Prema teoriji polja na kvantiziranim prostorima

Čuić, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Marija Čuić

PREMA TEORIJI POLJA NA KVANTIZIRANIM PROSTORIMA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Marija Čuić

Diplomski rad

Prema teoriji polja na kvantiziranim prostorima

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Danijel Jurman

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________
Zagreb, 2019.

Zahvaljujem mentoru, dr. sc. Danijelu Jurmanu, na svom vremenu kojeg je uložio u mene, na svom znanju koje mi je prenio i prilikama koje mi je pružio, i najvažnije, na svom maltretiranju i cjepidlačenju pri pisanju ovog rada.
Zahvaljujem Tomislavu Harambašiću na svoj ljubavi i potpori, na svim skuhanim kavama i opranom suđu.

Sažetak

Otvoreno pitanje u modernoj teorijskoj fizici predstavlja ujedinjenje kvantne mehanike i gravitacije unutar istog matematičkog formalizma. Mogući pristup problemu je da pretpostavimo da je na malim skalama prostorvrijeme kvantizirano te pokušamo konstruirati teoriju polja na takvoj strukturi. U ovom radu konstruiramo kvantizirane, odnosno nekomutativne varijante homogenih prostora, uzimajući u obzir zahtjev, po uzoru na princip korespondancije u kvantnoj mehanici, da postoji odgovarajući limes u kojem se nekomutativni prostor reducira na glatku mnogostrukost. Konkretna konstrukcija nekomutativnih analogona homogenih prostora ilustrirana je na primjerima kvantne mehanike i kvantizirane sfere. U kontekstu kvantizirane varijante klasične sfere uvodimo dinamičke nekomutativne prostore, baždarnu teoriju polja te osnovne koncepte kvantne teorije polja na nekomutativnim prostorima.

Ključne riječi: homogeni prostori, koherentna stanja, kvantizacija, princip korespondencije, nekomutativni prostori

Towards a field theory on quantized spaces

Abstract

An open question in modern theoretical physics is the union of quantum mechanics and gravity within the same mathematical framework. One approach to this problem is that we assume that spacetime is quantized on small scales and attempt to construct a field theory on such a structure. In this dissertation we construct quantized, that is, noncommutative analogues of homogeneous spaces, taking into consideration the request that, similarly to the correspondence principle in quantum mechanics, there is a corresponding limit in which the noncommutative space reduces to a smooth manifold. An explicit construction of noncommutative analogues of homogeneous spaces is illustrated on the examples of quantum mechanics and the quantized sphere. In the context of a quantized version of the classical sphere, we introduce dynamical noncommutative spaces, gauge field theory and basic concepts of quantum field theory on noncommutative spaces.

Keywords: homogeneous spaces, coherent states, quantization, correspondence principle, noncommutative spaces

Sadržaj

1 Uvod

Veoma živo područje istraživanja u teorijskoj fizici potraga je za matematički konzistentnim formalizmom koji bi mogao opisati gravitaciju i kvantnu mehaniku unutar istih matematičkih okvira. S jedne strane, imamo kvantnu teoriju polja koja opisuje standardni model i koja je eksperimentalno potvrđena do velikih preciznosti. Dinamika kvantne teorije polja, zajedno s lokalnim baždarnim simetrijama, odvija se na ravnom prostorvremenu, a samo prostorvrijeme ne sudjeluje aktivno u dinamici. S druge strane, u općoj teoriji relativnosti i prostorvrijeme i polja koja opisuju materiju aktivno sudjeluju u dinamici sustava. Dinamika je opisana Einsteinovim jednadžbama

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

koje povezuju tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ i geometriju prostorvremena.

Problem na koji nailazimo u ovom pristupu jest taj da je desna strana prethodnog skupa jednadžbi podložna kvantizaciji, dok se pokazuje da je lijeva strana nerenormalizabilna kada se metrika promatra kao dinamičko polje nad mnogostrukosti. Neke teorije zaobilaze taj problem, od kojih su najvažnije teorija struna i kvantna gravitacija petlji (eng. loop quantum gravity). Obje ove matematički dobro utemeljene teorije predviđaju netrivijalnu strukturu prostorvremena, koju možemo pripisati tzv. nekomutativnim prostorima. Za trenutne potrebe intuitivno definiramo nekomutativne prostore skupom komutacijskih relacija između operatora koordinata dane mnogostrukosti, a kasnije ćemo rigoroznije konstruirati nekomutativnu mnogostrukost. Kako bismo pokazali odakle dolazi motivacija za takvom strukturom prostorvremena, primjetimo za početak da je u kvantnoj mehanici fazni prostor kvantiziran komutacijskom relacijom $[q, p] = i\hbar$, odnosno da su točke faznog prostora razmrljane u ćelije minimalne zapremnine $\hbar$. Također, kako bismo ispitivali prostorvrijeme na Planckovoj skali, trebali bismo koristiti čestice vrlo visoke energije. Što je veća energija čestice, manja joj je valna duljina i u nekom trenutku potrebna valna duljina može postati manja od Schwarzschildovog radijusa, pri čemu se stvara mikroskopska crna rupa. Poznato je da se prostorvrijeme unutar tog radijusa ne može ispitivati. Doplicher, Fredenhagen i Roberts pokazali su u [5] 1995. da nekomutativni prostori mogu inkorporirati ovaj problem na način da nametnu relacije neodređenosti između koordinata

$$\Delta\hat{x}^{\mu}\Delta\hat{x}^{\nu} \geq l_p^2, \tag{1.2}$$

gdje je $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33}$ cm Planckova duljina. S obzirom da se na isti način u kvantnoj mehanici postiže razmrljanost faznog prostora, ovaj pristup također rezultira minimalnim volumenom prostorvremena, što onemogućava kolaps u crnu rupu.

Pokazuje se da su nekomutativni prostori zanimljivi i u konstrukciji kvantne teorije polja. Matematički rigorozna formulacija kvantne teorije polja dana je Wightmanovim aksiomima i do sada nije pronađena interagirajuća teorija u 4 dimenzije koja zadovoljava te aksiome. Stoga je zanimljiv rezultat, pokazan u [16], da postoji interagirajuća ϕ^4 teorija na nekomutativnom prostorvremenu. S druge strane, postoji i restrikcija na moguće modele kvantne teorije polja dana Coleman-Mandula teoremom [7], koji nalaže da se simetrije ravnog prostorvremena i interne simetrije teorije mogu kombinirati jedino na trivijalan način. Teorija koja zaobilazi taj teorem je teorija supersimetrija, ali alternativno je pokazano u [17] da Coleman-Mandula teorem zaobilaze i nekomutativne teorije.

Kako bismo razumjeli odakle dolazi nekomutativnost koordinata, u drugom poglavlju iznosimo formalizam deformacijske kvantizacije faznog prostora, pomoću kojeg pokušavamo razumjeti ulogu Poissonove strukture mnogostrukosti u izgradnji nekomutativnih prostora. Stoga ćemo proučiti pojam Liejeve grupe, kao i njoj pripadne Liejeve algebre, točnije, njihovu geometriju i posebno geometriju tzv. homogenih prostora. Pokazat ćemo da struktura Heisenbergove grupe može igrati ulogu u kvantizaciji faznog prostora. Heisenbergova grupa služit će kao konkretan primjer kako se kvantizira bilo koji homogeni prostor s obzirom na akciju neke Liejeve grupe. Uz Liejeve grupe, potrebni su nam dodatni matematički alati, konkretno koherentna stanja i inducirane reprezentacije. U konačnici, konstruiramo nekomutativni analogon sfere S^2 te uvodimo dinamičke matrične modele.

2 Princip korespondencije

Pri konstrukciji nekomutativnih prostora treba uzeti u obzir da bi se isti trebali reducirati na klasičnu mnogostrukost u odgovarajućem limesu. Kako bismo to postigli, proučavamo za početak princip korespondencije između klasične i kvantne mehanike, koji preslikava kvantnomehaničke operatore u funkcije na faznom prostoru u limesu $\hbar \to 0$. Preciznije, princip korespondencije u kvantnoj mehanici povezuje Poissonovu zagradu klasičnih opservabli s komutatorom odgovarajućih kvantnomehaničkih operatora. Začetnici ideje principa korespondencije bili su Dirac i von Neumann, no pokazalo se da je ideja izjednačavanja klasične Poissonove zagrade s kvantnomehaničkim komutatorom nekonzistentna. Kako bismo ostvarili konzistentan princip korespondencije, potrebno nam je dobro definirano preslikavanje s operatora na klasične funkcije, koje se može konstruirati pomoću koherentnih stanja, kao i dobro definiran limes $\hbar \to 0$. U kasnijim poglavljima ćemo eksplicitno konstruirati preslikavanje, no za potrebe ovog poglavlja pretpostavit ćemo da takvo preslikavanje postoji te ćemo pokazati da deformacijska kvantizacija daje algebarski konzistentan prijelaz između klasične i kvantne mehanike u limesu $\hbar \to 0$.

2.1 Geometrija faznog prostora i klasična mehanika

Klasični sustav n čestica određen je točkom u $2n$-dimenzionalnom faznom prostoru $\mathcal{M}$. Klasične opservable funkcije su na faznom prostoru, a fizikalna stanja opisana su distribucijama nad opservablama, točnije, delta funkcijama. Kako bismo odredili fizikalne veličine u nekom trenutku, pripadne funkcije izvrjednjujemo u točki koja karakterizira to stanje. U kanonskim koordinatama točku x u $\mathcal{M}$ pišemo kao $x = (q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n)$, za što često koristimo skraćeni oblik $x = (q, p)$. Na primjer, ako želimo izračunati kanonski impuls sustava u određenom trenutku, izvrjednjujemo funkciju kanonskog impulsa u točki $x_0 = (q_0, p_0)$ koja opisuje sustav u tom trenutku, što matematički izražavamo kao

$$p_0 = \int p\delta(q - q_0, p - p_0) dq dp, \tag{2.1}$$

gdje je δ prikladna Diracova delta funkcija.

Klasične opservable čine komutativnu algebru gdje je produkt dvije funkcije definiran po točkama

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{2.2}$$

gdje je fg nova funkcija na faznom prostoru.

Dinamika opservabli određena je Hamiltonovim jednadžbama

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{2.3}$$

gdje je H hamiltonijan.

Uvedemo li Poissonovu zagradu

$$\{f, g\}(q, p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \Bigg|_{q,p}, \tag{2.4}$$

vremenska derivacija općenite funkcije varijable $x = (q, p)$, koja je dana kao

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right), \tag{2.5}$$

može se zapisati, koristeći Hamiltonove jednadžbe (2.3) kao

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \tag{2.6}$$

Posebno, Hamiltonove jednadžbe (2.3) možemo napisati u obliku

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}. \tag{2.7}$$

Kako bismo dobili geometrijsku sliku Hamiltonove mehanike, uvodimo pojam vlaknastog svežnja. Vlaknasti svežanj možemo zamisliti kao generalizaciju Kartezijevog produkta. Sastoji se od mnogostrukosti E i B, koje nazivamo potpuni prostor i bazni prostor, respektivno, sa surjekcijom $\pi : E \to B$, koju nazivamo projekcija, takvom da svaka točka $p \in B$ ima okolinu U čija praslika u E izgleda kao Kartezijev produkt. Formalno, postoji difeomorfizam $\varphi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U)$, gdje je F mnogostrukost koju nazivamo vlakno. Preslikavanje $\pi^{-1}(U_i)$ nazivamo lokalna trivijalizacija budući da φ_i^{-1} preslikava $\pi^{-1}(U_i)$ na direktni produkt $U_i \times F$. To znači da E lokalno izgleda kao Kartezijev produkt mnogostrukosti B i F, ali ne nužno i globalno.

Ako uzmemo da je vlakno kotangentni prostor, dobivamo strukturu kotangnentnog svežnja. Kako bismo pokazali da je fazni prostor kotangentni svežanj, promatramo sustav N čestica s koordinatama $\{q^i\}$ koje definiraju mnogostrukost M nazivanu konfiguracijski prostor. Vremenska evolucija dinamičkog prostora opisana je krivuljom $q^i(t)$ u M. Lagranžijan $\mathcal{L}$ funkcija je varijabli $\{q^i\}$ i $\{dq^i/dt\}$, što znači da je funkcija TM, odnosno tangentnog svežnja mnogostrukosti M. To se lako vidi iz transformacijskih svojstava vektora $\{dq^i/dt\}$. Ako definiramo nove koordinate na M kao $Q^j = Q^j\,(q^i)$, dobivamo transformaciju

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{dq^i}{dQ^j}\frac{dQ^j}{dt}, \tag{2.8}$$

što je transformacijsko svojstvo tangentnog vektora. S druge strane, hamiltonijan H je funkcija varijabli p_i, koje su dane kao

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}. \tag{2.9}$$

p_i su 1-forme, što se vidi iz transformacije

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^j}\frac{\partial \dot{Q}^j}{\partial \dot{q}^i}. \tag{2.10}$$

To znači da je hamiltonijan funkcija na kotangentnom prostoru i da hamiltonijanska formulacija ima strukturu dualnu strukturi lagranžijanske formulacije. Fazni prostor je stoga kotangentni svežanj T^*M.

