Integrali funkcija jedne varijable u srednjoškolskoj nastavi matematike

Brekalo, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Brekalo

INTEGRALI FUNKCIJA JEDNE VARIJABLE U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Posebno se zahvaljujem svojoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na velikodušnoj i ogromnoj pomoći, potpori, ukazanom povjerenju, savjetima i velikodušnosti prilikom izrade rada i tijekom cijelog mog fakultetskog obrazovanja. Bila mi je čast biti student profesorice Milin Šipuš.

Također, zahvaljujem se svim profesorima i asistentima Matematičkog odsjeka, kao i kolegama i mojima prijateljima koji su bili uz mene tijekom mog visokoškolskog obrazovanja.

Veliko hvala i mojoj sestri Josipi koja je bila uz mene u svim trenutcima tijekom mog obrazovanja.

Najveću zahvalu dugujem svojim roditeljima, majci Ankici i ocu Draganu, kojima i posvećujem ovaj rad. Mama i Ćaćo, hvala vam za sve!

I na kraju, hvala Njemu, koji je na početku i kraju svega, i koji je ono što se meni činilo nemogućim, učinio mogućim.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu razmotrit ćemo različite pristupe poučavanja i učenja integralnog računa na različitim razinama obrazovanja. Povezujući ključne pojmove infinitezimalnog računa, pokušat ćemo sustavno prikazati ključne koncepte i pojmove, kao što su pojmovi antiderivacije, primitivne funkcije i određenog integrala te raznolikog spektra primjene integralnog računa. Integralni račun funkcija jedne varijable je u svojoj biti dio matematičke grane koja se naziva matematička analiza. Matematička analiza može se pronaći i pod imenom infinitezimalni račun što implicira kako iza samih integrala funkcije jedne varijable stoji jedna stroga i formalna matematika zasnovana na $\varepsilon - \delta$ okolini i kao takva je dio matemtike s kojom se ne susrećemo na svim razinama obrazovanja. Taj susret ovisi upravo o tome kakav koncept integralnog računa nam je u fokusu. Na studiju matematike strogo i formalno proučavanje integralnog računa upravo kroz kontekst infinitezimalnog računa je neizostavno i kao takvom mu se i pristupa. Na tehničkim fakultetima taj pristup je još uvijek matematički formalan, ali ne u tolikoj mjeri zbog fokusa na primjenu integralnog računa. U skladu s tim, u radu smo prezentirali i okvir koncepata koji se razvijaju pri učenju i poučavanju određenih segmenata infinitezimalnog računa na studiju matematike i na studiju tehničkih fakulteta. Pokušali smo uočiti i objasniti određene razlike u pristupima te izdvojiti segmente koje smo smatrali nužnima. Kada je riječ o srednjoškolskoj nastavi, stroga i formalna matematika nastoji se izbjeći u korist razvijanja konceptualnog razumijevanja, najčešće pomoću koncepta površine. Različiti pristupi prisutni su na različitim geografskim područjima, što je vjerojatno uvjetovano mnogim faktorima. Da bi se koncept infinitezimalnog računa, posebice Osnovnog teorema infinitezimalnog računa što bolje razumio, bilo bi dobro razmotriti i što više realizacija istoga. Kako bi se izbjegao pristup u kojem se određeni integral svodi isključivo na određivanje površine, raznolike su metode i načini na koje možemo razvijati ispravnije ili možda manje isključivo razumijevanje integrala i koncepta integralnog računa. U takvom pristupu okosnica bi svakako trebalo biti shvaćanje da je određeni integral brzine promjene funkcije na nekom intervalu jednak ukupnoj promjeni vrijednosti te funkcije na tom intervalu. Takva interpretacija Osnovnog teorema infinitezimalnog računa svakako ostavlja puno prostora za razmišljanje, istraživanje i produbljivanje elementarnog razumijevanja, osobito na srednjoškolskoj razini. U skladu s tim, u ovom radu, osim pregleda teoretske pozadine integrala funkcija jedne varijable, predstavili smo i nekoliko aktivnosti za koje smo smatrali da su vrlo pogodne u nastavi, točnije za poučavanje i učenje glavnih pojmova integralnog računa. Pritom smo naglasak stavili na konceptualno razumijevanje osnovnih pojmova zbog čega smo nastojali određene aktivnosti i primjere pokazati kao vrlo bogate i poticajne. U takvom skupu ideja koje smo naglašavali, prikazali smo i okvire nekoliko primjera metodičke prakse poučavanja integrala koji se koriste u svijetu, točnije široj međunarodnoj matematičko-obrazovnoj zajednici, na različitim razinama obrazovanja, kako u srednjoj školi, tako i na fakultetu.

Poglavlje 1

Povijesni razvoj Diferencijalnog i integralnog računa

1.1 Povijesni početci razvoja infinitezimalnog računa

Počeci infinitezimalnog računa mogu se naći još u antičkom razdoblju. Egipćani su računali volumen piramide bez vrha. Grci, Eudoks i Arhimed, koristili su metodu ekshaustije kojom su računali površine nekog oblika tako što se u njega umetali niz poligona čije površine konvergiraju prema površini cijelog oblika. Arhimed je, oko 225. g. pr. Kr., dao jedan od najznačajnijih grčkih doprinosa. Pokazao je da površina koju zatvaraju parabola i pravac iznosi $\frac{4}{3}$ površine trokuta s istom bazom i vrhom, te $\frac{2}{3}$ površine opisanog paralelograma. Zanimljiv je i Arhimedov pokušaj određivanja površine kruga. Metodom ekshaustije Arhimed je pokušao pronaći približnu površinu kruga i to je zapravo bio rani primjer "integracije" koja je dovela do približne vrijednosti broja π. Među ostalim Arhimedovim integracijama značajne su i volumen te oplošje sfere, volumen i oplošje stošca, površina elipse, volumen bilo kojeg segmenta paraboloida revolucije i segment hiperboloid revolucije. Do 17. stoljeća u ovom području nije ostvaren daljnji napredak. U to doba su problemi iz mehanike potakli matematičare na rješavanje problema kao što je određivanje težišta tijela. Luca Valerio (1552.-1618.) objavio je De quadratura parabolae u Rimu (1606.), gdje je nastavio koristiti grčke metode za računanje površine segmenta parabole. Johannes Kepler (1571.-1630.), u svom radu o gibanju planeta, morao je pronaći površinu odsječka elipse. Njegova metoda sastojala se u promatranju danih površina kao suma tankih linija (dužina) što je, iako sirov, bio značajan oblik integriranja. Ta metoda je ipak bila bitno nepreciznija od grčkih. Do godine 1615. Kepler je svojom metodom izračunao volumene i oplošja niza različitih rotacijskih tijela. U tom razdoblju dolazi i do određenih zbivanja koja će potaknuti pravi razvoj infinitezimalnog računa. Tri matematičara su napravili veliki doprinos. To su bili Fermat, Roberval i Cavalieri. Prvi stvarni doprinos razvoju integralnog računa dao je isusovac Bonaventura Francesco Cavalieri (1598.-1647.) koji je na temelju Keplerove metode integriranja došao do svoje metode nedjeljivih veličina (indivisibilibus), objavljene u djelu Geometria indivisibilibus continuorum nova guadam ratione promot (1635.). Cavalierijeva ideja se sastojala od toga da dužina sadrži beskonačno mnogo točaka (svaka bez duljine), a geometrijski lik od beskonačno mnogo linija (svaka bez širine i površine). Primjerice, ako treba naći površinu pravokutnog trokuta, neka mu se jedna kateta sastoji od n točaka (indivisibiles), a druga od njih na. Tada svakoj od točaka na prvoj kateti vertikalno odgovara po jedna točka hipotenuze i te visine ("ordinate") redom su $a, 2a, ..., na$. Stoga, cijela površina sadrži $a + 2a + ... + na = a\frac{n(n+1)}{2}$ točaka. Kako je n jako velik, možemo zanemariti 1 u brojniku te je površina $a\frac{n^2}{2}$, tj. pola produkta duljina kateta. Iako je zaključak točan, očigledna je neegzaktnost pristupa. Tom je metodom Cavalieri zapravio najavio sve ono što će se događati u daljnjem tijeku intenzivnog razvoja diferencijalnog i integralnog računa. Detaljniji povijesni pregled može se pronaći u radu [13], na temelju kojeg smo ukratko opisali povijesni razvoj i na temelju kojeg ćemo u kraćim crtama u nastavku opisati i proces formalizacije infinitezimalnog računa.

1.2 Formalizacija infinitezimalnog računa

Za matematičare sedamnaesto stoljeće je bilo stoljeće uspona za infinitezimalni račun. Iako se izum infinitezimalnog računa pripisuje dvojici briljantnih matematičara i suvremenika, Isaac Newtonu (1642.-1727.) i Gottfried Leibnizu (1646.-1716.). Cavalieri, Torricelli, Barrow, Descartes, Fermat i Wallis koji su se također bavili ovim problemom, napravili su dobre temelje za nastavak razvoja infinitezimalnog računa. Isaac Barrow, sa samo 33 godine je smatran jednim od najistaknutijih matematičara tog razdoblja. Njegova istraživanja na izradi tangente krivulje i na utvrđivanju površine područja omeđenog krivuljama skoro ga je dovelo do izuma računa. Jedan od njegovih studenata bio je Isaac Newton, jedan od najvećih matematičara kroz povijest. Njegov Lectiones Geometricae predstavljen je u 13 predavanja, kao zbirka teorema koja se bavi crtanjem tangente na krivulju i pronalaženjem duljine krivulje i površina omeđenih po njima. Njegova metoda za određivanje tangente do točke P na krivulji daje polinomijalnu jednadžbu $f(x, y) = 0$ koja se koristi u današnjem infinitezimalnom računu. On je primijetio da se tangenta može dobiti ako su neke druge točke poznate, primjerice točka T željene tangente bi trebala sjeći x-os. Barrow je uzeo točku Q na krivulji, u neposrednoj blizini prve točke P, a crtanjem paralele koordinatnih osi izgrađen je mali pravokutni trokut PQR koji je nazvao diferencijalni trokut. Lectiones Geometricae je bila na kulminaciji 17. st. istraživanjem infinitezimalnog računa. Barrowova metoda tangente sve je više sličila procesu deriviranja, ali on nije vidio neki dublji značaj. Osim Isacca Barowa, mnogi matematičari dali su svoj obol razvoju infinitezimalnog računa, a među njima je i John Wallis koji je uveo znak ∞ za beskonačnost u djelu De setionibus conicis (1655.). Tako je do šezdesetih godina 17. st. stvoren niz radova o problemu tangenti, mjerenju duljine krivulja, izračunavanju površina i volumena koji stvaraju “kritičnu masu“ iz koje će Newton i Leibniz stvoriti infinitezimalni račun, tj. analizu beskonačno malih veličina. Iz svega navedenog može se zaključiti da je mnogo velikih, a uz njih i podosta manje značajnih matematičara zaslužno za stvaranje formalnog infinitezimalnog računa, no Isaac Newton i Gotfried Wilhelm Leibniz smatraju se otkrivačima. Njihova su otkrića poprilično različita, ne samo notacijom, nego i pojmovno, ali u njima nalazimo dovoljno mnogo onoga što držimo biti računa. Danas se općenito smatra da su obojica do svojih otkrića došli nezavisno. Newton ranije 1664.-1666., a Leibniz nešto kasnije 1675. Zaključci i otkrića koje su Newton i Leibniz objavili su svojim djelima nisu uvijek od samog početka bili jasno shvaćeni i prihvaćeni. Te matematičke činjenice, koje su nama danas temeljne, su se ovako iskristalizirale tek strpljivim povijesnim istraživanjem tijekom 20. i 21. stoljeća. Newtonovo otkriće infinitezimalnog računa vezano je uz sljedeće osnovne pojmove: redovi, algoritmi, recipročni odnos diferenciranja i integriranja, pojam varijable kao gibanja u vremenu te prvih i konačnih omjera. Iako se sve ove teme isprepliću u Newtonovim radovima, mi ćemo se koncentrirati na one koje se izravno tiču infinitezimalnog računa. Bitno je napomenuti kako je Newton zapravo već kroz pravilo za kvadrature jednostavnih krivulja koristio izraz

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Navedena relacija, sve do 17. stoljeća bila je poznata u drugim formama i mogla se, u kombinaciji s razvojem u red, upotrijebiti za nalaženje kvadratura gotovo svih poznatih krivulja. S druge strane, razvoji u redove pružali su praktičnu mogućnost aproksimiranja i pojednostavljivanja formula, zanemarivanjem članova višeg reda-sredstvo kojim se Newton često koristio pri rješavanju fizikalnih problema. Newton u jednoj od svojih rasprava, koja objedinjuje njegova matematička otkrića iz zlatnog doba otkrića infinitezimalnog računa, daje opći postupak za nalaženje relacije koja veže kvadrature krivulje s njenom ordinatom. Taj postupak jasno pokazuje da je Newton potpuno svjestan inverznog odnosa integriranja i diferenciranja, iako se naravno tada nije koristila u tim terminima. Tek se kasnije Newton prihvatio kritičke analize svojih infinitezimalnih metoda. U svojem manuskriptu ”Methodus fluxionum et serierum infinitarum”, koji povjesničari smještaju u 1671. godinu, on reformulira svoje algoritme i dokaze u terminima fluenti i njihovih fluksija. Fluenta je Newtonov pojam varijablne veličine u analitičkoj geometriji. Newton ih zapravo razumije kao veličine koje protiču, tj. kao veličine koje se mijenjaju s vremenom. Dakle, kad razmatra veličine, Newton zamišlja da se točka D giba duž krivulje, dok se odgovarajuće veličine (ordinata y, apscisa x, kvadratura z, ili bilo koja druga veličina povezana s krivuljom) mijenjaju tj. teku na odgovarajući način. Te tekuće veličine Newton naziva fluentama. Brzinu fluente naziva fluksijom i označava je točkom (npr.fluksije fluenata x,y,z označava sa $\dot{x}$,$\dot{y}$,$\dot{z}$). Newton je smatrao da s ovakvim pojmom veličine koja se giba u vremenu može razriješiti temeljne teškoće svojstvene ”malim” prirastima, koji su toliko mali da ih možemo dijeliti.

Rješenje je ideja konačnih omjera jer su u fluksionom računu izrazito važni omjeri fluksija. Na primjer, tangenta krivulje nalazi se zaključivanjem da je omjer ordinate i subtangente jednak omjeru fluksija ordinate i apsicse tj. $\frac{y}{\sigma} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Bitno je napomenuti kako se danas u ovom prikazu i argumentaciji može prepoznati implicitni pojam limesa, no Newtonov argument u ovoj fazi još uvijek je bio nedostatan, što su uočili i njegovi suvremenici. Naime, tako dugo dok prirasti postoje njihov omjer nije konačni omjer, a kad prestanu postojati, onda ni nemaju omjera. Postoje li dakle konačni omjeri? To je bilo vrlo fundamentalno pitanje. Što su to fluksije? Brzine iščezavajućih prirasta? A što su iščezavajući prirasti? No usprkos tim pojmovnim teškoćama, Newton je stvorio uspješan i korektan, iako ne matematički strogo opravdan, račun. Baratao je algoritmima pomoću kojih je bio u stanju riješiti ono što je zvao jednim od dva fundamentalna problema infinitezimalnog računa: za zadane odnose fluenti, naći odnose njihovih fluksija. Drugi problem bio je obrat prvoga: za zadane odnose fluksija, naći odnose njihovih fluenti. To je u naravi mnogo teži problem od prvoga, no Newton je učinio mnogo više od njegove puke formulacije. Njegove tablice integrala prvi su korak ka rješavanju problema, a on je učinio i mnoge daljnje korake, rješavajući mnoge pojedine fluksione jednadžbe. Sličan proces i razvoj obilježio je i Leibnizov put, koji ćemo pretpostaviti u nekoliko sljedećih rečenica. Već u to vrijeme, Leibniz je bio na tragu većine otkrića koja će mu osigurati značajno mjesto u povijesti matematike. U tom razdoblju događa se i njegovo otkriće infinitezimalnog računa. U nizu Leibnizovih rukopisa koji datiraju još od 1975. nalazimo vjeran zapis njegovih razmišljanja o najvažnijem matematičkom problemu 17. stoljeća: nalaženju jednostavnih i općih metoda za izračunavanje kvadratura krivulja. Tijekom tih izračunavanja Leibniz je uveo simbole $\int$ te d. Osim toga, našao je i istražio operacijska pravila bitna za formule, a potom je, primjenjujući ta pravila, preveo mnoge geometrijske argumente o kvadraturama krivulja u simboličke operacije s formulama. Točnije, ti manuskripti su autentičan zapis Leibnizovog otkrića infinitezimalnog računa. Da bi se što bolje razumio opis Leibnizovog otkrića, bitno je upozoriti na tri glavne ideje vodilje u njegovim istraživanjima. Prva je, Leibnizova osnovna filozofska ideja jedne *characteristica generalis*, jednog općeg simboličkog jezika, uz pomoć kojeg bi se svi procesi rasuđivanja i zaključivanja mogli zapisati simbolima i formulama, tako da bi se slaganje simbola i formula pokoravalo pravilima koja bi osiguravala korektnost zaključivanja. Ta ga je ideja vodila u mnogim filozofskim razmišljanjima. Ona također objašnjava njegov veliki i stalni interes za matematičku notaciju i simboliku, a posebno Leibnizovu težnju da matematičke iskaze i metode prevede u formule i algoritme. Iz tog razloga se Leibniz više zanimao za metode, no za same rezultate. Poseban je naglasak stavljao na načine transformiranja tih metoda u algoritme provedive sa samim formulama. Točnije, tražio je račun za infinitezimalno-geometrijske probleme. Druga Leibnizova poticajna ideja vezana je za nizove diferencija. Razmatrajući nizove $a_1, a_2, a_3, ...,$ i odgovarajuće nizove diferencija $d_1 = a_2 - a_1, d_2 = a_3 - a_2, d_3 = a_4 - a_3, ...,$ Leibniz je uočio da je

$$d_1 + d_2 + ... + d_n = a_1 - a_{s+1}.$$

To zapravo znači da je niz diferencija lako zbrojiti, a Leibniz je taj uvid iskoristio pri rješavanju problema, koji je postavio Huygens, još 1672. godine. Problem se sastojao od toga kako zbrojiti beskonačan red recipročnih vrijednosti trokutastih brojeva:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + ...$$

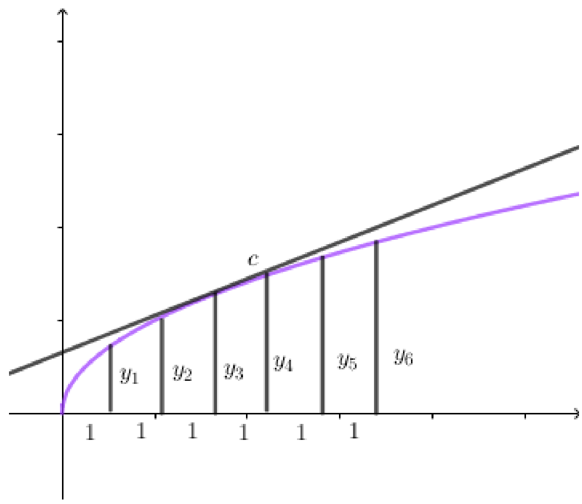
Leibniz je uočio da se članovi reda mogu napisati kao diferencije

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

odakle slijedi

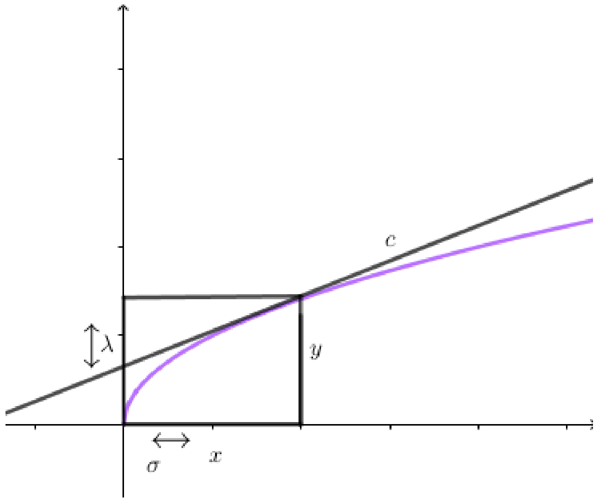
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + ... + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1},$$

što znači da tražena, odnosno beskonačna suma iznosi 2. Taj je rezultat bio značajan jer je motivirao Leibniza da istraži čitavu shemu sličnih suma i diferencija koje je složio u takozvani harmonijski trokut. Ti rezultati su jasno pokazali Leibnizu da su formiranje niza diferencija i niza suma inverzne operacije. Ta ideja je postala vrlo značajna onog trenutka kada ju je Leibniz preveo u geometriju. Krivulja na sljedećoj slici definira niz ekvidistantnih ordinata y. Ako je njihova udaljenost 1, onda suma ordinata y aproksimira kvadraturu krivulje, dok diferencija sukcesivnih ordinata aprokismira nagib (koeficijent smjera) tangente krivulje.



Slika 1.1: Niz ekvidistantnih ordinata y

Ono što je Leibniz uočio bilo je vrlo značajno i zanimljivo. Što je odabrana jedinica 1 manja to je aproksimacija, u oba slučaja, bolja. Leibniz stoga zaključuje da će odabirom beskonačno male jedinice, aproksimacije postati egzaktne. U tom će slučaju kvadratura biti jednaka ukupnoj sumi ordinata, dok će nagib tangente biti jednak diferenciji ordinata. Zbog već ustanovljene inverzije sumiranja i diferenciranja, Leibniz zaključuje da su i određivanje kvadrature i tangenti međusobno inverzne operacije. Dakle, Leibnizova druga ideja, bez obzira koliko je još neprecizna tada bila, jasno sugerira određeni infinitezimalni račun ordinatnih suma i diferencija, račun koji predstavlja određivanje kvadratura i tangenti kao inverznih operacija. Ta inverznost bila je ključna za potpuni razvoj infinitezimalnog računa. Naravno, ideja je, po analogiji, s nizovima suma i diferencija, Leibnizu ukazala na činjenicu da se tangente određuju lakše, negoli kvadrature. Treću osnovnu ideju Leibniz je našao izučavajući Pascalove geometrijske radove. Koristio se takozvanim karakterističnim trokutom za transformacije kvadratura. Naime, Leibniz je uočio mogućnost njezine općenite upotrebe za nalaženje relacija među kvadraturama na određeni način spregnutih krivulja ili pak relacija koje vežu kvadrature krivulja s drugim veličinama vezanim uz krivulje, kao što su momenti, težišta i slično. Sva navedena promišljanja i zapažanja bila su vrlo indikativna. Polako se otvarao put ka strogoj formalizaciji. I tako je zapravo započela presudna značajka strogosti i apstraktnost modela uvedenog u 19. stoljeću. Značajke koje ustoličuju Newtona i Leibniza kao otkrivače su sljedeće. Prva je da se diferenciranje i integriranje uočavaju i koriste kao inverzne operacije. Druga je da se za obje operacije razvijaju i odgovarajuće algoritamske tehnike. Upravo su Newton i Leibniz stvorili račun koji je imao ove dvije navedene značajke. Iako su mnogi aspekti Leibnizovog računa nejasni današnjem čitatelju, mogu se vrlo precizno i jasno objasniti geometrijskom prirodom tog računa. Primjerice, kako se diferencijal, odnosno beskonačna mala veličina može konzistentno koristiti kao osnovni pojam infinitezimalnog računa, a da se ne zamijeni pomoću derivacije, konačne i za nas danas jednostavne veličine. Dvije veličine, čija je razlika beskonačno mala veličina mogu, bez razlike, zamijeniti jedna drugu, ili veličina koja se uveća ili smanji za beskonačno malu veličinu može se smatrati nepromijenjenom. Dakle, diferencijal može uvećati veličinu tako da je ne uveća, i umanjiti tako da je ne umanji. Ono što je posebno zanimljivo jest to da se među nekim Leibnizovim rukopisima, objavljenim tek oko 1846., može naći definicija diferencijala kao konačne veličine proporcionalne graničnom diferencijalnom omjeru. Iako se tu tada još uvijek nije radilo o konzistentno izvedenom tekstu i računu, ideja svođenja diferencijala na neku vrstu primitivne derivacije izrazito je bitna. No, u početnim Leibnizovim računima, odnosno geometrijskoj analizi istoga, tipičnoj za taj period, derivacija $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ javlja se samo kao omjer ordinate y i subtangente σ.



Slika 1.2: Prikaz iz kojeg je vidljiv omjer ordinate y i subtangente σ

Na ovaj način otvorena je mogućnost pojave pojma funkcije jedne varijable. Kasnije je Euler proširio pojam funkcije i na izraze koji sadrže više od jedne varijable, a to je bio značajan otklon od geometrijske paradigme krivulje s njezinim geometrijskim veličinama. Dakle, separacijom analize i geometrije uveden je pojam funkcije i uklonjena je dimenzionalna (fizikalna) interpretacija objekata izučavanja, što je otvorilo put pojavi derivacije. Ipak, diferencijal je zadržao svoju baziččnu poziciju još dugo nakon što je analiza prestala biti geometrijska. Ove navedene naznake osnovnih razlika Leibnizovog računa u odnosu na moderni račun današnjice trebali bi dati jasnu sliku o onome što su otkrili osnivači moderne matematike Newton i Leibniz i koliko su njihova otkrića zapravo doprinijela razvoju infinitezimalnog računa. Okvir navedenog sustavnog povijesnog pregleda preuzeli smo iz [13], gdje se mogu pronaći i neka detaljnija objašnjenja.

Poglavlje 2

Pregled udžbeničke literature s različitih razina obrazovanja

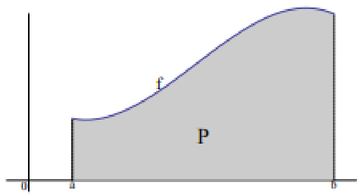
2.1 Matematička pozadina integralnog računa na studiju matematike

Površina pravokutnika, trokuta, mnogokuta, kruga itd. poznata je iz osnovne škole. Tu se radi o funkciji koja izvjesnim podskupovima ravnine pridružuje realne brojeve. Problem nastaje onog trenutka kada želimo da se ta funkcija proširi i na općenitije skupove. Razmatranja vezana za to pitanje, dovode nas do metode pomoću koje ćemo uvesti pojam Riemannova integrala ograničene funkcije na segmentu. U ovom odjeljku najviše će nas zanimati metode izračunavanja integrala na osnovu Leibniz-Newtonove formule te kriteriji integrabilnosti funkcije f. Prvo ćemo promotriti problem površine i rada sile, a nakon toga ćemo se koncentrirati na Osnovni teorem infinitezimalnog računa.

