  stranice trokuta, a  $\gamma$  kut između njih dobivamo

$$\sin \alpha_1 = \frac{4n \sqrt{12n^2-12n+2}}{16n^2-12n+2}.$$

Promotrimo sada funkciju  $f(n) = \frac{4n \sqrt{12n^2-12n+2}}{16n^2-12n+2}$ .

Njen limes iznosi  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  za  $n \rightarrow \infty$ .

Deriviranjem te funkcije dobivamo stacionarne točke, te određujemo intervale rasta i pada. Nije teško pokazati da  $f(n)$  pada za  $n > \frac{5+\sqrt{13}}{4}$ . Dakle,  $f(n)$  pada prema  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  za  $n > \frac{5+\sqrt{13}}{4} \approx 2.15$  postizujući sve vrijednosti veće od toga. Dakle  $\sin \alpha_1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$  pa slijedi  $\alpha_1 > \frac{\pi}{3}$ .

Analogno, promatramo trokut  $S_{2n-1}S_{2n}S_{2n+1}$ . Dobivamo da je površina tog trokuta jednaka

$$P_{2n} = \frac{\sqrt{12n^2-1}}{2n(2n-1)(2n+1)}, n \in \mathbb{N}.$$

Nije teško na isti način kao u prethodnom trokutu dobiti vrijednost za  $\sin \alpha_2$ :

$$\sin \alpha_2 = \frac{4n\sqrt{12n^2-1}}{16n^2-1}.$$

Definirajmo  $g(n) := \frac{4n\sqrt{12n^2-1}}{16n^2-1}$ .

Limes funkcije  $g(n)$  iznosi  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  za  $n \rightarrow \infty$ .

Nije teško pokazati da  $g(n)$  pada za  $n \geq 1$ . Ovdje također zaključujemo da je  $\sin \alpha_2 > \frac{\sqrt{3}}{2}$  iz čega slijedi  $\alpha_2 > \frac{\pi}{3}$ .

Zatim, za trokut  $S_{2n-1}S_{2n}S_{2n+1}$  dobivamo površinu

$$P_{2n+1} = \frac{\sqrt{12n^2+12n+2}}{2n(2n+1)(2n+2)}, n \in \mathbb{N},$$

te

$$\sin \alpha_3 = \frac{4n\sqrt{12n^2+12n+2}}{16n^2+12n+2}.$$

Sada definiramo  $h(n) := \frac{4n\sqrt{12n^2+12n+2}}{16n^2+12n+2}$ . Međutim, ovdje se pokaže da funkcija  $h(n)$  monotonno raste prema  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , postajući manja od toga. Iz ovoga slijedi  $\alpha_3 < \frac{\pi}{3}$ .

Cilj nam je sada pokazati da vrijedi:  $\alpha_1 + \alpha_3 > \frac{2\pi}{3}$ . Pokazati ćemo da vrijedi  $\arcsin f(n) + \arcsin h(n) > \frac{2\pi}{3}$ .

$$\arcsin f(n) + \arcsin h(n) = \pi - \arcsin [f(n)\sqrt{1-h(n)^2} + h(n)\sqrt{1-f(n)^2}]$$

Uvrštavanjem funkcija  $f(n)$  i  $h(n)$  dobivamo da izraz  $f(n)\sqrt{1-h(n)^2} + h(n)\sqrt{1-f(n)^2}$  ostaje ispod  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  i teži prema toj vrijednosti odozdo. Naime, taj izraz teži prema  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  odozdo,  $\arcsin$  tog izraza onda teži prema  $\frac{\pi}{3}$  odozdo, a onda izraz

$\pi - \arcsin [f(n)\sqrt{1-h(n)^2} + h(n)\sqrt{1-f(n)^2}]$  ostaje veći od  $\frac{2\pi}{3}$  i teži prema toj vrijednosti odozgo. Iz toga slijedi da je  $\alpha_1 + \alpha_3 > \frac{2\pi}{3}$ .

Zaključujemo da  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ .

Kako bismo dokazali da za  $a_n = n$  središta divergiraju preostaje nam promotriti izlomljenu liniju  $L = S_2S_4S_6\dots$ .  $L$  je graf neprekidne funkcije definirane na nekom podskupu od  $[x_2, M]$  za neki  $x_2 < M < \infty$ . Tada je

$$l(L) = \int_{x_2}^M \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx.$$

No,  $\varphi'(x)$  je pozitivna, omeđena i pada prema nekoj konačnoj vrijednosti.

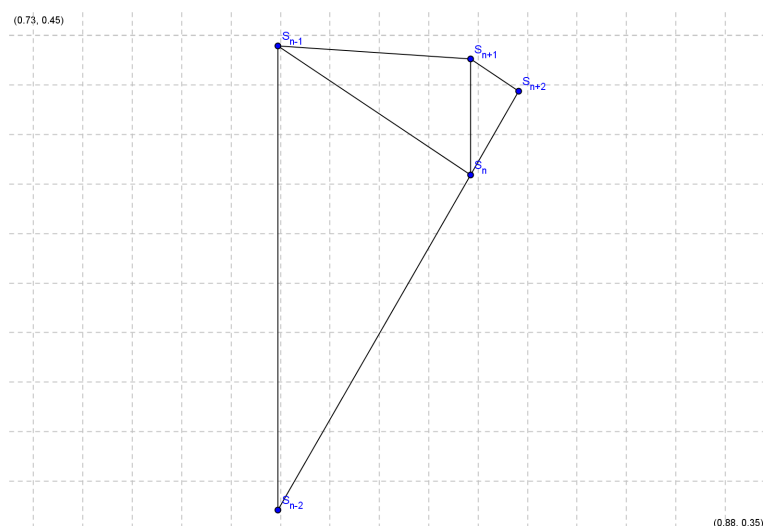
Dakle,  $\int_{x_2}^M \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx$  je konačan za svako konačno  $M$ . Međutim, znamo da je ukupna duljina krivulje  $L$  beskonačna. Dolazimo do kontradikcije te zaključujemo da za  $a_n = n$  središta divergiraju.

## 5.4 $a_n = q^n$

Kroz Primjere 4.2.1, 5.1.2, 5.2.1 smo pokazali da za  $a_n = 2^n$  zbroj središta kružnica konvergira. U ovom poglavlju ćemo obratiti pažnju na nizove oblika  $(a_n)_{n \geq 0} = (q^n)_{n \geq 0}$ . Zanima nas za kakve  $q \in \mathbb{R}$  niz  $(q^n)_{n \geq 0}$  konvergira. U Poglavlju 3 smo pokazali da samo za strogo rastuće nizove  $(a_n)_{n \geq 0}$  središta kružnica konvergiraju. Dakle, da bi niz  $(q^n)_{n \geq 0}$  bio strogo rastući nužno je da je  $q > 1$ .

### Sličnost trokuta

Za  $a_n = q^n$  promotrimo trokute sa slike 5.15 čiji su vrhovi središta kružnica.



Slika 5.15: Prikaz mreže trokuta za  $a_n = q^n$

Promotrimo trokut  $S_{n-2}S_{n-1}S_n$ . Znamo mu duljine stranica:

$$\begin{aligned} |S_{n-2}S_{n-1}| &= \frac{1}{q^{n-2}} + \frac{1}{q^{n-1}} = \frac{1+q}{q^{n-1}} \\ |S_{n-2}S_n| &= \frac{1}{q^{n-2}} + \frac{1}{q^n} = \frac{1+q^2}{q^n} \\ |S_{n-1}S_n| &= \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^n} = \frac{1+q}{q^n} \end{aligned}$$

Promotrimo sada trokut  $S_{n-1}S_nS_{n+1}$ . Njegove stranice su:

$$\begin{aligned} |S_{n-1}S_n| &= \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^n} = \frac{1+q}{q^n} \\ |S_{n-1}S_{n+1}| &= \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{1+q^2}{q^{n+1}} \\ |S_nS_{n+1}| &= \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{1+q}{q^{n+1}} \end{aligned}$$