Definirajmo sada zatvorenu nedegeneriranu 2-formu na faznom prostoru $\mathcal{M}$

$$\omega = dp \wedge dq, \tag{2.11}$$

koju nazivamo simplektička forma. Mnogostrukost sa simplektičkom formom nazivamo simplektička mnogostukost. Na simplektičkoj mnogostrukosti imamo prirodno invertibilno 1-1 preslikavanje između vektora i 1-formi koje je definirano preko ω. Ako je $\bar{V}$ vektorsko polje na $\mathcal{M}$, odgovarajuće polje 1-forme $\tilde{V}$ dano je kao

$$\tilde{V} = \omega(\bar{V}). \tag{2.12}$$

Ako uvedemo inverz od ω, tzv. Poissonov bivektor

$$\alpha = \partial_q \wedge \partial_p, \tag{2.13}$$

sa svojstvom $\alpha(\omega(\bar{V})) = \bar{V}, \forall\, \bar{V}$, možemo na sličan način dobiti jedinstveno vektorsko polje $\bar{U}$ iz polja 1-forme $\tilde{U}$

$$\bar{U} = \alpha(\tilde{U}). \tag{2.14}$$

Ako primjenimo prethodnu jednadžbu na polja 1-formi df i dg, dobivenih iz funkcija f i g, respektivno, dobivamo vektorska polja $X_f = \overline{df}$ i $X_g = \overline{dg}$. Eksplicitno, ako iskoristimo oblik Poissonovog bivektora (2.13), dobivamo

$$X_g = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}. \tag{2.15}$$

Vektorska polja dobivena na ovaj način nazivamo Hamiltonova vektorska polja.

Uzimajući dva Hamiltonova vektorska polja X_f i X_g, konstruiramo skalar

$$\omega(X_f, X_g) = df(X_g), \tag{2.16}$$

koji je zbog (2.15) jednak Poissonovoj zagradi funkcija f i g.

Konačno, rješenje Hamiltonovih jednadžbi je krivulja $\{q(t), p(t)\}$ u $\mathcal{M}$ s tangentnim vektorom

$$U = \frac{d}{dt} = \frac{dq}{dt}\frac{d}{dq} + \frac{dp}{dt}\frac{d}{dp}, \tag{2.17}$$

koji zadovoljava $\omega(U) = dH$.

Mnogostrukost s Poissonovim tenzorom naziva se Poissonova mnogostrukost. Definirali smo Poissonov bivektor kao inverz simplektičke forme, ali za općenitu Poissonovu mnogostrukost nije potrebno da Poissonov tenzor bude invertibilan, dovoljno je svojstvo antisimetričnosti kako bi se definirala Poissonova zagrada oblika (2.4) sa svojstvima $\{f, g\} = -\{g, f\}$, $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{h, f\}$ i $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$. Prvo svojstvo je svojstvo antisimetričnosti, drugo je Leibnizovo pravilo, a treće je Jacobijev identitet.

2.2 Deformacijska kvantizacija: put ka principu korespondencije

Važan pojam u kvantnoj mehanici predstavlja Heisenbergov princip neodređenosti koji nalaže da se fizikalno stanje čestice ne može opisati točkom u faznom prostoru. Princip neodređenosti možemo smatrati posljedicom nekomutativnosti kvantnomehaničkih opservabli. U kvantnoj mehanici algebra opservabli $\mathfrak{g}$ dana je linearnim operatorima koji djeluju na odgovarajući Hilbertov prostor i u općenitom slučaju ne komutiraju. Hilbertov prostor je prostor svih mogućih stanja promatranog sustava, a vrijednosti neke opservable dobivene u jednom mjerenju su svojstvene vrijednosti pripadnih operatora. Stoga zahtjevamo da su operatori koji odgovaraju fizikalnim opservablama hermitski operatori, budući da hermitski operatori imaju realne svojstvene vrijednosti. Fizikalne veličine dobivaju se uprosječavanjem preko ansambla mjerenja.

U deformacijskoj kvantizaciji, u odnosu na standardni pristup kvantnoj mehanici, isti objekti opisuju i klasični i kvantni dinamički sustav, točnije, kvantnomehaničke opservable opisuju se istim funkcijama na faznom prostoru kao i u klasičnom slučaju. Nekomutativnost se uvodi preko nekomutativnog produkta funkcija, a princip neodređenosti tako da su fizikalna stanja opisana distribucijama na faznom prostoru koje nisu uske kao delta funkcija. Zbog toga je potrebno poznavati funkciju na cijelom prostoru koje zauzima neko fizikalno stanje, što nam za fizikalnu veličinu daje srednju vrijednost opservable.

Kako bismo kvantizirali fazni prostor, promatramo glatke kompleksne funkcije na Poissonovoj mnogostrukosti. Nekomutativni produkt funkcija označavamo $f \star g$ i nazivamo ga star-produkt. Groenwold je 1946. godine prvi uveo eksplicitnu reprezentaciju $\star$-produkta, a sav daljni rad na deformacijskoj kvantizaciji potekao je od Gernsthaberovog rada iz 1964. godine, gdje je prvi put formuliran $\star$-produkt glatkih funkcija na mnogostrukosti. $\star$-produkt dvaju funkcija daje novu glatku kompleksnu funkciju, koja se općenito može napisati kao beskonačni red

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} (i\hbar)^n C_n(f,g) = fg + i\hbar C_1(f,g) + O(\hbar^2). \tag{2.18}$$

Prvi član u razvoju daje klasični produkt po točkama (2.2), a $(i\hbar)$ predstavlja deformacijski parametar, za kojeg uzimamo da se mijenja kontinuirano. Deformacija u ovom kontekstu podrazumijeva da modifikacija neke matematičke strukture istu mijenja na kontinuiran način. Ako poistovijetimo $\hbar$ s Planckovom konstantom, ono što se u stvarnosti mijenja jest iznos kvantnih korekcija. Klasični limes realizira se u ovom formalizmu kao $\hbar \to 0$. U ovom se limesu $\star$-produkt reducira na uobičajeni produkt po točkama dvaju funkcija. Koeficijente u redu biramo na način da ukupan produkt bude nekomutativan. Ovu nekomutativnu algebru sačinjavaju iste funkcije kao i komutativnu algebru klasične mehanike, a nekomutativni produkt predstavlja deformaciju komutativne algebre.

Kako definicija $\star$-produkta (2.18) ne bi bila preopćenita, potrebno je nametnuti dodatne uvjete. Jedan od uvjeta smo već spomenuli, a to je da se $\star$-produkt u klasičnom limesu reducira na standardni produkt po točkama. Drugo svojstvo koje zahtjevamo je to da se klasični limes može formulirati na matematički konzistentan način, a treće je asocijativnost. Ta tri svojstva zapisujemo na sljedeći način

1. $C_0(f,g) = fg$,
2. $C_1(f,g) - C_1(g,f) = \{f,g\}$,
3. $\sum_{j+k=n} C_j(C_k(f,g),h) = \sum_{j+k=n} C_j(f, C_k(g,h))$.

Prva dva svojstva predstavlja ispravan oblik principa korespondencije. Ako definiramo komutator pomoću $\star$-produkta na način

$$[f,g]_\star = f \star g - g \star f, \tag{2.19}$$

princip korespondencije možemo izraziti kao

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{1}{i\hbar}[f,g]_\star = \{f,g\}. \tag{2.20}$$

Iz dosada navedenog nije a priori jasno postoji li $\star$-produkt za danu Poissonovu mnogostrukost, tj. mogu li se naći koeficijenti C_n koji zadovoljavaju gore navedena svojstva. Čak i ako bi postojao takav produkt, nije jasno može li za rezultat imati glatku funkciju. Kontsevich je pokazao 1997. da za bilo koju Poissonovu mnogostrukost postoji $\star$-produkt [3].

Standardni rezultat za ravni Euklidski prostor $M = \mathbb{R}^{2n}$, koji ima konstantne komponente Poissonovog tenzora, definira koeficijent C_1 kao antisimetričan, tako da vrijedi

$$C_1(f,g) = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g) = \frac{1}{2}\{f,g\}, \tag{2.21}$$

gdje smo koristili pokratu za Poissonovu zagradu

$$\{f,g\} = \alpha^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x). \tag{2.22}$$

α^{ij} su komponente Poissonovog tenzora, a $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Vidimo da koeficijent C_1 automatski zadovoljava treće svojstvo iz definicije $\star$-produkta. Moyalov $\star$-produkt definira se kao

$$f \star_M g = f \exp\left(\frac{i\hbar}{2}\alpha^{ij}\overleftarrow{\partial}_i\overrightarrow{\partial}_j\right) g, \tag{2.23}$$

što je u kanonskim koordinatama dano kao

$$(f \star_M g)(q,p) = f(q,p) \exp\left(\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)\right) g(q,p) \tag{2.24}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{m+n}\frac{(-1)^m}{m!n!}(\partial_p^m\partial_q^n f)(\partial_p^n\partial_q^m g). \tag{2.25}$$

Možemo se u ovom trenutku pitati je li $\star$-produkt za danu Poissonovu mnogostrukost jedinstven. Dva $\star$-produkta $\star$ i $\star'$ su c-ekvivalentna ako postoji invertibilni operator prijelaza T

$$T = 1 + \hbar T_1 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^n T_n, \tag{2.26}$$

gdje su T_n diferencijalni operatori, koji zadovoljava

$$f \star' g = T^{-1}((Tf) \star (Tg)). \tag{2.27}$$

Poznato je da su za $M = \mathbb{R}^{2n}$ svi dozvoljeni $\star$-produkti c-ekvivalentni Moyalovom $\star$-produktu. Još jedan primjer $\star$-produkta na $\mathbb{R}^{2n}$ je standardni $\star$-produkt, definiran kao

$$f \star_S g = f \exp(i\hbar\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p) g. \tag{2.28}$$

Budući da bi svi $\star$-produkti trebali biti c-ekvivalentni, trebalo bi vrijediti

$$T(f \star_S g) = (Tf) \star_M (Tg), \tag{2.29}$$

gdje je operator prijelaza T dan kao

$$T = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\vec{\partial}_q\vec{\partial}_p\right). \tag{2.30}$$

Primijetimo da je antisimetrični dio diferencijalnog operatora u eksponentu standardnog produkta jednak diferencijalnom operatoru u eksponentu Moyalovog produkta. Tome je uzrok treće svojstvo iz definicije $\star$-produkta, koje oba produkta moraju zadovoljavati.

Mogli smo primijetiti da nam Poissonova struktura igra važnu ulogu u kvantizaciji faznog prostora, što je evidentno u matematičkom iskazu principa korespondencije (2.20). Sada možemo pokazati kako nas deformacijska kvantizacija vodi ka nekomutativim prostorima. Koristeći Moyalov $\star$-produkt (2.23), izračunat ćemo komutacijsku relaciju danu $\star$-produktom (2.19) između funkcija q i p

$$[q, p]_\star = q \star_M p - p \star_M q = qp + \frac{i\hbar}{2} - qp + \frac{i\hbar}{2} = i\hbar. \tag{2.31}$$

Budući da je $i\hbar$ konstanta, komutatori $[q, i\hbar]_\star$ i $[p, i\hbar]_\star$ su nula, što zajedno s (2.31) daje Heisenbergovu algebru. Ovaj rezultat implicira da bi kvantizacija faznog prostora na dubljoj razini mogla imati veze sa strukturom Heisenbergove grupe generirane s gore navedenom Heisenbergovom algebrom. Stoga proučavamo geometriju općenitih Liejevih grupa i pripadnih Liejevih algebri.

Za početak dajemo općenita svojstva Heisenbergove grupe. Heisenbergova grupa G definirana je kao grupa 3x3 gornje-trokutastih matrica oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Ako su brojevi a, b i c elementi komutativnog prstena cijelih brojeva, govorimo o diskretnoj Heisenbergovoj grupi, a ako su elementi komutativnog prstena realnih brojeva, onda govorimo o kontinuiranoj Heisenbergovoj grupi. Potonji slučaj ćemo proučavati ovdje. Kontinuirana Heisenbergova grupa G je nilpotentna realna trodimenzionalna Liejeva grupa (nilpotentna je jer se sastoji od gornje-trokutastih matrica). Množenje elemenata grupe dano je s

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

što kompaktnije zapisujemo kao $g(a,b,c)g(a',b',c') = g(a+a', b+b', c+c'+ab')$.

Ako definiramo generatore kao

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.34}$$

dobivam općeniti grupni element

$$g = e^{aX}e^{bY}e^{cZ} = \begin{bmatrix} 1 & a & c+ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

koji je oblika (2.32).

Pripadna Liejeva algebra, čiju ćemo definiciju dati kasnije, dana je komutacijskim relacijama

$$[X,Y] = Z, \quad [X,Z] = 0, \quad [Y,Z] = 0, \tag{2.36}$$

što se u fizici često zamjenjuje oblikom

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hat{\hbar}, \quad [\hat{x}, i\hat{\hbar}] = 0, \quad [\hat{p}, i\hat{\hbar}] = 0. \tag{2.37}$$

Algebru (2.37) izračunali smo maloprije koristeći Moyalov produkt. Koristeći ovu algebru, općeniti element grupe G možemo zapisati na način

$$g = e^{ik\hat{x}}e^{ix\hat{p}}e^{i\alpha\hat{\hbar}}. \tag{2.38}$$

Direktan račun pokazuje da tako zapisan grupni element zadovoljava grupno množenje (2.33).

3 Liejeve grupe

3.1 Liejeve grupe kao diferencijabilne mnogostrukosti i homogeni prostori

U prethodnom poglavlju susreli smo se s pojmom Liejeve grupe i Liejeve algebre. Te matematičke strukture dobro su poznate i često korištene u fizici. Neki primjeri Liejevih grupa su $\mathbb{R}^n$ s obzirom na zbrajanje, opća linearna grupa $GL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$, što je grupa invertibilnih $n \times n$ matrica s obzirom na matrično množenje, kao i neke podgrupe grupe $GL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$, kao što su $SL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$, $SO(n)$, $SU(n)$ itd.

Formalno definiramo Liejevu grupu G kao glatku mnogostrukost opremljenu grupnom strukturom koja zadovoljava uvjet da su preslikavanja inducirana grupnim operacijama

1. $\cdot : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$
2. $^{-1} : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$,

glatka i da je svaki grupni element pridružen točki na mnogostrukosti.