2.1.1 Problem površine i rada sile

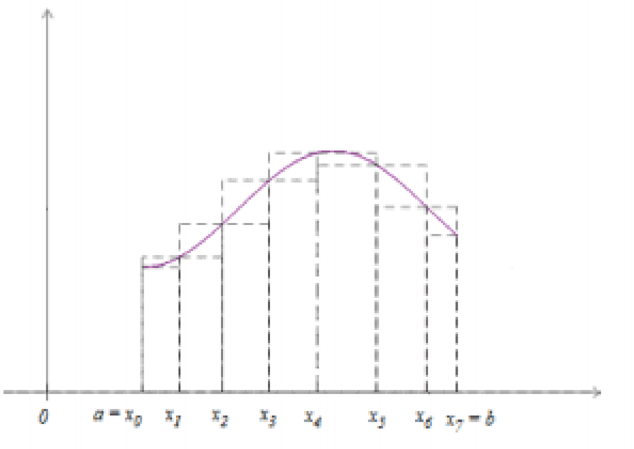
U uvodnom dijelu ovog poglavlja spomenuli smo kako znamo odrediti površinu nekih jednostavnih likova u ravnini, primjerice kvadrata, pravokutnika, trokuta i slično. Postavlja se problem određivanja površine likova koji imaju složenije granice. Takav je dio ravnine omeđen grafom funkcije kao na slici 2.1. Prvo, razmotrimo sljedeća svojstva.

1. $\mu(P) \geq 0$,
2. $P_1 \cap P_2 = \emptyset \Longrightarrow \mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$,
3. $P_1 \subseteq P_2 \Longrightarrow \mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.



Slika 2.1: Pseudotrapez

Funkciju koja zadovoljava navedena tri svojstva nazivamo mjera. Kada već odmah nismo u mogućnosti neposredno odrediti $\mu(P)$, onda pokušajmo aproksimirati dio ravnine P pomoću jednostavnijih likova čije površine znamo jednostavno izračunati, primjerice pravokutnika. U ovom slučaju aproksimirat ćemo označeni dio ravnine jednostavnijim likovima čije površine znamo izračunati, a u našem slučaju to će biti pravokutnici. Podijelimo segment $[a, b]$ na $n, n \in N$ dijelova točkama $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ (u našem slučaju $n = 5$). Nacrtajmo upisane i opisane pravokutnike kojima je duljina jedne stranice jednaka duljini segmenta $[x_{k-1}, x_k], k = 1, ..., n$. Prije toga, bitno je napomenuti i osvijestiti činjenicu kako mjerimo površinu ispod grafa pozitivne funkcije. Što se događa kada navedeno proučavamo pomoću grafa negativne funkcije, razmotrit ćemo nešto kasnije.



Slika 2.2: Aproksimacija pravokutnicima

Primjetimo da segmenti $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$ ne moraju biti jednakih duljina. Označimo s p_k površinu k–tog upisanog pravokutnika, a s P_k površinu k–tog opisanog pravokutnika, pri čemu je $k = 1, ..., n$. Tada vrijedi

$$p_k = m_k[x_{k-1}, x_k]), P_k = M_k([x_{k-1}, x_k], (k = 1, ..., n) \tag{2.1}$$

gdje je m_k visina k–tog upisanog pravokutnika, a M_k visina k–tog opisanog pravokutnika. Ovdje je vrlo bitno naglasiti kako je to tako jer je funkcija koju promatramo na određenom segementu pozitivna, što omogućuje da vrijednost funkcije u određenoj točki poistovijetimo s duljinom, odnosno u ovom slučaju visinom. Također, primijetimo da je u ovom slučaju m_k najmanja vrijednost, a M_k najveća vrijednost neprekidne funkcije čiji graf omeđuje lik, na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$. Vidljivo je da je tražena površina P veća od zbroja površina upisanih pravokutnika i manja od zbroja površina opisanih pravokutnika. Dakle, vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq P \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1} \tag{2.2}$$

Različitim podjelama segmenta $[a, b]$ dobivamo različite aproksimacije tražene površine odozdo, odnosno odozgo. Očigledno je da će aproksimacija biti bolja ako je podjela segmenta finija, to jest ako je segment $[a, b]$ podijeljen na što više dijelova. Također je jasno da se time zbroj površina upisanih pravokutnika povećava, a zbroj površina opisanih pravokutnika smanjuje. Opisana metoda naziva se Arhimedova metoda iscrpljivanja ili ekshaustije, po velikom grčkom matematičaru Arhimedu. On je opisanim postupkom računao površinu ispod parabole. Osim toga, računao je i površinu kruga upisujući mu i opisujući pravilne mnogokute. Povećavajući im broj stranica, mogao je izračunati površinu s dovoljnom preciznošću, baš kao što smo opisali u prvom poglavlju.

U klasičnoj mehanici, rad konstantne sile $f(x) = c$, za sve x, koja djeluje na materijalnu točku između $x = a$ i $x = b$, tj. na putu duljine $s = b - a$, definira se kao $W = c \cdot s$. Ako funkcija f nije konstantna, onda čitav put podijelimo na manje dijelove $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, a na tim dijelovima silu aproksimiramo odozdo i odozgo konstantnom silom m_k i M_k. Na taj način za za rad sile W na tom putu dobivamo donju i gornju aproksimaciju

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq W \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{2.3}$$

Iz ovoga vidimo da je problem određivanja rada sile na putu istovjetan problemu određivanja površine ispod grafa funkcije. Razmotrimo ukratko sada što se događa ako f nije konstantna sila. Prema izvoru [7], opisat ćemo situaciju ako f pak nije konstantna te tada s m možemo označiti njezinu najmanju i sa M njezinu najveću vrijednost na segmentu $[a, b]$.Tada je rad W koji je sila izvršila veći od $m(b - a)$ i manji od $M(b - a)$, tj.

$$m(b - a) \leq W \leq M(b - a) \tag{2.4}$$

Ako je $(M - m)(b - a)$ dosta veliko, tada uzimamo točke $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, s m_k i M_k označavamo najmanju i najveću vrijednost funkcije f na segmentu $[x_k, x_{k-1}]$ i zaključujemo da je

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq W \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \tag{2.5}$$

baš kao što smo vidjeli i prethodno. Ako pojam rada sile f na putu od a do b ima uopće ima smisla, onda funkcija f treba imati svojstvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n i točke

$$x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$$

na $[a, b]$, takve da bude

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon. \tag{2.6}$$

Iako su po svojoj prirodi različiti matematički problemi, problem definicije rada sile i problem definicije površine usmjereni su na isti matematički problem i konstrukciju.

2.1.2 Riemannov integral ograničene funkcije na segmentu

U ovom dijelu, razmotrit ćemo ugrubo konstrukciju Riemannovog integrala. Slijedit ćemo konstrukcije opisane u [7] i [5]. Neka je $[a, b], a < b$, segment realnih brojeva i f realna ograničena funkcija definirana na $[a, b]$. To znači da postoje realni brojevi α i β takvi da je

$$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta, x \in [a, b].$$

To znači da tada f ima infinmum m, $m = inf f$ i supremum M, $M = sup f$, tj. $\forall x \in [a, b], m \leqslant f(x) \leqslant M$. Bitno je izreći sljedeće. Ako je $[a, b] \subseteq [a, b]$ podsegment, onda vrijedi $\forall x \in [a, b], m \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant M$, gdje je $m = inf f$ i $M = sup f, x \in [a, b]$. Dakle, infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu i supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu. Sada ćemo provesti konstrukciju, odnosno izvršit ćemo subdiviziju, koju smo spominjali u prethodnoj sekciji. Za $n \in N$ podijelimo, tj. izvršimo subdiviziju segmenta $[a, b]$ točkama

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_{n-1} = b \tag{2.7}$$

na n dijelova. Neka je $m_k = inf f$ i $M_k = sup f, (k = 1, ..., n)$. Za proizvoljno odabrane točke $t_k \in [x_k - x_{k-1}]$, definiramo sume:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}), S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{2.8}$$

Broj s zovemo donja Darbouxova suma. S je gornja Darbouxova suma, a σ je integralna suma. Tada, kada smo sve ovo definirali, možemo izreći da vrijedi:

$$m(b-a) \leqslant s \leqslant \sigma \leqslant S \leqslant M(b-a). \tag{2.9}$$

Ovim postupkom sve više se približavamo egzaktnoj definiciji Riemannovog integrala. Preostaje nam iskoristiti aksiom potpunosti, na sljedeći način. Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma s,B je skup svih gornjih Darbouxovih suma S, a C je skup svoh integralnih suma σ funkcije f na segmentu $[a,b]$. Te sume dobijemo variranjem broja $n \in N$ pomoću svih različitih izbora subdivizije 2.7 i točaka t_k. Iz nejednakosti 2.9 zaključuje se da su skupovi A, B i C ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$.Prema aksiomu potpunosti postoje

$$I_*(f;a,b) = supA, I^*(f;a,b) = infB. \tag{2.10}$$

Sada možemo definirati donji i gornji Riemannov integral.

Definicija 2.1.1. *Broj I_* zovemo donji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$, a broj I^* zovemo gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

To zapravo znači da za svaku ograničenu funkciju $f : [a,b] \to R$ postoje i gornji i donji Riemannovi integrali. Iz dosad već navedenog, da se naslutiti da je donji Riemannov integral manji od gornjeg Riemannovog integrala. Taj zaključak sadržan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1.1. *Neka je $f : [a,b] \to R$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$, neka su I_* i I^* donji i gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$.Tada je*

$$I_*(f;a,b) \leqslant I^*(f;a,b). \tag{2.11}$$

Drugim riječima, zbroj površina upisanih pravokutnika manji je od zbroja površina opisanih pravokutnika. Sljedeća definicija dat će točnu odredbu integrala, preciznije određenog integrala na segmentu.

Definicija 2.1.2. *Za funkciju $f : [a,b] \to R$ ograničenu na segmentu $[a,b]$ kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili R–integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako je*

$$I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b). \tag{2.12}$$

Tada se broj $I = I_* = I^*$naziva integral ili R–integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka

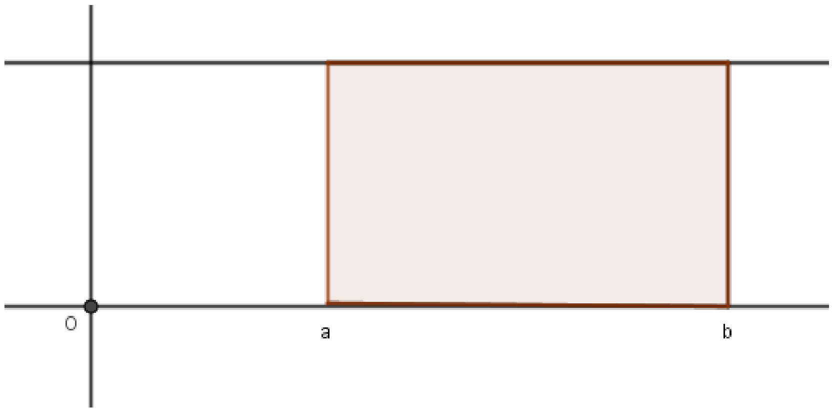
$$I = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f. \tag{2.13}$$

Sada možemo ukratko imenovati glavne pojmove. U ovom slučaju f se zove integrand, $[a, b]$ područje integracije, t varijabla po kojoj se integrira te a donja granica, a b gornja granica integrala. Nakon što smo definirali Riemannov integral, kratko ćemo se osvrnuti na pseudotrapez s početka poglavlja. Sada površinu trapeza $\mu(P)$ možemo definirati kao

$$\mu(P) = \int_a^b f(x)dx.$$

Sada kad smo definirali Riemannov integral, odnosno određeni integral na segmentu, možemo neposredno iz definicije izračunati integral nekih funkcija. Mi ćemo to pokazati na primjeru konstantne funkcije $f(x) = C$.

Primjer 2.1. Neka je $C \in R_+$ i $f(x) = C, \forall x \in R$.



Slika 2.3: Površina ispod grafa funkcije

Na ovom primjeru, a postoje još i mnogi drugi, pokazujemo zapravo da je pojam površine koji smo uveli preko Riemannova integrala ujedno proširenje pojma površine koju smo naučili i koristili u osnovnoj školi. Konceptualno, radi se o proširenju i nadogradnji pojma. Osim toga, funkcija koju promatramo trenutno je jednostavna pa za dokaz njezine integrabilnosti ne moramo koristiti sve moguće subdivizije segmenta $[a, b]$. Dovoljno je da segment $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova. Pripadne točke subdivizije su tada

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, ..., x_n = a + nh = b; h = \frac{b - a}{n}. \tag{2.14}$$

Vratimo se izračunavanju integrala. Za $a, b \in R_+, a < b$ izračunajmo integral $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx, \forall k \in 1, ..., n$. Budući da je f konstanta, za bilo koju subdiviziju uvijek vrijedi $m_k = M_k = C, \forall k \in \{1, ..., n\}$. Zbog toga je

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = C(b - a),$$

a to je površina pravokutnika ako je $C > 0$.

2.1.3 Integrabilnost monotonih funkcija

Prirodno se nameće pitanje koja svojstva ili koje svojstvo funkcije je dovoljno za integrabilnost u Riemannovom smislu. Možemo se pitati jesu li sve elementarne funkcije integrabilne u Riemannovom smislu na segmentima koji su sadržani u njihovom području definicije. Mi ćemo se koncentrirati na svojstvo monotonosti funkcije. Dokazat ćemo da je monotonost funkcije na segmentu svojstvo koje povlači integrabilnost. Napomenimo samo da to nije isključivo jedino svojstvo. I svojstvo neprekidnosti funkcije na segmentu također povlači integrabilnost, ali naš fokus bit će sada na monotonosti.

Teorem 2.1.2. *Ako je $f : [a, b] \to R$ monotona funkcija na $[a, b]$, onda je ona ograničena i integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Razmotrimo prvo slučaj kada f raste, tj. $(x < x') \implies (f(x) < f(x')) \quad x, x' \in [a, b]$. Tada je $f(a) < f(x) < f(b)$ za svako $x \in [a, b]$; dakle f je ograničena funkcija na segmentu $[a, b]$.Tada možemo podijeliti segment $[a, b]$ točkama 2.14 na n jednakih dijelova. Pretpostavili smo na početku da je f rastuća funkcija na $[a, b]$. Ako je $f(a) = f(b)$ onda je f konstantna funkcija na $[a, b]$ pa je integrabilna, baš kao što smo pokazali i u prethodnom primjeru. Zbog toga možemo pretpostaviti da je $f(b) - f(a) > 0$. Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju $x_k = a + kh, (k = 0, 1, ..., n), h = \frac{(b-a)}{n}$.Za svaki $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ vrijedi $inf_{\{}[\alpha, \beta]\}f = f(\alpha)$ i $sup_{\{}[\alpha, \beta]\}f = f(\beta)$. Stoga su pripadne Darbouxove sume jednake

$$s = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})h$$

i

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$S_n - s_n = [f(x_n) - f(x_0)]\frac{b-a}{n}.$$

Možemo zapisati sljedeće:

$$S_n = s_n + [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n} \leqslant I_*(f) + [f(b) - f(a)]\frac{(b-a)}{n},$$

jer je

$$s_n \leqslant supA = I_*(f).$$

S druge strane je $S_n \geq infB = I^*(f)$. Prema tome vrijedi

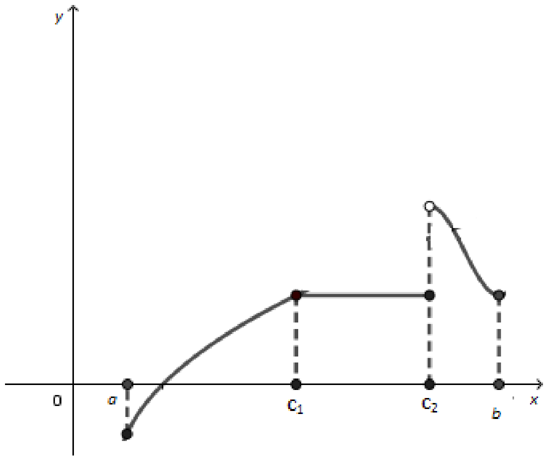
$$I^*(f) \leqslant I_*(f) + [f(b) - f(a)]\frac{(b-a)}{n}, n \in N.$$

Zbog proizvoljnosti prirodnog broja n dobivamo $I^*(f) \leqslant I_*(f)$ što zajedno s Teoremom 2.1.2 daje $I^*(f) = I_*(f)$, tj. integrabilnost funkcije f na $[a, b]$. U slučaju da f pada na $[a, b]$ na sličan način dobivamo:

$$S_n - s_n = [f(a) - f(b)]\frac{(b-a)}{n},$$

od kuda slijedi integrabilnost funkcije f na $[a, b]$. □

Prije nego ovaj odjeljak zaključimo jednim od bitnijih korolara integralnog računa, bitno je napomenuti što su to po dijelovima monotone funkcije. Preciznije, funkcija $g : [a, b] \rightarrow R$ je po dijelovima monotona ako postoje prirodni broj n i točke $a = c_0 < c_1 < ... < c_n = b$, takve da je g monotona na svakom intervalu $[a_1, c_1], ..., [c_{n-1}, c_n]$.



Slika 2.4: Po dijelovima monotona funkcija

U tom slučaju je g monotona funkcija na segmentu $[c_{k-1}, c_k]$, tj.postoje integrali

$$\int_{[c_{k-1},c_k]} g(x)dx \qquad (k = 1, ..., n).$$

Odavde primjenom teorema iz [7] dobiva se da je funkcija g integrabilna na $[a, b]$ te da je

$$\int_{[a,b]} g(x)dx = \int_{[a,c_1]} g(x)dx + \int_{[c_1,c_2]} g(x)dx + ... + \int_{[c_{n-1},b]} g(x)dx.$$

Sada možemo predstaviti sljedeći korolar.

Korolar 2.1.3. *Ako je $g : [a, b] \to R$ po dijelovima monotona funkcija onda je ona integrabilna na segmentu $[a, b]$.*

Ovaj korolar, zajedno s činjenicom da su elementarne funkcije, pod kojima podrazumijevamo polinome, racionalne funkcije, eksponencijalne, logaitamske, trigonometrijske, hiperbolne itd., na svakom segmentu po dijelovima monotone, daje podosta velik i, za naša razmatranja, najvažniji skup integrabilnih funkcija.

2.1.4 Riemannov integral i primitivna funkcija. Newton-Leibnizova formula

U ovom odjeljku konceptualno ćemo promotriti vrhunac razvoja infinitezimalnog računa koji je objedinjen u Osnovnom teoremu infinitezimalnog računa. Prije toga, definirat ćemo primitivnu funkciju, a zatim pokazati zašto je Osnovni teorem toliko fundamentalan. Započet ćemo s definicijom iz [5].

Definicija 2.1.3. *Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval i $f : I \to R$. Primitivna funkcija ili antiderivacija funkcije f na skupu I je svaka funkcija $F : I \to R$ sa svojstvom da je $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.*
Skup svih primitivnih funkcija funkcije f označava se sa $\int f(x)dx$ odnosno s f i zove se antiderivacija ili neodređen integral funkcije f.

Ako je $G : I \to R$ neka druga primitivna funkcija od f na intervalu I, tj. $G'(x) = f(x), \forall x \in I$, onda je

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = 0.$$

Dakle, iz ovoga vidimo da postoji konstanta $c \in R$ tako je da je $F(x) = G(x) + C, \forall x \in R$. Ista funkcija ima više primitivnih funkcija. Kako bismo jasno naglasili razliku između primitivne funkcije i neodređenog integrala, neodređeni integral definirat ćemo na sljedeći način.

Definicija 2.1.4. *Skup $\{F + C : C \in R\}$ svih primitivnih funkcija od f zovemo neodređeni integral ili antiderivacija od f i taj skup označavamo s*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Konstanta C se ne specificira, a odatle i dolazi naziv neodređeni integral. Sljedeći teorem kojim ćemo potkrijepiti navode dokazat ćemo vodeći se dokazom iz [7].

Teorem 2.1.4. *Neka je $I \subseteq R$ otvoreni interval i $f : I \to R$ funkcija koja na I ima bar jednu primitivnu funkciju.*

1 *Ako je F primitivna funkcija od f na I i C bilo koji relani broj, onda je funkcija $G(x) = F(x) + c$ također primitivna od f na I.*

2 *Ako su F i G bilo koje dvije primitivne funkcije za f na otvorenom intervalu I, onda postoji konstanta $C \in R$ takva da je $G = F + C$, tj.*

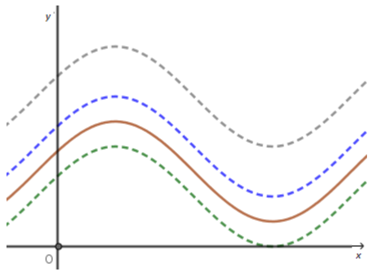
$$G(x) = F(x) + C, x \in I.$$

Dokaz.

1 Iz $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in I$, slijedi $(F + C)'(x) = F'(x) + C' = f(x), x \in I$ jer konstanta C ima za derivaciju nul funkciju. Dakle je $F + C$ primitivna od f na I.

2 Ako je $F' = f$ i $G' = f$, onda za funkciju $H = G - F$ imamo $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ za svako $x \in I$. Budući da je $H'(x) = 0$ za svako $x \in I$ to povlači da je H konstanta. Možemo označiti broj $H(x_0)$ s C, vrijedi da je $H(x) = C$, tj.$G(x) - F(x) = C, x \in I$. □

U sljedećih nekoliko redaka opisat ćemo jedno posebno svojstvo koje će nam omogućiti da što bolje razumijemo i shvatimo fundamentalnost Centralnog, odnosno Osnovnog teorema. Neka je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu I. Na slici je prikazan njezin graf i translacije duž $y-$ osi.



Slika 2.5: Graf funkcije f i translacije grafa

Translacije grafa funkcije f koje vidimo na slici su nove krivulje koje su grafovi primitivnih funkcija od f. Te krivulje zovu se integralne krivulje, a kroz svaku točku pruge iznad ili ispod intervala I, tj. skupa IxR, prolazi točno jedna integralna krivulja. Ako su F i G primitivne funkcije od f na intervalu I, prema teoremu iz[7] postoji konstanta C takva da je $G(x) = F(x) + C, x \in I$. Ako su a i b bilo koja dva broja iz I onda je $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C)$, tj.

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

Prethodno napisanom formulom iskazalo smo zapravo jedno posebno svojstvo primitivnih funkcija f. To svojstvo svojevrsni je zaključak koji kaže da bez obzira na to što funkcija f

ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o izboru primitivne funkcije.U dosadašnoj praksi, jedna od uobičajenih oznaka je sljedeća:

$$F(b) - F(a) = F(x) \mid_a^b .$$

Nakon što smo na neki način, donekle, opisali vezu između $R-$integrala i primitivne funkcije f, možemo iskazati Osnovni teorem infinitezimalnog računa.

Teorem 2.1.5. *Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval i $f : I \to R$ na I derivabilna funkcija.*

1. *Za svaki segment $[a, b] \subseteq I, a < b$, funkcija f je integrabilna u Riemannovom smislu na segmentu $[a, b]$.*
2. *Funkcija f ima primitivnu funkciju na I.*
3. *Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na I, onda je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.15}$$

Izraz (2.15) predstavlja Newton-Leibnizovu formulu, upravo prema dvojici znanstvenika koji su obilježili razvoj diferencijalnog i integralnog računa, a moglo bi se reći i otkrili ga. Newton-Leibnizova formula je temeljna formula matematičke analize. Osnovni teorem i izraz (2.15) vrijede i uz znatno slabije pretpostavke o funkciji f od ovih koje smo navodili u teoremu. Uvjet da je f derivaiblna može se zamijeniti i znatno slabijim uvjetom da je f neprekidna funkcija. Osnovni teorem je teorem koji znatno olakšava i pojednostavljuje integralni račun, a prirodno vodi i ka numeričkoj integraciji.

2.2 Integralni račun na tehničkim fakultetima i njihova primjena

Integralni račun, kao jedno od osnovnih i elemntarnih matematičkih koncepata, ima svoje značajno mjesto i na tehničkim studijima. S obzirom na važnost primjene integralnog računa, na tehničkim fakuktetima koncept integrala razrađuje se u nešto malo drugačijem obliku, što ćemo ukratko i predstaviti. Ovo poglavlje je posvećeno integralu, na način da su u fokusu osnovni pojam integralnog računa te dva osnovna pojma čitavog infinitezimalnog računa. Zapravo, dva nas pojma upućuju na pojam integrala, a to su fizikalni problem izračunavanja puta iz zadane brzine i geometrijski problem površine. O tome smo nešto detaljnije pisali u prvom poglavlju kada smo razmatrali povijesni pregled razvoja infinitezimalnog računa. Osim ovih baziČnih interpretacija integral ima i mnoge druge interpretacije, što ga čini jakim matematičkim aparatom pogodnim za rješavanje velikog broja problema različitih struka. Ovdje ćemo uvesti i nešto malo drugačiju notaciju. S obzirom

da integriranje, između ostalog, uključuje i nalaženje zbrojeva, odnosno suma, usustavit ćemo sljedeću notaciju.
Suma n zadanih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n$, koju označavamo s $a_1 + a_2 + ... + a_n$ kraće ćemo označiti s $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

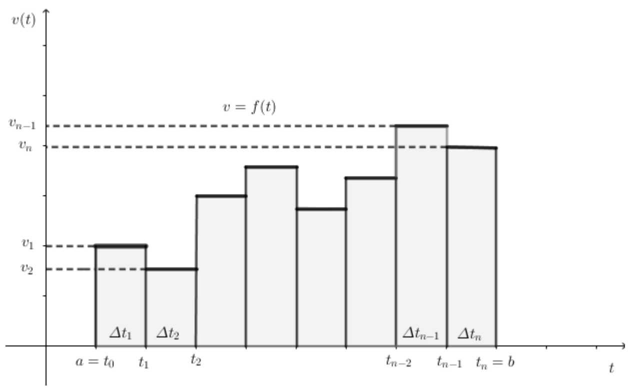
2.2.1 Put i površina

Razmotrimo najprije problem nalaženja puta iz zadane brzine. Ako je u vremenskom intervalu od $t = a$ do $t = b$ brzina v konstantna, onda je:

$$s(b) - s(a) = v(b - a) = v \cdot \triangle t,$$

gdje je $\triangle t = b-a$ promatrani interval vremena, a $s(b)-s(a)$ put prijeđen u tom vremenskom intervalu. Taj jednostavan slučaj sugerira rješenje i u nešto općenitijem slučaju. Pretpostavimo da je vremenski interval (a, b) podijeljen na n manjih intervala $(t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n)$ gdje je $t_0 = a$ i $t_n = b$,te da je brzina gibanja v_i konstantna na svakom intervalu (t_{i-1}, t_i). Dakle, tijelo se giba konstatnom brzinom v_1 tijekom početnog vremenskog intervala $\triangle t_1 = t_1 - t_0$, konstantnom brzinom v_2 tijekom sljedećeg vremenskog intervala $\triangle t_2 = t_2 - t_1, ...$ i konačno konstatnom brzinom v_n tijekom posljednjeg vremenskog intervala $\triangle t_n = t_n - t_{n-1}$. Tada je ukupni put $s(b) - s(a)$, koji tijelo prijeđe od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$ sumom

$$s(b) - s(a) = \sum_{i=1}^{n} \triangle s_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \triangle t_i.$$



Slika 2.6: Ukupni prijeđeni put

Primijetimo da je ukupni prijeđeni put jednak površini ispod grafa ove stepenaste funkcije brzine $v = f(t)$. Sada ćemo na sljedeća dva primjera iz knjige [14] pokazati na koji način konceptualno razmatramo Riemannov, odnosno određeni integral te zašto i kako razlikujemo relativnu od stvarne površine o čemu će dodatno biti riječi u sljedećim odjeljcima.