Analogno, duljine stranica trokuta  $S_n S_{n+1} S_{n+2}$  su:

$$\begin{aligned} |S_n S_{n+1}| &= \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{1+q}{q^{n+1}} \\ |S_n S_{n+2}| &= \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n+2}} = \frac{1+q^2}{q^{n+2}} \\ |S_{n+1} S_{n+2}| &= \frac{1}{q^{n+1}} + \frac{1}{q^{n+2}} = \frac{1+q}{q^{n+2}} \end{aligned}$$

Pokažimo da su trokuti slični po  $SSS$  poučku o sličnosti.  
 $\Delta S_{n-2} S_{n-1} S_n \sim \Delta S_{n-1} S_n S_{n+1}$  jer

$$k = \frac{\frac{1+q}{q^{n-1}}}{\frac{1+q}{q^{n+1}}} = \frac{\frac{1+q^2}{q^n}}{\frac{1+q^2}{q^{n+1}}} = \frac{\frac{1+q}{q^n}}{\frac{1+q}{q^{n+1}}} = q$$

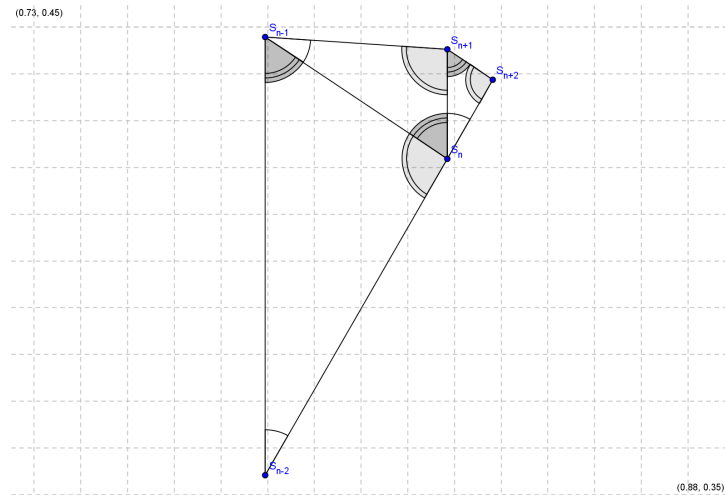
Analogno,  $\Delta S_{n-1} S_n S_{n+1} \sim \Delta S_n S_{n+1} S_{n+2}$  jer

$$k = \frac{\frac{1+q}{q^n}}{\frac{1+q}{q^{n+1}}} = \frac{\frac{1+q^2}{q^{n+1}}}{\frac{1+q^2}{q^{n+2}}} = \frac{\frac{1+q}{q^{n+1}}}{\frac{1+q}{q^{n+2}}} = q$$

Dakle,  $\Delta S_{n-2} S_{n-1} S_n \sim \Delta S_{n-1} S_n S_{n+1} \sim \Delta S_n S_{n+1} S_{n+2}$ .

## Kutovi, paralelnost

Iz sličnosti trokuta slijedi da su im odgovarajući kutovi jednaki, kao što prikazuje slika 5.16.



Slika 5.16: Prikaz mreže trokuta i kutova za  $a_n = q^n$

Kako je zbroj svih kutova u trokutu jednaka  $180^\circ$  zaključujemo da je  $S_{n-2}S_nS_{n+2}$  pravac. Također, ako nastavimo crtati trokute pokazuje se da spojnice parnih središta leže na istom pravcu, te spojnice neparnih središta leže na istom pravcu.

Uočimo: stranica  $S_{n-2}S_{n-1}$  paralelna je sa stranicom  $S_nS_{n+1}$ . To vrijedi jer je  $\angle S_{n-1}S_{n-2}S_n = \angle S_{n+1}S_nS_{n+2}$  te točke  $S_{n-2}$ ,  $S_n$  i  $S_{n+2}$  leže na istom pravcu. Time smo dokazali pretpostavku iz Primjera 4.2.1. da vrijedi  $p_n = p_{n+1}$  za svaki parni  $n$ .