Kako bismo razumjeli globalna svojstva Liejeve grupe G, proučavamo difeomorfizme na G. Budući da Liejeva grupa ima svojstva i grupe i glatke mnogostrukosti, postoji posebna klasa difeomorfizama, koje nazivamo lijeve i desne translacije. Za $a, g \in G$, desna translacija $R_a : G \to G$ i lijeva translacija $L_a : G \to G$ elementa g za a definirane su kao

$$R_a g = ga, \tag{3.1}$$

$$L_a g = ag. \tag{3.2}$$

Iz definicije Liejeve grupe vidimo da su grupna množenja difeomorfizmi grupe G i kao takva, lijeve i desne translacije induciraju preslikavanja

$$R_{a*} : T_g G \to T_{ga} G \tag{3.3}$$

$$L_{a*} : T_g G \to T_{ag} G. \tag{3.4}$$

Dva prethodna preslikavanja su jednostavno guranja definirana u običajenom smislu

$$R_{a*} V[f] = V[f \circ R_a], \tag{3.5}$$

$$L_{a*} V[f] = V[f \circ L_a], \tag{3.6}$$

za bilo koju glatku funkciju $f : G \to G$ i $V \in T_g G$. Ta preslikavanja pomiču tangentne prostore iz jedne točke u drugu na mnogostrukosti G, čuvajući njihovu strukturu. Od interesa nam je posebna klasa vektorskih polja generiranih takvim preslikavanjima. Budući da su teorije lijevih i desnih translacija jednake, proučavat ćemo samo lijeve translacije. Definiramo stoga lijevo invarijantna vektorska polja X na Liejevoj grupi G

$$L_{a*} X|_g = X|_{ag}. \tag{3.7}$$

Također, možemo povezati svako lijevo invarijantno vektorsko polje s jedinstvenim vektorom $V \in T_e G$, što znači da postoji 1-1 korespondencija između lijevo invarijantnih vektorskih polja, koje skupno označavamo s $\mathfrak{g}$, i elemenata iz $T_e G$. Preslikavanje $T_e G \to \mathfrak{g}$ definirano kao $V \mapsto X_V$ je stoga izomorfizam. Kako bismo vidjeli važnost lijevo invarijantnih vektora, definiramo Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kao vektorski prostor s bilinearnom, antisimetričnom zagradom $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]$ koja zadovoljava Jacobijev identitet

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0. \tag{3.8}$$

Možemo pokazati da je prostor lijevo invarijantnih vektorskih polja $\mathfrak{g}$ zatvoren s obzirom na Liejevu zagradu. Za dvije točke g i $ag = L_a g$ u G, primjenjujemo L_{a*} na Liejevu zagradu dvaju lijevo invarijantnih vektorskih polja $[X, Y]$ te dobivamo

$$L_{a*} [X, Y] |_g = [L_{a*} X|_g, L_{a*} Y|_g] = [X, Y] |_{ag}. \tag{3.9}$$

Ako definiramo Liejevu zagradu u T_eG kao $[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e)$, gdje su $\xi, \eta \in T_eG$ i gdje je $[X_\xi, X_\eta]$ Liejeva zagrada vektorskih polja, vidimo da je T_eG Liejeva algebra. Kažemo da je zagrada u T_eG definirana lijevom ekstenzijom. Primjetimo da po konstrukciji vrijedi $[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]}, \forall \xi, \eta \in T_eG$. Vektorski prostor T_eG s ovom strukturom Liejeve algebre nazivamo Liejeva algebra grupe G i označavamo ju s $\mathfrak{g}$.

Zanimaju nas također integralne krivulje generirane lijevo invarijantnim vektorskim poljima. Ako se želimo pomicati po integralnoj krivulji generiranoj vektorom $V \in T_eG$, iz točke e u točku $g \in G$ dolazimo korištenjem eksponencijalne funkcije vektora V. To radimo zato što razvoj eksponencijalne funckije vektora V daje Taylorov red pa ga možemo smatrati operatorom translacije po integralnoj krivulji, tj.

$$g_{V_e}(t) = \text{exp}(tV)|_e. \tag{3.10}$$

Označavamo točku $g_{V_e}(t)$ kao točku na krivulji generiranoj vektorom $V \in T_eG$ izvrijednjenu u parametru t. Iz svojstava eksponencijalne funkcije slijedi

$$\text{exp}(t_1V)\text{exp}(t_2V)|_e = \text{exp}\left[(t_1 + t_2)V\right]|_e \tag{3.11}$$

$$g_{V_e}(t_1)g_{V_e}(t_2) = g_{V_e}(t_1 + t_2). \tag{3.12}$$

Ovime smo pokazali da integralne krivulje lijevo-invarijantnih vektorskih polja tvore jednoparametarsku podgrupu grupe G. Također vidimo da svaki vektor $V \in T_eG$ generira jedinstvenu jednoparametarsku podgrupu.

Nakon što smo izložili teoriju u pozadini lijevo invarijantnih vektorskih polja, pogledajmo lijevo invarijantne 1-forme. Dana je baza $\{V_1, ..., V_n\}$ prostora T_eG, gdje je n dimenzija grupe G, a svaki vektor V_i generira jedinstveno lijevo invarijantno vektorsko polje. Skup tih lijevo invarijantnih vektorskih polja $\{X_1, ..., X_n\}$ čini linearno neovisan skup u svakoj točki $g \in G$. Budući da lijevo invarijantna vektorska polja generiraju Liejevu algebru, zadovoljavaju relaciju

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}{}^{\lambda} X_\lambda. \tag{3.13}$$

Slična jednadžba vrijedi za bazu $\{\theta^\nu\}$ dualnu bazi $\{X_\mu\}$, koju nazivamo Maurer-

Cartanova strukturna jednadžba

$$d\theta^{\mu} = -\frac{1}{2} c_{\nu\lambda}{}^{\mu} \theta^{\nu} \wedge \theta^{\lambda}, \tag{3.14}$$

gdje $d\theta$ označava vanjsku derivaciju. Definiramo stoga 1-formu $\theta : T_g G \to T_e G$ koja poprima vrijednosti u Liejevoj algebri na način

$$\theta : X \mapsto (L_{g^{-1}})_* X = (L_g)_*^{-1} X, \quad X \in T_g G. \tag{3.15}$$

Ovu 1-formu nazivamo Maurer-Cartanova 1-forma (u ovom slučaju lijeva 1-forma).

Za praktičnu primjenu, postoji korisnija konstrukcija lijevo/desno invarijantne 1-forme ukoliko postoji matrična reprezentacija dane Liejeve grupe i dana je kao

$$\theta_L = g^{-1} dg, \tag{3.16}$$

$$\theta_R = dg g^{-1}. \tag{3.17}$$

Sada bismo htjeli primijeniti do sada izloženo na primjer Heisenbergove grupe. Računamo lijevo i desno invarijantna vektorska polja koristeći Maurer-Cartanovu 1-formu. Lijeva Maurer-Cartanova forma, koristeći matričnu reprezentaciju (2.38), dana je kao

$$\begin{aligned} \theta^L = g^{-1} dg &= i dk e^{-ix\hat{p}} \hat{x} e^{ix\hat{p}} + i dx \hat{p} + i d\alpha \hat{\hbar} \\ &= i\hat{x} dk + i\hat{p} dx + i\hat{\hbar}(d\alpha - x dk), \end{aligned} \tag{3.18}$$

gdje smo koristili BCH formulu primijenjenu na grupu G

$$e^{-ix\hat{p}} \hat{x} e^{ix\hat{p}} = \hat{x} - x\hat{\hbar}. \tag{3.19}$$

Iz (3.18) možemo iščitati lijevo invarijantne 1-forme, a odgovarajuća lijevo invarijantna vektorska polja dobivamo iz uvjeta $\theta^i_L \triangleright e^L_j = \delta^i_j$, gdje smo s e^L_j označili bazu lijevo invarijantnih vektorskih polja. Iz toga dobivamo

$$\theta^1_L = dk, \quad \theta^2_L = dx, \quad \theta^3_L = d\alpha - x dk; \tag{3.20}$$

$$e^L_1 = \partial_k + x\partial_\alpha, \quad e^L_2 = \partial_x, \quad e^L_3 = \partial_\alpha. \tag{3.21}$$

Odgovarajuća volumna forma dana je kao

$$\mu_L(g) = \theta_L^1 \wedge \theta_L^2 \wedge \theta_L^3 = dk \wedge dx \wedge d\alpha. \tag{3.22}$$

Analogan račun daje desno invarijantnu Maurer-Cartanovu formu

$$\begin{aligned}\theta^R = dgg^{-1} &= idk\hat{x} + idxe^{ik\hat{x}}\hat{p}e^{-ik\hat{x}} + id\alpha\hat{\hbar} \\ &= idk\hat{x} + idx(\hat{p} - k\hat{\hbar}) + id\alpha\hat{\hbar},\end{aligned} \tag{3.23}$$

iz koje možemo istim postupkom dobiti desno invarijantne 1-forme i vektorska polja

$$\theta_R^1 = dk, \quad \theta_R^2 = dx, \quad \theta_R^3 = d\alpha - kdx \tag{3.24}$$

$$e_1^R = \partial_k, \quad e_2^R = \partial_x + x\partial_\alpha, \quad e_3^R = \partial_\alpha. \tag{3.25}$$

Odgovarajuća volumna forma dana je kao

$$\mu_R(g) = \theta_R^1 \wedge \theta_R^2 \wedge \theta_R^3 = dk \wedge dx \wedge d\alpha. \tag{3.26}$$

Vidimo da su lijeva i desna volumna forma iste, a takve grupe nazivamo unimodularnima. Lako provjeravamo da sva vektorska polja međusobno komutiraju, uz jedini netrivijalni slučaj

$$[e_1^L, e_2^R] = [\partial_k + x\partial_\alpha, \partial_x + x\partial_\alpha] = [\partial_k, k\partial_\alpha] + [x\partial_\alpha, \partial_x] = \partial_\alpha - \partial_\alpha = 0. \tag{3.27}$$

Na početku ovog potpoglavlja definirali smo lijevo i desno invarijantna vektorska polja kako bismo proučavali globalna svojstva Liejeve grupe. Globalna svojstva mnogostrukosti mogu se proučavati i preko vlaknastih svežnjeva. Vlaknasti svežanj možemo konstruirati iz Liejeve grupe koristeći lijeve i desne translacije. Razmotrimo Liejevu grupu G i neku njenu podgrupu H. Ako djelujemo desnim translacijama elemenata podgrupe H na grupu G, točnije, ako množimo elemente grupe G elementima podgrupe H zdesna, dobivamo orbitu, tj. skup elemenata $\{gh|h \in H\}$ za svaki element $g \in G$. Postoji samo jedna orbita koja prolazi kroz neki element, tj. orbite se ne sijeku, čime je uspostavljena relacija ekvivalencije $g \sim gh, g \in G, h \in H$. Grupu G možemo poistovijetiti s glavnim svežnjem kojemu je baza kvocijentni prostor G/H, budući da su lijeve susjedne klase međusobno difeomorfne, i kojemu je vlakno H. Za glavni svežanj vrijedi da je vlakno homeomorfno strukturnoj grupi, gdje je strukturna grupa općenito Liejeva grupa koja djeluje na svežanj slijeva. Kvocijentni prostor je također i homogeni prostor, tj. prostor koji ima tranzitivno grupno djelovanje Liejeve grupe G.

3.2 Inducirane reprezentacije

Teorija induciranih reprezentacija metoda je dobivanja reprezentacija grupe krećući od reprezentacija njene podgrupe. Kako bismo našli inducirane reprezentacije neke grupe, potrebno je predznanje o vlaknastim svežnjevima i kvocijentnim prostorima, koje smo iznijeli u potpoglavljima 2.1 i 3.1.

Za danu grupu G promatramo Kartezijev produkt $G \times \mathbb{V}$, gdje je $\mathbf{V}$ kompleksni vektorski prostor. Na temelju prethodnog potpoglavlja znamo da možemo konstruirati glavni vlaknasti svežanj iz Liejeve grupe G tako da množimo elemente G elementima podgrupe H zdesna, tj. da uspostavimo relaciju ekvivalencije $g \sim gh, g \in G, h \in H$. Kako bismo konstruirali pridruženi vektorski svežanj, trebamo uspostaviti relaciju ekvivalencije na Kartezijevom produktu $G \times \mathbb{V}$. Definiramo vektorski prostor $\mathbb{V}$ kao nosač reprezentacije podgrupe H, tj. $D : H \to GL(\mathbb{V})$. Uvodimo relaciju ekvivalencije na $G \times \mathbb{V}$ oblika $(g, v) \sim (R_h(g), D(h^{-1}) \cdot v)$ za svaki $h \in H$, gdje je R_h desna translacija elemenata G za element h. Vidimo da ova relacija zadovoljava sva svojstva relacije ekvivalencije; refleksivna je jer vrijedi $(g, v) \sim (R_e(g), D(e^{-1}) \cdot v) = (g, v)$, gdje je e jedinični element grupe G; simetrična je jer vrijedi $(R_h(g), D(h^{-1}) \cdot v) = (gh, D(h') \cdot v) = (g', v') \sim (R_{h'}(g'), D(h'^{-1}) \cdot v') = (ghh^{-1}, D(h)D(h^{-1}) \cdot v) = (g, v)$, gdje smo koristili činjenicu da je D homomorfizam; tranzitivna je jer ako vrijedi $(g, v) \sim (R_h(g), D(h^{-1}) \cdot v) = (g', v')$ i $(g', v') \sim (R_{h'}(g'), D(h'^{-1}) \cdot v') = (ghh', D(h'^{-1})D(h^{-1}) \cdot v) = (gh", D(h"^{-1}) \cdot v = (g", v")$, onda slijedi $(g, v) \sim (R_{h"}(g), D(h"^{-1}) \cdot v) = (g", v")$. Označavamo skup ovakvih relacija ekvivalencije s $G \times_D \mathbb{V}$, a pridruženi vektorski svežanj je dan kao $G \times_D \mathbb{V} \xrightarrow{\pi'} G/H$, gdje je projekcija dana s $\pi'([(g, v)]) = \pi(g)$. Ovakvu vrstu pridruženog vektorskog svežnja, konstruiranu preko Liejeve grupe, formalno nazivamo homogeni vektorski svežanj. Primjetimo da relacija ekvivalencije ograničava prereze homogenog vektorskog svežnja tako da vrijedi $(g, v(g)) = (R_h(g), D(h^{-1})v(g))$. Prerez $s : B \to E$ glatko je preslikavanje koje zadovoljava $\pi \circ s = id_B$.