Primjer 2.2. Automobil se kreće ravnom cestom brzinama prema podatcima u tablici na slici 2.7. Koliki je put prevalio automobil u cijelom vremenskom intervalu, od $t = 0$ do $t = 11.5s$.

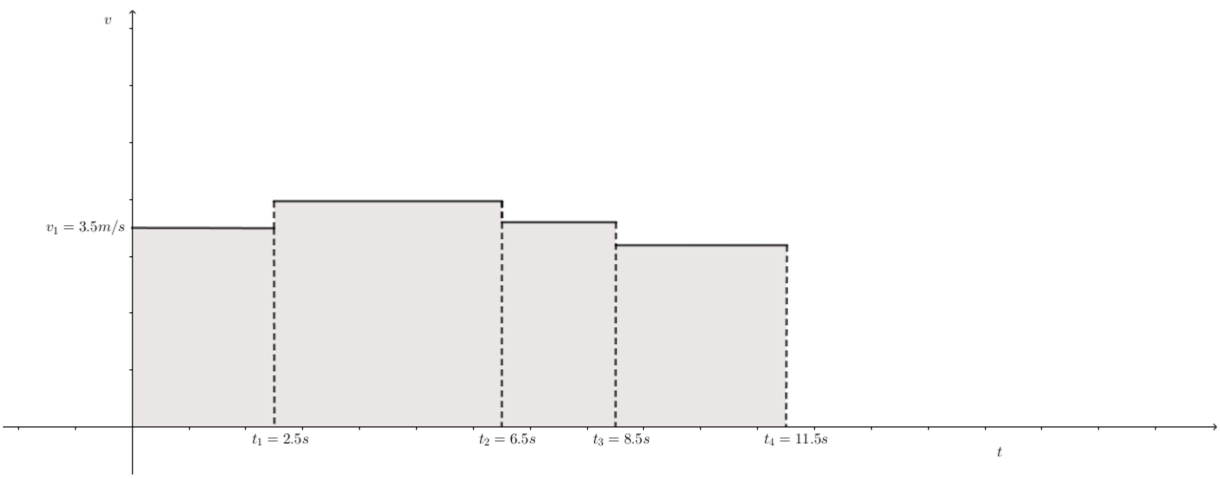
3.5 m/s	2.5 sekundi
4 m/s	4 sekunde
3.6 m/s	2 sekunde
3.2 m/s	3 sekunde

Slika 2.7: Brzine kojima se automobil kreće

Rješenje:
$s(11.5) - s(0) = \triangle s = \sum_{i=1}^{4} \triangle s = \sum_{i=1}^{4} v_i \triangle t_i$, gdje je:

$v_1 = 3.5, \quad \triangle t_1 = 2.5,$
$v_2 = 4, \quad \triangle t_2 = 4,$
$v_3 = 3.6, \quad \triangle t_3 = 2,$
$v_4 = 3.2, \quad \triangle t_4 = 3.$

Dakle, $\triangle s = 3.5 \cdot 2.5 + 4 \cdot 4 + 3.6 \cdot 2 + 3.2 \cdot 3 = 41.55$ metara.
Ovaj razmotreni slučaj pravocrtnog gibanja idealiziran je s obzirom da smo se koristili nekontinuiranim promjenama brzina. Sljedeća slika zorno to prikazuje.

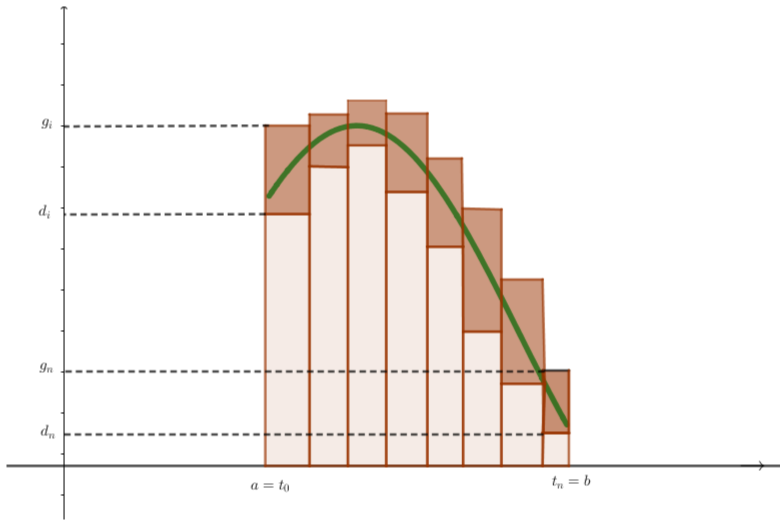


Slika 2.8: Prijeđeni put

U realnijim okolnostima i okruženju, u slučaju pravocrntog gibanja očekujemo da će se brzina tijela mijenjati kontinuirano s vremenom, a to znači da funkcija brzine $v = f(t)$ definirana na vremenskom intervalu $a \leqslant t \leqslant b$ neće biti skokovita. Preciznije, pretpostavit ćemo da je $v = f(t)$ neprekinuta funkcija definirana na intervalu $a \leqslant t \leqslant b$. Taj interval razdijelit ćemo na n jednakih dijelova, točkama $t_0, t_1, ..., t_n$. Odabrat ćemo konstante d_i i g_i, takve da vrijedi $d_i \leqslant f(t) \leqslant g_i$ za $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Sada možemo konstatirati da tijela koja se brže gibaju prelaze veće putove za jednake vremenske intervale pa možemo zaključiti da će tijelo tijekom vremenskog intervala (t_{i-1}, t_i) prijeći udaljenost veću od $d_i \triangle t_i$, ali ujedno i manji od $g_i \triangle t_i$. Dakle, ukupni put prijeđen od trenutka a do trenutka b veći je od $\sum_{i=1}^{n} d_i \triangle t_i$, i manji od $\sum_{i=1}^{n} g_i \triangle t_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \triangle t_i \leqslant s(b) - s(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g_i \triangle t_i.$$

Sve navedeno zorno se vidi na sljedećoj slici.



Slika 2.9: Ukupan prijeđeni put

Svjetlije osjenčano područje sa slike je donja procjena, $\sum_{i=1}^{n} d_i \triangle t_i$,ukupno prijeđenog puta, dok je površina tamnije osjenčanog dijela gornja procjena, $\sum_{i=1}^{n} g_i \triangle t_i$, tog istog puta. Tamnije osjenčana površina predstavlja zapravo područje, odnosno okvir u kojem se kreću greške tih dviju procjena. Smanjivanjem diobenih intervala, odnosno variranjem različitih subdivizija koje smo opisivali u drugom poglavlju, možemo postići da razlike gornjih i donjih procjena, odnosno konstanti $(g_i - d_i)$ postaju sve manje, a time i naše procjene točnije.

Možemo zaključiti da je ukupni prijeđeni put jednak površini područja ispod grafa $v = f(t)$, a pomoću donjih i gornjih procjena možemo ga izračunati po volji precizno, ovisno o diobi intervala.
Sada ćemo razmotriti razliku između relativne i stvarne površine na sljedećem primjeru iz knjige [14].

Primjer 2.3.
Unutar razdoblja od jednog sata praćena je brzina automobila. Ustanovljeni su sljedeći podatci, gdje je brzina izražena u kilometrima po satu:
$72 \leqslant v \leqslant 81$ za $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$
$78 \leqslant v \leqslant 93$ za $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}$
$90 \leqslant v \leqslant 99$ za $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$.
Naš zadatak je procijeniti prijeđeni put u razdoblju od jednog sata.

Rješenje:
Prema primjeru koji smo prethodno napravili možemo izreći da je donja procjena

$$72 \cdot \frac{1}{3} + 78 \cdot \frac{1}{3} + 90 \cdot \frac{1}{3} = 80 \quad km,$$

dok je gornja procjena

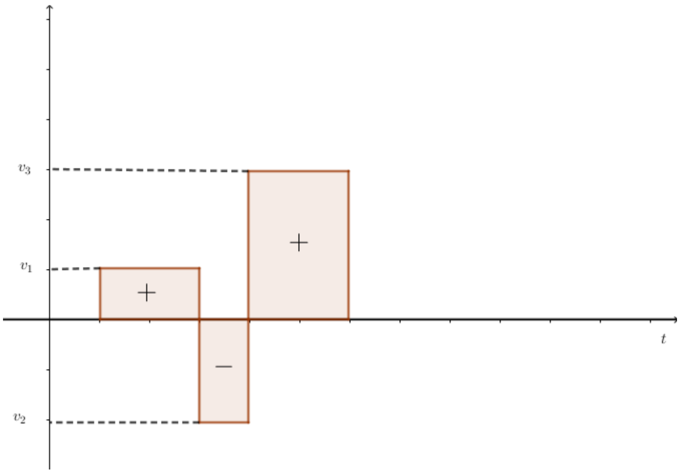
$$81 \cdot \frac{1}{3} + 93 \cdot \frac{1}{3} + 99 \cdot \frac{1}{3} = 91 \quad km.$$

Dakle, automobil je u jednom satu prešao najmanje 80 km, a najviše 91 km.

U dosadašnjim primjerima pretpostavljali smo da je brzina pozitivna veličina zato što se automobil, iako se gibao promjenjljivim brzinama, uvijek gibao u istom smjeru, možemo pretpostaviti udesno. Ukupni prijeđeni put bio je jednak razlici krajnjeg i početnog položaja automobila, što smo grafički prikazali na slikama 2.6 i 2.9. Bitno je razmotriti sljedeće. Ukoliko automobil, osim brzine, mijenja i smjer gibanja, tada gibanjima u jednom smjeru pridružujemo brzine koje su pozitivne, odnosno $v > 0$, a gibanjima u drugom smjeru brzine koje su negativne, tj. $v < 0$. U tom slučaju udaljenost od početnog položaja raste pa pada, ovisno o promjeni smjera gibanja, točnije, ovisno o predznaku od brzine v. Formulom

$$s(b) - s(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i \bigtriangleup t_i,$$

kao i prethodno, određena je razlika udaljenosti krajnjeg položaja i početnog položaja, ali sada to više nije ukupni prijeđeni put tijela koje se giba, nego takozvani relativni put. Relativni put je jednak relativnoj površini područja koje se proteže od intervala $[a, b]$ do grafa funkcije brzine $v = f(t)$. Relativna površina jednaka je razlici površina onoga dijela koji je iznad osi t i onoga koji je ispod osi t. To se može vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 2.10: Relativna površina

U prethodnim primjerima ovog odjeljka, površine smo određivali upotrebljavajući gornje i donje procjene, odnosno sume. Međutim, vrhunac razvoja infinitezimalnog računa rezultirao je Osnovnim teoremom infinitezimalnog računa koji nam je, između ostalog, omogućio računanje površina primjernom pravila za integriranje koja upravo proizlaze iz Osnovnog teorema. U sljedećem odjeljku iskazat ćemo Osnovni teorem, a potom ga i dokazati.

2.2.2 Osnovni teorem infinitezimalnog računa

U prvom odjeljku ovog poglavlja razmatrali smo, ugrubo, određene uvjete integrabilnosti funkcija. U jednom dijelu, kratko smo se dotaknuli neprekidnosti te smo spomenuli da su sve neprekidne funkcije integrabilne. Isto tako, definirali smo određeni integral, ali i primitivnu funkciju te neodređeni integral. U ovom odjeljku, integral smo definirali isključivo pomoću suma pa će i notacija za integral zapravo proizaći iz sume. Određeni integral proizvoljne funkcije f definirane na intervalu $[a, b]$, kojeg smo u prvom odjeljku ovog poglavlja definirali i konstruirali kao Riemannov integral, sada ćemo odrediti na sljedeći način,apstrahirajući prethodne rasprave o prijeđenom putu i brzini. Prvo ćemo definirati integral stepenaste funkcije g, a potom i integral funkcije f na segmetnu $[a, b]$. Integral stepenaste funkcije već smo koristili u prethodnim razmatranjima i zadan je s

$$G = \sum_{i=1}^{n} g_i \triangle x_i,$$

gdje je $\triangle x_i = x_i -_{i-1}$, a g_i je konstantna vrijednost funkcije g na intervalu (x_{i-1}, x_i). Sada možemo definirate nužne za konstrukciju određenog integrala.

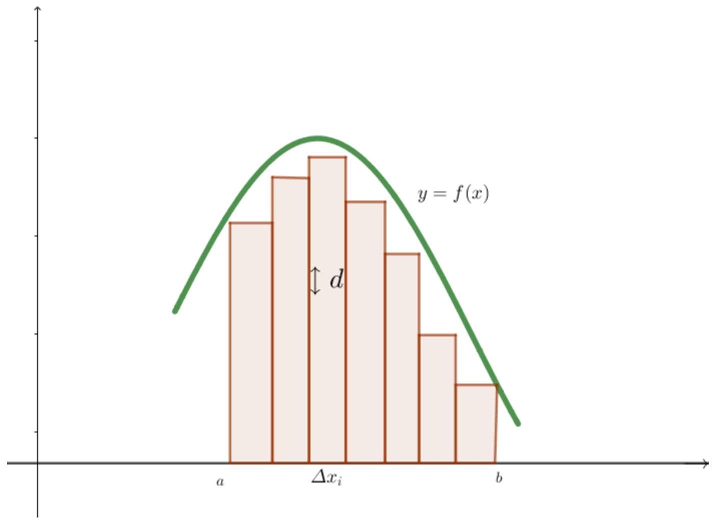
Definicija 2.2.1. *G je gornja suma za f na $[a, b]$ ako postoji stepenasta funkcija g na $[a, b]$, takva da je $g(x) \geq f(x)$ za sve $x \in [a, b]$ i G je integral od g na $[a, b]$, tj.$G = \sum_{i=1}^{n} g_i \triangle x_i$.*

Definicija 2.2.2. *D je donja suma za f na $[a, b]$ ako postoji stepenasta funkcija d na $[a, b]$, takva da je $d(x) \leq f(x)$ za sve $x \in [a, b]$ i D je integral od d na $[a, b]$, tj.$D = \sum_{i=1}^{n} d_i \triangle x_i$.*

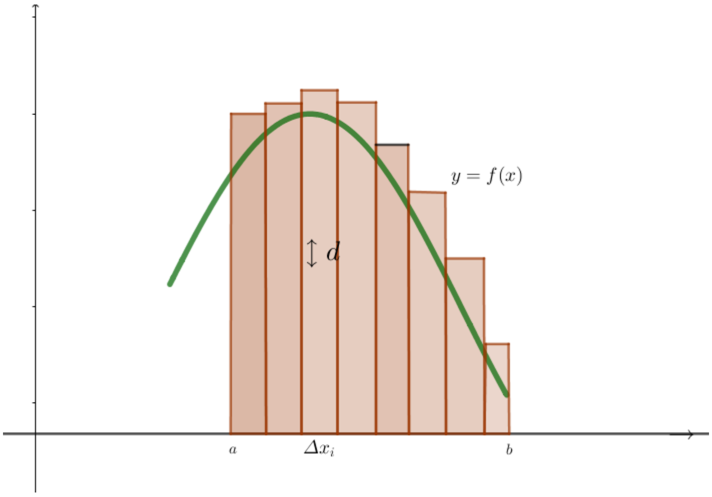
Ako na $[a, b]$ postoje gornje i donje sume za f koje se po volji malo razlikuju, onda postoji jedan jedini broj I koji je veći od svih donjih suma D i manji od svih gornjih suma G, $D \leqslant I \leqslant G$. Taj je broj integral funkcije f na intervalu $[a, b]$. Označavamo ga s $\int_a^b f(x)dx$, tj. $I = \int_a^b f(x)dx$. Ako postoji integral od f na $[a, b]$, onda kažemo da je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \triangle x_i \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} g_j \triangle x_j.$$

Iz definicije integrala funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ slijedi da je vrijednost integrala jednaka relativnoj površini područja koje se proteže od intervala $[a, b]$ na osi x pa do grafa funkcije $y = f(x)$. Bitno je napomenuti kako ovo nije jedina moguća interpretacija, zbog čega i postoje različiti pristupi konstrukciji određenog integrala.



Slika 2.11: Donja suma određena pomoću stepenaste funkcije



Slika 2.12: Gornja suma određena pomoću stepenaste funkcije

Kako smo već napomenuli, integral je definiran pomoću suma pa ćemo u sljedećoj definiciji definirati oznaku i krajnju definiciju.

Definicija 2.2.3. *Ako postoji jedan jedini broj koji donje sume za f na $[a, b]$ razdvaja od gornjih, to je integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, oznakom*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Taj je broj jednak relativnoj površini ispod grafa funkcije od f na $[a, b]$.

O povijesnom razvoju infinitezimalnog računa bilo je nešto malo govora u prvom poglavlju ovog rada. Tu smo već naglasili koliko je fundamentalna bila veza između diferencijalnog i integralnog računa. Sada, kad smo dovoljno dobro upoznati s oba ključna pojma, iskazat ćemo i dokazati Osnovni teorem infinitezimalnog računa.

Teorem 2.2.1. *Ako je funkcija diferencijabilna na $[a, b]$, a njezina je derivacija F' integrabilna na $[a, b]$, onda*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Drugim riječima, ako je funkcija f integrabilna na $[a, b]$, i ima antiderivaciju F, onda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Prvo što trebamo dokazati jest to da je $\sum_{i=1}^{n} g_i \bigtriangleup x_i \geq F(b) - F(a)$, za svaku stepenastu funkciju g veću od f na intervalu $[a, b]$. Neka su g_i vrijednosti od g na intervalima particije (x_{i-1}, x_i), $i = 1, ..., n$.Na intervalu (x_{i-1}, x_i) vrijedi $f(x) = F'(x) \leqslant g_i$, odakle slijedi

$$g_i \bigtriangleup x_i \geq F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Ako je brzina kojom se F mijenja na intervalu $x_{i-1}, x_i)$ stalno manja od konstantne brzine g, onda je i ukupna promjena $F(x_i) - F(x_{i-1})$ manja od $g_i(x_i - x_{i-1})$. Zbrajajući te nejednakosti od $i = 1$ do $i = n$, dobivamo traženu procjenu gornje sume:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \bigtriangleup x_i \geq \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Kada su u pitanju donje sume, slično dokazujemo da je

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \bigtriangleup x_i \leq \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Dakle, $F(b) - F(a)$ je broj veći od svake donje i manji od svake gornje sume za f, tj. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$, a to smo i trebali dokazati. □

2.2.3 Brzina promjene i ukupna promjena. Primjena integrala na rješavanje problema iz fizike

U ovom poglavlju pokušat ćemo naglasiti važnost intuitivnog i konceptualnog razumijevanja Osnovnog teorema infinitezimalnog računa, koncentrirajući se pritome ponajviše na pojmove ukupne promjene i brzine promjene. Prikazat ćemo nekoliko primjera pomoću kojih ćemo pokušati objasniti najavljenje pojmove, točnije, posvetit ćemo se intuitivnom razumijevanju Osnovnog teorema infinitezimalnog računa.

Primjer 2.4. Bazen se puni vodom iz cijevi kojom u trenutku t prolazi $12(t^2 + t)$ litara vode u minuti. Brzina istjecanja vode raste s vremenom. Brzina istjecanja prestaje rasti kada dosegne vrijednosti od 1320 litara u minuti. Od tog trenutka brzina istjecanja ima tu konstantnu vrijednost.

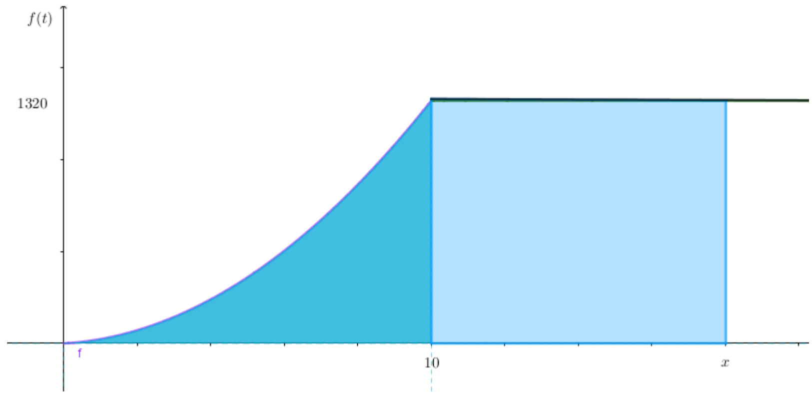
(a) S koliko se vode napuni bazen do trenutka u kojem počinje maksimalna brzina istjecanja?

(b) Koliko vremena treba da se napuni bazen koji sadrži 783 400 litara?

Rješenje:

(a) Maksimalna brzina istjecanja vode postiže se u trenutku t za koiji je $12(t^2 + t) = 1320$, tj. $= 10$ min. Prvi, iznimno važan, korak je definirati funkciju kojom je zadana brzina istjecanja vode iz cijevi. Ta funkcija je

$$f(t) = \begin{cases} 12(t^2 + t) & za \quad 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 1320 & za \quad 10 \leqslant t \end{cases}.$$



Slika 2.13: Količina vode

Količina vode koja uđe u bazen do trenutka postizanja maksimalne brzine predstavljena je na slici jače zatamnjenom površinom, a iznosi

$$\int_0^{10} 12(t^2 + t)dt = (4t^3 + 6t^2)\,|_0^{10} = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 = 4600 \quad litara.$$

(b) Trenutak x, u kojem se potpuno napuni bazen koji sadrži 783400 litara vode, predstavljen je na slici točkom x u kojoj ukupna zatamnjena površina dostigne vrijednost 783400, a određen je jednadžbom

$$783400 = \int_0^x f(t)dt = \int_0^{10} 12(t^2 + t)dt + \int_{10}^x 1320dt = 4600 + 1320(x - 10).$$

Kada riješimo jednadžbu $783400 = 4600 + 1320(x - 10)$, dolazimo do rezultata $x = 600$ minuta, što znači da se bazen poptuno napuni za 10 sati.

Možemo konstatirati da je brzina promjene količine vode u odnosu na vrijeme, do trenutka kada počinje maksimalna brzina istjecanja vode, u ovom slučaju zapravo $v(t) = 12(t^2 + t)$ L/min. To znači da je ukupna promjena količine vode, koju ćemo sada označiti sa $U_k = 4t^3 + 6t^2$ od $t = 0$ do $t = 10$ zapravo

$$\triangle U_k = U(10) - U(0) = \int_0^{10} 12(t^2 + t)dt.$$

Sada možemo preciznije odrediti vezu između brzine promjene i ukupne promjene. Primjer je preuzet iz [14]. Ta veza je jedna od temeljnih konceptualnih interpretacija infinitezimalnog računa, točnije Osnovnog teorema infinitezimalnog računa.

Ako je brzina promjene veličine V u odnosu na x zadana s $\frac{dV}{dx} = f(x)$, onda je ukupna promjena veličine V od $x = a$ do $x = b$ dana s:

$$\triangle V = V(b) - V(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ono što je bitno naglasiti jest to da navedeni izraz povezuje pojmove derivacije i određenog integrala te antiderivacije, odnosno neodređenog integrala. Takva realizacija je, kako smo već napomenuli, plod Osnovnog teorema infinitezimalnog računa, u svojem alternativnom obliku:

$$\frac{d}{dt}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Navedeni izraz kratko ćemo raspraviti. Izraz

$$\int_a^b F^{'}(x)dx = F(b) - F(a)$$

pri čemu je F diferencijabilna, a $F^{'}$ integrabilna funkcija na $[a, b]$, standardni oblik Newton-Leibnizove formule, zapravo možemo interpretirati kao

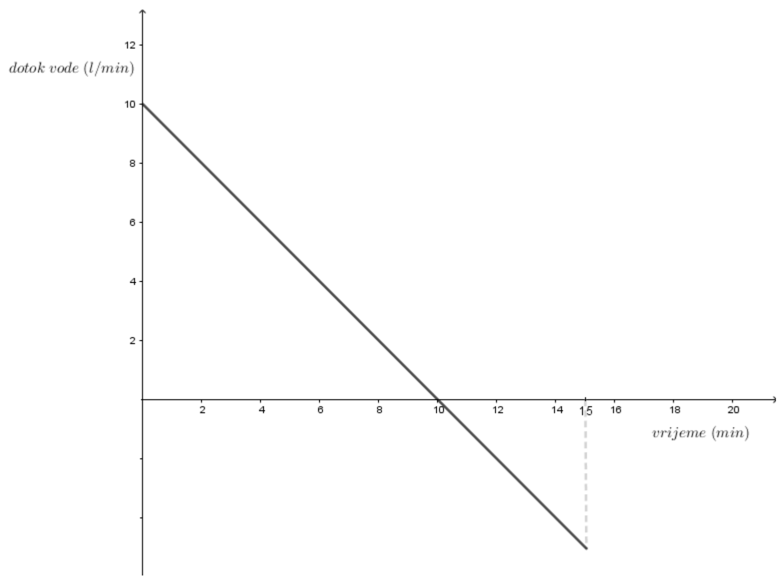
$$\int_a^b F^{'}(x)dx = F(b) - F(a), \quad F^{'}(x) = f(x),$$

ili kada se radi o neprekidnoj funkciji:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Navedena interpretacija Osnovnog teorema matematički omogućuje uspostavljanje veze između brzine promjene veličine i akumuliranja veličine, gdje je jedan od glavnih pojama funkcija akumulacije. Upravo funkcija akumulacije, odnosno ukupne promjene, $\int_a^x f(t)dt$, povezuje pojmove brzine promjene veličine i akumuliranja određene veličine. Ideja funkcije akumulacije zapravo podrazumijeva i uključuje male dijelove, "djeliće", veličine koja se akumulira, veličine kao što su put, brzina, količina vode, visina stabla i slično. Osim toga, uključuje i brzinu kojom se određena veličina akumulira. Detaljno i vrlo precizno objašnjenje ideja vezanih za funkciju akumulacije i brzinu promjene može se pronaći u [15], odakle smo i preuzeli okvire i ideje za sljedeći primjer na kojemu ćemo sve navedeno primijeniti.