U Poglavlju 5.2. računali smo zbroj duljina spojnica parnih, odnosno neparnih središta. Ovdje možemo učiniti isto kako bi eksplicitno dobili limes središta. Označimo  $p := \frac{1}{q}$ . Označimo sa  $D_p$  zbroj duljina spojnica parnih središta, a sa  $D_n$  zbroj duljina spojnica neparnih središta. Tada je:

$$\begin{aligned} D_p &= 1 + p^2 + p^2 + p^4 + p^4 + p^6 + \dots = (1 + p^2)(1 + p^2 + p^4 + \dots) = \frac{1+p^2}{1-p^2}, \\ D_n &= p + p^3 + p^3 + p^5 + p^5 + p^7 + \dots = (1 + p^2)(p + p^3 + p^5 + \dots) = p \frac{1+p^2}{1-p^2}. \end{aligned}$$

Limes središta sada možemo jednostavno dobiti kao presjek kružnica  $K_1(S_0, D_p)$  i  $K_2(S_1, D_n)$ . Točnije, rješavamo sljedeći sustav:

$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{1+p^2}{1-p^2}\right)^2 \\ x^2 + (y - p)^2 = \left(p \frac{1+p^2}{1-p^2}\right)^2. \end{cases}$$

Oduzimanjem tih jednačnji pokaže se da je  $y = \frac{2p^2}{(1+p)(1-p^2)}$ .

Uvrštavanjem  $y$  u neku od jednačnji pokazuje se da je  $x = \frac{2p \sqrt{p+p^2+p^3}}{(1+p)(1-p^2)}$ .

Dakle, za  $a_n = q^n$  limes središta je točka  $T\left(\frac{2p \sqrt{p+p^2+p^3}}{(1+p)(1-p^2)}, \frac{2p^2}{(1+p)(1-p^2)}\right)$ .

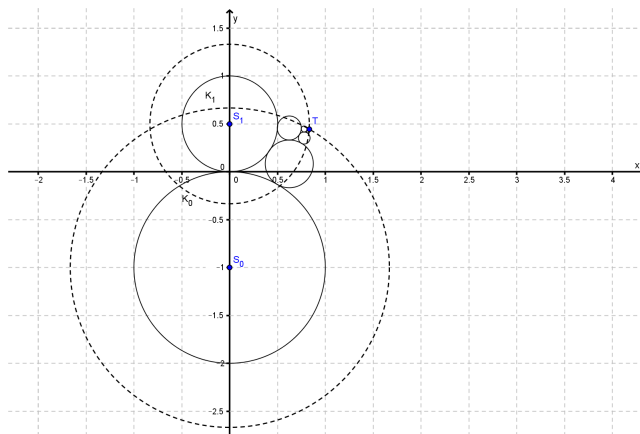
## 5.5 Ocjene za konvergentne nizove

U Poglavlju 5.2. dokazali smo da za  $a_n = 2^n$ ,  $a_n = n^2$  te  $a_n = F_n$  središta konvergiraju. Pitanje koje se prirodno nameće je: kamo konvergiraju? Zanima nas kako možemo dati ocjenu te konvergencije.

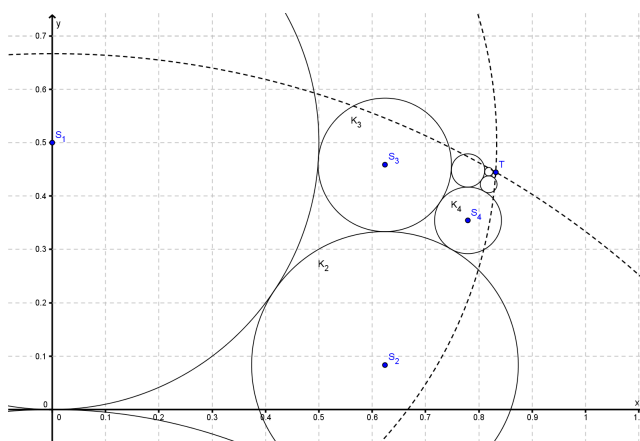
U Poglavlju 5.2. pokazali smo koliko iznosi zbroj duljina spojnica parnih, odnosno neparnih središta, te znamo ako su ti zbrojevi konačni tada će središta konvergirati. Spojnice parnih i neparnih središta međusobno se počnu sve više približavati te je njihova udaljenost postaje sve manja. Ideja za ocjenu konvergencije je da uzmemo dvije kružnice, jednu sa središtem u  $S_1$  i polumjerom jednakim zbroju duljina spojnica neparnih središta, a drugu sa središtem u  $S_2$  i polumjerom jednakim zbroju duljina spojnica parnih središta. Tamo gdje se te dvije kružnice sijeku će biti ocjena konvergencije.