Jedan način da konstruiramo inducirane reprezentacije na homogenom vektorskom svežnju je da pokažemo da postoji izomorfizam između prostora prereza pridruženog vektorskog svežnja i prostora tzv. Mackeyevih funkcija koje zadovoljavaju uvjet ekvivarijantnosti $f \circ R_h = D(h^{-1}) \circ f$ za svaki $h \in H$. Prvo, konstruiramo reprezentacije na prostoru Mackeyevih funkcija koje tada induciraju reprezentacije na prostoru prereza. Za naše potrebe dajemo definiciju inducirane reprezentacije bez formalnog izvoda

$$g' \triangleright v(g) = v(g'^{-1}g), \tag{3.28}$$

gdje $g' \triangleright v(g)$ simbolizira djelovanje grupe G na $\mathbb{V}$.

Sada primjenjujemo ovaj formalizam kako bismo inducirali unitarne inducirane reprezentacije Heisenbergove grupe. Za početak treba izabrati primjerenu podgrupu jer Heisenbergova grupa ima tri vrste podgrupa. Postoje dvije vrste jednoparametarskih podgrupa, od kojih je jedna podgrupa generirana generatorima $\hat{x}$ ili $\hat{p}$, a druga je podgrupa generirana generatorom $\hat{\hbar}$. Također postoji i jedna vrsta dvoparametarske podgrupe, koja je generirana operatorima $\hat{x}$ i $\hat{\hbar}$ ili $\hat{p}$ i $\hat{\hbar}$.

Bez smanjenja općenitosti, uzimamo da je grupa kojom ćemo inducirati reprezentacije dvoparametarska Abelova podgrupa generirana generatorima $\hat{p}$ i $\hat{\hbar}$. Konstruiramo pridruženi vektorski svežanj $G \times \mathbb{V}$, gdje je $\mathbb{V}$ jednodimenzionalni vektorski prostor koji nosi reprezentacije Abelove podgrupe, tj.

$$e^{i(x\hat{p}+\alpha\hat{\hbar})}|a,b\rangle = e^{i(xa+\alpha b)}|a,b\rangle, \quad |a,b\rangle \in \mathbb{V}. \tag{3.29}$$

Imamo uvjet ekvivarijantnosti za točke na $G \times \mathbb{V}$, $G \times \mathbb{V}$, $(g,v) \sim (gh, D(h^{-1})v)$, što vodi na restrikciju prereza

$$(g, v(g)) = (gh, D(h^{-1})v(g)) = (g, D(h^{-1})v(gh^{-1}), \tag{3.30}$$

tj. $v(g) = D(h^{-1})v(gh^{-1})$. U ovom slučaju $v(g)$ je $f(g)|a,b\rangle$. Iz $v(g) = D(h^{-1})v(gh^{-1})$

slijedi

$$\begin{aligned} f(g)|a,b\rangle &= D(e^{-ix\hat{p}-i\alpha\hat{\hbar}})f(ge^{-ix\hat{p}-i\alpha\hat{\hbar}})|a,b\rangle = \\ &= e^{-ixa-i\alpha b}f(ge^{-ix\hat{p}-i\alpha\hat{\hbar}})|a,b\rangle. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ako napišemo grupni element $g \in G$ u obliku (2.38), uvjet ekvivarijantnosti daje

$$f(g) = e^{-i(xa+\alpha b)}f(e^{ik\hat{x}}). \tag{3.32}$$

Iz prethodne relacije vidimo da je funkcija $f(g)$ u potpunosti definirana ako specificiramo njenu vrijednost na realnoj liniji, stoga pišemo $f(e^{ik\hat{x}}) \equiv f(k)$. Sada možemo definirati induciranu reprezentaciju kao

$$\tilde{g} \triangleright f(g) = f(\tilde{g}^{-1}g), \quad \tilde{g} \in G. \tag{3.33}$$

Tada slijedi

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{k}\hat{x}}e^{i\tilde{x}\hat{p}}e^{i\tilde{\alpha}\hat{\hbar}} \triangleright f(k) &= f(e^{-i\tilde{\alpha}\hat{\hbar}}e^{-i\tilde{x}\hat{p}}e^{-i\tilde{k}\hat{x}}e^{ik\hat{x}}) \\ &= f(e^{i(k-\tilde{k})\hat{x}}e^{-i\tilde{x}\hat{p}}e^{-i[\tilde{x}(k-\tilde{k})+\tilde{\alpha}]\hat{\hbar}}) \\ &= e^{i\tilde{x}p+i[\tilde{x}(k-\tilde{k})+\tilde{\alpha}]\hbar}f(k-\tilde{k}). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Možemo izabrati $p = 0$ i $\hbar = \theta_{12}$. Iščitavamo generatore iz prethodnog izraza

$$\hat{x} = i\partial_k, \quad \hat{p} = k\theta_{12}, \quad \hat{\hbar} = \theta_{12}. \tag{3.35}$$

Vidimo da je ova reprezentacija Fourierov transformat standardne Schrödingerove reprezentacije.

Htjeli bismo za kraj potvrditi da je (3.35) ireducibilna reprezentacija. Pretpostavimo da je reducibilna i da možemo podijeliti prostor reprezentacije na dva potprostora, L i $L^\perp$, tako da akcija grupe na element iz L ostaje u L. Za $f^\perp \in L^\perp$ imamo

$$\int dk f_\perp^*(k)\left(e^{i\tilde{k}\hat{x}}e^{i\tilde{x}\hat{p}}e^{i\tilde{\alpha}\hat{\hbar}} \triangleright f(k)\right) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}^3. \tag{3.36}$$

Za izbor $\tilde{k} = \tilde{\alpha} = 0$ i $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}$ imamo

$$\int dk e^{i\tilde{x}k\theta_{12}} f_{\perp}^{*}(k) f(k) = 0 \Rightarrow f_{\perp}^{*}(k) f(k) = 0, \tag{3.37}$$

što pokazuje da je reprezentacija ireducibilna jer je jedino rješenje za proizvoljnu $f(k) \in L$ to da vrijedi $f_{\perp}^{*}(k) = 0$.

3.3 Koherentna stanja

Uz inducirane reprezentacije, pri eksplicitnoj realizaciji principa korespondencije i konstrukciji nekomutativnih analogona homogenih prostora oslanjamo se na koherentna stanja. Na koherentna stanja mozemo gledati kao na svojevrsnu bazu nosača reprezentacije, a definirana su na sljedeći način.

Neka je G Liejeva grupa, a T njena ireducibilna unitarna reprezentacija koja djeluje na Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Vektor iz $\mathcal{H}$ označavamo s $|\psi\rangle$, a skalarni produkt dva vektora $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$, koji je linearan u ψ i antilinearan u φ, označavamo s $\langle\varphi|\psi\rangle$. Operator projekcije na vektor $|\psi\rangle$ pišemo kao $|\psi\rangle\langle\psi|$.

Neka je $|\psi_0\rangle$ fiksan vektor u $\mathcal{H}$. Promotrimo skup vektora $\{|\psi_g\rangle\}$, gdje je $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$ za svaki $g \in G$. Vidimo da skup $\{|\psi_g\rangle\}$ predstavlja orbitu grupe G. Uvjet da se dva stanja $|\psi_{g_1}\rangle$ i $|\psi_{g_2}\rangle$ razlikuju za fazu, tj. $|\psi_{g_1}\rangle = e^{i\alpha}|\psi_{g_2}\rangle$ i da opisuju isto fizikalno stanje dan je s $T(g_2^{-1}g_1)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha}|\psi_0\rangle$.

Opet koristimo konstrukciju glavnog svežnja pomoću Liejeve grupe. Biramo podgrupu $H = \{h\}$ kao skup elemenata grupe G takav da $T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\psi_0\rangle$. Očito je da je H podgrupa grupe G i da je stacionarna podgrupa vektora $|\psi_0\rangle$. Svi vektori u jednoj susjednoj klasi razlikuju se za fazni faktor i predstavljaju isto fizikalno stanje. Ako izaberemo predstavnika $g(x)$ za svaku susjednu klasu x, dobivamo skup stanja $\{|\psi_{g(x)}\rangle\}$, ili u skraćenom obliku $\{|x\rangle\}$, gdje je $|x\rangle \in \mathcal{H}$, $x \in M = G/H$, kojeg nazivamo generalizirana koherentna stanja. U ovoj notaciji također definiramo $|\psi_0\rangle = |0\rangle$.

Za svako stanje možemo pisati $|\psi_{g(x)}\rangle = e^{i\alpha}|x\rangle$. Iz svojstava reprezentacija vidimo da vrijedi $e^{i\alpha(h_1 h_2)} = e^{i\alpha(h_1)} e^{i\alpha(h_2)}$, tj. da je $e^{i\alpha}$ jednodimenzionalna reprezentacija podgrupe H.

Djelovanje reprezentacije $T(g)$ na stanje $|0\rangle$ dano je kao

$$T(g)|0\rangle = e^{i\alpha(g)}|x(g)\rangle. \tag{3.38}$$

Ako zamijenimo g s gh, dobivamo

$$\alpha(gh) = \alpha(g) + \alpha(h). \tag{3.39}$$

Djelovanje reprezentacije $T(g)$ na proizvoljno koherentno stanje $|x\rangle$ dano je s

$$T(g_1)|x\rangle = e^{-i\alpha(g)}T(g_1)T(g)|0\rangle = e^{i\beta(g_1,g)}|g_1 \cdot x\rangle, \tag{3.40}$$

gdje $\beta(g_1, g) = \alpha(g_1 \cdot g) - \alpha(g)$; $x = x(g), g_1 \cdot x = x_1 \in M$, a x_1 je određen akcijom grupe G na M. Primjetimo da zbog (3.39) prethodna relacija ovisi samo o susjednoj klasi $x(g)$, a ne o g. Skalarni produkt dva koherentna stanja dan je s

$$\langle x_1|x_2\rangle = e^{i[\alpha(g_1)-\alpha(g_2)]}\langle 0|T(g_1^{-1}g_2)|0\rangle. \tag{3.41}$$

Također vrijedi promotriti problem potpunosti. Neka postoji invarijantna mjera dg na grupi G. Pogledajmo operator

$$B = \int dx|x\rangle\langle x|. \tag{3.42}$$

Iz relacije (3.40), invarijantnosti mjere dx i definicije operatora B, slijedi

$$T(g)BT(g)^{-1} = B. \tag{3.43}$$

Vidimo da B komutira sa svim operatorima $T(g)$ i prema Schurovoj lemi, koja kaže da bilo koji operator koji komutira sa svim operatorima ireducibilne reprezentacije mora biti proporcionalan jedinici, slijedi

$$\frac{1}{d}B = I. \tag{3.44}$$

Kako bismo pronašli konstantu d, računamo srednju vrijednost operatora B u stanju

$|y\rangle$ ($\langle y|y\rangle = 1$)

$$\langle y|B|y\rangle = \int |\langle y|x\rangle|^2 dx = \int |\langle 0|x\rangle|^2 dx = d. \tag{3.45}$$

Ukoliko prethodni izraz konvergira, operator B postoji i imamo kvadratno integrabilan sustav koherentnih stanja za koje vrijedi identitet

$$\frac{1}{d}\int dx|x\rangle\langle x| = I. \tag{3.46}$$

Koristeći prethodni identitet, možemo razviti bilo koje stanje po koherentnim stanjima na način

$$|\psi\rangle = \frac{1}{d}\int dxc(c)|x\rangle, \quad c(x) = \langle x|\psi\rangle. \tag{3.47}$$

Također možemo primijetiti da postoje linearne zavisnosti među koherentnim stanjima, naime

$$|x\rangle = \frac{1}{d}\int dy\langle y|x\rangle|y\rangle. \tag{3.48}$$

To znači da je sustav koherentnih stanja „prekompletan”, tj. ako maknemo konačan skup stanja, sustav je i dalje potpun.

Pri konstrukciji induciranih reprezentacija nismo razmatrali postojanje baze vektorskog prostora koji nosi reprezentaciju Liejeve grupe. Pokazali smo u ovom potpoglavlju da koherentna stanja razapinju „prekompletnu” bazu istog vektorskog prostora i možemo koristiti tu bazu za konstrukciju unitarnih ireducibilnih reprezentacija Liejeve grupe metodom opisanom u prethodnom potpoglavlju.

Kao i u prethodnim potpoglavljima, primjenjujemo ovu konstrukciju na Heisenbergovu grupu. Slično problemu kvantizacije harmonijčkog oscilatora u standardnoj kvantnoj mehanici, uvodimo operatore stvaranja i poništenja, $a^\dagger$ i a, respektivno,

$$a^\dagger = \hat{x}_2 + i\hat{x}_1, \quad a = \hat{x}_2 - i\hat{x}_1, \tag{3.49}$$

koji zadovoljavaju komutacijsku relaciju

$$[a, a^\dagger] = 1, \tag{3.50}$$

gdje smo koristili reprezentaciju dobivenu u prethodnom potpoglavlju za $\theta_{12} = 1$. Možemo napisati grupni element u novim koordinatama $z, \bar{z} \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$

$$g = e^{za^\dagger - \bar{z}a} e^{ic\hat{\hbar}}, \tag{3.51}$$

i definirati koherentna stanja na način da je podgrupa stabilnosti generirana operatorima a i $\hat{\hbar}$

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - \bar{z}a}|0\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad \hat{\hbar}|0\rangle = |0\rangle. \tag{3.52}$$

Prvu relaciju možemo napisati na drugačiji način koristeći BCH lemu

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^\dagger} e^{\bar{z}a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^\dagger}|0\rangle. \tag{3.53}$$

Koherentna stanja definirana na ovaj način su normalizirana, tj. $\langle z|z\rangle = 1$.