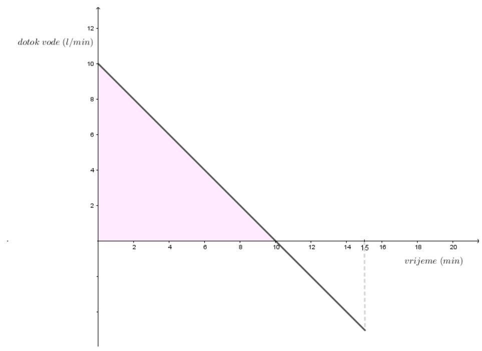
Primjer: Na slici je prikazan graf ovisnosti brzine promjene količine vode u spremniku (u litrama po minuti) o vremenu (u minutama). Opišite količinu vode u spremniku u vremenu za koje je prikazan graf.



Slika 2.14: Dotok vode

Prema slici 2.14 vidimo da nas zapravo zanima količina vode u spremniku nakon petnaest minuta. Također, promatrajući sliku, veliku ulogu igra i interpretacija grafa, odnosno interpretacija veličina i izgled grafa. Na intervalu [0, 10], gdje je vrijednost brzine pozitivna zapravo se radi o dotjecanju vode. Dakle pozitivnu brzinu promjene interpretiramo kao dotjecanje, a negativnu kao istjecanje. Funkciju brzine promjene količine vode možemo označiti s v. Istjecanje vode događa se na intervalu [10, 15], odnosno za to vrijeme.

Za početak, odredimo prvo koliko je litara vode doteklo u spremnik tijekom prvih 10 minuta. Točnije, zanima nas iznos ukupne promjene količine vode u spremniku u tom vremenu. Slično kao i u prethodnom primjeru, to znači da trebamo odrediti površinu ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 10]$.

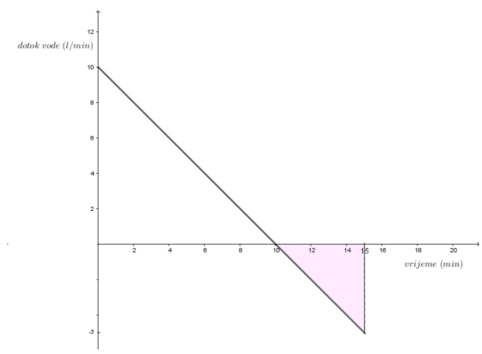


Slika 2.15: Ukupna količina vode u spremniku u prvih deset minuta

Na gornjoj slici je osjenčana površina površina jednakokračnog pravokutnog trokuta. Površina iznosi:

$$P = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50.$$

Dakle, možemo zaključiti da je u spremnik doteklo 50 litara vode u prvih deset minuta. Promotrimo sada što se događa nakon desete minute, odnosno u vremenu $[10, 15]$. Nakon desete minute odnosno u idućih pet minuta voda zapravo istječe iz spremnika. Na tom intervalu funkcija v poprima negativne vrijednosti jer se istjecanje vode odvija u suprotnom smjeru od dotjecanja. Da bismo odredili ukupnu količinu vode koja je istekla iz spremnika, odredit ćemo površinu iznad grafa funkcije v. na intervalu $[10, 15]$.



Slika 2.16: Ukupna količina vode u spremniku u prvih deset minuta

Na slici 2.16 osjenčana je tražena površina. I u ovom slučaju određujemo površinu jednakokračnog pravokutnog trokuta sa sljedećim dimenzijama:

$$P = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} = 12.5.$$

Na temelju navedenog možemo zaključiti da je od desete do petnaeste minute iz spremnika isteklo 12.5 litara vode. Sada, vratimo se na glavno pitanje problema koje zahtijeva da se odredi količina vode u spremniku u vremenskom razdoblju predstavljenom intervalom $[0, 15]$. Dakle, zanima nas ukupna količina vode u spremniku nakon petnaest minuta. Da bismo odredili količinu vode koja se nalazi u spremniku nakon vremenskog intervala od petnaest minuta, od količine vode koja je dotekla u spremnik, oduzet ćemo količinu vode koja je istekla iz spremnika:

$$50 - 12.5 = 37.5.$$

Možemo zaključiti kako se u spremniku nalazi 37.5 litara vode nakon petnaest minuta. Sav navedeni postupak implicira relacije između brzine promjene i ukupne promjene i na sve ono što u sebi sadrži takav pristup Osnovnom teoremu infinitezimalnog računa. Zato je potrebno problem sagledati iz malo drugačije perspektive, matematički kompletnije. I ovdje možemo vidjeti ideju funkcije akumulacije, pomoću koje ”skupljamo” površinu, pa i negativnu. Tu se otvara jedno izazovno pitanje, pitanje razlike između integrala kao geometrijske intepretacije površine i striktno računske interpretacije određenog integrala definiranog pomoću Newton-Leibnizove formule. Kako bismo razjasnili sva navedena pitanja, ovom primjeru pristupit ćemo na sljedeći način.
Funkciju v zapisat ćemo pomoću pravila pridruživanja:

$$v : [0, 15] \to R : \quad v(t) = -t + 10, \quad 0 \leqslant t \leqslant 15.$$

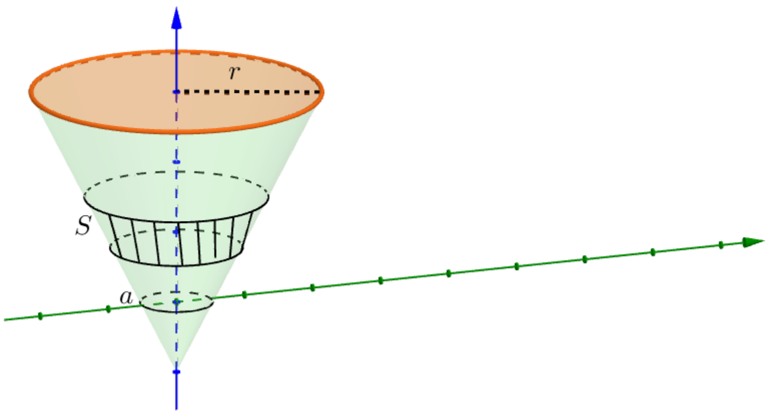
Vidimo da ovdje vrijedi važna veza koju smo spomenuli neposredno prije ovog primjera. Veličina ukupne količine vode u spremniku, koju možemo označiti s V ovisi o veličini t i mijenja se u odnosu na t brzinom $\frac{dV}{dt}$. Navedeno zapravo predstavlja vezu koja vrijedi za ukupnu, odnosno relativnu, promjenu veličine i upravo je to glavni konceptualni sadržaj Osnovnog teorema infinitezimalnog računa. Dakle, da bismo odredili količinu vode u spremniku nakon petnaest minuta, trebamo izračunati **relativnu površinu** između grafa funkcije v i x osi. To znači da mjerimo ukupnu promjenu i određujemo vrijednost određenog integrala:

$$\int_0^{15} = (-t + 10)dt = (\frac{-t^2}{2} + 10t) \mid_0^{15} = -112.5 + 150 = 37.5.$$

Vidimo da smo dobili jednak rezultat kao i u gornjem dijelu. Zaključit ćemo ovu raspravu konstatcijom da je razlika između relativne i geometrijske površine zapravo konceptualna razlika. U ovom slučaju smo upravo pomoću ideje funkcije akumulacije odredili ukupnu promjenu vode u spremniku i na taj način pokazali kako određeni integral upravo to i mjeri u jednoj od svojih realizacija Osnovnog teorema. Postoji niz konceptualnih primjera pomoću kojih se o navedenim pitanjima može raspravljati. Osim ovih koje smo ovdje ukratko razradili, u zadnjem poglavlju na sličan način razliku između konceptualnih interpretacija integrala razradit ćemo dodatno i na primjeru puta i pomaka.

Sada ćemo se kratko osvrnuti na konkretan fizikalni problem u kojem ćemo također primjenjivati izravnu vezu diferencijalnog i integralnog računa, a pritom intuitivno povezati brzinu promjene i ukupnu promjenu određene veličine. Zadatak je preuzet iz [2].

Primjer 2.5. Posuda koja ima oblik uspravnog kružnog stošca visine h i polumjera osnovke r, napunjena je vodom. Nakon koliko će se vremena isprazniti ta posuda kroz otvor površine a u vrhu stošca?



Slika 2.17: Posuda oblika stošca

Rješenje: Pretpostavit ćemo da je za "mali" vremenski interval dt istekao kroz donji otvor elemnt obujma vode dO, koji možemo smatrati valjkom površine osnovice S i visine dy.To se zornije može vidjeti na slici (3.9.).

$$dO = S\,dy.$$

S druge strane poznate je da, ako se zanemare svi otpori, brzina istjecanja kroz otvor jednaka je brzini tijela, koje slobodno pada s visine jednakoj dubini vode u ovoj posudi. Prema tome, brzina istjecanja kroz otvor čestica vode, koje se nalaze u dubini y, bit će:

$$v = \sqrt{(2gy)}.$$

gdje je $g = 9.81$ m/s^2. S obzirom na to da je protok vode tekućine, u ovom slučaju vode, jednak umnošku površine otvora i brzine istjecanja, isteći će u jedinici vremena kroz otvor površine a sljedeći obujam vode:

$$a \cdot v = a\sqrt{(2gy)},$$

a za vrijeme dt :

$$dO = a\sqrt{(2gy)} \cdot dt.$$

Za vrijeme dt istekao je element obujma vode $dO = S \cdot dy$, pa vrijedi:

$$S \cdot dy = a\sqrt{(2gy)} \cdot dt. \tag{2.16}$$

Kako bismo mogli integrirati, trebali bismo promjenljivu veličinu, površinu S osnovice elementa dO, izraziti s y.Znamo, da se površine paralelnih presjeka stošca odnose kao kvadrati njihovih udaljenosti od vrha pa vrijedi:

$$S : \pi r^2 = y^2 : h^2,$$

a otuda:

$$S = \frac{\pi r^2 y^2}{h^2}.$$

Uvrštavanjem u (2.16) dobiva se:

$$dt = \frac{\pi r^2 y^2}{h^2 a\sqrt{(2gy)}},$$

a potom integriranjem i uvrštavanjem granica

$$t = \frac{\pi r^2}{h^2 a\sqrt{(2g)}} \int_0^h y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{\pi r^2\sqrt{(h)}}{5a\sqrt{(2g)}}.$$

2.3 Metodičko ostvarenje integrala u srednjoškolskoj nastavi matematike

Deriviranje, kao postupak i tehnička matematička procedura, teče uglavnom lako u srednjoškolskoj nastavi. Uz pomoć nekoliko pravila i formula mogu se derivirati sve elementarne funkcije. Antideriviranje, postupak suprotan deriviranju, je međutim nešto teži kada

je riječ o samom postupku integriranja. Samo se jedan "manji" dio elementarnih funkcija može antiderivirati. Pojmu neodređenog integrala prethodi pojam određenog integrala, no u srednjoškolskim udžbenicima često se pribjegava malo drugačijem pristupu. Definicija neodređenog integrala smatra se jednostavnijom od definicije određenog integrala te se zbog toga u nastavi matematike prvo proučavaju neodređeni, a potom određeni integrali. Jedne i druge zajedno najčešće kratko zovemo integralima. Spomenuta značajna formula, Leibniz-Newtonova formula, ima velike mogućnosti primjene kada se savlada postupak antideriviranja. Isti redoslijed slijedi i većina srednjoškolskih udžbenika kada je u pitanju integralni račun. Sve glavne značajke metodičke obrade integralnog računa u srenjoškolskoj nastavi predstavit ćemo kroz nekoliko sljedećih odjeljaka, ali i prikazati neke malo drugačije pristupe obradi istoga. Integralni račun dio je obveznog nastavnog sadržaja za sve prirodoslovno-matematičke gimnazije, opće gimnazije, ali i za neke strukovne škole. Osim na samu definiciju i konstrukciju integralnog računa, koncentirat ćemo se i na konceptualno razumijevanje integralnog računa, kao i na njegovu primjenu, a sve to i u nekim kontekstima za koje je često dovoljno samo konceptualno razumijevanje diferencijalnog i integralnog računa.
Ovo su neki od glavnih ishoda učenja vezanih za integralni račun, koje će učenik postići, predviđenih u općim gimnazijama koje izvode godišnje 160 matematike:

1. Računa neodređeni integral rabeći osnovna svojstva i tablicu neodređenih integrala.
2. Primjenjuje metodu supstitucije u računanju integrala.
3. Računa neodređeni integral u jednostavnim situacijama.
4. Računa određeni integral rabeći Newton-Leibnizovu formulu.
5. Određuje površinu ispod grafa funkcije i obujam rotacijskoga tijela pomoću integrala.
6. Primjenjuje integrale u rješavanju problema iz matematike i fizike.
7. Računa određeni integral za određivanje površine u složenim situacijama.

2.3.1 Integrali u srednjoškolskim udžbenicima. Neodređeni integral i primitivna funkcija

Konstrukciju neodređenog integrala započet ćemo na isti način kako je to učinjeno u [1].

Primjer 2.6. Nakon što se tanker nasukao na hrid, počeo je ispuštati naftu. Brzina kojom se naftna mrlja širi ovisi o broju x minuta nakon početka ispuštanja i dana je formulom

$$P'(x) = 3x^2 + 2$$

kvadratnih metara u minuti.

a) Odredimo brzinu širenja naftne mrlje nakon sat vremena.

b) Odredimo površinu naftne mrlje nakon sat vremena.

Prije nego opišemo postupak rješavanja ovog primjera, kratko ćemo se osvrnuti na njegovu metodičku pozadinu. Kroz ovaj primjer povezuje se zapravo diferencijalni i integralni račun. Veza derivacije i antiderivacije ovdje je prikazana vrlo suptilno, a opet dovoljno očito da se derivacija i integral dovedu u vezu na jedan od načina kako smo ih dovelu u prethodnim odjeljcima, konkretnije kada smo spominjali brzinu promjene i ukupnu promjenu. Stavljen je naglasak na koncept, koji kada se nastavi razvijati, vrlo prirodno će dovesti do Newton-Leibnizove formule.

Rješenje: a) S obzirom da to da je dana formula koja opisuje brzinu širenja mrlje, kako bismo izračunali brzinu širenja nakon sat vremena, uvrstit ćemo $x = 1$ sat=60 min, u zadanu formulu:

$$P'(60) = 3 \cdot 60^2 + 2 = 10802$$

kvadratna metra u minuti, a to je jednako 0.64812 km^2/h.

b) Da bismo izračunali površinu naftne mrlje nakon sat vremena, treba nam formula koja računa površinu mrlje $P(x)$ u ovisnosti o x minuta. U našem slučaju, poznata nam je formula za brzinu promjene te površine,odnosno poznata nam je derivacija traženog izraza za površinu.Ono što nas zanima jest funkcija koju treba derivirati da bi se dobilo $3x^2 + 2$,

$$(?)' = 3x^2 + 2.$$

Funkciju koja se traži zapravo je

$$P(x) = x^3 + 2x,$$

što se vrlo lako može provjeriti deriviranjem. Sada, možemo odrediti površinu naftne mrlje 1 sat nakon početka ispuštanja:

$$P(60) = 60^3 + 2 \cdot 60 = 216120m^2 = 0.21612km^2$$

U ovom zadatku naišli smo na sljedeće pitanje. Naime, zanima nas, ako je dana neka funkcija $f : \langle a, b\rangle \to R$, je li ta funkcija derivacija neke druge funkcije i koje točno? Postoji li neka funkcija $F : \langle a, b\rangle \to R$, tako da vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za sve x iz intervala $\langle a, b\rangle$? Upravo ovo pitanje sadrži u sebi vezu između pojmova derivacije i antiderivacije, što je i okosnica metodičkog pristupa kojeg analiziramo i prikazujemo.

Definicija 2.3.1. *Neka je $f : \langle a, b\rangle \to R$ neka funkcija. Tada svaku funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ nazivamo primitivna funkcija ili antiderivacija funkcije f.*
Skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f zove se neodređeni integral funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$.To zapisujemo ovako:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in R.$$

$\int$ je znak za integral, f je podintegralna funkcija (integrand), a $f(x)dx$ je podintegralni izraz, dok je x varijabla integracije.

Ovom definicijom jasno je naznačena, barem konceptualno, razlika između antidrivacije i primitivne funkcije. Pri određivanju primitivne funkcije, odnosno neodređenog integrala, koristimo se svojstvima neodređenog integrala koja proizlaze iz same definicije neodređenog integrala, ali u tu sferu sada nećemo zalaziti. Prije nego zaključimo ovaj odjeljak, osvrnut ćemo se kratko na udžbenik [6]. Ono što je posebno zanimljivo u spomenutom udžbeniku je pristup obradi integralnog računa. Naime, autori prvo uvode pojam površine i integrala, a nakon toga pojam nagiba, brzine i derivacije. Na prvu takav pristup čini se dosta neobičan, s obzirom da je većinom prisutna drugačija praksa. Može se konstatirati kako ovakav pristup, u kojem se prije pojma dervacije i nagiba tangente razmatra koncept površine i integrala, zasigurno pridonosi razvijanju konceptualnog razumijevanja infinitizemalnog računa, osobito ako se uzme u obzir da praksa u većini slučajeva pokaže kako je učenicima jednostavniji i prirodniji pojam površine, negoli pojam tangente i nagiba. Opisat ćemo kako je u navedenom udžbeniku opisano određivanje površine ispod grafa funkcije $f(x) = x^2$. Pristup kojim je razrađen primjer također može biti ideja za neku od aktivnosti u nastavi.

Primjer 2.7. Odredimo površinu i omeđenu grafom funkcije $f(x) = x^2$ i pravcima $x = 0$ te $x = 1$.

Rješenje: Površinu P možemo odrediti tako da nađemo sve bolje i bolje približne vrijednosti. Ako segment $[0, 1]$ podijelimo na četiri jednaka dijela točkama $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$, možemo uočiti da P obuhvaća tri jače zatamnjena pravokutnika ukupne površine

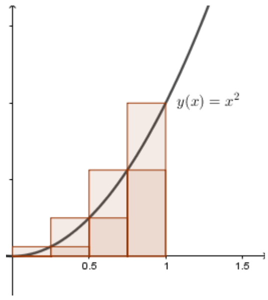
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}^2 .$$

S druge strane, površina je P obuhvaćena s četiri zatamnjena prvaokutnika ukupne površine

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4}^2 .$$

Dakle,

$$\frac{1}{4^3}(1^2 + 2^2 + 3^3) \leqslant P \leqslant \frac{1}{4^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2).$$



Slika 2.18: Aproksimacija površine

Podjelom segmenta [0, 1] na n jednakih dijelova, dobivamo općenito:

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2) \leqslant P \leqslant \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2).$$

Jače zatamnjenu $n-$tu aproksimaciju pd P označavamo s D^n i zovemo je donjom sumom, a čitavu (i jače i slabije) zatamnjenu aproksimaciju od P označavamo s G_n i zovemo gornjom sumom za P.

$$D^n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2), G_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2).$$

Niz (D_n) je rastući, a niz (G_n) padajući i vrijedi:

$$D_n \leqslant P \leqslant G_n.$$

Nizovi (D_n) i (G_n) imaju zajednički limes P i vrijedi

$$P = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} G_n.$$

Da bismo izračunali traženu graničnu vrijednost, upotrijebit ćemo formulu za zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

a odatle je

$$G_n = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}).$$

Prema tome, vrijedi da je

$$P = \lim_{n\to\infty} G_n = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Odavde slijedi da je površina nad segmentom $[0, 1]$, a ispod parabole $y = x^2$ jednaka:

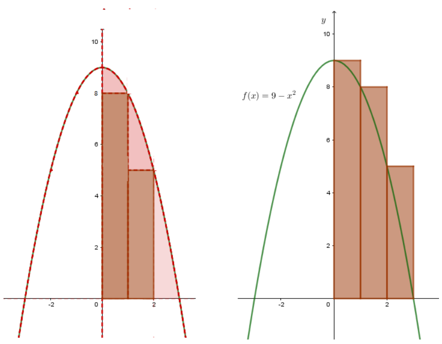
$$P(a) = \frac{a^3}{3}.$$

Zanimljivo je istaknuti da je površinu na ovaj način izračunao Arhimed.

2.3.2 Određeni integral i Newton-Leibnizova formula

Nakon što smo definirali određeni integral, pristupamo konstrukciji određenog integrala, i to s geometrijskog i fizikalnog aspekta, slično kako se pojam određenog integrala razvijao i kroz povijest. Ključno pitanje koje postavljamo je sljedeće. Znamo da je neodređeni integral neka funkcija, ali što ta funkcija računa na nekom intervalu realnih brojeva? Odgovor na to pitanje daje nam upravo pojam određenog integrala kojem je prethodio problem mjerenja površine. Kao što smo već opisali u prvim poglavljima ovog rada, računanje površine ravninskog lika svodi se na problem određivanja površine krivocrtnog trapeza ispod grafa neke funkcije. Ovdje krećemo s konkretnim primjerom što daje naslutiti razliku u metodičkom pristupu problemu ovdje i u prethodna dva odjeljka. Pokažimo to na sljedećem primjeru iz udžbenika [1]:

Primjer 2.8. Odredimo površinu ispod grafa funkcije $f(x) = 9 - x^2$ na intervalu $[0, 3]$. Osnovna ideja je da površinu ispod grafa navedene funkcije aproksimiramo površinom niza upisanih ili opisanih pravokutnika kao na sljedećim slikama.



Slika 2.19: Aproksimacija površine ispod grafa funkcije upisanim i opisanim pravokutnicima

Sa slike je vidljivo da smo interval $[0, 3]$ podijelili na tri jednaka dijela, na intervale duljine 1. Pri tome je duljina svakog upisanog ili opisanog pravokutnika 1. Visina jednog upisanog pravokutnika je minimalna vrijednost funkcije f na tom intervalu, a postiže se u krajnoj točki tog intervala. Visina jednog opisanog pravokutnika je maksimalna vrijednost funkcije f na tom intervalu, a postiže se u početnoj točki tog intervala. Izračunajmo vrijednosti funkcije u rubnim točkama svakog intrevala.

x	0	1	2	3
$f(x)$	9	8	5	0

Slika 2.20: Tablica podataka

Ukupna površina svih upisanih pravokutnika je sljedeća:

$$s = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 13$$

kvadratnih jedinica. Ukupna površina opisanih pravokutnika je:

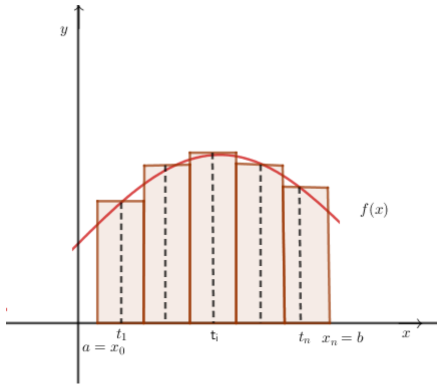
$$S = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 5 = 22$$

kvadratne jedinice. Iz toga se može zaključiti da je stvarna površina ispod grafa funkcije f negdje između brojeva 13 i 22, što se vidi i sa slike. To je još uvijek gruba procjena, no povećamo li broj upisanih ili opisanih pravokutnika, odnosno, podijelimo interval $[0, 3]$ na sve veći broj dijelova, smanjivat će se razlika između zbroja površina upisanih pravokutnika i zbroja površina opisanih pravokutnika. Zbroj površina upisanih pravokutnika je takozvani donji integralni zbroj, a zbroj površina opisanih pravokutnika je takozvani gornji integralni zbroj. Na taj način dobit ćemo sve bolje i bolje aproksimacije tražene površine. Ovaj postupak možemo poistovjetiti s apstrahiranim postupkom subdivizije segmenta iz prethodan dva poglavlja. Tu se također vidi razlika u metodičkim pristupima, koji dakako ovise o razini na kojoj se poučava i uči. Granična vrijednost obaju zbrojeva dat će nam stvarnu površinu, koja iznosi 18. Sada možemo apstrahirati prethodno navedenu konstrukciju. Općenito, neka je f neprekidna i pozitivna funkcija definirana na intervalu $[a, b]$. Izračunajmo površinu ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$. I na prethodnom primjeru, a i u prethodnim poglavljima, vidjeli smo da tu površinu moćemo aproksimirati zbrojem površina niza pravokutnika. U tu svrhu podijelimo interval $[a, b]$ točkama

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

na n manjih intervala. Kako bismo cijeli problem pojednostavili, ali bez smanjenja općenitosti, možemo umjesto upisanih i opisanih pravokutnika nad svakim malim intervalom $[x_{i-1}, x_i]$

promatrati pravokutnike visine $f(t_i)$, gdje je t_i proizvoljna točka na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$. Ovi su pravokutnici ukopljeni između upisanih i opisanih pravokutnika.



Slika 2.21: Pravokutnici uklopljeni između upisanih i opisanih pravokutnika

Promotrimo sada jedan takav pravokutnik. Površina $i-$ tog pravokutnika jednaka je

$$P_i = f(t_i) \cdot \triangle x_i$$

gdje je $\triangle x_i$ duljina intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Zbroj površina svih n takvih pravokutnika iznosi:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_1 \triangle x_1) + f(t_2 \triangle x_2) + ... + f(t_n \triangle x_n).$$

Ovaj zbroj zovemo integralni zbroj funkcije f na intervalu $[a, b]$.On će nam dati jednu aproskimaciju površine ispod grafa funkcije f. Ako želimo bolju aproksimaciju, onda ćemo povećati broj intervala n, odnosno broj pravokutnika kojima se duljina time sve više smanjuje i sve bolje prekriva traćenu površinu. Ako smo interval $[a, b]$ dijelili na n jednakih dijelova tada duljina $\triangle x_i$ svakog pravokutnika iznosi $\delta_n = \frac{b-a}{n}$.Inače možemo uzeti da je δ_n najveća duljina od svih duljina $\triangle x_i$. Pustimo $\delta_n \to 0$ te time dobivamo stvarnu površinu ispod grafa funkcije f kao graničnu vrijednost ili limes integralnih zbrojeva kada $\delta_n \to 0$. Sada možemo definirati određeni integral na sljedeći način.