**Primjer 5.5.1.** Neka je  $a_n = 2^n$ .

U Primjeru 4.2.1. pokazali smo da zbroj duljina spojnica parnih središta iznosi  $\frac{5}{3}$ , dok zbroj duljina spojnica neparnih središta iznosi  $\frac{5}{6}$ . Uzmimo kružnicu sa središtem u  $S_0(0, -1)$  i polumjerom  $\frac{5}{3}$  te kružnicu sa središtem u  $S_1(0, \frac{1}{2})$  i polumjerom  $\frac{5}{6}$  kao što je prikazano na slikama 5.17 i 5.18.



Slika 5.17: Ocjena konvergencije za  $a_n = 2^n$



Slika 5.18: Zumirani prikaz ocjene konvergencije za  $a_n = 2^n$

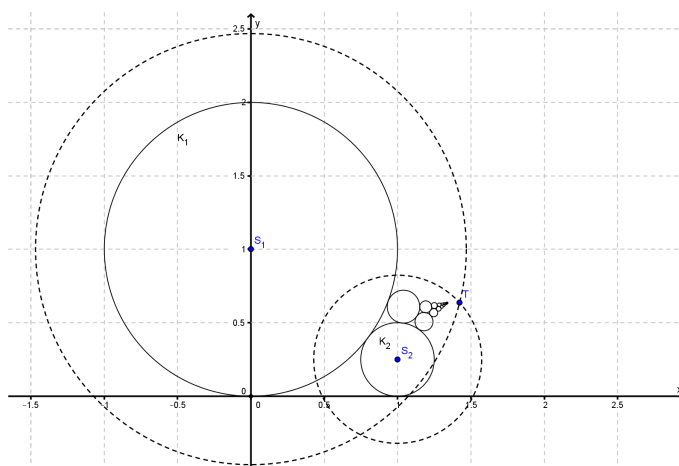
Nije teško izračunati da se u točki  $T(0.83148, 0.44444)$  te dvije kružnice sijeku. To nam je ocjena konvergencije središta kada je  $a_n = 2^n$ .



Međutim, ovim nismo dobili samo ocjenu konvergencije središta već i točnu vrijednost, jer se sva parna središta nalaze na pravcu i sva neparna središta se nalaze na drugom pravcu (to smo pokazali u Poglavlju 5.4). Zbroj duljina spojnica parnih središta je točna udaljenost od  $S_0$  do  $S_\infty$ , dok je zbroj duljina spojnica neparnih središta točna udaljenost od  $S_1$  do  $S_\infty$ .

**Primjer 5.5.2.** Neka je  $a_n = n^2$ .

Dokazali smo da zbroj duljina spojnica parnih, odnosno neparnih središta konvergira (Primjer 5.2.2.). Zbroj duljina spojnica parnih središta iznosi približno 0.57245, a zbroj duljina spojnica neparnih središta iznosi približno 1.4674. Na analogan način kao u prethodnom primjeru uzmimo dvije kružnice. Prva kružnica neka ima središte u  $S_2(1, \frac{1}{4})$  i polumjer 0.57245, a druga kružnica središte u  $S_1(0, 1)$  i polumjer 1.4674.



