Totalno pozitivne matrice

Kunjašić, Nives

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nives Kunjašić

TOTALNO POZITIVNE MATRICE

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nives Kunjašić

TOTALNO POZITIVNE MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Definicija i osnovna svojstva (striktno) totalno pozitivnih matrica **2**
1.1 Definicija i jedan primjer 2
1.2 Operacije koje čuvaju klasu (striktno) totalno pozitivnih matrica 4
1.3 Još neke konstrukcije (striktno) totalno pozitivnih matrica 13

2 Kriteriji za provjeru (striktne) totalne pozitivnosti matrica **15**
2.1 Kriteriji za striktno totalno pozitivne matrice 15
2.2 Konstrukcija striktno totalno pozitivnih matrica 20
2.3 Kriteriji za totalno pozitivne matrice 22

3 Primjeri (striktno) totalno pozitivnih matrica **26**
3.1 Pascalova, Cauchyjeva i Vandermondeova matrica 26
3.2 Još neki primjeri matrica 34

Uvod

Matrica je striktno totalno pozitivna ako su sve njene minore pozitivni realni brojevi, te totalno pozitivna ako su sve njene minore nenegativni realni brojevi. Sustavno proučavanje matrica ovih tipova započelo je tridesetih godina prošlog stoljeća u radovima F. R. Gantmachera i M. G. Kreina. Oni su otkrili mnoga svojstva ovih matrica, između ostalog i to da svaka striktno totalno pozitivna matrica reda n ima n različitih pozitivnih svojstvenih vrijednosti.

Striktno totalno pozitivne i totalno pozitivne matrice se pojavljuju u raznim područjima matematike, kao što su, na primjer, teorija grafova, stohastički procesi, teorija igara, diferencijalne jednadžbe, teorija reprezentacija, bazni okviri za Hilbertove prostore, teorija aproksimacija. Također, svoju primjenu nalaze i izvan matematike - u kemiji, elektrotehnici, ekonomiji, računarstvu...

U ovom radu proučavat ćemo neka osnovna svojstva striktno totalno pozitivnih i totalno pozitivnih matrica. Primjerice, proučavat ćemo operacije koje čuvaju striktnu totalnu pozitivnost odnosno totalnu pozitivnost matrica što će nam omogućiti da iz postojećih primjera matrica ovih tipova konstruiramo nove primjere unutar istih klasa. Također su važni dovoljni uvjeti za striktnu totalnu pozitivnost te totalnu pozitivnost matrica kojima se reducira broj minora koje trebamo provjeriti. U posljednjem poglavlju navodimo razne primjere striktno totalno pozitivnih i totalno pozitivnih matrica.

Poglavlje 1

Definicija i osnovna svojstva (striktno) totalno pozitivnih matrica

1.1 Definicija i jedan primjer

U ovoj točki uvest ćemo pojam totalno pozitivnih i striktno totalno pozitivnih matrica. Za početak ćemo uvesti oznake i jednakosti za determinante koje ćemo koristiti tijekom cijelog rada. Za $n \in \mathbb{N}$ i za $p \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo

$$I_p^n := \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_p) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\} \subseteq \mathbb{N}^p.$$

S M_{nm} ćemo označavati prostor svih matrica tipa (n, m) s realnim koeficijentima. Ako je $n = m$ oznaku M_{nm} ćemo kratiti u M_n. Ako je $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ matrica, tada je za svaki $\mathbf{i} \in I_p^n$ i $\mathbf{j} \in I_q^m$

$$A[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = A\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} i_1, \ldots, i_p \\ j_1, \ldots, j_q \end{bmatrix} := (a_{i_k j_l}) \in M_{pq}$$

oznaka za podmatricu od A određenu retcima $i_1, \ldots, i_p$ i stupcima $j_1, \ldots, j_q$. Kada je $p = q$ tada možemo promatrati i determinantu matrice A, tj. minoru reda p matrice $A[i, j]$ koju ćemo označavati kao

$$A(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_p \\ j_1, \ldots, j_p \end{pmatrix} := \det A[i, j].$$