Definicija 2.3.2. *Određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ limes je integralnih zbrojeva, kada $\delta_n \to 0$. Pišemo:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n \to 0} f(t_i) \triangle x_i$$

Broj a je donja granica, a b gornja granica integrala.

Nakon što smo definirali neodređeni i određeni integral, prirodno se nameće zahtjev za konstrukcijom veze između ta dva pojma. U srednjoj školi, Osnovni teorem infinitezimalnog računa, podrazumijeva se pod izrazom Newton-Leibnizova formula i uvodi se kroz motivacijski primjer koji ćemo i mi slijediti.

Primjer 2.9. Brzina zrakoplova u trenutku t (sekundi) nakon polijetanja dana je u m/s formulom $v(t) = 10t + 50$. Jednu minutu nakon polijetanja zrakoplov nastavlja letjeti konstatnom brzinom po pravcu.

(a) Odredimo koliki put $s(t)$ u metrima prijeđe zrakoplov t sekundi nakon polijetanja, ako je prije toga na zemlji prešao 1000 m.

(b) Koliki je put u km zrakoplov prešao od trenutka polijetanja do trenutka kad je nastavio voziti konstantnom brzinom? Kolika je ta brzina?

(c) Nacrtajmo graf funkcije $v(t) = 10t + 50$ i izračunajmo površinu ispod grafa te funkcije na intervalu $[0, 60]$.

(d) Usporedimo rezultate pod (b) i (c). Izvedite zaključak.

Rješenje:
(a) Kako je brzina derivacije puta po vremenu, ovisnost puta o vremenu dobit ćemo određivanjem primitivne funkcije ili neodređenog integrala funkcije v. Vrijedi:

$$s(t) = \int (10t + 50)dt = 5t^2 + 50t + c.$$

Konstantu c odredimo iz činjenice da je do trenutka polijetanja $t = 0$ zrakoplov prešao 1000 m.

$$1000 = 5 \cdot 0^2 + 50 \cdot 0 + c.$$

Dakle,

$$c = 1000.$$

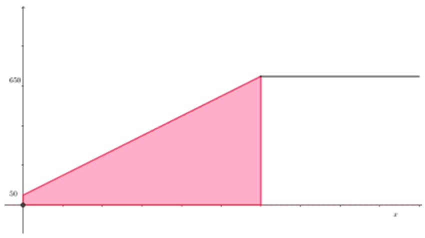
Put u metrima nakon t sekundi dan je formulom

$$s(t) = 5t^2 + 50t + 1000.$$

(b) Traženi put je razlika

$$s(60) - s(0) = 5 \cdot 60^2 + 50 \cdot 60 + 1000 - 1000 = 21000 \quad m = 21 \quad km.$$

Brzina zrakoplova nakon 60 sekundi iznosi 650 m/s
(c)



Slika 2.22: Površina ispod grafa funkcije

Površina ispod grafa funkcije v na intervalu od $[0, 60]$ površina je osjenčanog trapeza i iznosi

$$P = \frac{650 + 50}{2} \cdot 60 = 21000.$$

d) U oba smo zadatka dobili isti rezultat zbog čega se da zaključiti da površina ispod grafa funkcije $v(t)$ predstavlja put koji je zrakoplov prešao nakon 1 minute od polijetanja. Dakle, određeni integral ili površinu ispod grafa neke funkcije možemo izračunati pomoću njezine primitivne funkcije, odnosno neodređenog integrala:

$$\int_0^{60} v(t)dt = \int_0^{60} (10t + 50)dt = s(60) - s(0) = 21000$$

gdje je

$$s(t) = \int (10t + 50)dt.$$

Ovaj zaključak dovodi nas do Newton-Leibnizove formule, zbog čega vrijedi i općenito, a dan je sljedećim izrazom:

Teorem 2.3.1. *Neka je f neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Tada vrijedi:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

gdje je F primitivna funkcija za funkciju f.

Newton-Leibnizova formula može se još zapisati u obliku:

$$\int_a^b f(x)dx = (\int f(x)dx)|_a^b.$$

Newton-Leibnizova formula osnovna je formula integralnog računa i, ono najvažnije, povezuje pojam određenog integrala s pojmom neodređenog integrala.

2.3.3 Površina ravninskih likova i obujam rotacijskih tijela

Kada je u pitanju računanje površine, osvrnut ćemo se prvo na razlikovanje relativne i stvarne površine, što smo kratko spomenuli u prethodnom odjeljku. Započet ćemo s primjerom, baš kako je navedeno u udžbeniku [1].

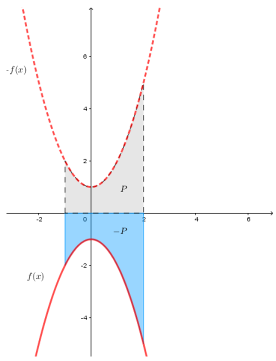
Primjer 2.10. Izračunajmo $\int_{-1}^{2}(-x^2 - 1)dx$ i odredimo geometrijsko značenje rezultata.

Rješenje:

Prvo ćemo izračunati određeni integral. Primjenom Newton-Leibnizove formule vrijedi:

$$\int_{-1}^{2}(-x^2 - 1)dx = (-\frac{x^3}{3} - x)\,|_{-1}^{2} = -\frac{14}{3} - \frac{4}{3} = -6.$$

Vidimo da ovaj integral ima negativnu vrijednost, što bi značilo da je površina ispod grafa funkcije f na intervalu $[-1, 2]$ negativna. Možemo se zapitati kako je moguće da je površina negativna. Promotrimo sliku 2.23.



Slika 2.23: Graf funkcije f

Kada smo dosad računali površinu ispod grafa funkcije f na nekom intervalu $[a, b]$, funkcija f bila je pozitivna na tom intervalu. Bitno je uočiti da u samoj definiciji određenog uvjeta takvog zahtjeva nema. U ovom primjeru funkcija f je negativna na intervalu $[-1, 2]$ i njezin određeni integral ima negativan predznak. Tada taj određeni integral ne predstavlja površinu ispod, već iznad grafa te funkcije, a ispod osi x te zato ima negativan predznak. S obzirom na to da je $-f$ pozitivna, a površina ispod njezina grafa jednaka je površini iznad grafa funkcije f, stvarnu, onu pozitivnu površinu, daje nam određeni integral funkcije $-f$. Ako je f negativna na $[a, b]$, tada je površina omeđena grafom funkcije f i osi x na intervalu

$[a, b]$ jednaka:

$$P = \int_a^b (-f(x))dx.$$

Općenito zaključujemo:
$\int_a^b f(x)dx$ odnosno određeni integral funkcije f koja na intervalu $[a, b]$ mijenja predznak, predstavlja relativnu površinu, odnosno površinu dijela područja iznad x osi umanjenu za površinu dijela ispod osi x. Sada, kada smo napravili distinkciju između određenog integrala i površine ispod grafa funkcije, izračunat ćemo površinu koju graf funkcije $f(x) = -x^2 - x$ zatvara s x osi na segemntu $[-1, 2]$. Dakle, geometrijsko značenje rezultata je sljedeće:

$$P = \int_{-1}^{2} (-f(x))dx = \int_{-1}^{2} (-(-x^2 - 1))dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = (\frac{x^3}{3} + x)|_{-1}^{3} = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = 6.$$

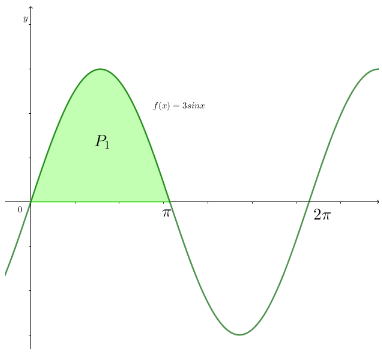
To znači da je površina omeđena parabolom $y = -x^2 - 1$, osi x te pravcima $x = -1$ i $x = 2$ jednaka 6 kvadratnih jedinica.

Primjer 2.11. Neka je $f(x) = 3\sin x$. Odredimo površinu koju zatvara graf funkcije f s osi x na intervalu:
(a) $[0, \pi]$,

(b) $[0, 2\pi]$.

Rješenje:

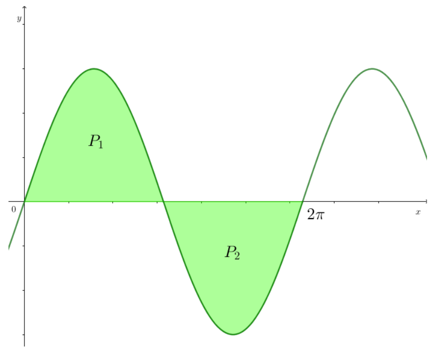
(a)



Slika 2.24: Površina ispod grafa funkcije $f(x) = 3\sin x$

$P_1 = \int_0^{\pi} 3\sin x dx = -3\cos x \,|_0^{\pi} = -3\cos\pi + 3\cos 0 = 3 + 3 = 6.$

(b)



Slika 2.25: Površina koju zatvara graf funkcije $f(x) = 3\sin x$ s $x-$osi

Ako izračunamo određeni integral funkcije $\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$, dobivamo:

$$\int_0^{2\pi} 3\sin x dx = -3\cos x \,|_0^{2\pi} = -3\cos 2\pi + 3\cos 0 = -3 + 3 = 0.$$

što je relativna površina ispod grafa funkcije $\sin x$. Stvarnu površinu, onu koju tražimo, računamo na sljedeći način:

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^{2\pi} 3\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-3\sin x) dx = -3\cos x|_0^{\pi} + 3\cos x|_{\pi}^{2\pi} = 3+3+3+3 = 12.$$

Kako bismo zaokružili raspravu vezanu za distinkciju relativne i stvarne površine, prokomentirat ćemo i sljedeći primjer:

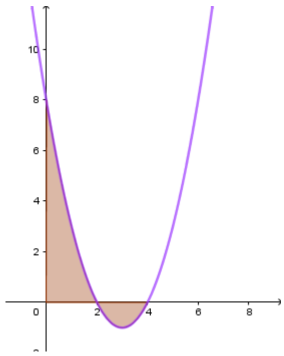
Primjer 2.12. Izračunajte površinu omeđenu parabolom $y = x^2 - 6x + 8$, i pravcima $x = 0, x = 4, y = 0$.

Rješenje:
Kako bismo mogli skicirati graf funkcije f prvo ćemo riješiti jednadžbu $x^2 - 6x + 8 = 0$ kako bismo dobili nultočke funkcije f. Nultočke su brojevi $2, 4$ pa možemo skicirati graf funkcije kao na slici 2.26. Sada ćemo odrediti geometrijsku interpretaciju rezultata, odnosno površinu, kako se i traži u zadatku.

$$P = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)dx - \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)dx = (\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x)|_0^2 - (\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x)|_2^4 = 8.$$

Bitno je primijetiti kako funkcija f mijenja svoj predznak na intervalu $[0,4]$, u svojim nultočkama, zbog čega smo površinu odredili na sljedeći način:

$$P = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx.$$



Slika 2.26: Površina koju zatvara graf funkcije $f(x) = x^2 - 6x + 8$ s $x-$osi

Nakon što smo prodiskutirali glavne okosnice pojmova relativne i stvarne površine, možemo zaključiti sljedeće:

Pri računanju površine što je graf neke neprekidne funkcije zatvara s x osi koristimo određeni integral i sljedeća svojstva:
1. Ako je funkcija f pozitivna na $[a,b]$, tada je površina što je graf funkcije f zatvara s x osi dana s

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Ako je funkcija f negativna na $[a,b]$, tada je površina što je graf funkcije f zatvara s x osi dana s

$$P = -\int_a^b f(x)dx.$$

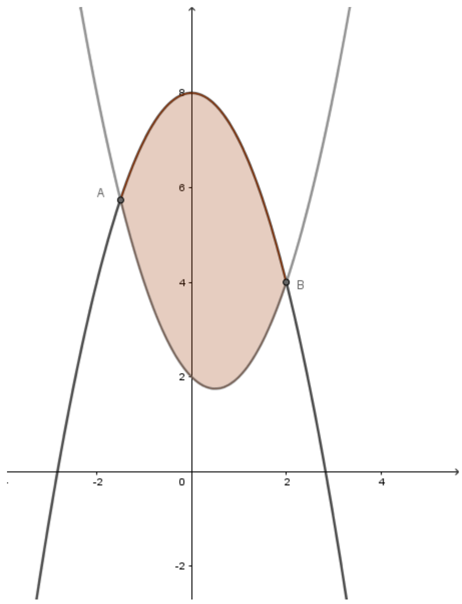
3. Ako funkcija f mijenja predznak na intervalu $[a,b]$, u nultočki c, od pozitivnog u negativni, tada je površina što je graf funkcije f zatvara s osi x dana s:

$$P = P_1 + (-P_2) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^a f(x)dx.$$

Sada, kada smo razlučili što znači izračunati površinu nekog lika od toga što znači izračunati određeni integral, prijeći ćemo na sljedeći primjer u kojem ćemo odredit površinu lika omeđenog dvjema krivuljama. U dosadašnjim primjerima drugu krivulju predstavljao nam je pravac $y = 0$, odnosno x os, dok ćemo se sada pozabaviti nekim malo drugačijim krivuljama koje omeđuju različite likove.

Primjer 2.13. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 8 - x^2$ i $y = x^2 - x + 2$.

Rješenje: Promotrit ćemo prvo skicu zadanog lika.



Slika 2.27: Lik omeđen grafovima funkcija $f(x) = 8 - x^2$ i $g(x) = x^2 - x + 2$

Uočimo da je površina ovog lika jednaka povšini lika omeđenog parabolama $y = 8 - x^2$ i $y = x^2 - x + 2$. Da bismo precizno odredili na kojem intervalu djelujemo, riješit ćemo kvadratnu jednadžbu

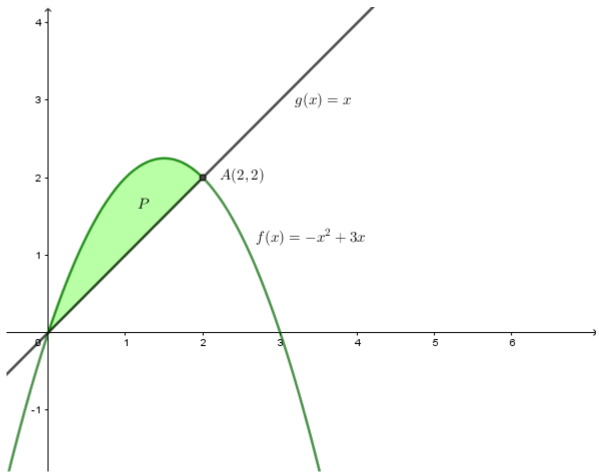
$$8 - x^2 = x^2 - x + 2 \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0.$$

Dobivena rješenja su $x_1 = -1.5$ i $x_2 = 2$. Dobiveni rezultati predstavljaju apscise točaka u kojima se grafovi funkcija sijeku i ujedno su i granice određenog integrala pomoću kojeg ćemo odrediti traženu površinu. Površina koju tražimo jednaka je:

$$P = \int_{-1.5}^{2} (8 - x^2)dx - \int_{-1.5}^{2} (x^2 - x + 2)dx = (8x - \frac{x^3}{3})|_{-1.5}^{2} - (\frac{x^3}{3} - \frac{x2}{2} + 2x)|_{-1.5}^{2} = \frac{343}{28}.$$

Primjer 2.14. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = -x^2 + 3x$ i $y = x$.

Rješenje:



Slika 2.28: Površina lika omeđenog krivuljama

Na slici je prikazana površina lika omeđenog krivuljama $y = -x^2 + 3x$ i $y = x$. Pravac i parabola sijeku se u dvjema točkama kojima su apscise jednake 0 i 2, što je vidljivo i na slici. Označenu površinu računat ćemo tako da od površine ispod parabole oduzmemo povšinu ispod pravca na intervalu $[a, b]$. Zapisat ćemo:

$$P_1 = \int_0^2 (-x^2 + 3x)dx - \int_0^2 xdx.$$

Obično to zapisujemo kao jedan integral:

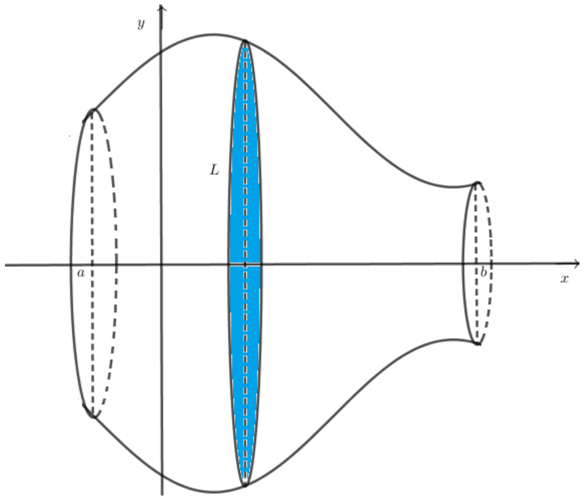
$$P_1 = \int_0^2 (-x^2 + 3x - x)dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = (-\frac{x^3}{3} + x^2)|_0^2 = \frac{-8}{3} + 4 - 0 - 0 = \frac{4}{3}.$$

Sada možemo zapisati zaključak koji vrijedi općenito:

Definicija 2.3.3. *Površina lika omeđenog dvjema krivuljama, grafovima funkcija f i g, $f(x) > g(x)$, za svaki x te pravcima $x = a$ i $x = b$ dana je izrazom:*

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Obujam rotacijskog tijela



Slika 2.29: Rotacijsko tijelo

Sada kada smo ukratko razradili pojam površine ravninskog lika, prokomentirat ćemo i kako se računa obujam nekog tijela, fokusirajući se na obujam rotacijskog tijela. Pretpostavit ćemo da je lik L omeđen krivuljom $y = f(x)$, osi x te pravcima $x = a$ i $x = b$. Ako lik L rotiramo oko osi x, dobivamo rotacijsko tijelo. Poprečni presjek tog tijela na mjestu x je krug polumjera $y = f(x)$ i površine $P(x) = y^2\pi$. Obujam tako dobivenog rotacijskog tijela je:

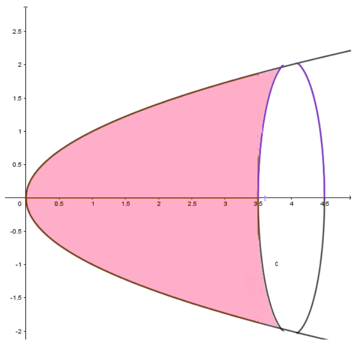
$$V = \int_a^b P(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2.$$

Primjer 2.15. Izračunajmo obujam tijela koje nastaje:

(a) rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x}$, te pravcima $y =$ i $x = 0, x = 4$,

(b) rotacijom oko osi y lika omeđenog krivuljama $y = x^2 + 1, x = 0, x = 3$.

Rješenje: (a)

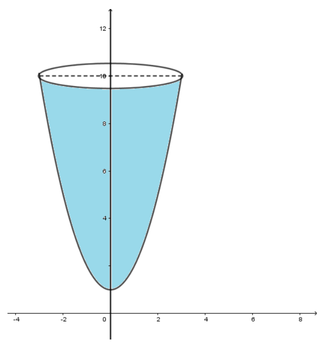


Slika 2.30: Rotacijsko tijelo

Na slici 2.30 prikazano je traženo rotacijsko tijelo. Krivulja u ovom slučaju rotira oko $x-$ osi pa je obujam jednak:

$$V = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi.$$

(b) U ovom dijelu zadatka, susrećemo se sa situacijom u kojoj krivulja rotira oko $y-$ osi. Tada se varijabla integracije x mijenja u varijablu y, a nove su granice određene također vrijednostima s y osi. Na slici je vidljivo kako traženo rotacijsko tijelo izgleda.



Slika 2.31: Rotacijsko tijelo nastalo rotacijom oko y osi

Lik koji rotira omeđen je krivuljom $y = x^2 + 1$ te pravcima $x = 0, x = 3$. Obzirom na činjenicu da lik rotira oko osi y, granice integracije prostiru se od $y = 1$ do $y = 10$. Na sličan način kao u prvom dijelu kada smo opisivali kako se računa obujam rotacijskog tijela koje rotira oko $x-$osi, određujemo i računanje obujma rotacijskog tijela oko y osi. U ovom slučaju, obujam dobivenog rotacijskog tijela je:

$$V = \pi \int_1^{10} [f(y)]^2 dy = \pi \int_1^{10} (y-1)dy = \pi(\frac{y^2}{2} - y)|_1^{10} = \pi\frac{81}{2} = \frac{81}{2}\pi.$$

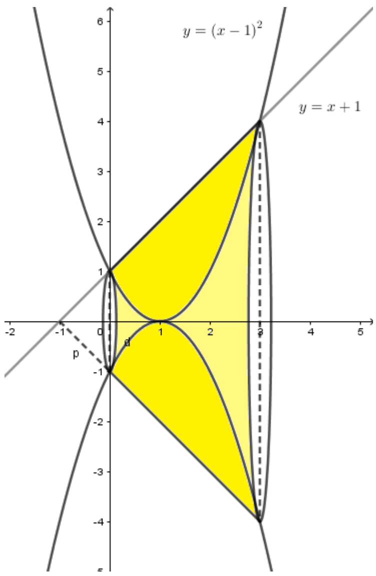
Pri računanju obujma rotacijskog tijela nastalog rotacijom oko y osi temeljna ideja je određena time da je poprečni presjek tog tijela na mjestu y zapravo krug polumjera $x = f(y)$ i površine $P(x) = x^2\pi$. Tada možemo zaključiti da rotacijom lika omeđenog osi y te krivuljom $x = f(y), y \in [c, d]$ oko osi y nastaje rotacijsko tijelo čiji je obujam:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy.$$

Razmotrit ćemo sada što se događa kada razmatramo obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom lika omeđenog krivuljama za čjii odnos vrijede neki posebni uvjeti. Prvo ćemo se koncetrirati na konkretan primjer.

Primjer 2.16. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = (x-1)^2, y = x + 1$.

Rješenje: Prije svega, pokušat ćemo prikazati na slici o kakvom rotacijskom tijelu se radi.



Slika 2.32: Rotacijsko tijelo omeđeno krivuljama

Možemo primijetiti da za svaki $x \in [0,3]$ vrijedi da je funkcija $f(x) = x + 1 \leqslant g(x) = (x-1)^2$, što rezultira time da je obujam ovog rotacijskog tijela jednak:

$$V = \pi \int_0^3 ((x+1)^2 - (x-1)^4)dx = \pi(-\frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2)|_0^3 = \frac{27}{5}\pi.$$

Nakon ovog prikaza, kratko ćemo zaključiti na koji način ćemo općenito odrediti volumen u ovakvim slučajevima. Dakle, obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom lika omeđenog krivuljama $f(x) = y$ i $y = g(x)$ te pravcima $x = a$ i $x = b$, gdje je za svaki $x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x)$, računamo pomoću sljedećeg izraza:

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx.$$

Prije negoli zaključimo ovaj dio, kratko ćemo se osvrnuti na pregled literature koji smo pokušali sustavno i dovoljno svrhovito prikazati.

2.3.4 Kratki osvrt

Analizu udžbeničke literature, koncentrirani na dijelove vezane za infinitezimalni račun, započeli smo s predstavljanjem pristupa razradi dijela infinitezmalnog računa koji se njeguje na studiju matematike. Navedeni pristup baziran je na strogoj matematičkoj formulaciji i apstrakciji teorije inifinitezimalnog računa, baš kako bi se moglo proniknuti i u najmanji detalj razumijevanja koncepta. Potom smo razmotrili pristup razradi i formulaciji Osnovnog teorema infinitezimalnog računa koji se njeguje na tehničkim fakultetima gdje je primjena samog Osnovnog teorema u fokusu više negoli stroga teorijska pozadina. U tom dijelu, najviše smo se koncentrirali na jednu od realizacija Osnovnog teorema infinitezimalnog računa, a to je brzina promjene i ukupna promjena. U tom pristupu vidljiv je jedan potpuno drugačiji i inovativan pristup pojmovima donjih i gornjih suma te cjelokupnog integralnog računa. Bitno je naglasiti kako je stavljen velik naglasak na fizikalne probleme koji nas svakodnevno okružuju. Pokušali smo naglasiti koncept funkcije akumulacije koja omogućuje uspostavljanje veze između brzine promjene veličine i omogućuje uspostavljanje veze između brzine promjene veličine i akumuliranja veličine. Kada je riječ o srednjoškolskoj literaturi, primjeri i pristupi koji se primjenjuju u srednjoškolskim udžbenicima različiti su u nekim dijelovima, a ono što smo smatrali zanimljivim smo i izdvojili. Naposljetku, pokušali smo dati pregled literature i pristupa koji se koriste u poučavanju i učenju infinitezimalnog računa na različitim razinama obrazovanja. U svakom predstavljenom zasigurno ima mnoštvo potencijalnih ideja i prostora za istraživanje i produbljivanje razumijevanja. Također, analizirajući pristup učenju i poučavanju u srednjoškolskoj literaturi kratko smo se osvrnuli i na problem razlučivanja integrala kao geometrijske interpretacije površine i integrala kao vrijednosti određenog integrala realiziranog iz Osnovnog teorema infinitezimalnog računa. O tome ćemo još detaljnije govoriti i u zadnjem poglavlju.

2.3.5 Prijedlog aktivnosti pogodnih za uvođenje koncepta integrala u nastavi matematike

Integralni račun kao nastavna cjelina često se, iz raznoraznih razloga, stavlja na dno prioriteta nastavnog gradiva koje se poučava. Izuzetci naravno uvijek postoje. Uzročno-posljedičnu vezu takve situacije u ovom radu nećemo analizirati, ali možemo pretpostaviti da se zbog navedenog često javlja određena doza odbojnosti ili straha od strane učenika prema svemu onome što uz sebe vezuje riječ integral. Vjerojatno se radi o strahu prema nepoznatom koji je univerzalna pojava. Osim toga, zbog činjenice da integralni račun ostaje nepoznanica, kao i sami koncept te nastavne cjeline, često će se neki zapitati čemu nam uopće služe integrali i postoji li u životu neka situacija u kojoj ćemo ih koristiti, a da ta situacija bude poprilično ostvariva i takva da će ju vjerojatno doživjeti veći broj ljudi. Upravo zbog navedenih pitanja, smatra se da bi konceptualno razumijevanje integralnog računa bilo prijeko potrebno i nužno, a često i dovoljno. Kako bismo pokušali razbiti mit o tome da je mjesto integrala u nastavi diskutabilno, pokušat ćemo opisati nekoliko aktivnosti koje se mogu prilagoditi i primijenti u nastavi. Aktivnosti koje će biti opisane plod su sumiranja ideja iz različitih radova, točnije rada [10] . Predstavit ćemo i dva zadatka koja su provedena u nekom trenutku na PISA istraživanju i koja mogu poslužiti kao izvor ideja za različite aktivnosti. U kontekstu nastave to bi značilo nastavne aktivnosti koje su usmjerene na konceptualno razumijevanja glavnih pojmova integralnog računa. To iziskuje dobru pripremu i predviđanje situacija i rasprava koje se mogu ostvariti pri provođenju određene aktivnosti ili zadatka. Krenut ćemo s prvom aktivnošću koja je idejno nastala na Sveučilištu u Ankari, u okviru izrade rada [10].