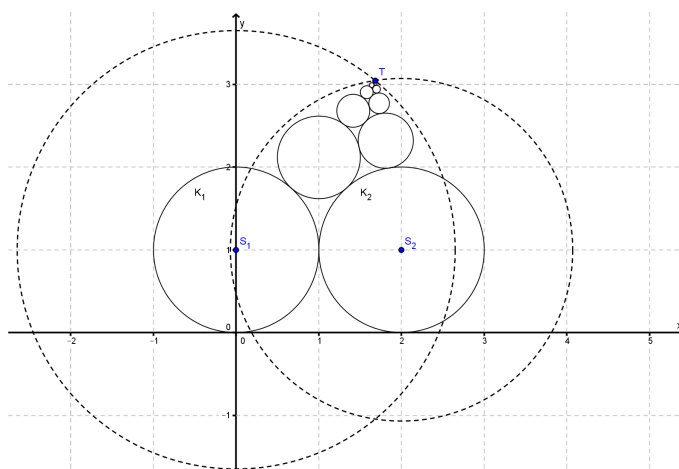
Slika 5.19: Prikaz ocjene konvergencije za  $a_n = n^2$

Na slici 5.19 uočavamo da se te dvije kružnice sijeku u točki  $T(1.42, 0.64)$ . Time dobivamo ocjenu konvergencije središta za  $a_n = n^2$ .

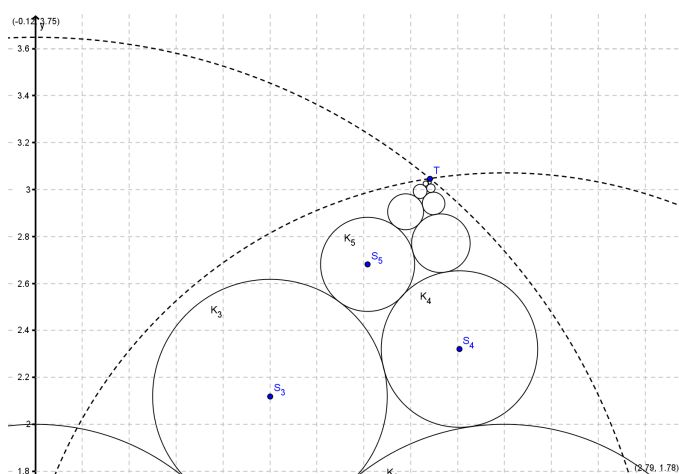
Na slici 5.19 se lijepo vidi kako je ocjena za konvergenciju 'daleka'. To je zbog toga jer spojnice parnih, odnosno neparnih središta ne leže na istom pravcu. Štoviše, to su duljine koje se 'lome' (slika 5.8).

**Primjer 5.5.3.** Neka je  $a_n = F_n$ .

U Primjeru 5.2.3. dokazali smo da zbroj duljina spojnica parnih, odnosno neparnih središta konvergira. Zbroj duljina spojnica parnih središta iznosi približno 2.070742, a zbroj duljina spojnica neparnih središta iznosi približno 2.64903. Uzmimo kružnicu sa središtem u  $S_2(1, 1)$  i polumjerom 2.070742, te kružnicu sa središtem u  $S_1(0, 1)$  sa polumjerom 2.64903. Tu situaciju vidimo na slikama 5.20 i 5.21.



Slika 5.20: Ocjena konvergencije za  $a_n = F_n$



Slika 5.21: Zumirani prikaz ocjene konvergencije za  $a_n = F_n$

Nije teško naći sjecište tih kružnica. Dobivamo da se one sijeku u točki  $T(1.68, 3.05)$ . To nam je ocjena konvergencije središta za  $a_n = F_n$ .

## **Poglavlje 6**

### **Zaključak**

Kroz ovaj rad na raznim primjerima pokazali smo kako unaprijed određena formula za polumjere kružnica utječe na konvergenciju, odnosno divergenciju središta. Za očite rezultate, kada je polumjer konstantan ili rastući znamo da dolazi do divergencije. Pokazali smo da padajući polumjeri ne povlače konvergenciju. No, ovaj rad daje mnogo prostora za nastavak istraživanja - za neke druge primjere te u više dimenzija.

# Bibliografija

- [1] L. Fejes Toth *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [2] S. Mardešić *Matematička analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [3] Hales, Thomas C.; Ferguson, Samuel P. *The Kepler Conjecture: The Hales-Ferguson Proof*, New York, 2011.
- [4] Hsiang, Wu-Yi *On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture*, International Journal of Mathematics, br. 4, 739–831, 1993.
- [5] Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com/>

# Sažetak

U ovom radu promatramo kružnice koje se dodiruju, a čiji su polumjeri unaprijed definirani kao niz brojeva.