Navedimo sada Sylvestrovu jednakost o determinantama. Neka je $A \in M_{nm}$ te

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in I_p^n \quad i \quad (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in I_p^m.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ i $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ definiramo

$$b_{ij} = A\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_{p+1} \\ l_1, \ldots, l_{p+1} \end{pmatrix},$$

gdje su $\{k_1, \dots, k_{p+1}\}$, $\{l_1, \dots, l_{p+1}\}$ skupovi cijelih brojeva $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, i\}$, $\{\beta_1, \dots, \beta_p, j\}$ poredani u prirodnom redoslijedu. **Sylvestrova jednakost o determinantama** kaže da minore matrice $B = (b_{ij}) \in M_{n-p,m-p}$ zadovoljavaju

$$B\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} = \left[A\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_p \end{pmatrix}\right]^{r-1} A\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p, i_1, \dots, i_r \\ \beta_1, \dots, \beta_p, j_1, \dots, j_r \end{pmatrix}.$$

Podmatrica

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_p \end{bmatrix}$$

zove se pivotni blok. (Pritom podrazumijevamo da su indeksi redaka i stupaca u prirodnom redoslijedu).

Sljedeću jednakost o determinantama ćemo koristiti u nekim dokazima. Neka je $A \in M_{nm}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ i $1 \le j_1 < \cdots < j_{r+1} \le m$. Tada za svaki $k \in \{1, \dots, r\}$ i $l \in \{2, \dots, r\}$ vrijedi

$$A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, \widehat{j_l}, \dots, j_{r+1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_r \\ j_2, \dots, j_r \end{pmatrix} =$$

$$A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_2, \dots, j_{r+1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_r \\ j_1, \dots, \widehat{j_l}, \dots, j_r \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_r \\ j_2, \dots, \widehat{j_l}, \dots, j_{r+1} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Sada uvedimo definiciju glavnog objekta proučavanja u ovom diplomskom radu.

Definicija 1.1.1. *Matrica $A \in M_n$ je* ***totalno pozitivna*** *ako su sve njene minore nenegativne, odnosno, ako vrijedi*

$$A(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} \ge 0 \tag{1.2}$$

za sve $\boldsymbol{i} \in I_p^n, \boldsymbol{j} \in I_p^m$ i za sve $p = 1, \dots, \min\{n, m\}$. Matrica $A \in M_n$ je ***striktno totalno pozitivna*** *ako su sve njene minore pozitivne.*

Odmah uočavamo da su elementi (striktno) totalno pozitivne matrice nenegativni (pozitivni) brojevi, jer su to minore prvog reda. Iz definicije je očito da je svaka podmatrica (striktno) totalno pozitivne matrice opet (striktno) totalno pozitivna matrica. Pogledajmo primjer jedne totalno pozitivne matrice. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Provjerimo je li A (striktno) totalno pozitivna matrica.

Minore prvog reda su sami elementi matrice, a oni su očito pozitivni.

Direktno provjerimo da su minore drugog reda također pozitivni brojevi:

$$A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0, \qquad A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0,$$

$$A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 > 0, \qquad A\begin{pmatrix} 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0,$$

$$A\begin{pmatrix} 1,3 \\ 1,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0, \qquad A\begin{pmatrix} 1,3 \\ 2,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 > 0,$$

$$A\begin{pmatrix} 2,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 > 0, \qquad A\begin{pmatrix} 2,3 \\ 1,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 > 0,$$

$$A\begin{pmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0.$$

Imamo samo jednu minoru trećeg reda i to je determinanta matrice A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Dakle, matrica A je striktno totalno pozitivna matrica. Ovu matricu nazivamo Pascalovom matricom trećeg reda. Pascalove matrice n-tog reda ćemo definirati u trećem poglavlju.

1.2 Operacije koje čuvaju klasu (striktno) totalno pozitivnih matrica

Jedna od operacija koje čuvaju (striktnu) totalnu pozitivnost matrice je transponiranje, što ćemo dokazati u narednoj propoziciji. Transponiranu matricu matrice A označavat ćemo s A^τ. Napomenimo da dokaze u ovoj točki nećemo provoditi u punoj općenitosti zbog njihove kompleksnosti.