4 Nekomutativni prostori

4.1 Konstrukcija nekomutativnih mnogostrukosti koristeći koherentna stanja

U prethodnim poglavljima izložili smo sve potrebne preduvjete da konstruiramo nekomutativne prostore. Prvi korak je da konstruiramo nekomutativnu algebru funkcija $\mathcal{A}$ koja zamjenuje standardnu Abelovu algebru funkcija te na toj algebri definiramo generalizirani diferencijalni račun. U našem slučaju ograničit ćemo se na nekomutativne prostore koji su nekomutativni analogoni homogenih prostora, koje smo izložili u prethodnim poglavljima.

Ponovo krećemo s unitarnom ireducibilnom reprezentcijom $T(g)$ unimodularne Liejeve grupe G na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za stanje $|0\rangle$, kojeg ćemo sada označavati s $|x_0\rangle$, definiramo glatku funkciju elemenata grupe G

$$\omega(g, x_0) = \langle x_0|T(g)|x_0\rangle, \tag{4.1}$$

koja je za bilo koje stanje $|x\rangle$ dana kao

$$\omega(g,x) = \langle x|T(g)|x\rangle = \omega(g_x^{-1}gg_x, x_0). \tag{4.2}$$

Kako bismo konstruirali nekomutativnu algebru opservabli, prvo promatramo konačne distribucije $\tilde{f}(g)$ s kompaktnim nosačem nad glatkim funkcijama na G. Tim distribucijama pridjeljujemo operatore

$$\hat{f} = \int dg \tilde{f}(g) T(g), \tag{4.3}$$

gdje je dg obostrano invarijantna mjera na G. Produkt takva dva operatora dan je s

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2 &= \int dg dg' \tilde{f}_1(g) \tilde{f}_2(g') T(gg') \\ &= \int dg dg" \tilde{f}_1(g) \tilde{f}(g^{-1}g") T(g") \\ &= \int dg" (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2)(g") T(g"), \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdje smo u drugom redu uveli supstituciju $g" = gg'$, a $(\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2)$ je konvolucija distribucija. Skup operatora (4.3) uz produkt (4.4) nazivamo grupnom algebrom grupe G.

Budući da operator $\hat{f}$ ima dobro definirane matrične elemente koherentnih stanja (funkcija ω je glatka), možemo konstruirati funkcije na $M = G/H$ kao

$$f(x) = \langle x|\hat{f}|x\rangle = \int dg \tilde{f}(g) \omega(g,x), \tag{4.5}$$

koje možemo interpretirati kao funkcije na G zbog (4.2), tj. vrijedi

$$f(g) = \int dg' \tilde{f}(g') \omega(g^{-1}g'g, x_0) = \int dg' \tilde{f}(gg'g^{-1}) \omega(g', x_0). \tag{4.6}$$

Iz definicije ω vidimo da vrijedi $f(g) = f(gh)$, tj. funkcije su desno invarijantne na djelovanje podgrupe H, točnije grupe izotropije vektora $|x_0\rangle$.

Kako bismo konstruirali nekomutativnu algebru funkcija (4.5), potreban nam je nekomutativni produkt. Definiramo $\star$-produkt dvije funkcije $f_1(x) = \langle x|\hat{f}_1|x\rangle$ i

$f_2(x) = \langle x|\hat{f}_2|x\rangle$ kao

$$\begin{aligned}(f_1 \star f_2)(x) &= \langle x|\hat{f}_1\hat{f}_2|x\rangle \\ &= \int dg_1 dg_2 \tilde{f}(g_1)\tilde{f}(g_2)\omega(g_1g_2, x) \\ &= \int dg(\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2)(g)\omega(g, x),\end{aligned} \tag{4.7}$$

gdje smo opet koristili definiciju konvolucije distribucija.

Kako bismo definirali teoriju polja na nekomutativnim prostorima, potreban nam je diferencijalni račun, s obzirom da polja zadovoljavaju određene diferencijalne jednadžbe. Neka je baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ grupe G razapeta generatorima x_i koji zadovoljavaju standardne komutacijske relacije

$$[x_i, x_j] = f_{ij}{}^k x_k \tag{4.8}$$

gdje $[\cdot, \cdot]$ označava Liejevu zagradu. Svakom generatoru x_i pridjeljujemo diferencijalni operator $\hat{x}_i$ koji djeluje na glatke funkcije kao

$$(\hat{x}_i f)(g) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(ge^{tAd_{g^{-1}}x_i}) - f(g)]. \tag{4.9}$$

Iz definicije vidimo da su operatori $\hat{x}_i$ lijevo invarijantna vektorska polja na G. Budući da su operatori (4.9) reprezentacije generatora x_i na prostoru glatkih funkcija, zadovoljavaju iste komutacijske relacije kao i generatori x_i

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = f_{ij}{}^k \hat{x}_k. \tag{4.10}$$

Prije nego konstruiramo teoriju polja na nekomutativnim prostorima, radi potpunosti konstruiramo još i odgovarajuću nekomutativnu diferencijalnu algebru $\Omega(G)$. Baza diferencijalne algebre može se konstruirati korištenjem Maurer-Cartanovih 1-formi θ^i. Pišemo općeniti element $\Omega(G)$ kao

$$A = A_{i_1\dots i_p}\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}. \tag{4.11}$$

Kako bismo u potpunosti definirali derivacije p-formi na G, definiramo diferencijal funkcije

$$df = (\hat{x}_i f)\theta^i, \tag{4.12}$$

i Leibnitzovo pravilo

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^{degA} A \wedge dB. \tag{4.13}$$

Želimo da algebra poprima vrijednosti samo na $M = G/H$, a to možemo postići pogodnim odabirom koeficijenata $A_{i_1 \dots i_p}$. Preciznije, biramo koeficijente $A_{i_1 \dots i_p}$ tako da budu diferencijali desno invarijantnih funkcija, tj. funkcija na M

$$A = \sum_\alpha a^0_\alpha da^1_\alpha \wedge \dots \wedge da^p_\alpha, \tag{4.14}$$

gdje su a^i_α funkcije na M, a da^i_α su definirane relacijom (4.12). Tada slijedi

$$dA = \sum_\alpha da^0_\alpha \wedge da^1_\alpha \wedge \dots \wedge da^p_\alpha. \tag{4.15}$$

Budući da je naša nekomutativna mnogostrukost generalizacija homogenog prostora M, očekujemo da će nekomutativna algebra $\Omega(\mathcal{A})$ imati istu strukturu kao i $\Omega(M)$, uz razliku da se uobičajen produkt funkcija zamjenuje $\star$-produktom. Elemente $\Omega(\mathcal{A})$ pišemo kao

$$A = \sum_\alpha a^0_\alpha da^1_\alpha \overset{*}{\wedge} \dots \overset{*}{\wedge} da^p_\alpha, \tag{4.16}$$

zajedno s

$$dA = \sum_\alpha da^0_\alpha \overset{*}{\wedge} \dots \overset{*}{\wedge} da^p_\alpha, \tag{4.17}$$

gdje je

$$da^l_\alpha \overset{*}{\wedge} \dots \overset{*}{\wedge} da^p_\alpha = (\hat{x}_{i_l} a^l_\alpha) * \dots * (\hat{x}_{i_p} a^p_\alpha)\theta^{i_l} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}, \tag{4.18}$$

a θ^i zadovoljavaju Maurer-Cartanovu strukturnu jednadžbu (3.14). Još je preostalo pokazati da vrijedi $\hat{x}_i f \in \mathcal{A}$ ako $f \in \mathcal{A}$. Za početak pišemo

$$f(g) = \int dg' \tilde{f}_{g'}(g) \omega(g', x_0) \quad \in \mathcal{A}, \tag{4.19}$$

gdje smo uveli pokratu $\tilde{f}_{g'}(g) = \tilde{f}(gg'g^{-1})$ kako bismo eksplicitno naglasili varijablu g na koju djeluje $\hat{x}_i$. Pomičemo integracijsku varijablu $g' \to g^{-1}g'g$ kako bismo dobili

$$(\hat{x}_i f)(g) = \int dg' (\hat{x}_i \tilde{f}_{g^{-1}g'g})(g) \omega(g', gx_0) \quad \in \mathcal{A}. \tag{4.20}$$

Na posljetku primjenjujemo sve do sada naučeno na Heisenbergovu grupu kako bismo konstruirali kvantnu mehaniku. S koherentnim stanjima definiranim u potpoglavlju 3.3 definiramo nekomutativnu algebru funkcija

$$f(\zeta, \bar{\zeta}) = \langle \zeta | \hat{f} | \zeta \rangle \tag{4.21}$$

$$(f_1 \star f_2)(\zeta, \bar{\zeta}) = \langle \zeta | \hat{f}_1 \hat{f}_2 | \zeta \rangle = \int d\mu(\eta, \bar{\eta}) \langle \zeta | \hat{f}_1 | \eta \rangle \langle \eta | \hat{f}_2 | \zeta \rangle, \tag{4.22}$$

gdje smo koristili relaciju potpunosti

$$1 = \int d\mu(\zeta, \bar{\zeta}) |\zeta\rangle\langle\zeta|. \tag{4.23}$$

Želimo izračunati $\star$-produkt funkcija f. Kako bismo to učinili, koristimo relacije

$$\langle \zeta | \hat{f} | \eta \rangle = \langle \zeta | \eta \rangle e^{-\zeta \frac{\partial}{\partial \eta}} e^{\eta \frac{\partial}{\partial \zeta}} f(\zeta, \bar{\zeta}), \tag{4.24}$$

$$\langle \eta | \hat{f} | \zeta \rangle = \langle \eta | \zeta \rangle e^{-\bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}} e^{\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}} f(\zeta, \bar{\zeta}), \tag{4.25}$$

koje se mogu dokazati koristeći relaciju (3.52), tj. (3.53). Relaciju (4.22) tada pišemo kao

$$(f_1 \star f_2)(\zeta, \bar{\zeta}) = \int d\eta \wedge d\bar{\eta} \left[e^{-\zeta \frac{\partial}{\partial \eta}} \; e^{\eta \frac{\partial}{\partial \zeta}} f_1(\zeta, \bar{\zeta}) \right] e^{|\eta - \zeta|^2} \left[e^{-\bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}} \; e^{\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}} f_2(\zeta, \bar{\zeta}) \right]. \tag{4.26}$$

Koristimo Fourierov transformat funkcije $f(\zeta, \bar{\zeta})$

$$f(\zeta, \bar{\zeta}) = \int dw \wedge d\bar{w} F(w, \bar{w}) e^{\zeta \bar{w} - \bar{\zeta} w} \tag{4.27}$$

i ubacujemo u (4.26)

$$
\begin{aligned}
(f_1 \star f_2)(\zeta,\bar\zeta) = \int (dw\wedge d\bar w)(d\eta\wedge d\bar\eta)(du\wedge d\bar u)\times \\
\times \left[e^{-\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}} e^{\eta\frac{\partial}{\partial\zeta}} F_1(w,\bar w) e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w}\right] e^{|\eta-\zeta|^2} \left[e^{-\bar\zeta\frac{\partial}{\partial\bar\eta}} e^{\bar\eta\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}} F_2(u,\bar u) e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u}\right] = \\
= \int (dw\wedge d\bar w)(d\eta\wedge d\bar\eta)(du\wedge d\bar u) \\
\times \left[e^{(\eta-\zeta)\bar w} F_1(w,\bar w) e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w}\right] e^{|\eta-\zeta|^2} \left[e^{-(\bar\eta-\bar\zeta)u} F_2(u,\bar u) e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u}\right].
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Mijenjamo varijablu η u $\eta+\zeta$

$$
\begin{aligned}
(f_1 \star f_2)(\zeta,\bar\zeta) = \int (d\eta\wedge d\bar\eta)(dw\wedge d\bar w)(du\wedge d\bar u)\times \\
\times \left[e^{\eta\bar w} F_1(w,\bar w) e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w}\right] e^{|\eta|^2} \left[e^{-\bar\eta u} F_2(u,\bar u) e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u}\right] = \\
= \int (d\eta\wedge d\bar\eta)(dw\wedge d\bar w)(du\wedge d\bar u)\times \\
\times \left[e^{\eta\partial_\zeta} F_1(w,\bar w) e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w}\right] e^{|\eta|^2} \left[e^{\bar\eta\partial_{\bar\zeta}} F_2(u,\bar u) e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u}\right] = \\
= \int d\eta\wedge d\bar\eta \left[e^{\eta\partial_\zeta} f_1(\zeta,\bar\zeta)\right] e^{|\eta|^2} \left[e^{\bar\eta\partial_{\bar\zeta}} f_2(\zeta,\bar\zeta)\right]
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Ponovno koristimo Fourierov transformat

$$
\begin{aligned}
(f_1 \star f_2)(\zeta,\bar\zeta) = \int (d\eta\wedge d\bar\eta)(dw\wedge d\bar w)(du\wedge d\bar u)\times \\
\times \left[e^{\eta\bar w} F_1(w,\bar w) e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w}\right] e^{|\eta|^2} \left[e^{-\bar\eta u} F_2(u,\bar u) e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u}\right] = \\
= \int (d\eta\wedge d\bar\eta)(dw\wedge d\bar w)(du\wedge d\bar u)\times \\
\times e^{-\eta(\bar\eta-\bar\omega)} e^{-\bar\eta v} e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w} e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u} F_1(w,\bar w) F_2(u,\bar u) = \\
= \int (dw\wedge d\bar w)(du\wedge d\bar u) e^{-\bar\omega v} e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w} e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u} F_1(w,\bar w) F_2(u,\bar u) = \\
= \int (dw\wedge d\bar w)(du\wedge d\bar u) F_1(w,\bar w) e^{\zeta\bar w-\bar\zeta w} e^{\overleftarrow{\partial}_\zeta \overrightarrow{\partial}_{\bar\zeta}} F_2(u,\bar u) e^{\zeta\bar u-\bar\zeta u} = \\
= f_1 e^{\overleftarrow{\partial}_\zeta \overrightarrow{\partial}_{\bar\zeta}} f_2.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

U zadnjem redu koristili smo definiciju kompleksne delta funkcije. Dobili smo tzv. Wick-Vorosov $\star$-produkt, kojeg smo u prvom poglavlju nazivali standardni produkt.