Istraživanje 1. Gornje i donje sume

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u timovima, procijeniti i odrediti površinu određenog područja pomoću integrala te odrediti značenje donjih i gornjih suma.

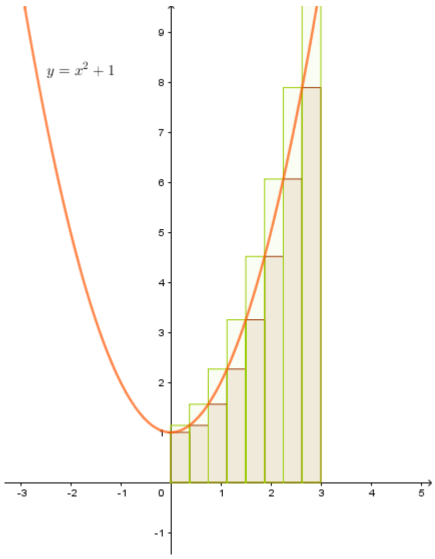
Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku timskog rada.

Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava

Potrebni materijal: Računala i dinamički program ili prigodan nastavni listić za svakog učenika i za svaki tim.

Detaljan tijek: Za početak, učenicima se daje uputa da nacrtaju funkciju $f(x) = x^2 + 1$, u nekom dinamičkom alatu, najbolje u Geogebri te se pritom koncentriraju na interval $[0, 3]$. Dakle, za ovu aktivnost bilo bi pogodno da je dostupan veći broj računala kako bi

učenici mogli sudjelovati i što lakše pratiti. Ukoliko učionica nije opremljena s dovoljno računala, nastavnik može napraviti ovaj prvi dio zadatka, iako je poželjnije da fokus bude na učeničkom radu.
Napomena: Funkcija koja je izabrana je pozitivna i rastuća na intervalu $[0, 3]$, kako bi učenici što jednostavnije i lakše mogli donijeti fundamentalne zaključke. Da bismo govorili o gornjim i donjim sumama te na taj način došli do pojma integrala, bilo bi dobro iskoristiti izuzetne potencijale nekih od računalnih programa dinamičke geometrije. Pomoću jednostavnih naredbi u Geogebri to može izgledati kao na slici 2.33.



Slika 2.33: Gornji i donji pravokutnici

Ono što se može napraviti u sljedećem koraku jest to da učenici, u grupama ili samostalno, na svojim radnim listovima mijenjaju broj pravokutnika kojima će aproksimirati područje ispod grafa funkcije na intervalu $[0, 3]$. Na taj način će učenici generirati formulu za donje i gornje sume u intervalu $[0, 3]$. U skladu s tim, nakon toga može se zamoliti učenike da generiraju općenitiju formulu za sume površina gornjih i donjih pravokutnika za pozitivnu, rastuću funkciju na intervalu $[a, b]$. Naravno, prema rezultatima rada na koji se pozivamo, ne očekuje se da će učenici odmah ponuditi odgovor, ali tu postoji prostor za diskusiju. Tada se preporuča razviti raspravu koja će potaknuti bitnu generalizaciju. Primjerice, mogu se postaviti pitanja kao što su:
”Koja je širina jednog od pravokutnika sa slike?”
”Koja je visina jednog od pravokutnika?”
”Kakva je veza između funkcije i visine pravokutnika?”

Neki učenički odgovori koji se mogu očekivati su svakako takvi da će se predstaviti ideja prema kojoj će koncept dijeljenja intervala $[0, 3]$ biti prisutan. Tada se može detaljnije objasniti sljedeće:
Primjerice, ako interval $[0, 3]$ podijelimo na tri jednaka dijela, zbroj površina "donjih" pravokutnika, odnosno donja suma bit će:

$$f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1$$

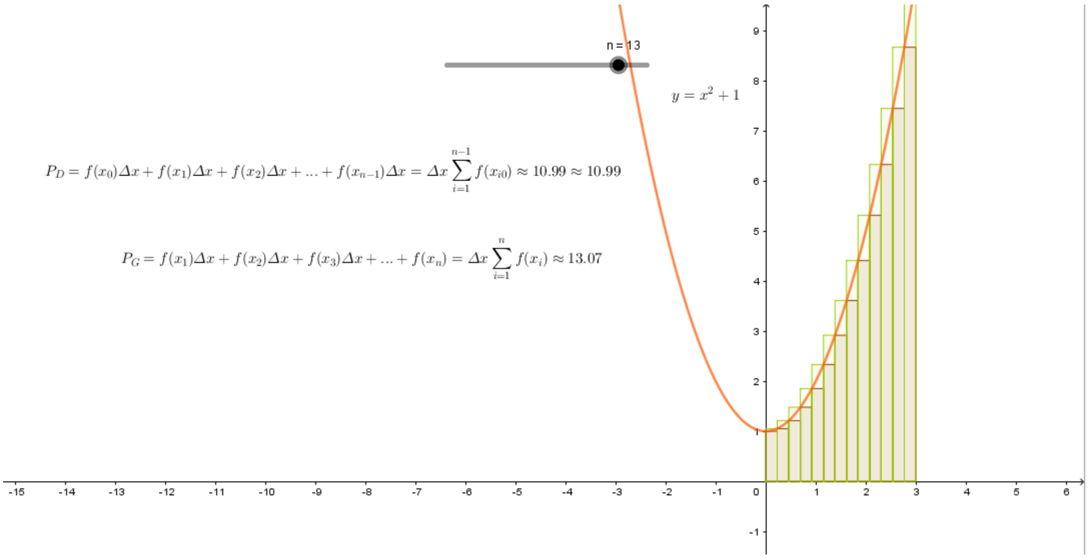
U tom slučaju, ponovno se može u nekom dinamičkom alatu prikazati površina ispod grafa funkcije pomoću tri pravokutnika. S obzirom da su učenici već na početku ove aktivnosti mogli generirati podjelu intervala, može se prijeći na općenit zaključak, tj. zbroj površina "donjih" pravokutnika, odnosno donja suma nad intervalom $[a, b]$ jednaka je:

$$f(a)\frac{b-a}{n} + f(a + \frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} + f(a + 2 * \frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} + ... + f(b - \frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}.$$

Tu se odmah zaključuje da je $\frac{b-a}{n}$ zapravo širina pojedinog pravokutnika, a $f(a)$ predstavlja visinu prvog pravokutnika, zatim $f(a + \frac{b-a}{n})$ visinu drugog pravokutnika i tako dalje. Na sličan način može se definirati i gornja suma te se približiti pojmu Riemannovih suma. Stručnjaci koji su radili na radu čije rezultate prezentiramo kao prijedloge, predlažu da se aktivnost ovdje osvježi kratkom povijesnom crticom i na taj način uvede oznaka za integral

$$\int .$$

Isaac Newton (1642.-1727.) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) najznačajnije su doprinijeli integralnom računu, a Leibniz je koristio oznaku integracije kao dugo „s“, $\int$, koje koristimo i danas. Nakon Newtonovog i Leibnizovog doprinosa integralnom računu, njemački matematičar Bernhard Riemann je strogo formulirao integraciju koristeći granice. Prema tome, aproksimacija površine područja omeđenog funkcijom, $x-$osi i intervala $a \leqslant x \leqslant b$ pomoću zbroja površina pravokutnika naziva se Riemannovim sumama. Sada se može pristupiti završnom dijelu aktivnosti kojom će se zapravo oblikovati koncept određenog integrala. U ovom, završnom, dijelu, učenici će moći usporediti površine određene "donjim" i "gornjim" pravokutnicima. Ili učenik ili učitelj može ponovno u programu dinamične geometrije opisati postupak. Ono što učenici, prema uputama nastavnika, rade i zapravo istražuju prikazano je na slici.



Slika 2.34: Riemannove sume

Učenici generiranjem klizača n, ili uz pomoć nastavnika, mogu zaključiti da je $\triangle x$ ustvari, u našem slučaju, duljina pravokutnika koji su određeni podjelom intervala $[0, 3]$. Možemo ispisati da vrijedi sljedeće, uz pomoć navedenih grafičkih prikaza:

$$P_D = f(x_0) \triangle x + f(x_1) \triangle x + f(x_2) \triangle x + ... + f(x_{n-1}) \triangle x = \triangle x \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \approx 10.99,$$

$$P_G = f(x_1) \triangle x + f(x_2) \triangle x + f(x_3) \triangle x + ... + f(x_n) \triangle x = \triangle x \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \approx 13.07.$$

Učenici će primijetiti da je površina područja koje promatramo upravo između vrijednosti 10.99 i 13.07. Nastavnik tada može prikazati da je

$$\int_0^3 f(x)dx = 12$$

i da taj rezultat daje vrijednost površine ispod krivulje na intervalu $[0, 3]$. Učenici će tada moći zaključiti da je limes, kao matematički alat, bio neophodan u definiranju Riemannovog integrala, odnosno da je ”duljina” pravokutnika $\triangle x$ veličina koja teži u sve manje i manje vrijednosti, odnosno u nulu, kako bi procjena bila što preciznija. Osim toga, ključan trenutak je svakako kada se naglasi da koncept površine ostaje pristuan, ali se konceptualno prelazi na povšine jako malih dijelova. To znači da je $f(x_0) \triangle x$ površina jako malog dijela cijele površine i da zapravo suma

$$\sum f(x_0) \triangle x$$

općenito postaje integral

$$\int f(x) \bigtriangleup x.$$

Tada se može zapisati:

$$\lim_{\bigtriangleup x \to 0} P_G - P_D = 0,$$

što znači da je

$$\lim_{\bigtriangleup x \to 0} P_G = \lim_{\bigtriangleup x \to 0} P_D,$$

gdje su P_G i P_D površine "gornjih" i "donjih" pravokutnika.
Točnije:

$$\lim_{\bigtriangleup x \to 0} P_G = P = \lim_{\bigtriangleup x \to 0} P_D,$$

gdje je P površina područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 + 1$, na intervalu $[0, 3]$.
Nastavno na prethodno učeničko istraživanje, nastavnik zajedno s učenicima može zaključiti da je površina područja omeđenog funkcijom f, $x-$osi. na intervalu $[a, b]$ zapravo **određeni** integral funkcije f i pišemo:

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Ovaj zaključak na srednjoškolskoj razini smatra se dostatnim.

Zadatci s PISA istraživanja

Sada ćemo se osvrnuti na dva zadatka koja su bila dio probnih i glavnih ispitivanja u različitim ciklusima PISA-inih istraživanja u razdoblju od 2000. do 2012. godine. Ono što se ispituje zadatcima na PISA istraživanju su detaljne informacije o konceptualnom okviru matematičke pismenosti – matematičkim kompetencijama, matematičkim sadržajima, kontekstima, težini zadataka te razinama matematičkih znanja i sposobnosti. Izdvojili smo dva zadatka koja se čine pogodnima na nekoliko razina srednjoškolske nastave, a možda i prije. Bogatstvo ova dva zadatka, koja ćemo predstaviti, sastoji se u razvoju konceptualnog matematičkog razmišljanja koje u sebi krije dostatnu razinu mogućnosti da se integralni račun, kada za to dođe vrijeme, u potpunosti razumije. Dakle, sljedeća dva zadatka mogu se koristiti u nastavi kako bi se poticalo razvijanje matematičkog mišljenja pogodnog za razumijevanje diferencijalnog i integralnog računa i kako bi ta dio nastavnog gradiva došao što prirodnije.

Aktivnost 2. Naftni tanker udario je u stijenu u moru, koja je načinila rupu u spremnicima s naftom. Tanker se nalazio otprilike 65 km od kopna. Nakon nekoliko dana nafta se proširila kao što je prikazano na donjoj karti. Služeći se mjerilom karte procijeni površinu naftne mrlje u kvadratnim kilometrima.

Slika 2.35: Naftna mrlja

Napomena: 1 cm predstavlja 10 km.

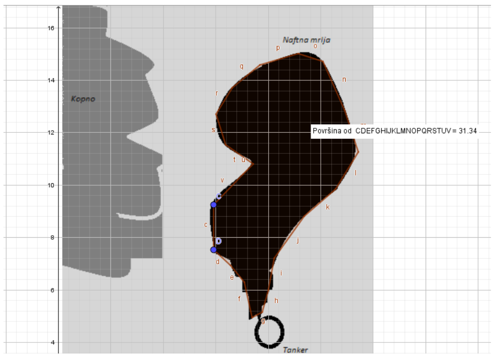
Cilj aktivnosti: Učenici će samostalno ili radom u timovima procijeniti i odrediti traženu površinu.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku indivdualnog ili timskog rada.

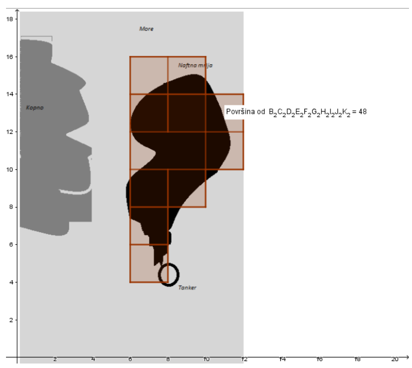
Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava.

Potrebni materijal: Dinamički alati, nastavni listić za svakog učenika ili tim, primjereno ilustriran zemljovid ili slično.

Detaljan tijek: Cilj zadatka je procijeniti površinu nepravilnog oblika na karti služeći se zadanim mjerilom. Naglasak koji se stavlja kroz ovaj zadatak je zapravo primjena određenog matematičkog znanja i razišljanja. Također, mogu se procijeniti i razine znanja određenih matematičkih sadržaja kao što su prostor i oblik.Razni su načini kako ovakvu aktivnost, odnosno zadatak prilagoditi nastavnom satu. Jedan od načina je svakako koristiti dinamički alat, pomoću kojeg će učenici jednostavnim naredbama procijeniti površinu. Pretpostavlja se da bi učenički odgovori i načini rješavanja bili raznoliki. Netko od učenika zasigurno bi navedenu sliku pozicinirao u koordinatnom sustavu te procijenio površinu područja pomoću alata ili pomoću aproksimiranja pravokutnicima. Zadatak se može modificirati i na način da se učenicima već zada uputa da ovaj nepravilni oblik pokušaju aproksimirati pravokutnicima.



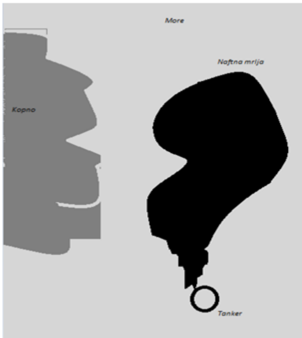
Slika 2.36: Prva procjena površine pomoću dinamičkog alata



Slika 2.37: Procijenjena površina pomoću pravokutnika u dinamičkom alatu

Također, mogućnost može biti i ta da se učenicima podijele nastavni listovi na kojima će biti ucrtana gruba aproksimacija tražene površine pomoću pravokutnika, kao na slici 2.37. Tada se od učenika može očekivati da pokušaju odrediti pravokutnike drugačijih dimenzija kojima će preciznije procijeniti površinu. Slika se i na nastavnom listiću može staviti u koordinatni sustav s napomenama kao i u prvotnoj inačici zadatka. Nastavni listić može biti posložen na sljedeći način i bitno je napomenuti da je to samo jedna od mogućnosti.

Naftni tanker udario je u stijenu u moru, koja je načinila rupu u spremnicima s naftom. Tanker se nalazio otprilike 65 km od kopna. Nakon nekoliko dana nafta se proširila kao što je prikazano na donjoj karti:

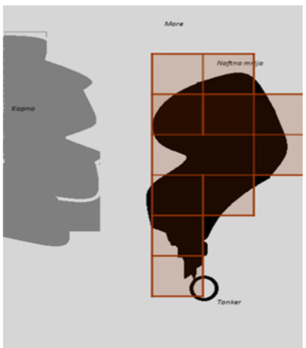


Služeći se mjerilom karte procijeni površinu naftne mrlje u kvadratnim kilometrima. 1 cm predstavlja 10 km.

Slika 2.38: Primjer prvog dijela nastavnog listića

Služeći se mjerilom karte procijeni površinu naftne mrlje u kvadratnim kilometrima. 1 cm predstavlja 10 km.

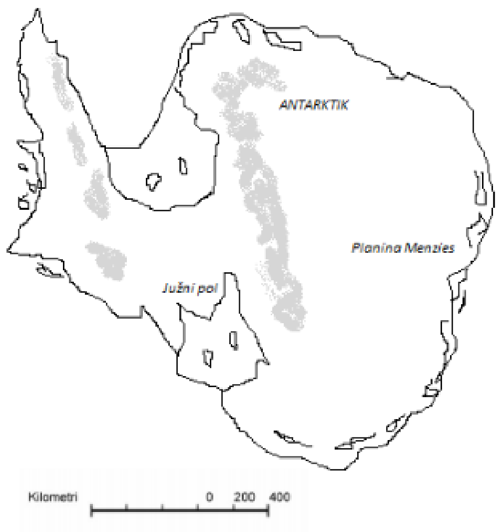
Da biste što preciznije procijenili površinu, tim suradnika odlučio vam je pomoći i ugrubo procijeniti površinu pomoću pravokutnika. Pokušajte na sličan način odrediti precizniji rezultat. S aproksimacijom koja je ispred vas, površina iznosi oko 4800 kvadratnih kilometara, no stvarna površina je u rasponu od 2200 do 3300. Pokušajte biti precizniji.



Slika 2.39: Primjer drugog dijela nastavnog listića

Na sličan način opisat ćemo i sljedeću aktivnost, odnosno zadatak koji se također pojavio na jednom od PISA-inih istraživanja.

Aktivnost 3. Dana je karta Antarktika. Procijenite površinu Antarktika koristeći dani omjer.



Slika 2.40: Antarktik

Cilj aktivnosti: Učenici će indivdualno ili u timovima procijeniti i odrediti površinu traženog područja.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku indivuadlnog ili timskog rada.

Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava.

Potrebni materijal: Nastavni listić za svakog učenika ili za svaki tim, računalo, internetska veza ukoliko je potrebno.

Detaljan tijek: I ovaj zadatak, u svrhu nastave može se modificirati na razne načine. Slično kao i prethodni zadatak, učenici mogu raditi na procjeni površine u timovima ili indivudalno. Timski rad ostavlja puno prostora za zajedničko istraživanje i produbljivanje znanja svih sudionika. U tom slučaju, svaki tim može dobiti jedan veći nastavni listić sa zemljovidom i kratkim uputama. Također, može se poslužiti i nekim od alata dinamičke geometrije za što lakšu ili bolju aproksimaciju. Različite su mogućnosti. Kratko ćemo predstaviti službeno bodovanje s objašnjenjima koja zapravo u sebi sadrže mnoštvo ideja pogodnih za provođenje ovakve vrste zadatak u nastavi.

Bodovanje je bilo sljedeće:
1. Procjena crtanjem kvadrata ili pravokutnika -između 12000000 i 18000000 km^2 (jedinice površine se nisu morale navoditi).
2. Procjena crtanjem krugova - između 12000000 i 18000000 km^2.
3. Procjena zbrajanjem površina nekoliko pravilnih geometrijskih figura – između 12000000 i 18000000 km^2.
4. Procjena drugim točnim metodama - između 12000000 i 18000000 km^2.
Postojala su i djelomična bodovanja, koja su izgledala ovako, s obrazloženjima;
1. Točan odgovor (između 12000000 i 18000000 km^2), ali postupak izračunavanja nije prikazan.
2. Procjena crtanjem kvadrata ili pravokutnika – točna metoda, ali rezultat nije točan ili kompletan.
3. Nacrtan pravokutnik i pomnožena širina sa visinom, ali je procjena iznad ili ispod rješenja (npr.18000000).
4. Nacrtan pravokutnik i pomnožena širina sa visinom, ali broj nula nije točan (npr. $4000 \cdot 3500 = 140000$).
5. Nacrtan provokutnik i pomnožena širina sa visinom, ali nije korištena omjer.
6. Nacrtan pravokutnik i konstatirano je da je površina 4000km· 3500km bez daljih izračunavanja.
7. Procjena crtanjem krugova – točna metoda, ali rezultat nije točan ili nije kompletan.
8. Procjena zbrajanjem površina nekoliko pravilnih geometrijskih figura – točna metoda, ali rezultat nije točan ili nije kompletan.
9. Procjena drugim točnim metodama – ali rezultat nije točan ili nije kompletan.

Zaključit ćemo ovo poglavlje kratkim osvrtom na navedene aktivnosti. Bitno je primijetiti da su mogućnosti šarolike i raznolike.Poučavanje integralnog računa može se jako apstrahirati, ali i pojednostavniti na konceptualnoj razini kada je to potrebno. Također, kroz nastavu, moguće je kontinuiranim i diskretnim korištenjem sličnih zadataka razvijati kod učenika pozitivan stav prema određenim matematičkim zahtjevima, sadržajima i njihovoj primjeni, osobito kada su u pitanju integrali.

Poglavlje 3

Primjeri prakse u Europi i šire

3.1 Konceptualno razumijevanje pojma integrala u srednjoj školi

U međunarodnoj matematičkoj zajednici, mnoga se nastojanja i napori ulažu kako bi integrali, ili barem osnovni pojmovi vezani za tu vrlo bitnu matematičku cjelinu, našli svoje kvalitetno mjesto u srednjoškolskoj, ali i fakultetskoj nastavi. Pri tome se najviše pažnje posvećuje razvoju metoda aktivnog učenja kako bi se učenicima i studentima olakšao proces učenja i usvajanja određenih koncepata. Prikazat ćemo za kakvim se sve metodama i materijalima može posegnuti, pri tome, prikazujući modificirane modele i materijale koji su nam bili dostupni, a koji su mogli predstaviti ideju koju prezentiramo. Poučavanje integralnog računa u srednjoškolskoj nastavi matematike vrlo je izazovno za nastavnike, a tako i za učenike, po mišljenju mnogih stručnjaka. Upravo zbog te izazovnosti, velike su i mogućnosti za razvoj različitih pravaca konceptualnog razumijevanja svakog od dijelova integralnog računa. Kako je već spomenuto, konceptualnom razumijevanje u velikoj mjeri pogoduju istraživačke i konstruktivne tehnike pri proučavanju nekog problema čiji rezutati dovode do izgradnje određenog pojma, odnosno matematičkog koncepta. Takvih primjera u nastavi matematike je mnogo. Izdvojit ćemo samo neke, pogodne za realizaciju u različitim nastavnim okružjima. Glavna svrha narednih aktivnosti je razviti, odnosno dati kvalitetan materijal koji će pomoći u poboljšanju konceptualnog razumijevanja integralnog računa pomoću dostupne tehnologije bazirane na jednostavnim konceptima. Realitet koji u sebi sadrži integralni račun, svakako ostavlja puno prostora za razvoj što jasnijeg i boljeg koncepta. Mnoge studije iz matematičko-metodičkog svijeta predlažu put učenja i poučavanja integralnog učenja takav kojem će u fokusu biti konceptualno razumijevanju. Tom konceptualnom razumijevanju najviše pogoduju dvije okosnice integralnog računa u srednjoškolskoj nastavi matematike, a to su takozvana funkcija akumulacije i površina područja koji se mogu aproksimirati pravokutnicima na određeni način. Ovaj put može se može slijediti i primjenom integralnog računa na različitim razinama, primjerice kada učenici uče o funkciji pomaka ili puta koja je izvedena iz funkcije brzine. U narednim odjeljcima posvetit ćemo se upravo takvim konceptima. Kada je riječ o funkciji akumulacije, određeni integral izražen je različito negoli u tradicionalnom pristupu kod Riemannovih suma. U tradicionalnom pristupu pitamo se postoji li broj koji je granica Riemannovih suma kada $\triangle$ teži u nulu. Nasuprot tome, kod funkcije akumulacije perspektiva se mijenja i pitamo se postoji li funkcija koja je granična ("najbolja") u familiji aproksimativnih akumulacijskih funkcija, kada se $\triangle x$ približava nuli. Ova promjena je puno više od kozmetičke promjene. Vjerujemo da ovo pitanje i pristup ostaju izazov.

3.2 Aktivnosti pogodne za usvajanje koncepta integrala u nastavi matematike

U ovom dijelu prezentirat ćemo konceptualni i djelomični okvir aktivnosti pogodnih za učenje i poučavanje integralnog računa na različitim razinama obrazovanja, preciznije za učenike srednjih škola i studente prvih godina tehničkih studija. U prvom dijelu koncentrirat ćemo se na predstavljanje rezultata iz rada [12]. U drugom dijelu prezentirat ćemo aktivnost, pogodnu za razradu donjih i gornjih suma, čiji je koncept predstavljen i izrađen u radu [10], a naposlijetku, predočit ćemo i primjer nastavnog listića, pogodnog za provođenje formativnog vrednovanja, osmišljen i prezentiran u radu [3]. Bitno je napomenuti kako su neke aktivnosti djelomično preoblikovane u odnosu na originalne, u svrhu što boljeg jezičnog razumijevanja. Nastojali smo prikazati i dočarati potencijal ovih aktivnosti, a neke dijelove aktivnosti uzeti kao primjer potencijalnih novih aktivnosti i ideja u poučavanju.

3.2.1 Koncept aktivnosti-Singapur i MIT

Sada ćemo ukratko predstaviti rezultate do kojih su došli određeni singapurski i američki stručnjaci, primjenjivajući aktivne metode poučavanja integrala, točnije volumena rotacijskog tijela. Detaljniji sadržaj rada čije dijelove konceptualno predstavljamo može se pronaći u [12]. Rad obiluje rezultatima i idejama aktivnih pristupa učenju. Detaljno su opisana i iskustva provedbe određenih strategija aktivnog učenja provedenih među studentima prve godine na Singapurskom sveučilištu za tehnologiju i dizajn (SUTD) koje je osnovano u suradnji s MIT-om. Stručnjaci sa singapurskog sveučilišta, u suradnji sa sveučilištem MIT (Massachusetts Institute of Technology), osmislili su strategije učenja i poučavanja integralnog računa koje su implementirali među studente prve godine svog sveučilišta. Rezultati su bili vrlo pozitivni, a metode koje su koristili rezultirale su značajnim smjernicama. Prvo ćemo predstaviti jednu od aktivnosti, vrlo pogodnu i za srednjoškolsku nastavu, primjerice nastavu matematičkih gimnazija.