Propozicija 1.2.1. *Pretpostavimo da je A (striktno) totalno pozitivna matrica. Tada je A^τ (striktno) totalno pozitivna matrica.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz dobro poznate činjenice kako za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi $\det A^\tau = \det A$ [2, propozicija 3.2.13]. □

Propozicija 1.2.2. *Pretpostavimo da je $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ (striktno) totalno pozitivna matrica. Neka je $b_{ij} = a_{n+1-i,m+1-j}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Tada je $B = (b_{ij}) \in M_{nm}$ (striktno) totalno pozitivna matrica.*

Dokaz. Zbog jednostavnosti zapisa dokaz provodimo za $n = m = 3$. Tada je $b_{ij} = a_{4-i,4-j}, i, j = \{1, 2, 3\}$, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Matrica B se iz A može dobiti zamjenom redaka ili stupaca. Zamjenom dva retka ili dva stupca determinanta mijenja predznak. Ukupan broj zamjena u svakoj minori od B bit će paran, jer svaku zamjenu izvodimo i nad retcima i nad stupcima. Zaključujemo da je onda i B (striktno) totalno pozitivna matrica. □

Dokaz sljedeće propozicije slijedi iz **Binet-Cauchyjevog teorema** koji kaže da za svake dvije matrice $A, B \in M_n$ vrijedi $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, tj. determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanata pojedinih matrica.

Propozicija 1.2.3. *Neka je $A \in M_{nm}$ i $B \in M_{mr}$.*

(i) Ako su A i B totalno pozitivne matrice, onda je AB totalno pozitivna matrica. Posebno, ako je A totalno pozitivna matrica, onda je A^k totalno pozitivna za svaki $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Ako je A striktno totalno pozitivna matrica i B totalno pozitivna matrica ranga r, tada je AB striktno totalno pozitivna matrica.

(iii) Analogno, ako je A totalno pozitivna matrica ranga n i B striktno totalno pozitivna matrica, tada je AB striktno totalno pozitivna matrica.

Propozicija 1.2.4. *Sljedeće operacije čuvaju klasu (striktno) totalno pozitivnih matrica:*

(i) Množenje retka (stupca) pozitivnim skalarom. Posebno, ako je A (striktno) totalno pozitivna matrica i $\lambda > 0$, onda je λA također (striktno) totalno pozitivna matrica.

(ii) Dodavanje pozitivnog višekratnika retka (stupca) susjednom retku (stupcu).

(iii) Dodavanje pozitivne vrijednosti elementu matrice na mjestu (1,1).

(iv) Dodavanje pozitivne vrijednosti elementu matrice na mjestu (n,m), pri čemu je matrica tipa (n,m).

Dokaz. Tvrdnja (i) slijedi jer za determinantu matrice B, koju smo dobili množenjem nekog retka (stupca) matrice A skalarom λ, vrijedi $\det B = \lambda \det A$ [2, propozicija 3.2.15].

(ii) Dokaz provodimo na primjeru $m = 2$ i $n = 4$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

(striktno) totalno pozitivna matrica. Pomnožimo li drugi stupac s pozitivnim skalarom λ i dodamo trećem, imamo

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \lambda a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \lambda a_{22} & a_{24} \end{bmatrix}.$$

Provjerimo je li matrica B također (striktno) totalno pozitivna. Minore prvog reda su pozitivne, jer je A (striktno) totalno pozitivna matrica i $\lambda > 0$. Imamo nekoliko minora drugog reda:

$$B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \qquad B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \geq 0,$$
$$B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \geq 0, \qquad B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} + \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{23} + \lambda a_{22} \end{vmatrix},$$
$$B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} + \lambda a_{12} \\ a_{22} & a_{23} + \lambda a_{22} \end{vmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} + \lambda a_{12} & a_{14} \\ a_{23} + \lambda a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Nadalje imamo

$$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} + \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{23} + \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Prema tome, minore drugog reda matrice B se podudaraju s minorama matrice A pa su sve nenegativne. Analogno napravimo i s preostale dvije minore drugog reda, kao i s $B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix}$ te zaključujemo kako je i B (striktno) totalno pozitivna matrica.