Također možemo pokazati vezu između funkcija $f(z)$ i distribucija korištenih u

(4.3)

$$
\begin{aligned}
f(z') = \langle z'|\hat{f}|z'\rangle = \int dz \wedge d\bar{z}\tilde{f}(z,\bar{z})\langle z'|e^{za^\dagger - \bar{z}a}|z'\rangle \\
= \int dz \wedge d\bar{z}\tilde{f}(z,\bar{z})\langle 0|e^{-\frac{1}{2}|z'|^2}e^{\bar{z}'a}e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{za^\dagger}e^{-\bar{z}a}e^{-\frac{1}{2}|z'|^2}e^{z'a^\dagger}|0\rangle \\
= \int dz \wedge d\bar{z}\tilde{f}(z,\bar{z})e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{-|z'|^2}e^{-\bar{z}z'}e^{\bar{z}'(z+z')} \\
= \int dz \wedge d\bar{z}\tilde{f}(z,\bar{z})e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{z\bar{z}'-\bar{z}z'}.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

U trećem redu prebacili smo sve operatore poništenja nadesno koristeći BCH formulu. Ako Gaussijan apsorbiramo u definiciju distribucije $\tilde{f}$, što dodatno osigurava da ista ima kompaktni nosač, dobivamo da je funkcija $f(z)$ jednaka Fourierovom transformatu distribucije $\tilde{f}$. U prethodnim računima zanemarili smo ovisnost distribucija o c budući da je djelovanje $\hat{\hbar}$ trivijalno. Možemo distribucije $\tilde{f}(z,\bar{z})$ smatrati kao uprosječene po parametru c.

Kako bismo u potpunosti definirali kvantnu mehaniku, osim $\star$ produkta potrebna su nam još i kvantnomehanička stanja i jednadžba koja opisuje njihovu dinamiku.

U prvom poglavlju rekli smo da su stanja elementi Hilbertovog prostora, ali ta izjava ne uključuje činjenicu da vektori $|\psi\rangle$ i $e^{i\phi}|\psi\rangle$ opisuju isto stanje. Formalno, prostor stanja dobiva se kao kvocijent početnog Hilbertovog prostora i relacije ekvivalencije $|\psi\rangle \sim e^{i\phi}|\psi\rangle$. Ovaj prostor naziva se projektivni Hilbertov prostor i nije vektorski prostor. Njegovi elementi nazivaju se gustoće i predstavljaju generalizacije projektora na stanja u Hilbertovom prostoru. Operatori gustoće, koje označavamo s $\hat{\rho}$, zadovoljavaju tzv. von Neumannovu jednadžbu

$$
i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [H,\hat{\rho}]. \tag{4.32}
$$

4.2 Fuzzy sfera

Još jedan primjer kojeg možemo proučiti jest kvantizacija sfere S^2. Klasično, S^2 je izomorfno kvocijentnom prostoru $SU(2)/U(1)$, što možemo umetnuti u $\mathbb{R}^3$ s koordinatama na sferi

$$
x = r\mathrm{sin}\theta\mathrm{cos}\phi, \quad y = r\mathrm{sin}\theta\mathrm{sin}\phi, \quad z = r\mathrm{cos}\theta. \tag{4.33}
$$

Kako bismo izračunali volumnu formu na sferi S^2, krećemo s volumnom formom na $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz. \tag{4.34}$$

Korištenjem koordinata (4.33) dobivamo volumnu formu u koordinatama (r, θ, ϕ)

$$\Omega = r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi. \tag{4.35}$$

Volumna forma ω na S^2 inducirana je iz volumne forme Ω na način

$$i_{\partial_r}\Omega = \Omega(\partial_r) = \omega = \sin\theta d\theta \wedge d\phi, \tag{4.36}$$

gdje je i_{∂_r} kontrakcija volumne forme Ω s vektorskim poljem ∂_r i gdje smo izabrali $r = 1$.

Poissonov bivektor α dan je kao inverz volumne forme ω, što slijedi iz činjenice da je grupa unimodularna. Imamo

$$\alpha = -\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \wedge \partial_\phi. \tag{4.37}$$

Zanemarujemo minus radi jednostavnosti jer ne utječe na rezultate. Možemo sada izračunati Poissonove zagrade između koordinata (x, y, z)

$$\{x, y\} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\phi} - \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = \cos\theta = z, \tag{4.38}$$

$$\{x, z\} = -\sin\theta\sin\phi = -y, \tag{4.39}$$

$$\{y, z\} = \sin\theta\cos\phi = x, \tag{4.40}$$

što daje algebru $su(2)$. Također možemo izračunati Hamiltonova vektorska polja kao u prvom poglavlju

$$\hat{X}_1 = \{x, \ \} = \sin\phi\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\phi\partial_\phi, \tag{4.41}$$

$$\hat{X}_2 = \{y, \ \} = -\cos\phi\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\phi\partial_\phi, \tag{4.42}$$

$$\hat{X}_3 = \{z, \ \} = -\partial_\phi. \tag{4.43}$$

Komutacijske relacije između ovih vektorskih polja su

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \epsilon_{ij}^{\ \ k}\hat{X}_k, \tag{4.44}$$

što je također algebra $su(2)$, što je bilo za očekivati. Također možemo izračunati Casimirov operator

$$C = \sum_i \{x^i, \{x^i, \ \}\} = \sum_i (\hat{X}_i)^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{4.45}$$

čime dobivamo laplasijan na sferi. Budući da C i $\hat{X}_3$ komutiraju, možemo ih istovremeno dijagonalizirati. Njihove svojstvene funkcije dane su jednadžbama

$$\begin{aligned} \Delta f_m^j &= j(j+1) f_m^j, \\ \hat{X}_3 f_m^j &= m f_m^j, \end{aligned} \tag{4.46}$$

gdje je j cjelobrojan ili polucjelobrojan. Prethodne dvije jednadžbe definiraju sferne harmonike $Y_m^j(\theta, \phi)$.

Djelovanje vektorskih polja $\hat{X}_i$ na funkcije na sferi $f(\theta, \phi)$ daje reprezentaciju algebre $su(2)$. Možemo rastaviti ovu reprezentaciju u ireducibilne reprezentacije za fiksan j, tj. ireducibilna reprezentacija dana je spektrom laplasijana.

Kako bismo kvantizirali sferu, trebamo definirati koherentna stanja. Analogno Heisenbergovoj grupi, konstruiramo operatore podizanja i spuštanja

$$\hat{X}_\pm = \hat{X}_1 \pm i\hat{X}_2, \tag{4.47}$$

koje zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[\hat{X}_3, \hat{X}_\pm] = \pm\hat{X}_\pm, \quad [\hat{X}_+, \hat{X}_-] = 2\hat{X}_3. \tag{4.48}$$

Slično Heisenbergovoj grupi, gradimo koherentna stanja iz „vakuuma”, tj. najnižeg stanja

$$\hat{X}_-|j, -j\rangle = 0. \tag{4.49}$$

Promotrimo operator rotacije koji generira rotaciju za kut θ oko osi $\vec{n} = (\sin\phi, -\cos\phi, 0)$

$$T(\theta, \phi) = e^{-i\theta \hat{X}_n} = e^{-i\theta(\hat{X}_x \sin\phi - \hat{X}_y \cos\phi)}, \tag{4.50}$$

što možemo napisati kao

$$T(\zeta, \bar{\zeta}) = e^{\zeta \hat{X}_+ - \bar{\zeta} \hat{X}_-}, \tag{4.51}$$

gdje smo uveli supstituciju

$$\zeta = \frac{1}{2}\theta e^{-i\phi}. \tag{4.52}$$

Po analogiji s Heisenbergovom grupom, dobivamo koherentna stanja

$$|\theta, \phi\rangle = T(\theta, \phi)|j - j\rangle. \tag{4.53}$$

Operator (4.51) možemo rastaviti tako da je $\hat{X}_-$ na desnoj strani, što daje

$$T(z, \bar{z}) = e^{z\hat{X}_+} e^{\ln(1+|z|^2)\hat{X}_3} e^{-\bar{z}\hat{X}_-}, \tag{4.54}$$

gdje je

$$z = \frac{\zeta}{|\zeta|}\tan|\zeta| = \tan\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}. \tag{4.55}$$

Konačno dobivamo koherentna stanja

$$|\theta, \phi\rangle \equiv |z\rangle = (1 + |z|^2)^{-j} e^{z\hat{X}_+}|j, -j\rangle. \tag{4.56}$$

Također možemo pokazati da koherentna stanja definiraju preslikavanje

$$\{x^i, f\} = \langle z|[\hat{X}_i, \hat{f}]|z\rangle, \tag{4.57}$$

tj. dozvoljavaju nam da definiramo lijevo/desno invarijantna vektorska polja na fuzzy sferi. Znajući to, definiramo fuzzy laplasijan

$$[\hat{X}_i, [\hat{X}_i, \hat{f}]], \tag{4.58}$$

za kojeg vrijedi

$$\langle z|[\hat{X}_i,[\hat{X}_i,\hat{f}]]|z\rangle = \{x^i,\{x^i,f\}\}. \tag{4.59}$$

Svojstvene funkcije fuzzy laplasijana dobivaju se kao i u klasičnom slučaju

$$[\hat{X}_i,[\hat{X}_i,F^J_M]] = J(J+1)F^J_M, \tag{4.60}$$

$$[\hat{X}_3,F^J_M] = MF^J_M, \tag{4.61}$$

gdje F^J_M opisuju fuzzy sferne harmonike $\mathbb{Y}^J_M$.

Općenito, rješenja prethodne dvije jednadžbe elementi su tenzorskog produkta dvije kopije unitarnih ireducibilnih reprezentacija grupe $SU(2)$, tj.

$$F = \langle jm|F|jn\rangle|jm\rangle\otimes\langle jn| \equiv F_{mn}|jm\rangle\otimes\langle jn| \in [j]\otimes[j], \tag{4.62}$$

gdje smo označili unitarne ireducibilne reprezentacije grupe $SU(2)$ kao $[j]$. Formalno, F je element tenzorskog produkta $[j]$ i njegovog duala, ali te dvije reprezentacije su ekvivalentne pa je notacija u (4.62) opravdana. Međutim, taj tenzorski produkt nije ireducibilna reprezentacija. Kako bismo to vidjeli, moramo definirati reprezentaciju na tenzorskom produktu vektorskih prostora

$$T = (T_1\otimes T_2)(g)\triangleright(V_1\otimes V_2), \tag{4.63}$$

gdje su T_i reprezentacije grupe G na vektorskim prostorima V_i, a $g\in G$. Neka je $g = e^{i\alpha X_i}$, gdje je X_i generator algebre $\mathfrak{g}$. Reprezentacija na tenzorskom produktu dana je kao

$$\begin{aligned} T_1(e^{i\alpha X_i})\otimes T_2(e^{i\alpha X_i}) &\cong (\mathbb{1}+i\alpha T_1(X_i))\otimes(\mathbb{1}+i\alpha T_2(X_i)) \\ &= \mathbb{1}+i\alpha(T_1(X_i)\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes T_2(X_i)). \end{aligned} \tag{4.64}$$

Ako primjenimo to na $|jm\rangle\otimes\langle jn|$, slijedi

$$(X_i\otimes\mathbb{1}-\mathbb{1}\otimes X_i)\triangleright F = [X_i,F], \tag{4.65}$$

što slijedi iz toga da vrijedi $e^{i\alpha X_i}|jm\rangle$ i $\langle jm|e^{-i\alpha X_i}$. Lako se pokaže da Casimirov operator nije dijagonalan u ovoj bazi. Pišemo bazu u kojoj su Casimirov operator i operator $\hat{X}_3$ dijagonalni

$$\mathbb{Y}^J_M = \sum_{mn} \begin{pmatrix} j & j & J \\ m & n & M \end{pmatrix} |jm\rangle \otimes \langle jn|, \tag{4.66}$$

gdje su koeficijenti u razvoju tzv. $3-j$ simboli. Ovdje J poprima vrijednosti između 0 i $2j$ te je cjelobrojan, a M poprima vrijednosti između $-J$ i J. Ako prebrojimo sve nezavisne fuzzy sferne harmonike, dobivamo dimenziju reprezentacije

$$\sum_{J=0}^{2j}(2J+1) = (2j+1)^2, \tag{4.67}$$

što znači da reprezentaciju možemo smatrati $(2j+1)\times(2j+1)$ matricom. Stoga možemo pisati bilo koji operator $\Phi \in [j]\otimes[j]$ na način

$$\Phi = \sum_{JM} A^J_M \mathbb{Y}^J_M, \tag{4.68}$$

uz uvjet ortogonalnosti za fuzzy sferne harmonike

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{Y}^{J*}_M \mathbb{Y}^{J'}_{M'}) = \delta_{JJ'}.\delta_{MM'} \tag{4.69}$$

Iz uvjeta ortogonalnosti dobivamo izraz za koeficijent A^J_M

$$A^J_M = \mathrm{Tr}(\Phi \mathbb{Y}^{J*}_M). \tag{4.70}$$

Koristeći dekvantizacijsko preslikavanje (4.57), dobivamo klasične funkcije na sferi

$$\langle z|\Phi|z\rangle = \phi = \sum_{JM} A^J_M Y^J_M(\theta,\phi), \tag{4.71}$$

s istim koeficijentima u razvoju kao i u kvantiziranom slučaju. U klasičnom slučaju ti koeficijenti dani su kao

$$A^J_M = \int \omega\ \phi Y^{J*}_M, \tag{4.72}$$

što znači da možemo napraviti zamjenu Tr $\to \int \omega$ u klasičnom limesu.