Aktivnost 1. Određivanje volumena pomoću metode diskova i ljuski.

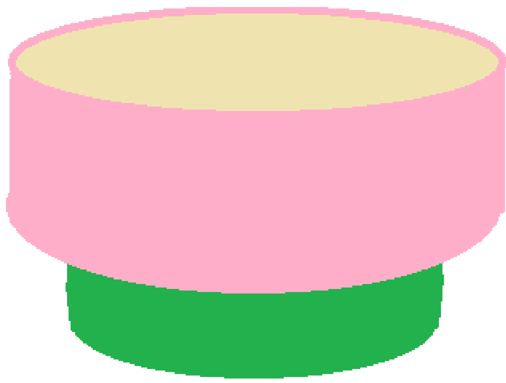
Cilj aktivnosti: Učenici će odrediti izraz za računanje volumena rotacijskih tijela pomoću metode diskova i ljuski.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku individualnog ili timskog rada.

Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava.

Potreban materijal: Modeli diskova koji mogu biti od različitih materijala.

Detaljan tijek: Aktivnost se sastojala od računanja volumena koristeći se metodom diskova i ljuski. Zadatak studenata bio je odrediti volumen sfere pomoću rastavljanja, odnosno dijeljenja, sfere na diskove i ljuskice. Na taj način studenti su primijenili svoje znanje vezano za, već prije predstavljene, Riemannove sume aproksimirajući volumen sfere. Nakon tog dijela, studenti su analitički istraživali formulu za volumen sfere. Rastavljanje sfere pomoću diskova i ljuski bilo je motiv učenicima da izvedu dvije, analitički naizgled, različite formule koje su ekvivalentne, a pritom se misli na formulu za računanje volumena rotacijskog tijela nastalog rotacijom lika oko x osi, i drugog, nastalog rotacijom oko y osi. U originalnoj aktivnosti učenici su koristili modele napravljene od posebnog materijala, primjerice plastelina. Slično se može napraviti na raznorazne načine. Na slici ispod grafički je predstavljen model koji može biti idejna baza za stvarni didaktički materijal pogodan za navedenu aktivnost.



Slika 3.1: Modeli diskova

Gornja slika ilustrira način na koji su učenici izvodili zaključke. Koristili su diskove, odnosno valjke različitih veličina te pomoću toga određivali dva općenita izraza za volumen rotacijskih tijela iz kojih su došli do svima nam poznate formule za određivanje volumena sfere. Kao bitan rezime ove aktivnosti jesu rezultati koji su dobiveni. Integriranje pomoću modela, u grupama, pokazao se kao vrlo produktivan oblik učenja u ovom slučaju. Studenti su većinom vrlo pozitivno i matematički dobro odgovorili na izazove, vođeni uputama svojih nastavnika. Time se, još jedanput, prava ravnoteža tradicionalnog i aktivnog učenja pokazala kao jedan od boljih modela učenja i poučavanja matematičkih sadržaja kao što je integralni račun. Mi ćemo sada matematički opisati što stoji iza navedene aktivnosti. Računanje obujma rotacijskog tijela je uobičajena tema koja se pojavljuje u kolegijima iz matematike na preddiplomskoj razini studiranja, ali u nekim srednjim školama. Jedna od vrlo zanimljivih metoda računanja obujma tijela je upravo navedena metoda ljuske ili diska. Metoda ljuske sastoji se od toga da se tijelo podijeli vertikalno na tanke koncentrične ljuske oko osi vrtnje, dok se metoda diska sastoji od djeljenja tijela horizontalno na tanke slojeve okomite na os vrtnje. Metodu odabiremo prema načinu zadavanja područja koje rotira i prema izboru osi rotacije. Upravo pomoću modela na slici 3.1 izvodi se formula za računanje obujma rotacijskog tijela metodom ljuske. Izvod ćemo predstaviti prema stručnom članku [8]. Promotrimo područje Ω koje je omeđeno neprekidnim funkcijama. $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ između $x = a$ i $x = b$.

Za svaku točku $T(x, y) \in \Omega$ koordinata x predstavlja udaljenost točke T od osi rotacije y. Označimo s V(Ω,y) obujam tijela dobivenog rotacijom područja Ω oko osi y. Odaberemo određeni $x \in [a, b]$. Promotrimo vertikalnu trakicu koja se prostire od donjeg do gornjeg ruba lika Ω širine dx. Kada vertikalna trakica rotira oko osi y, dobivamo vertikalnu cilindričnu ljusku približnog obujma $2\pi x(f_2(x) - f_1(x))dx$. Zbrajanjem obujama ljusaka za sve $x \in [a, b]$ dobivamo približni obujam rotacijskog tijela. Prelaskom na limes, kada širina trakice teži prema nuli, zbroj prelazi u integral

$$V(\Omega, y) = \int_a^b 2\pi x(f_2(x) - f_1(x))dx$$

koji predstavlja točnu vrijednost obujma rotacijskog tijela dobivenu metodom ljuske. Sada ćemo izvesti formulu za računanje obujma rotacijskog tijela metodom diska. Pretpostavimo da je područje Ω omeđeno funkcijama $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$ između $y = c$ i $y = d$.

Fiksiramo $y \in [c, d]$ i promotrimo vodoravnu trakicu duž lika Ω visine dy. Kada trakica rotira oko osi y, dobivamo vodoravni disk približnog obujma $\pi(g_2^2(y) - (g_1^2(y))dy$. Zbrajanjem obujama svih diskova za $y \in [c, d]$ dobivamo približni obujam rotacijskog tijela. Prelaskom na limes, kada visina vodoravne trakice teži prema nuli, zbroj postaje integral

$$V(\Omega, y) = \int_c^d \pi(g_2^2(y) - g_1^2(y))dy$$

koji predstavlja točnu vrijednost obujma rotacijskog tijela dobivenu metodom diska.

3.2.2 Koncept aktivnosti-Turska

Sveučilište Bilkent u Turskoj, mjesto je gdje su nedavno predstavljene vrlo zanimljive ideje i rad [10] u kojima je razmatrano kako na najbolji mogući način ostvariti kvalitetnu atmosferu za konstruktivističko učenje kroz koje bi se razvijalo konceptualno razumijevanje integrala. U tu svrhu, osmišljene su mnoge aktivnosti s različitim prijedlozima. Osnovna svrha navedenog rada, čije ideje ćemo okvirno ovdje predstaviti, bila je pokazati razvoj istraživačke kompetencije koja je usmjerena na učenike i nastavnike matematike za usvajanje općeg koncepta integralnog računa. Glavna tema koja je odabrana kao predmet izučavanja integralnog računa bio je koncept određenog integrala, konkretnije, volumen krutih tijela, točnije volumen stvarnih svakodnevnih objekata. Kao posljedica toga, primarna je svrha bila osigurati prikaz praktičnih primjera pomoću dinamičkog softvera za matematiku (GeoGebra), 3D digitalnog modela i praktičnih primjera iz stvarnog života, koji su ugrađeni u konstruktivističko okruženje za učenje. Bitno je istaknuti kako se u radu [10] navodi da je glavni cilj rada bio razviti, odnosno ponuditi prijedloge i aktivnosti za učenje integralnog računa pomoću određenih integrala, obogaćujući taj proces tehnologijom i istraživanjem u kojem su učenici istraživači. Ciljana populacija za plan koji ćemo predstaviti su upravo učenici u srednjim školama i nastavnici matematike. Stavljen je naglasak na matematički dinamički softver Geogebru jer su različita istraživanja pokazala da upravo primjena tog i sličnih alata olakšava učenicima razumijevanje težih matematičkih fenomena i omogućava njihovo dublje razumijevanje. Osim navedenog, bitno je naglasiti sam tijek početne faze izrade studije čije dijelove predstavljamo. U nekim dijelovima koje autor navodi, vidljivo je da se i u turskom kurikulu provlači slična problematika kao i u hrvatskom. Može se reći kako nije sasvim jednostavno odgovoriti na određene izazove, zbog čega je raznolikost ideja, koju ćemo nastojati prikazati u ovom diplomskom radu, dobrodošla. Kako bi se shvatio problem, ispitivani su različiti izvori. Detaljna analiza literature provedena je u okviru podučavanja i učenja temeljenog na istraživanju i tehnologiji. Teorijska utemeljenost nastavne jedinice, izrada GeoGebra aktivnosti i kombinacija ove dvije faze rezultirali su s nekoliko aktivnosti u ovom odjeljku. U okviru teorijske osnove nastavne jedinice izrađen je model učenja sukladan nastavnom planu i programu kako bi se nastavna jedinica stavila u strukturu službenog programa. Osim toga, razrađen je i dio, odnosno kontekst, kojim bi se u toj nastavnoj jedinici učitelji i učenici mogli poslužiti kao dijelu koji se temelji na istraživanju. Ta druga studija bila je izrada GeoGebra aktivnosti koje će se integrirati u nastavnu jedinicu. Naposljetku, ove dvije studije su kombinirane, a znanstvenici su napisali rad i predstavili ga na međunarodnoj konferenciji u Turskoj. Kao rezultat, stvoren je nacrt nastavne jedinice koja će se razvijati i nastojati implementirati u samu nastavu matematike. U ovom radu, koncentrirat ćemo se na konkretne aktivnosti. Istraživački dijelovi, odnosno aktivnosti, osmišljeni su kako bi učenici mogli koristiti svoja znanja u stvarnim životnim situacijama. Cilj je bio da učenici mogu pretraživati i prikupljati informacije iz raznih izvora i dijeliti ideje sa svojim prijateljima i učiti jedni od drugih. Stoga su svi ti praktični dijelovi oblikovani kao grupni rad u kojima do izražaja može doći konstruktivistički proces izgradnje i nadogradnje znanja ili produbljivanja razumijevanja. Osim toga, glavna svrha sljedećih aktivnosti bila je razviti tehnologijski integriranu nastavnu jedinicu temeljenu na istraživanju o integralnom računu, posebice o određenom integralu. Zbog svega navedenog u radu koji predstavljamo, smatrali smo vrijednim predstaviti i ideje koje bi mogle biti od općeg značaja. Bitno je naglasiti kako ćemo mi ovdje predstaviti samo pojedine dijelove određenih aktivnosti, koje smo prilagodili našoj jezičnoj sintaksi i metodičkoj praksi kako bismo prikazali potencijal navedenih aktivnosti. Sve vezano za aktivnosti što ćemo navesti može se u nastavi razdijeliti i implementirati na različite načine.

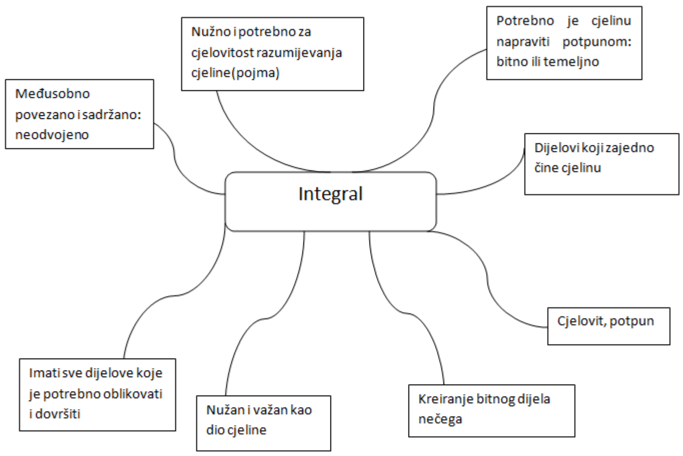
Aktivnost 1. U potrazi za značenjem riječi "integral"

Cilj aktivnosti: Učenici će konceptualno odrediti značenje riječi integral.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku timskog ili indivdualnog rada.

Potrebni materijal: Različiti rječnici, internetska veza, nastavni listić.

Detaljan tijek: Cilj ove aktivnosti je potaknuti učenike da konceptualiziraju riječ integral koja je za njih novi pojam. Odabrana je grupna aktivnost, jer bi na taj način učenici mogli dijeliti ideje o značenju integrala u malim grupama u potrazi za različitim značenjem integrala. Učenici će se formirati kao skupine od po tri nasumice i razmatrat će doslovno značenje riječi "integral". Bitno je napomenuti kako članove grupe bira učitelj nasumice. Budući da akademska znanja i vještine učenika nisu odlučujući čimbenici za ovu aktivnost, odabir je slučajan. Broj članova grupe je tri jer na taj način učenici mogu uspostaviti jednostavnu interakciju među sobom i mogu raspravljati o širokom rasponu različitih značenja „integrala“ pretraživanjem iz tri različita rječnika. Učitelj može pitati učenike o doslovnom značenju riječi integral. U grupama od po tri, svaki član grupe tražit će značenje integrala iz rječnika različitih autora, ili pomoću Google-a, danih u dijelu materijala. Učitelj bi trebao dopustiti učenicima da raspravljaju o značenju integrala u svojim skupinama. Nakon nekog vremena, učitelj pravi mapu uma koja prikuplja definicije učenika o značenju riječi "integral". Primjer vodiča za umnu mapu može biti sljedeći:



Slika 3.2: Primjer umne mape

Druga faza aktivnosti:

Nakon kraće rasprave bilo bi dobro zamoliti učenike da postignu konsenzus među definicijama i objašnjenjima koje su pronašli. Te definicije mogu se istaknuti na ploči. Sve navedeno može biti dobar uvod u sami početak upoznavanja s konceptom integrala i integralnog računa. Potom učenici mogu dobiti kratki povijesni pregled razvoja integralanog računa što će im svakako biti dodatni motiv za daljnje istraživanje i produbljivanje razumijevanja. Povijesni pregled u ovom slučaju, kolege s ankarskog sveučilišta povezali su, onda kada su mogli, s poviješću Turske. Slično se može, u određenim dijelovima, pokušati povezati i s određenim činjenicama iz hrvatske povijesti. Konkretno, učenici se, nakon rada s umnim mapama, upoznaju s dijelovima integralnog računa koji su bili poznati ljudima i prije 2400 godina.

Priča je glasila ovako:

“U davna vremena, nakon što su ljudi uspostavili opće metode za izračunavanje površine pravilnih oblika kao što su trokut, pravokutnik, kvadrat i drugi poligoni, izazov je bio izračunati površinu nepravilnih oblika. Kao prvi doprinos računanju, grčki matematičar Eudoks iz Knida osmislio je ”Metodu ekshaustije” koja se odnosi na približno računanje površine lika dijeleći ga u beskonačno mnogo manjih dijelova. Eudoxus je živio u Knidu, danas malom selu u modernoj Turskoj. To je bio početak velike priče koju će dodatno razviti Arhimed, veliki matematičar koji je bio pozvan kao otac diferencijalnog i integralnog računa jer je došao do vrlo važnih izračuna pomoću metode ekshaustije. To je kasnije mnogim matematičarima pomoglo pri radu na razvoju diferencijalnog i integralnog računa te konačno u 17. stoljeću rezultiralo prvom pravom formulizacijom integralnog računa koju su napravili Newton i Leibniz.”

Treća faza aktivnosti:

Ovako konstruirana kraća uvodna priča, prirodan je uvod u aktivnost istraživanja u kojoj glavnu ulogu preuzimaju učenici. Tada je dobro obavijestiti studente, odnosno učenike, da će u sljedećim lekcijama raditi kao drevni matematičari kako bi pronašli površinu nepravilnih oblika te površinu ograničenog područja ispod krivulje u koordinatnom sustavu. Za početak, u ovoj aktivnosti, učenici razvijaju konceptualni pristup i razumijevanje elementarnih postulata vezanih za računanje površina nepoligonalnih likova. U skladu s tim, za početak, površine koje su pred učenicima, oni aproksimiraju likovima čije su im površine poznate te ih vizualiziraju pomoću GeoGebra alata.

Aktivnost 2. Aproksimacija površina nepravilnih oblika

Cilj aktivnosti: Učenici će odrediti, odnosno procijeniti površinu nepravilnih oblika.

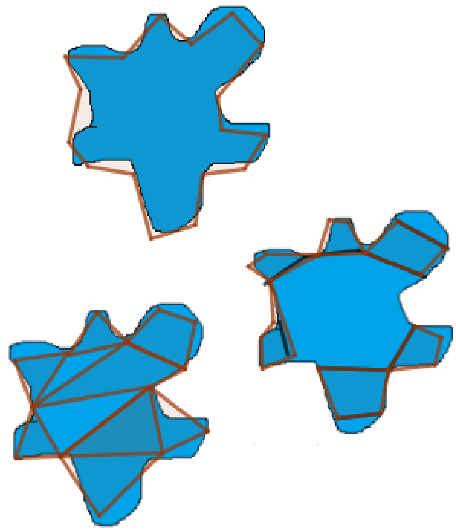
Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku timskog ili individualnog rada.

Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava.

Potrebni materijal: Materijali potrebni za aktivnost je model nepravilnog oblika u GeoGebri. Ili slično pomoću prigodnog nastavnog listića.
Sve slike koje navodimo, kako bismo vizualizirali materijale koji su dio originalne ideje, modificirane su u odnosu na originalnu ideju radi mogućnosti prilagodbe samih ideja i materijala.

Slika 3.3: Model

Detaljan tijek aktivnosti: Kako bi aktivnost, odnosno istraživanje bilo što uspješnije, članove grupe bira učitelj kako bi učenici iz iste skupine imali različite vještine i sposobnosti. Broj članova grupe je odabran kao dva ili tri, tako da učenici u skupinama mogu lako raditi na jednom računalu zajedno. Tada se mogu podijeliti materijali uključujući oblike u nastavku grupama učenika i učenici određuju površine tih oblika. Istraživanje započinje tako da se učenicima podijele materijali (nastavni listići) koji uključuju različite geometrijske oblike, a učenici trebaju odrediti, odnosno aproksimirati površinu tih likova. Prvo, učenici trebaju napraviti sličan nepravilan oblik u GeoGebri kao što je oblika na slici 3.3. Svrha ove aktivnosti je dovesti do ideje Riemannovih suma. Pretpostavlja se da će učenici rješavanju problema pristupiti na različite načine. Neki će učenici zasigurno koristiti rešetke grafičkog prikaza i računati kvadrate, neki će nacrtati pravokutnike, trokute ili druge poligone te zbrojiti površine tih poligona. Neki će učenici koristiti poligone koji prekrivaju nepravilan oblik kako bi procijenili površinu oblika, a neki će koristiti samo jedan poligon koji pokriva nepravilan oblik. Postoji mogućnost da određen broj učenika nacrta poligone unutar nepravilnog oblika i izvan te napravi procjenu između površina tih dvaju poligona, što je zapravo vrlo koristan put ka razumijevanju i uvođenju ideje Riemannovih suma. Ovo su neka od mogućih idejnih rješenja učenika:



Slika 3.4: Moguća učenička rješenja

Kako GeoGebra automatski izračunava površine poligona pomoću jednostavne naredbe, učenici mogu jednostavno izračunati površine zadanih modela te na taj način usporediti vrijednosti koje su dobivali koristeći se različitim metodama. Na kraju istraživačke aktivnosti bilo bi pogodno povesti raspravu na razini cijelog razreda. Za to vrijeme, preporuča se postavljati pitanja, kako bi se i u drugi učenici uključili u raspravu:

“Kako se vaša metoda razlikuje od ostalih skupina?”

“Mislite li da metoda druge grupe daje bolju procjenu od vaše za površinu nepravilnog oblika? Zašto da, zašto ne?”

Kroz ovu grupnu raspravu, od studenata se očekuje da vide kako uvijek može biti boljih procjena pa bi ovakva rasprava trebala dovesti do ideje ograničavanja suma površina pravilnih oblika pri računanju površina nepravilnih oblika čime se zapravo približavamo konceptu određenog integrala.

Aktivnost 3. Riemannove sume

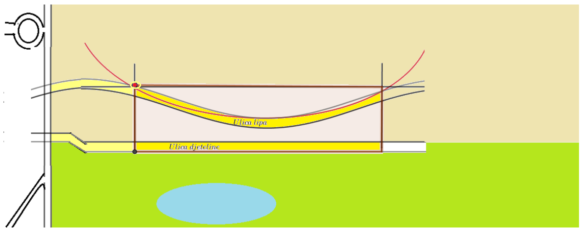
Cilj aktivnosti: Učenici će odrediti površinu lika pomoću koncepta Riemannovih suma.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku timskog ili individualnog rada.

Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava.

Potrebni materijal: Prigodni nastavni listići, odnosno slika imanja, alat dinamičke geometrije, internetska veza.

Detaljan tijek: U prethodnoj aktivnosti od učenika se očekivalo da razviju osjećaj kako je potreban proces ograničavanja da bi se odredila površina lika nepravilnog oblika. Cilj ove aktivnosti je razvoj koncepta kod učenika u kojem koriste što više pravokutnika kako bi što preciznije odredili površinu lika nepravilnog oblika. To podrazumijeva kako će se kod učenika razviti svijest o tome da bi trebali upotrijebiti granične vrijednosti zbroja površina pravokutnika kako bi pronašli točnu površinu lika, baš onako kako je Bernhard Riemann učinio u 19. stoljeću. Potrebni materijali za ovu aktivnost su slika naslijeđenog imanja, taj prikaz može biti i konkretan iz Google mapsa, radni listovi te internetska veza za korištenje Google karata, ukoliko je potrebno.



Slika 3.5: Slika područja imanja

Učenicima se prikaže gornja slika koju smo za prezentiranje ove aktivnosti izradili u Geogebri i modificirali u odnosu na originalni izvor. Tekst konkretnog zadatka može glasiti ovako:

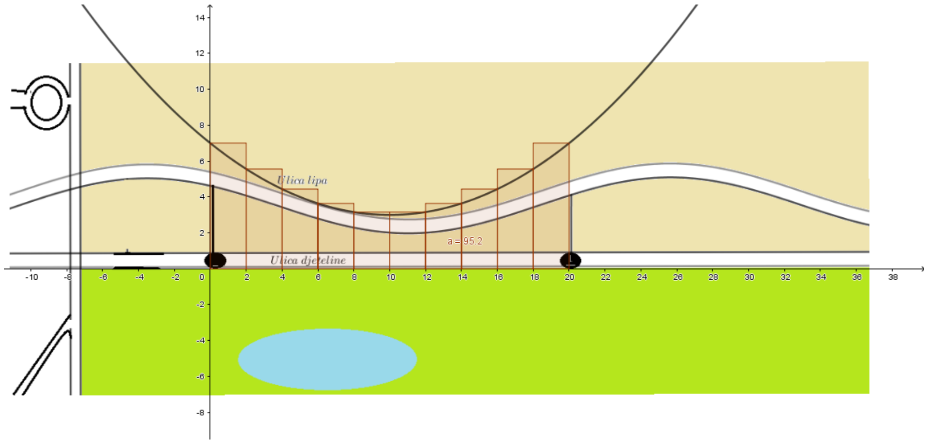
”Pretpostavite da ste upravo naslijedili posjed između “Ulice lipa” i “Ulice djeteline” i vaše imanje prostire se između crno označenih točaka. Kako biste odredili područje vašeg imanja? Napravite preliminarnu procjenu površine vašeg imanja. ”
Učenici će se formirati kao skupine od dvije ili tri osobe kao u prethodnoj aktivnosti. Za ovu aktivnost bilo bi dobro da učitelj napravi digitalnu verziju slike 3.5 i radni list u GeoGebri svakoj skupini studenata, a može se improvizirati i s prigodnim nastavnim listićem. Zatim će učenici dobiti upute na koji način bi trebali umetnuti sliku u koordinatni sustav u Geogebri. Nakon umetanja slike, učenici trebaju odrediti jednadžbu krivulje ”Ulice lipa” slijedeći upute učitelja. Učenici vrlo lako, procjenom koordinata točaka u koordinatnom sustavu mogu odrediti jednadžbu krivulje kojom će aproksimirati ulicu. Primjerice, ta jednadžba može glasiti:

$$y = 0.04x^2 - 0.8x + 7.$$

Na taj način učenici će uočiti kako moraju odrediti površinu ispod krivulje ograničene intervalom $[0, 20]$ kako bi pronašli površinu naslijeđenog područja. Prije samog početka istraživanja, učitelj daje učenicima uputu o korištenju metoda pri procjeni površine. U ovoj aktivnosti, za razliku od prethodne, učenici mogu koristiti smao vertikalno ili horizontalne položene pravokutnike pomoću kojih će određivati površinu. Za početak, bilo bi dobro reći učenicima da površinu pokušaju procijeniti pomoću samo jednog pravokutnika koji pokriva cijelo područje.

No, neki učenici će sigurno i sami početi preciznije ograničavati traženo područje sa što većim brojem pravokutnika.
Nastavno na prethodnu kraću diskusiju, učitelj može ponovno podsjetiti na prethodne zaključke iz prve aktivnosti o tome kako se procjena poboljšava ukoliko se povećava broj pravokutnika. Tada će učenici nastaviti raditi na svojim GeoGebra alatima te će područje čiju površinu trebaju odrediti, podijeliti, odnosno omeđiti s većim brojem pravokutnika. Dok učenici crtaju pravokutnike slične pravokutnicima na slici ispod, vidjet će da se sve

više i više približavaju površini područja ispod krivulje, baš kako povećavaju broj pravokutnika.



Slika 3.6: Područje pokriveno pravokutnicima

Nakon što su učenici kreirali situaciju kao na 3.6, tada bi bilo dobro da pomoću alata u Geogebri odrede zbroj površina svih pravokutnika. Na taj način učenici će napraviti prvu procjenu površine naslijeđenog imanja. Učitelj učenicima može dati konkretne upute:

GeoGebra upute

Izradite listu pravokutnika tako što ćete zasjeniti sve "Poly" u algebraskom i prenijeti ih u ulaznu traku. Pritisnite enter i vidjet ćete izrađeni popis u algebarskom prikazu.

Napišite sumu u ulaznu traku i odaberite naredbu Sum [<List>].

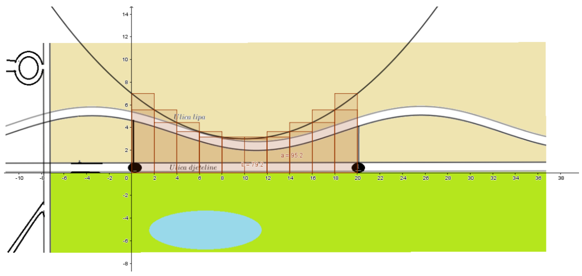
Napišite ime liste za <Lista>. Pritisnite enter i vidjet ćete zbroj u algebarskom prikazu.