U prvom dijelu formuliran je problem, dok su u drugom dijelu iskazane definicije i teoremi potrebni za razumijevanje rada.

U trećem dijelu rada prikazani su očiti rezultati.

Koristeći programski software Matlab numerički pristupamo problemu u četvrtom dijelu, te taj pristup pokazujemo na primjerima.

U završnom, petom dijelu egzaktno rješavamo problem te dajemo ocjenu konvergencije središta za konvergentne nizove.

# Summary

In this thesis, we observe the circles that are touched and whose diameters are predetermined as a series of numbers.

In first part the problem is formulated, while the second part contains definitions and theorems needed to understand this thesis.

Third part of thesis presents obvious results.

Using Matlab software we approach the problem in the fourth part numerically, and this approach is shown in the examples.

In the final, fifth part, we solve the problem exactly and give the convergence of centers for series which converge.

# Dodatak

U nastavku je dodan kod napisan u Matlabu korišten za rješavanje ranije navedenih primjera iz Poglavlja 4.

```
m=20; %koliko zelimo kruznica
n=1:1:m;
a=2.^(n-1); %an %ovdje postavljamo niz
p(1)=0; %ovo je p0
q(1)=-1/a(1); %q0
p(2)=0; %ovo je p1
q(2)=1/a(2); %q1
r(1)=abs(q(1)); %r0
r(2)=abs(q(2)); %r1
r=abs(1./a(n)); %rn
for i=3:1:m
    k(i)=(p(i-2)-p(i-1))./(q(i-1)-q(i-2)); %kn
    l(i)=(r(i-2).^2-r(i-1).^2+2*r(i-2)*r(i)-2*r(i-1)*r(i)-p(i-2).^2+p(i-1).^2-q(i-2).^2+
    q(i-1).^2)./(2*q(i-1)-2*q(i-2)); %ln
    c(i)=-r(i-2).^2-2*r(i-2)*r(i)-r(i).^2+p(i-2).^2-2*q(i-2)*l(i)+q(i-2).^2+l(i).^2; %cn
    a1(i)=1+k(i).^2; %a'n
    b(i)=2*k(i)*l(i)-2*p(i-2)-2*q(i-2)*k(i); %bn
    p(i)=(-b(i)+sqrt(b(i).^2-4*a1(i)*c(i)))./(2*a1(i)); %pn
    q(i)=k(i)*p(i)+l(i); %qn
end
p=p';
q=q';
r=r';
for k=1:1:(m-2)
    povrsina(k)=sqrt(r(k)*r(k+1)*r(k+2)*(r(k)+r(k+1)+r(k+2)));
end
povrsina=povrsina';
name='koordinate.xlsx';
xlswrite(name,p,'koordinate','B2')
xlswrite(name,q,'koordinate','C2')
xlswrite(name,r,'koordinate','D2')
xlswrite(name,povrsina,'koordinate','E2')
```


Zbroj parnih i neparnih Fibonaccijevih brojeva (vidi [5])

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} = \frac{\sqrt{5} \left( 2 \frac{\psi_1^{(0)}(1)}{\phi^4} - 4 \frac{\psi_1^{(0)}(1)}{\phi^2} + \log(5) \right)}{8 \log\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)} - 1 \approx 0.535371$$

[Open code](#) 

$\log(x)$  is the natural logarithm  
 $\psi_q(z)$  gives the  $q$ -digamma function  
 $\phi$  is the golden ratio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{5} \theta_2\left(0, \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^2 - 4 \right) \approx 0.824515$$

  $\theta_q(x, q)$  is the theta function

# Životopis

Rođena sam dana 08.03.1994. u Zagrebu. Završila sam Osnovnu školu Brestje 2008. godine. Iste godine upisujem Treću ekonomsku školu koju završavam 2012. godine. Nakon završetka srednje škole upisujem preddiplomski studij Matematika, smjer: nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2015. upisujem diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Tijekom studija držala sam demonstrature iz kolegija Konstruktivne metode u geometriji te provela jedan semestar na studentskoj razmjeni u Gentu u Belgiji u sklopu Erasmus+ studijskog programa.