Za kraj, osvrćemo se na princip korespondencije. Kada smo kvantizirali sferu, zanemarili smo jednu finesu, a to je da bi algebra na fuzzy sferi trebala biti definirana s nekim parametrom nekomutativnosti κ kako bi se klasični limes mogao konzistentno definirati. Možemo ovo ispraviti tako da redefiniramo vektorska polja na fuzzy sferi, tj. uvedemo zamjenu $\hat{X}_i \to \kappa \hat{X}_i$ u prethodni račun. Algebra na fuzzy sferi je tada

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\kappa \epsilon_{ij}^{\ \ k} \hat{X}_k, \tag{4.73}$$

a Casimirov operator je

$$C = \kappa^2 j(j+1). \tag{4.74}$$

Dimenzija matrica na fuzzy sferi je $N \times N$, gdje je $N = 2j+1$. Casimirov operator možemo tada napisati pomoću N kao

$$C = \kappa^2 \frac{N-1}{2} \frac{N+1}{2} = \kappa^2 \frac{N^2-1}{4}. \tag{4.75}$$

Klasični limes ostvarujemo tako da uzmemo limes $\kappa \to 0$, $N \to \infty$ takav da je produkt $\kappa N/2 = R$ konstantan. Tada je Casimirov operator $C = R^2$. U tom smislu je nekomutativna algebra funkcija definirana koherentnim stanjima (4.56) zajedno s derivacijama (4.57) nekomutativni analogon sfere S^2.

5 Teorija polja na nekomutativnim prostorima

5.1 Nekomutativna Klein-Gordonova jednadžba

Koristeći laplasijan na sferi, možemo napisati Laplace-Beltramijevu jednadžbu za skalarno polje na sferi

$$\Delta\phi(\theta, \phi) = m^2 \phi(\theta, \phi), \tag{5.1}$$

koju dobijemo variranjem akcije

$$S = \int \omega(\phi^* \Delta\phi - m^2 \phi^* \phi). \tag{5.2}$$

Parcijalnim integriranjem možemo akciju za skalarno polje na sferi dovesti u oblik

$$S = \int \omega(\{\phi^*, x^i\}\{x^i, \phi\} - m^2\phi^*\phi). \tag{5.3}$$

Nadalje, u prethodnom potpoglavlju zaključili smo da je analogon integrala u kvantiziranom slučaju trag. Koristeći trag i fuzzy laplasijan možemo napisati akciju za skalarno polje na fuzzy sferi

$$S = \mathrm{Tr}(\Phi^*[\hat{X}_i, [\hat{X}_i, \Phi]] - m^2\Phi^*\Phi), \tag{5.4}$$

što možemo napisati i u obliku

$$S = \mathrm{Tr}([\Phi^*, \hat{X}_i][\hat{X}_i, \Phi] - m^2\Phi^*\Phi). \tag{5.5}$$

Jednadžbe gibanja dobivamo minimalizacijom akcije

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi^*_{mn}} = 0, \tag{5.6}$$

što daje

$$[\hat{X}_i, [\hat{X}_i, \Phi]]_{nm} = m^2\Phi_{nm}. \tag{5.7}$$

Dobivenu jednadžbu smo riješili u prethodnom poglavlju.

5.2 Fluktuacije oko klasičnog rješenja - baždarna teorija na nekomutativnim prostorima

U prethodnom potpoglavlju uveli smo akciju za skalarno polje na statičnoj pozadini nekomutativne sfere. Sada želimo učiniti pozadinu naše teorije dinamičkom. Kako bismo to postigli, zamjenjujemo polje Φ s vektorskim poljima $\hat{X}_i$ u akciji (5.5) kako bismo dobili akciju

$$S = \mathrm{Tr}([\hat{X}_i, \hat{X}_j][\hat{X}_j, \hat{X}_i] - m^2\hat{X}_j\hat{X}_j). \tag{5.8}$$

Jednadžbe gibanja su

$$[\hat{X}^i, [\hat{X}^i, \hat{X}^k]]_{nm} = m^2 \hat{X}^k_{nm}. \tag{5.9}$$

Ovu jednadžbu zadovoljavaju konfiguracije matrica koje zadovoljavaju $\mathfrak{su}(2)$ Liejevu algebru s obzirom na komutator. Akciju možemo razviti oko ovog klasičnog rješenja podrazumijevajući da su fluktuacije opisane poljem A tako da imamo

$$\hat{X}_i = \hat{X}^0_i + A_i. \tag{5.10}$$

Očigledno je da ovakvim razvojem nalazimo akciju za polje A na statičnoj pozadini nekomutativne sfere. U klasičnom limesu željeli bismo identificirati fluktuacije s baždarnim poljem. Iako to možemo napraviti i u okviru modela opisanog akcijom (5.8), radi jednostavnosti dodat ćemo doprinose kubične u operatorima $\hat{X}_i$ te stoga uvodimo novu akciju

$$S = \mathrm{Tr}\left([\hat{X}_i, \hat{X}_j] - i\epsilon_{ijk}\hat{X}_k\right)\left([\hat{X}_j, \hat{X}_i] - i\epsilon_{jil}\hat{X}_l\right). \tag{5.11}$$

Lako se vidi da matrice koje zatvaraju $\mathfrak{su}(2)$ algebru rješavaju jednadžbe gibanja. Ako uvrstimo (5.10) u prethodnu akciju, dobivamo

$$S = \mathrm{Tr}\left([\hat{X}^0_i, A_j] + [A_i, \hat{X}^0_j] + [A_i, A_j] - i\epsilon_{ijk}A_k\right)\left([\hat{X}^0_j, A_i] + [A_j, \hat{X}^0_i] + [A_j, A_i] - i\epsilon_{jil}A_l\right). \tag{5.12}$$

Vidimo da je akcija invarijantna na djelovanje grupe $SU(N)$, tj. na transformaciju $\hat{X}_i \to U^\dagger \hat{X}_i U$. Iz zahtjeva da se polja $\hat{X}^0_i$ ne transformiraju, slijedi zakon transformacije za polje A_i

$$A'_i = U^\dagger [\hat{X}^0_i, U] + U^\dagger A_i U. \tag{5.13}$$

Ovakve transformacije karakteristične su za baždarne teorije. Nadalje, ukoliko definiramo polje F_{ij} na sljedeći način

$$F_{ij} = [\hat{X}^0_i, A_j] - [\hat{X}^0_j, A_i] + [A_i, A_j] - i\epsilon_{ijk}A_k. \tag{5.14}$$

akcija poprima jednostavan oblik

$$S = \mathrm{Tr}(F_{ij}F_{ji}), \tag{5.15}$$

koji je također karakterističan za baždarne teorije.

Općenito, baždarna teorija je teorija polja čiji je lagranžijan invarijantan na Liejevu grupu lokalnih transformacija. Transformacije između različitih baždarenja tvore Liejevu grupu, a svakom generatoru pripadne Liejeve algebre odgovara tzv. baždarni potencijal. Baždarna invarijatnost nije posljedica prirode, nego načina na koji opisujemo prirodu. Fiksiranje baždarenja predstavlja način da se eliminiraju suvišni stupnjevi slobode. Općenito, želimo da naš opis fizikalnih pojmova ne ovisi ni o inercijalnom ni o koordinatnom sustavu, točnije, želimo da se jednadžbe koje opisuju dani sustav transformiraju kovarijantno.

Prvo opisujemo baždarnu teoriju na komutativnim prostorima. Kako bi lagranžijan ostao invarijantan pri baždarnoj transformaciji polja, definiramo kovarijantnu derivaciju $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, gdje je e konstanta vezanja. Želimo da se kovarijantna derivacija transformira kao $D_\mu = SD_\mu$, zato smo uveli baždarni potencijal A_μ koji se transformira kao

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\left(\partial_\mu S\right)S^{-1}. \tag{5.16}$$

Akcija za slobodno baždarno polje dana je sa

$$S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{5.17}$$

gdje je $F_{\mu\nu}$ polje dano kao

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]. \tag{5.18}$$

Usporedbom rezultata na fuzzy sferi s prethodno iznesenom baždarnom teorijom, uvažavajući da su vektorska polja na fuzzy sferi dana kao $[\hat{X}_i,\ ]$ te da u klasičnom slučaju odgovaraju vektorskim poljima $\{x^i,\ \}$, možemo vidjeti da vrijedi korespondencija

$$U^\dagger A_i U + U^\dagger[\hat{X}_i^0, U] \leftrightarrow S A_\mu S^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\left(\partial_\mu S\right) S^{-1}, \tag{5.19}$$

$$[\hat{X}_i^0, A_j] - [\hat{X}_j^0, A_i] + [A_i, A_j] - i\epsilon_{ijk} A_k \leftrightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]. \tag{5.20}$$

Da bismo detaljnije razumjeli klasični limes, u akciju i definiciju polja uvodimo odgovarajući parametar κ

$$S = \mathrm{Tr}\left([\hat{X}_i, \hat{X}_j] - i\kappa\epsilon_{ijk}\hat{X}_k\right)\left([\hat{X}_j, \hat{X}_i] - i\kappa\epsilon_{jil}\hat{X}_l\right), \tag{5.21}$$

S obzirom da sada vrijedi $\hat{X}_i^0 = \hat{J}_i/\kappa$, gdje su $\hat{J}_i$ generatori $\mathfrak{su}(2)$ algebre, za polje F imamo

$$F_{ij} = [\hat{J}_i/\kappa, A_j] - [\hat{J}_j/\kappa, A_i] + [A_i, A_j] - i\kappa\epsilon_{ijk} A_k. \tag{5.22}$$

U klasičnom limesu $\kappa \to 0$ prva su dva člana dominantna i preslikavaju se u kovarijantne derivacije na sferi, tj.

$$F_{ij} \to D_i A_j - D_j A_i. \tag{5.23}$$

Sama transformacija potencijala $U \in SU(N)$ u klasičnom limesu prelazi u $U(1)$ transformaciju. Kako bismo to vidjeli, prisjetimo se da se svaka unitarna transformacija može napisati kao eksponent hermitske matrice, tj. $U = e^{i\Phi}$. Koherentnim stanjima taj operator preslikavamo na funkciju varijable z, odnosno $U \to e^{i\phi(z)}$, što odgovara $U(1)$ transformaciji. Konkretno, transformacija baždarnog potencijala u klasičnom limesu tada glasi

$$A_i' \to A_i + i\{X_i^0, \phi\}. \tag{5.24}$$

5.3 Kvantizacija matričnih modela

Prethodno dobiveni matrični model ne predstavlja fizikalnu teoriju. Kako bi se dobio formalizam kvantne teorije polja i kvantne gravitacije, potrebno je kvantizirati stupnjeve slobode prethodno uvedenih modela. Kvantizacija klasičnog modela može se provesti kanonskom kvantizacijom ili integralima po putevima. Potonji pristup nameće se kao prirodan odabir kod matričnih modela.

Kada u kvantnoj teoriji polja računamo amplitude raspršenja nekog procesa, uzimamo u obzir sve moguće konfiguracije našeg sustava pri prelasku iz početnog u konačno stanje. Svaki od tih procesa dolazi s određenom amplitudom vjerojatnosti koje se zbrajaju kako bi se dobila ukupna amplituda promatranog procesa. Svaka od tih mogućnosti može se smatrati putanjom u konfiguracijskom prostoru stanja sustava, gdje je konfiguracijski prostor u ovom slučaju Fockov prostor vektora koji predstavljaju broj svakog tipa čestice s impulsom $\mathbf{p}$. Jedna interpretacija toga je perturbativni pristup preko Feynmanovih dijagrama.

U kvantnoj mehanici sumu po svim mogućim konfiguracijama možemo formulirati preko integrala po putevima. Amplituda vjerojatnosti da čestica iz jedne točke u prostoru evoluira u neku drugu točku kasnije u vremenu dana je sumom svih amplituda vjerojatnosti koje odgovaraju nekoj putanji između početne i konačne točke. Amplituda vjerojatnosti za svaku takvu putanju dana je s e^{iS}, gdje je S akcija $S = \int L(q, \dot{q})dt$. U ovom formalizmu pokazuje se da je amplituda vjerojatnosti da čestica pređe iz točke (q_i, t_i) u točku (q_f, t_f) za Hamiltonijan oblika $H = p^2/2m + V(q)$ dana izrazom

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int [dq] e^{iS[q]} \tag{5.25}$$

gdje notacija $[dq]$ predstavlja funkcionalnu integraciju po svim mogućim putanjama $q(t)$, a N je konstanta.