Slika 3.7: Upute za GeoGebru

Nakon što su grupe učenika odredile odgovarajuće sume i procijenile površinu naslijeđenog područja, postoji nekoliko pitanja koja će potaknuti učenike na daljnje razmišljanje i pris-

ptivanje dobivenog rezultata. Kraća rasprava temeljena na nekoliko sljedećih pitanja može biti vrlo poticajna za razumijevanje napravljenog i pronikunuće u širi i dublji kontekts integralnog računa. Neka od pitanja kojima učitelj može kreirati raspravu su sljedeća:
“Koliko iznosi vaš rezultat i kojeg je reda veličine?”
“Je li vaš rezultat smislen?”
“Kako možete procijenit je li vaš rezultat smislen ili ne?”
”Što možete napraviti kako biste svoj rezultat učinili smislenim?”

Kroz takvu raspravu učenici razmišljaju o površini područja koje ih zanima uspoređujući tu površinu s nekoliko površina koja već poznaju, u prirodnoj veličini. Stoga bi učenici trebali razumjeti da trebaju obratiti pozornost na metričku ljestvicu. S obzirom da smo u našoj aktivnosti sliku izradili na temelju imaginarnih ulica koje se ne mogu pronaći u stvarnosti, u nastavi se može odmah na početku aktivnosti odrediti koliko bi trebala iznositi stvarna površina područja, kao što smo napravili u prethodnom poglavlju s aktivnostima naftne mrlje i površine Antarktika. Također, na isti način može se prilagoditi i mjerilo tako da površina koju učenici dobiju u svojim koordinatnim sustavima odgovara onoj površini koja se na početku odredi kao stvarna. I u tom trenutku prethodno navedena rasprava ima smisla.To će omogućiti učenicima da s razumijevanjem reguliraju broj pravokutnika prilagođavajući izbor zadanom intevralu. Dok učenici pokušavaju što preciznije odrediti površinu, povećavajući broj pravokutnika kojom je aproksimiraju, učitelj za to vrijeme ponovno može razviti kraću diskusiju kojom će učenicima sugerirati daljnji put i zaključivanje:
“Koje ste podatke koristili za izračunavanje površine s početka aktivnosti?”
”Zašto? - Kako biste mogli regulirati svoju metodu kako biste pronašli rezultat koji se nalazi u zadanom intervalu?
Učenici će raditi na pronalaženju preciznijih rezultata koji će se nalazati u zadanom intervalu korištenjem metode pokušaja i pogreške, a pritom će prilagođavati informacije koje su koristili. Tada se dolazi do glavnog pojma ove aktivnosti, gornjih i donjih suma. Učitelj tada učenicima može dati objašnjenje sintagme gornjih i donjih suma. U tom trenutku, nakon procesa izvršenja prethodno opisane aktivnosti, smatra se da su učenici spremni za upoznavanje s pojmom gornjih i donjih suma. Zbroj površina pravokutnika koji imaju dužinu jednaku vrijednosti krivulje u točki, naziva se ”gornja suma”. Dakle, gornja suma daje malo više prostora nego područje ispod krivulje. Zbroj površina pravokutnika jednake širine koji je unutar područja ispod krivulje naziva se donja suma. Dakle, donja suma daje malo manje površinu od površine ispod krivulje. Tada se učenicima može pokazati u GeoGebri, pomoću naredbi gornje i donje sume, što to znači na slici područja čiju površinu treba odrediti, slično kao na slici 3.8.



Slika 3.8: Prikaz gornjih i donjih suma

Uz upute nastavnika, to isto mogu napraviti učenici na svojim računalima u skupinama, ako se aktivnost provodi na računalima. Na taj način će učenici, kako koriste gornju i donju sumu u GeoGebri, vidjeti da se razlika između donje i gornje sume smanjuje kako se povećava broj pravokutnika, a točna, odnosno najpreciznija površina traženog područja bit će između ove dvije vrijednosti. Time se ova aktivnost može zaključiti.

3.2.3 Koncept aktivnosti-Švedska i Finska

Sada ćemo se kratko osvrnuti na pristup i proces koji je predstavljen u radu Varied Ways to Teach the Definite Integral Concept, sa sveučilišta u Finskoj i Švedskoj. Izdvojit ćemo, nama, najzanimljivije dijelove koji se odnose na praktično poučavanje integralnog računa. Primjer nastavnog listića, koji smo djelomično prilagodili, prikazan je na način da smo u fokus stavili pitanja prikazana na nastavnom listiću pomoću kojih se ispituje razina razumijevanja. U ovoj aktivnosti prikazat ćemo samo jedan primjer vrlo konstruktivnog nastavnog listića koji je pogodan i za jedan vid formativnog vrednovanja. Može se modificirati na razne načine, a pitanja koja su postavljena vrlo su otvorena i ostavljaju prostora za zaključke, istraživanja i pitanja. Nastavni listić odnosi se zapravo na konceptualno razumijevanje Riemannovog integrala.

Cilj aktivnosti: Učenici će predstaviti svoja rasuđivanja temeljnih pojmova integralnog računa.

Nastavni oblik: Diferencirana nastava u obliku individualnog rada.

Nastavna metoda: Metoda dijaloga, heuristička nastava.

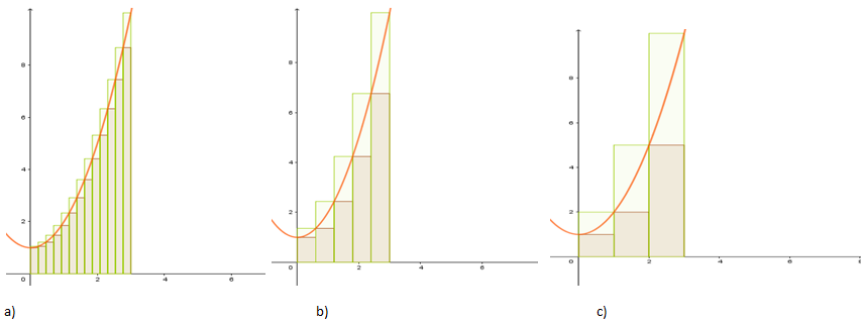
Potrebni materijali: Prigodan nastavni listić.

Detaljan tijek aktivnosti: Akitvnost je predviđena za indivudalni oblik rada što znači da će svaki učenik u određenom vremenu napisati svoje odgovore i eventualna pitanja o kojima bi bilo dobro raspraviti. Učenici prvo vode kraću diskusiju s učiteljem o tome što je prikazano na slici i što svaki graf može predstavljati. Nakon toga učenici odgovaraju na pitanja ispod slike, a u podnožju listića ispisuju pitanja vezana za grafove za koja žele da se dodatno razjasne. Prvo pitanje odnosi se na graf, a sva ostala na razumijevanje koncepta Osnovnog teorema infinitezimalnog računa.

Nastavni listić:

Pitanje 1: Ako želite izračunati područje između krivulje i x-osi i i pravaca $x = 0$ i $x = 5$. (vidi grafikone dolje), možete dobiti približnu vrijednost površine ovog područja izračunavanjem i zbrajanje površine svakog spravokutnika sa slike.

Koji od sljedećih grafikona biste trebali odabrati kako biste pogrešku učinili najmanjom mogućom?



Slika 3.9: Ponuđeni odgovori

Cilj prvog pitanja bio je ispitati i razviti intuitivnu koncepciju učenika o površini područja kao rezultat ograničavajućeg procesa (gornjih Riemannovih suma). Promatranjem grafikona, učenici će uočiti da se područje koje predstavlja pogrešku aproksimacije također smanjuje kako se povećava broj pravokutnika kojima aproksimiramo površinu.

Pitanje 2. Što znači $\int_a^b f(x)dx$?

Cilj drugog pitanja je odrediti, odnosno ispitati što za pojedinog učenika predstavlja definicija određenog integrala i kakva je slika učenikovog koncepta određenog integrala i simbola koji se nalazi u tom izrazu.

Pitanje 3. Pretpostavite da vrijedi da je $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ i $\int_{-1}^{7} f(x)dx$. Odredite $\int_{-1}^{5} f(x)dx$.

Cilj trećeg pitanja je ispitati koliko učenici razumiju određena svojstva integrala i na koji način ih primjenjuju.

Nastavni listić moguće je modificirati na različite načine, ali ovakav koncept sadržaja pitanja pogodan je prvotno uvođenje ozbiljnih pojmova iz sfere integralnog računa.

3.3 Rješavanje problema integriranjem

Rješavanje problema podrazumijeva mnoštvo toga, često prisutno u našoj svakodnevnici. Primjeice, to podrazumijeva traženje izlaza iz nekog problema ili poteškoće, traženje optimalnog puta pri rješavanju neke prepreke, dostizanje određenih ciljeva i slično. Za razvoj takvog pristupa ključno je ustvari realistično poučavanje matematike koje je povezano s rješavanjem problema iz stvarnog života, ali i imaginacije. Ključ je u devizi koja podrazumijeva učenje matematike kroz ponovno otkrivanje. Mnoštvo je pristupa koji su skloni ovakvom opisu, a jedan od najsuvremenijih je svakako RME - "Realistično matematičko obrazovanje", čiji je razvoj započeo još sedamdesetih godina prošlog stoljeća u Nizozemskoj. U ovom odjeljku nećemo analizirati daljnje rezultate spomenutog pristupa, nego ćemo navesti nekoliko primjera iz udžbenika [4] čiji je sadržaj, barem kada je u pitanju integralni račun, usklađen sa suvremenim pristupima poučavanju. Razjasnit ćemo kratko pojmove koji će se pojavljivati u sljedećim zadatcima, kao što su maksimalni, odnosno granični troškovi. Može se reći da je jedan od ciljeva u ekonomiji promatrati količinu investicija kao akumulirani kapital tijekom vremena. Kapital kojim neka tvrtka raspolaže u određenom vremenskom trenutku možemo označiti s $K(t)$, dok s $I(t)$ možemo označiti brzinu postizanja investicija u trenutku t. te je tada $I(t) = K'(t)$. Iz navedenog slijedi da je

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)dt,$$

gdje je $K(0)$ početni kapital. Možemo primijetiti kako će okosnica rješavanja ovakvih i sličnih problema biti u jednoj od reprezentacija Osnovnog teorema infinitezimalnog računa, točnije u konceptu brzine promjene i ukupne količine promjene te funkcije akumulacije.

Primjer 1. Promjena ukupnog troška proizvodnje x žarulja po tjednu opisana je funkcijom $f(x) = 0.00036x^2 - 0.02x + 2.15$ po žarulji i predviđeno je da se količina proizvedenih žarulja kreće u intervalu $0 \leqslant x \leqslant 120$. Početni troškovi, prije same proizvodnje su 185 dolara.Odredite ukupne troškove proizvodnje 100 žarulja po danu.

Rješenje: Neka je $C(x)$ vrijednost ukupnih troškova proizvodnje žarulja po tjednu, a C'

brzina rasta, odnosno mijenjanja vrijednosti troškova, točnije funkcija koja predstavlja graničnu vrijednost troškova proizvodnje. Izraz $C'(x)dx$ je ujedno i reprezentant funkcije akumulacije (skupljanje, skladištenje) troškova u ovom slučaju. Funkcija koja opisuje promjenu iznosa troškova dana je s:

$$C'(x) = \frac{dC}{dx} = 2.15 - 0.02x + 0.00036x^2.$$

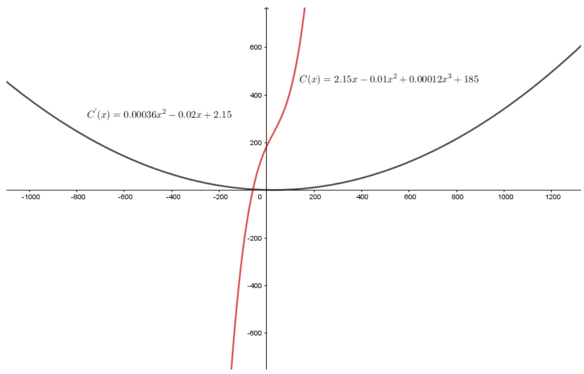
Tada je funkcija koja opisuje ukupnu promjenu iznosa troškova od trenutka kada je $x = 0$ do trenutka kada je $x = 100$, dana s:

$$\begin{aligned} C(100) &= 185 + \int_0^{100} (2.15 - 0.02x + 0.00036x^2)dx && (3.1)\\ &= 185 + (2.15x - 0.02\frac{x^2}{2} + 0.00036\frac{x^3}{3})\ |_0^{100} && (3.2)\\ &= 185 + 2.15 \cdot 100 - 0.01100^2 + 0.00012100^3 && (3.3)\\ &= 420. && (3.4) \end{aligned}$$

Ono što možemo zaključiti je to da je ukupni tjedni trošak proizvodnje 100 žarulja dnevno, gdje je početni trošak 185 dolara, jednak određenom integralu

$$C(100) = 185 + \int_0^{100} (2.15 - 0.02x + 0.00036x^2)dx = 185 + +C(100) - C(0) = 420.$$

Dakle, ukupni trošak iznosi 420 dolara.



Slika 3.10: Funkcija ukupne promjene troškova i funkcija brzine promjene vrijednosti troškova

U sljedećem primjeru, razmotrit ćemo obratnu perspektivu.

Primjer 2. Ukupni profit (dobit) proizvodnje tanjura po tjednu opisan je funkcijom $f(x) = 0.004x + 3.15$, po tanjuru. Ukoliko proizvodnja tanjura stane, javlja se gubitak od 650 dolara po tjednu.
(a) Odredite funkciju profita.
(b) Koliko iznosi maksimalan profit i u kojem trenutku se javlja?

Rješenje:
(a) U ovom slučaju funkcija $P(x) = -0.03x + 15$ predstavlja brzinu promjene ukupnog profita koji se ostvaruje proizvodnjom tanjura. Da bismo odredili funkciju koja opisuje profit koji se ostvaruje proizvodnjom tanjura, potrebno je odrediti sljedeći integral:

$$P(x) = \int (-0.03x + 3.15)dx \tag{3.5}$$
$$= -0.015x^2 + 15x + c. \tag{3.6}$$

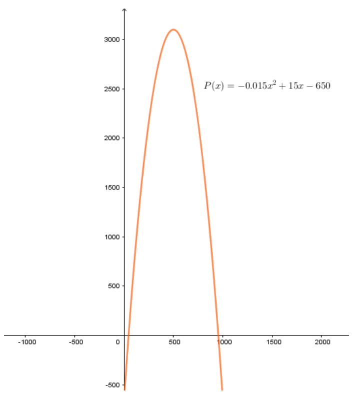
S obzirom da je tvrtka u gubitku onda kada se tanjuri ne proizvode, znači da vrijedi $P(0) = -650$ dolara. Iz tog podatka možemo odrediti konstantu c.

$$P(0) \Longrightarrow c = -650.$$

Tim je dobivena funkcija koja opisuje ukupan profit tvrtke:

$$P(x) = -0.015x^2 + 15x - 650.$$

(b) Drugi dio zadatka implicira kako bi grafički prikaz bio jedan od korisnih alata pri ovoj procjeni.



Slika 3.11: Funkcija ukupne promjene iznosa profita i iznos maksimalnog profita

Sa slike se može zaključiti da se maksimalan profit ostvaruje pri proizvodnji 500 tanjura i da tada profit iznosi nešto više od 3000 dolara. Ove navode, pokazat ćemo algebarski. Obzirom da nas zanima koliko iznosi maksimalan profit, funkciju $P'(x) = -0.03x + 15$ izjednačit ćemo s nulom kako bismo odredili trenutak u kojem se maksimalan prihod ostvaruje. :

$$P'(x) = -0.03x + 15 = 0 \Longrightarrow x = 500.$$

Iz navedenog zaključujemo da se maksimalan profit ostvaruje ori proizvodnji 500 tanjura i taj profit tada iznosi

$$P(500) = -0.015 \cdot 500^2 + 15 \cdot 500 - 650 = 3100.$$

Dakle, maksimalan profit tvrtke iznosi 3100 dolara.

Primjer 3. Jedrilica plovi pravocrtno brzinom u metrima po sekundi. Brzina je danom izrazom $v(t) = -3t + 6$.

(a) Odredite put koji je prešla jedrilica u prve četiri sekunde plovidbe.

(b) Odredite pomak koji jerdilica napravi u prve četiri sekunde plovidbe.

Rješenje: (a) Brzina jedrilice određena je izrazom

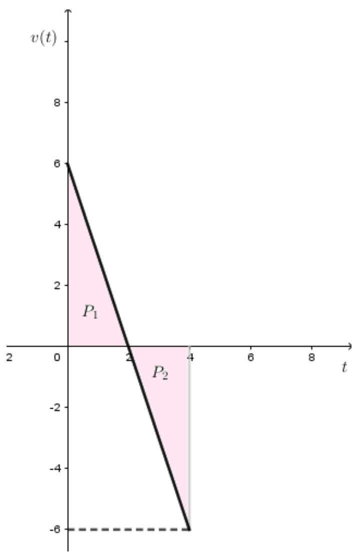
$$v(t) = -3t + 6.$$

Taj izraz zapravo predstavlja brzinu kojom jedrilica prolazi određeni put u određenom rasponu vremena. U ovom dijelu, fokus problema je na određivanju iznosa ukupnog puta koji je jedrilica prošla u određenom vremenu, točnije u vremenu od $t = 0$ do $t = 4$. Ukupni prijeđeni put razlika je krajnjeg i početnog položaja jedrilice. Sa slike možemo vidjeti da je brzina u određenom vremenskom rasponu bila negativna što možemo interpretirati kao promjenu smjera plovidbe. Ta činjenica bit će nam izuzetno važna u drugom dijelu zadatka kada ćemo određivati iznos pomaka. S obzirom da nas u ovom trenutku zanima iznos ukupnog prijeđenog puta, određujemo "stvarnu" površinu računajući određeni integral kao geometrijsku interpretaciju površine. Ukupna površina omeđena grafom funkcije v i x osi dat će nam ukupan prijeđeni put u vremenu od $t = 0$ do $t = 4$:

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^2 (-3t + 6)dt - \int_2^4 (-3t + 6)dt.$$

P_2 je površina omeđena x osi i grafom funkcije v na intervalu na kojem je funkcija v negativna. Zbog toga je

$$P_2 = -\int_2^4 (-3t + 6)dt.$$



Slika 3.12: Grafički prikaz funkcije brzine kretanja jedrilice

Sa slike 3.12 možemo vidjeti da je ukupan prijeđeni put jednak:

$$P = P_1 - P_2 = \int_0^2 (-3t + 6)dt - \int_2^4 (-3t + 6)dt = (-\frac{3}{2}t^2 + 6t) \mid_0^2 -(-\frac{3}{2}t^2 + 6t) \mid_2^4 = 12.$$

Možemo zaključiti kako je jedrilica prevalila put od 12 m.

(b) U ovom dijelu zadatka, prokomentirat ćemo kratko na koji način interpretiramo činjenicu da je brzina negativna na intervalu $[2, 4]$. U ovom trenutku, da bismo odredili pomak, pitamo se koliko se jedrilice odmaknula od referentne točke i u kojem smjeru? Brzina postaje negativna u trenutku $t = 2$ što znači da u tom trenutku jedrilica mijenja smjer i vraća se prema svojoj početnoj točki po istom pravcu po kojem je plovila u prve dvije sekunde. Da bismo odredili pomak jedrilice nakon četiri sekunde, odredit ćemo vrijednost sljedećeg određenog integrala:

$$\int_0^4 (-3t + 6)dt = (\frac{-3}{2}t^2 + 6t)|_0^4 = 0.$$

Možemo zaključiti kako se jedrilica vratila u svoj početni položaj nakon četiri sekunde plovidbe. U trenutku $t = 0$ jedrilica je zaplovila u jednom smjeru u kojem je plovila dvije iduće sekunde, da bi u trenutku $t = 2$ jedrilica promijenila smjer i plovila nazad prema svom početnom položaju. Bitno je napomenuti kako smo sada zapravo odredili relativnu površinu područja omeđenog grafom funkcije v na intervalu $[0, 4]$. Na temelju svega navedenog, možemo zaključiti da je razliku u pojmovima relativne i stvarne površine bitno dobro razumjeti. I u ovom zadatku evidentna je konceptualna razlika zbog čega će nam možda, između ostalog, biti lakše razumjeti razliku između puta i pomaka. U svakom slučaju, integral kao geometrijska interpretacija površine bio je prisutan u prvom dijelu zadatka gdje smo određivali ”stvarnu” površinu, dok je integral kao realizacija Osnovnog teorema u vidu veze brzine promjene i ukupne promjene bio pristuan u drugom dijelu zadatka, gdje smo određivali iznos pomaka, odnosno iznos relativne površine određenog područja.

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, Matematika 4 (II. polugodište), udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] B. Apsen, Repetitorij više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1983.

[3] I. Attorps, K. Björk, M. Radic,*Varied ways to teach the definite integral concept*, dostupno na https://www.iejme.com/download/varied-ways-to-teach-the-definite-integral-concept.pdf (svibanj, 2019.)

[4] M. Bruce, S. Haese, R. Haese, D. Martin, J. Owen, P. Urban, Mathematics for the international student Mathematics HL (Core), Haese and Harris Publications, Australia, 2007.

[5] B. Guljaš, Matematička analiza I i II, predavanja, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/guljas/skripte/MATANALuR.pdf (lipanj, 2019.).

[6] H. Kraljević, Z. Šikić, Matematika, udžbenik za četvrti razred gimnazija i tehničkih škola, Profil Intenational, 1995.

[7] S. Kurepa, Matematička analiza 1.dio, Diferenciranje i integriranje, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[8] T. Slijepčević-Manger, *Obujam rotacijskog tijela*, KoG•16–2012 (2012.), 81–82.

[9] B. Mikuličić, M. Varićak, E. Vernić, Zbirka zadataka iz fizike, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[10] C. Özdemir, *The development of an inquiry-based teaching unit for Turkish high school mathematics teachers on integral calculus: The case of definite integral*, dostupno na http://repository.bilkent.edu.tr/bitstream/handle/11693/33668/10165026.pdf?sequence=1&isAllowed=y (svibanj, 2019.)

[11] M. Planinić, L. Ivanjek, A. Sušac, Ž. Milin-Šipuš, *Comparison of university students understanding of graphs in different contexts*, dostupno na http://journals.aps.org/prstper/pdf/10.1103/PhysRevSTPER.9.020103 (svibanj, 2019.)

[12] F. S. Tsai, K. Natarajan, S. D. Ahipas¸aoglu, C. Yuen, H. Lee, N. Cheung, J. Ruths, S. Huang, and T. L. Magnanti, *From Boxes to Bees: Active Learning in Freshmen Calculus*, dostupno na https://www.math.upenn.edu/ pemantle/active-papers/tsai2013.pdf (svibanj, 2019.)

[13] Z. Šikić, *Newton i Leibniz otkrivači infinitezimalnog računa*, dostupno na https://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS_Newton_i_Leibniz.pdf (svibanj 2019.)

[14] Z. Šikić, Diferencijalni i integralni račun, Profil, Zagreb, 2008.

[15] Ž. Milin Šipuš, *Kako učenici razumiju i primjenjuju grafove linearnih funkcija u matematici i fizici*, dostupno na https://www.zrss.si/kupm2014/files/gradiva/petek/MilinSipus.pdf (lipanj 2019.)

[16] Ž. Milin Šipuš, *O programu Pisa*, dostupno na https://mis.element.hr/fajli/374/20-10.pdf (svibanj, 2019.)

Sažetak

U ovom radu prezentirali smo glavne konceptualne okosnice jednog od najvažnijih pojmova u matematici, pojma integrala funkcija jedne varijable. Matematičku pozadinu integralnog računa funkcija jedne varijable, pojmove neodređenog i određenog integrala, sagledali smo iz različitih perspektiva na različitim razinama obrazovanja. Koncentrirali smo se na jedan od krucijalnih teorema inifinitezimalnog računa, Osnovni (fundamentalni) teorem infinitezimalnog računa, čiji su integrali funkcija jedne varijable jedan dio. U sklopu Osnovnog teorema naglasili smo i pojmovne veze između brzine promjene i ukupne količine promjene, tj. da je određeni integral brzine promjene funkcije (ovisnosti dviju veličina) na nekom intervalu jednak ukupnoj promjeni vrijednosti te funkcije na tom promatranom intervalu. Ta veza omogućuje razvoj konceptualnog razumijevanja elementarnih pojmova integralnog računa i njegove primjene u različitim disciplinama koje koriste matematiku (npr. fizika, ekonomija), kao i u situacijama u svijetu oko nas. Time se implicira da je integralni račun itekako značajan dio srednjoškolske nastave.

Osim toga, cilj ovog diplomskog rada je prikazati različite metodičke realizacije koncepata integralnog računa u udžbeničkoj sveučilišnoj i srednjoškolskoj literaturi u Hrvatskoj, kao i pojedine primjere metodičkih aktivnosti za učenike i studente iz europske i svjetske literature. Time naglašavamo raznolike i široke mogućnosti razvoja konceptualnog razumijevanja integralnog računa na svim razinama obrazovanja, a osobito u srednjoškolskoj nastavi matematike.

Summary

In this graduate thesis we have presented the main conceptual frameworks for one of the most important mathematical concept, integral of functions of a single variable. The mathematical background of (definite and indefinite) integral of a function of a single variable is overviewed from different perspectives at different levels of education. We have concentrated on one of the crucial theorems of the calculus within which integrals of functions of a single variable are a part, The fundamental theorem of calculus (FTC) and the underlying concepts. Together with the aforementioned ideas as our main goal, we have tried to emphasize the conceptual links of the rate of change and the accumulated change of the quantity, that is that a certain integral rate of change of a function (dependence of two quantities) is equal to the total accumulated change in function value on an observed interval. Such resonance allows us to develop conceptual understanding of the underlying concepts of the integral calculus and its application in various disciplines that use mathematics (e.g. physics, economy) and in situations in world around us, implying that the concept of integral is a significant part of the high school education.

Besides, the goal of this thesis was to present different didactical realizations of the concept of integral calculus from university and high school textbooks in Croatia, and examples of didactical activities for pupils and students from European and world literature. In this way we highlight the diverse and broad possibilities of development of conceptual understanding of the calculus at all levels of education, especially in high school mathematics education.

Životopis

Rođena sam 5. listopada 1994. u Freiburgu im Breisgau, gradu na jugu Njemačke. Osnovnu školu Antuna Branka Šimića završila sam u Mostaru, Bosna i Hercegovina. U Mostaru sam završila i opću gimnaziju, Gimnaziju Mostar, gdje sam proglašena učenicom generacije. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na županijskom natjecanju iz matematike Hercegovačko-neretvanske županije te na federalnom natjecanju iz matematike za škole koje rade po hrvatskom nastavnom planu i programu Federacije Bosne i Hercegovine. Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu upisala sam 2014.