(iii) Neka je $A \in M_{nm}$ (striktno) totalno pozitivna matrica.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

te neka je

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdje je λ pozitivan skalar. Treba dokazati da je B (striktno) totalno pozitivna matrica. To slijedi iz sljedećeg:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

jer su minore u donjem retku jednakosti pozitivne i λ je pozitivan skalar. Na analogan način provjeravamo slučaj kada je λ dodana na (n, m)-tu poziciju. □

Napomena 1.2.5. Tvrdnja (ii) kaže da se (striktno) totalna pozitivnost čuva ako dodamo pozitivni višekratnik retka (stupca) susjednom retku (stupcu). Hoće li (striktna) totalna pozitivnost matrice biti sačuvana i ako dodajemo nesusjednom retku (stupcu)? Pogledajmo na sljedećem primjeru. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

striktno totalno pozitivna matrica. Pomnožimo li prvi stupac s pozitivnim skalarom λ i dodamo trećem, imamo:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{21} & a_{24} \end{bmatrix}.$$

Minore prvog reda matrice B su pozitivne, jer je A striktno totalno pozitivna matrica i $\lambda > 0$. Međutim, imamo

$$\begin{aligned}
B\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}+\lambda a_{11} \\ a_{22} & a_{23}+\lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & \lambda a_{11} \\ a_{22} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

što je razlika dva pozitivna broja. Za dovoljno velik λ ova razlika je negativna te zaključujemo kako matrica B nije striktno totalno pozitivna.

Provjerimo na primjeru čuva li invertiranje (striktnu) totalnu pozitivnost matrice. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ je striktno totalno pozitivna, jer su sve minore strogo pozitivne. Njena inverzna matrica je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Primiječujemo kako ona nije totalno pozitivna matrica. Dakle, ako je A (striktno) totalno pozitivna matrica, A^{-1} ne mora biti (striktno) totalno pozitivna matrica. U sljedećoj propoziciji pokazujemo kako množenjem matrice A^{-1} slijeva i zdesna dijagonalnom matricom s naizmjeničnim elementima 1 i -1 dobijemo matricu koja je (striktno) totalno pozitivna.

U sljedećoj propoziciji računamo i inverz pomoću adjunktne matrice. Neka je $A = (a_{ij})$ i $A^{-1} = (c_{ij})$. Tada vrijedi

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A\begin{pmatrix} 1, \ldots, \widehat{j}, \ldots, n \\ 1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix}}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Kako je

$$(DA^{-1}D)_{ij} = (-1)^{i+j} c_{ij} = \frac{A\begin{pmatrix} 1, \ldots, \widehat{j}, \ldots, n \\ 1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix}} \tag{1.4}$$

iz striktne totalne pozitivnost od A slijedi da su svi elementi od $DA^{-1}D$ pozitivni.

Propozicija 1.2.6. *Pretpostavimo da je A striktno totalno pozitivna kvadratna matrica reda n. Tada je $DA^{-1}D$ striktno totalno pozitivna matrica pri čemu je D dijagonalna matrica s naizmjeničnim dijagonalnim elementima* 1 *i* -1. *Ako je A invertibilna totalno pozitivna matrica, tada je $DA^{-1}D$ invertibilna totalno pozitivna matrica.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti samo za slučaj $n = m = 2$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2$$

striktno totalno pozitivna matrica i

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \in M_2$$

njena inverzna matrica. Tada je

$$DA^{-1}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Prema (1.4) znamo kako su sve minore prvog reda matrice $DA^{-1}D$ pozitivne, a prema Binet Cauchyjevom teoremu slijedi

$$\det(DA^{-1}D) = \det A^{-1}(\det D)^2 = \frac{(\det D)^2}{\det A} > 0.$$

Ovim smo dokazali kako su sve minore $DA^{-1}D$ pozitivne. □

Pogledajmo na primjeru prethodnu propoziciju. Izračunajmo $DS_3^{-1}D$ gdje je

$$S_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

inverz Pascalove matrice trećeg reda. Tada je

$$DS_3^{-1}D = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je S_3 striktno totalno pozitivna matrica, tada izravno po propoziciji 1.2.6 slijedi da je $DS_3^{-1}D$ također striktno totalno pozitivna matrica.