Kvantnoj teorija polja formulirana je tako da može opisati dinamiku mnoštva čestica. U standardnim procesima raspršenja čestica dolazi do nastajanja i nestajanja čestica, što se u lagranžijan uvodi preko izvora $J(t)$ na način

$$L(q, \dot{q}) \to L(q, \dot{q}) + J(t)q(t). \tag{5.26}$$

Ako pretpostavimo da je izvor uključen za vrijeme konačnog vremenskog intervala, amplituda vjerojatnosti da čestica prijeđe iz osnovnog stanja, u kojem se nalazila puno prije uključivanja izvora, u osnovno stanje, puno kasnije nakon isključivanja izvora, dana je s

$$Z[J] = \frac{\int [dq] \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[L(q, \dot{q}) + Jq + \frac{1}{2} i\epsilon q^2 \right] \right\}}{\int [dq] \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[L(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} i\epsilon q^2 \right] \right\}}. \tag{5.27}$$

Važno svojstvo prethodne veličine glasi

$$\left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)}\right|_{J=0} = i^n \langle 0 \left| T\left[q(t_1) \cdots q(t_n) \right] \right| 0 \rangle , \tag{5.28}$$

tj. vidimo da derivacija $Z[J]$ po izvoru $J(t_i)$ daje vakuumsku očekivanu vrijednost putanje $q(t_i)$. Isto takvo svojstvo ima i particijska funkcija u statističkoj mehanici. Dakle, poznavajući veličinu $Z[J]$, možemo dobiti Feynmanove dijagrame i pokazati konzistentnost ovog formalizma s kanonskom kvantizacijom.

Ako primijenimo formalizam integrala po putevima na matrične modele, particijsku funkciju možemo definirati na način

$$Z = \int dX_i \, e^{-(S(X) + J^i X_i)}, \tag{5.29}$$

gdje se integracija provodi po prostoru matrica. Ovakvu formulaciju možemo interpretirati kao random matrični model. Prethodni izraz invarijantan je na baždarnu transformaciju $\hat{X}_i \to U^\dagger \hat{X}_i U$, kao i na globalne simetrije kao što su translacije i rotacije.

U prethodnom izrazu valja primijetiti jedan detalj, a to je da particijska funkcija u random matričnom modelu nema faktor i u eksponentu. Tome je razlog što ovaj model definiramo na fuzzy sferi, koja posjeduje simetriju Euklidskog prostora, za razliku od standardne kvantne teorije polja koja je definirana na prostoru Minkowskog. Ova razlika u eksponentu postiže se Wickovom rotacijom izraza (5.27), tj. zamjenom $t \to it$. Integral ovog tipa za slobodnu česticu reproducirao bi toplinsku jednadžbu, dok bi integral s faktorom i reproducirao slobodnu Schrödingerovu jednadžbu.

Konstruirajmo sada akciju sličnu Higgsovoj s parno dimenzionalnim matricama M

$$S = \mathrm{Tr}(M^2 - M^4.) \tag{5.30}$$

Pokazat ćemo da je u ovom modelu sfera S^2 emergentna struktura, kao i baždarna teorija na njoj, a za ovako zapisanu akciju dobro je poznat izračun particijske funkcije. S obzirom da je matrica M parno dimenzionalna, možemo ju zapisati koristeći Paulijeve matrice

$$M = M^{\mu} \otimes \sigma_{\mu}. \tag{5.31}$$

Radi jednostavnosti, ograničavamo se na slučaj gdje $M^0 = 0$. Računamo prvo M^2

$$M^2 = (M^{\mu} \otimes \sigma_{\mu})(M^{\nu} \otimes \sigma_{\nu}) = M^i M^j \otimes \sigma_i \sigma_j. \tag{5.32}$$

Budući da za Paulijeve matrice vrijedi $\sigma_0 = \mathbb{1}_{2\times 2}$, $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ i to da je trag σ_i nula, slijedi da je trag od M^2

$$\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(M^i M^i \otimes \mathbb{1} + \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[M^i, M^j] \otimes \sigma_k) = 2\text{Tr}(M^{i2}). \tag{5.33}$$

Slično za M^4 imamo

$$\begin{aligned}\text{Tr}(M^4) = \text{Tr}&\left[M^i M^i \otimes \mathbb{1} + \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[M^i, M^j] \otimes \sigma_m (M^k M^k \otimes \mathbb{1} + \frac{i}{2}\epsilon_{klm}[M^k, M^l] \otimes \sigma_m)\right] \\ &= 2\text{Tr}(M^{i2}M^{j2} - \frac{1}{2}[M^i, M^j][M^i, M^j]).\end{aligned} \tag{5.34}$$

Početna akcija je tada

$$S = 2\text{Tr}(M^{i2} - M^{i2}M^{j2} + \frac{1}{2}[M^i, M^j][M^i, M^j]). \tag{5.35}$$

Jednadžbe gibanja glase

$$[M^i, [M^i, M^k]] = 2M^k - 4M^k M^{i2}. \tag{5.36}$$

Prethodne jednadžbe rješavamo pretpostavljajući rješenje oblika $[M^i, M^j] = c\epsilon^{ijk}M^k$, tj. pretpostavljamo da matrice M zadovoljavaju $su(2)$ algebru. Uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo

$$c^2 M^k = 2(1 - 2M^{i2})M^k. \tag{5.37}$$

Ako su matrice M elementi ireducibilne reprezentacije, tada je M^{i2} Casimirov operator, koji je proporcionalan jedinici, iz čega slijedi izraz za konstantu c

$$c = i\sqrt{2(2M^{i2} - 1)}. \tag{5.38}$$

Time smo pokazali da je rješenje jednadžbi gibanja uistinu fuzzy sfera.

Može se pokazati [20] da particijska funkcija glasi

$$Z = \sum_{R} (d_R)^2 \exp\left(-4\pi^2 C_{2R}\right), \tag{5.39}$$

gdje je R indeks ireducibilne reprezentacije, d_R dimenzija reprezentacije, a C_{2R} je kvadratni Casimirov operator.

6 Zaključak

U ovom radu osvrnuli smo se na konstrukciju nekomutativnih, tj. kvantiziranih prostora koji su analogoni klasičnih homogenih prostora. Centralni pojam pri ovoj konstrukciji predstavlja princip korespondencije, tj. matematički konzistentna formulacija istoga, kako bismo ograničili moguće veličine na nekomutativnim mnogostrukostima zahtjevom da se preslikavaju na fizikalne veličine na glatkim mnogostrukostima.

U deformacijskoj kvantizaciji algebarski je ostvaren matematički konzistentan princip korespondencije, unutar kojeg se pokazuje važnost Poissonove strukture mnogostrukosti. Motivirano time, dan je pregled geometrijske strukture Liejevih grupa i pripadnih Liejevih algebri te je izložena metoda kako se konstruiraju nekomutativni prostori homogenih prostora dobivenih kao kvocijenti Liejevih grupa po njihovim podgrupama. Kako bismo formulirali konzistentan princip korespondencije, potrebno je konstruirati preslikavanje s operatora definiranih na kvantiziranom prostoru na funkcije na klasičnom prostoru, zbog čega smo uveli inducirane reprezentacije i koherentna stanja. Za primjer konstruirali smo kvantnu mehaniku polazeći od Heisenbergove grupe, kao i tzv. fuzzy sferu, koja je kvantizirani analogon sfere S^2. Na fuzzy sferi izgradili smo baždarnu teoriju polja te smo na uvodnoj razini objasnili kako se ista kvantizira unutar formalizma random matričnih modela.

Dodaci

Dodatak A Izvod rastava eksponencijalnog operatora angularnih momenata

U ovom dodatku pokazujemo kako izraz oblika

$$e^{w_+\hat{X}_+ + w_-\hat{X}_- + w_z\hat{X}_z} \tag{A.1}$$

možemo rastaviti na izraz oblika

$$e^{z_+\hat{X}_+}e^{z_z\hat{X}_z}e^{z_-\hat{X}_-}. \tag{A.2}$$

Krećemo od matrične reprezentacije angularnih momenata

$$\hat{X}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{X}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Eksponent u prvom izrazu ima matrični oblik

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}w_z & w_+ \\ w_- & \dfrac{1}{2}w_z \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Za tu matricu vrijedi

$$A^{2n} = \left(\frac{1}{4}w_z + w_+w_-\right)^n \mathbb{1} \tag{A.5}$$

$$A^{2n+1} = \left(\frac{1}{4}w_z + w_+w_-\right)^n A. \tag{A.6}$$

Razvijanjem prvog izraza u red i koristeći prethodne dvije relacije, dobivamo izraz

$$e^{w_+\hat{X}_+ + w_-\hat{X}_- + w_z\hat{X}_z} = \begin{pmatrix} \cosh K + \frac{1}{2}w_z(\sinh K)/K & w + (\sinh K)/K \\ w_-(\sinh K)/K & \cosh K - \frac{1}{2}w_z(\sinh K)/K \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

gdje je

$$K = \left(\frac{1}{4}w_z + w_+ w_-\right)^{1/2}. \tag{A.8}$$

Sada računamo izraz (A.2). Koristimo činjenicu da su $J_\pm$ nilpotentne matrice, tj. vrijedi $J_\pm^2 = 0$, kao i da za dijagonalnu matricu vrijedi

$$e^M = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Iz toga slijedi

$$e^{z_+ \hat{X}_+} e^{z_z \hat{X}_z} e^{z_- \hat{X}_-} = \begin{pmatrix} (\tilde{z}_z)^{1/2} + z_+ z_- / (\tilde{z}_z)^{1/2} & z_+ / (\tilde{z}_z)^{1/2} \\ z_- / (\tilde{z}_z)^{1/2} & 1 / (\tilde{z}_z)^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

gdje smo uveli definiciju $z_z = 2 \ln \tilde{z}_z$ kako bismo eliminirali $\exp(\pm z_z/2)$ u računu. Izjednačavanjem izraza (A.7) i (A.10), dobivamo četiri jednadžbe za izražavanje koeficijenata z_i pomoću w_i. Budući da je determinanta oba operatora 1 zbog unitarnosti, samo tri od te četiri jednadžbe su nezavisne. Dobivamo koeficijente z_i

$$z_+ = \frac{w_+}{K} \frac{\sinh K}{\cosh K - \frac{1}{2}\frac{w_z}{K}\sinh K}, \tag{A.11}$$

$$z_- = \frac{w_-}{K} \frac{\sinh K}{\cosh K - \frac{1}{2}\frac{w_z}{K}\sinh K}, \tag{A.12}$$

$$\tilde{z}_z = \frac{1}{\cosh K - \frac{1}{2}\frac{w_z}{K}\sinh K}. \tag{A.13}$$

U našem konkretnom slučaju imamo $w_z = 0,\ w_+ = \zeta,\ w_- = -\bar{\zeta}$. U tom slučaju vrijedi $K = i|\zeta|$, $\cosh K = \cos|\zeta|$, $\sinh K = i \sin|\zeta|$ i za koeficijente dobivamo

$$z_+ = \frac{\zeta}{|\zeta|} \tan|\zeta|, \tag{A.14}$$

$$z_- = -\frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|} \tan|\zeta|, \tag{A.15}$$

$$\tilde{z}_z = \frac{1}{\cos|\zeta|}. \tag{A.16}$$

Ako preimenujemo koeficijente $z_+ = z$, $z_- = -\bar{z}$, tada je koeficijent $\tilde{z}_z = 1 + |z|^2$. Konačno možemo pisati

$$T(z, \bar{z}) = e^{z\hat{X}_+} e^{\ln\left(1+|z|^2\right)\hat{X}_3} e^{-\bar{z}\hat{X}_-}, \tag{A.17}$$

gdje je

$$z = \frac{\zeta}{|\zeta|} \tan|\zeta|, \tag{A.18}$$

u skladu s izrazom (4.54).

Bibliography

[1] T. Thiemann, "Lectures on loop quantum gravity," Lect. Notes Phys. **631** (2003) 41

[2] Goldstein, H.; Poole, C. P.; Safko, J. L. (2001). Classical Mechanics (3rd ed.). Addison-Wesley.

[3] Kontsevich, M. Letters in Mathematical Physics (2003) 66: 157. https://doi.org/10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf

[4] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 977

[5] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, "The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields," Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187

[6] R. J. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces," Phys. Rept. **378** (2003) 207

[7] S. R. Coleman and J. Mandula, "All Possible Symmetries of the S Matrix," Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[8] A. C. Hirshfeld and P. Henselder, "Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics," Am. J. Phys. **70** (2002) 537.

[9] A. M. Perelomov, "Coherent states for arbitrary lie groups," Commun. Math. Phys. **26** (1972) 222.

[10] Bartlett, S.D., Rowe, D.J. and Repka, J.,Vector coherent state representations, induced representations and geometric quantization: I. Scalar coherent state representation, J.Phys.A35, 5599-5623 (2002)

[11] H. Grosse and P. Presnajder, "The Construction on noncommutative manifolds using coherent states," Lett. Math. Phys. **28** (1993) 239.

[12] https://www.maths.ed.ac.uk/$\sim$ jmf/Teaching/Projects/Poincare/IndReps.pdf

[13] J. Hoppe, Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two dimensional Bound State Problem. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1982.

[14] J. Madore, "The Fuzzy sphere," Class. Quant. Grav. **9** (1992) 69.

[15] Kirillov, Aleksandr A. Lectures on the Orbit Method. Providence, RI: American Math. Soc, 2004. Print.

[16] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Self-Dual Noncommutative ϕ^4 -Theory in Four Dimensions is a Non-Perturbatively Solvable and Non-Trivial Quantum Field Theory," Commun. Math. Phys. **329** (2014) 1069

[17] A. Ballesteros and F. Mercati, "Extended noncommutative Minkowski spacetimes and hybrid gauge symmetries," Eur. Phys. J. C **78** (2018) no.8, 615

[18] H. Steinacker, "Emergent Geometry and Gravity from Matrix Models: an Introduction," Class. Quant. Grav. **27** (2010) 133001

[19] H. Steinacker, "Quantized gauge theory on the fuzzy sphere as random matrix model," Nucl. Phys. B **679** (2004) 66

[20] H. Steinacker, "Non-commutative geometry and matrix models," PoS QGQGS **2011** (2011) 004

[21] Ryder, L. (1996). Quantum Field Theory. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511813900

[22] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, "Towards finite quantum field theory in noncommutative geometry," Int. J. Theor. Phys. **35** (1996) 231

[23] Klauder, J. R., and Skagerstam, B.-S. (1985). Coherent states: Applications in physics and mathematical physics. Singapore: World Scientific