Propozicija 1.2.7. *Pretpostavimo da je $A \in M_{nm}$ (striktno) totalno pozitivna matrica. Fiksirajmo $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le m$ te neka je*

$$b_{ij} = A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k, i \\ j_1, \dots, j_k, j \end{pmatrix}$$

za $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ te $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$. (Indeksi redaka i stupaca su posloženi u prirodnom redoslijedu.) Tada je $B = (b_{ij}) \in M_{n-k,m-k}$ (striktno) totalno pozitivna matrica.

Ovu propoziciju nećemo dokazivati već ćemo na Pascalovoj matrici reda 3 ilustrirati kako formirati novu matricu B. Odmah na početku primijetimo kako je $k < \min\{n, m\}$.

Neka je $k = 1$. Fiksirajmo $i_1 = 3, j_1 = 2$. Tada je $i \in \{1, 2\}$ te $j \in \{1, 3\}$. Elementi matrice B su zadani kao:

$$b_{11} = A\begin{pmatrix} 3, 1 \\ 2, 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1, 3 \\ 1, 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

$$b_{13} = A\begin{pmatrix} 3, 1 \\ 2, 3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1, 3 \\ 2, 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3,$$

$$b_{21} = A\begin{pmatrix} 3, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2, 3 \\ 1, 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

$$b_{23} = A\begin{pmatrix} 3, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2, 3 \\ 2, 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3.$$

Dobili smo matricu

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in M_2$$

koja je očito striktno totalno pozitivna.

Neka je $k = 2$. Fiksirajmo $i_1 = 2, i_2 = 3$, $j_1 = 1$ i $j_2 = 2$. Tada je $i = 1$, $j = 3$. Pa je

$$B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \in M_1,$$

a ovo je očito također striktno totalno pozitivna matrica.

Propozicija 1.2.8. *Pretpostavimo da je $A \in M_{nm}$ (striktno) totalno pozitivna matrica. Neka za $1 \leq r < n$ vrijedi*

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = 1, \ldots, r, \; j = 2, \ldots, m \\ A\begin{pmatrix} i-1, i \\ 1, j \end{pmatrix}, & i = r+1, \ldots, n, \; j = 2, \ldots, m \end{cases}$$

Tada je $C_r = (c_{ij}) \in M_{n,m-1}$ (striktno) totalno pozitivna matrica.

Dokaz. Promotrimo slučaj $n = 2$, $m = 3$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

striktno totalno pozitivna matrica. Uočimo kako je $r = 1$ ili $r = 2$.

Ako je $r = 1$ tada

$$c_{12} = a_{12}, \quad c_{13} = a_{13},$$
$$c_{22} = A\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}, \quad c_{23} = A\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 3 \end{pmatrix}$$

pa je

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \end{bmatrix}.$$

Kako je A striktno totalno pozitivna matrica, tada su sve minore prvog reda matrice C_1 pozitivne. Pogledajmo minoru drugog reda

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \end{vmatrix}.$$

Pomnožimo prvi redak s a_{21} i dodajmo drugom retku. Sada imamo

$$\begin{aligned} \det C_1 &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} A \begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \end{pmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Ako je $r = 2$ tada

$$c_{12} = a_{12}, \quad c_{13} = a_{13}, \quad c_{22} = a_{22}, \quad c_{23} = a_{23}$$

pa je

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Kako je A striktno totalno pozitivna matrica, tada je i C_2 striktno totalno pozitivna matrica.

Analogno bi dokazali u slučaju da je A totalno pozitivna matrica. □

Teorem 1.2.9. *Neka je $A \in M_{nm}$, $n < m$ i pretpostavimo da je*

$$A \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Definiramo matricu $B = (b_{ij}) \in M_{n,m-n}$ na sljedeći način:

$$b_{ij} = A \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ 1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n, n+j \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m-n.$$

Za ovako definirane A i B vrijedi:

$$B \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \left[A \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix} \right]^{r-1} A \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ i'_1, \ldots, i'_{n-r}, n+j_1, \ldots, n+j_r \end{pmatrix}$$

gdje je $\left\{ i'_1, \ldots, i'_{n-r} \right\} \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$. Neka je $C = (c_{ij}) \in M_{n,m-n}$ pri čemu je

$$c_{ij} = b_{n-i+1,j}, \qquad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m-n.$$

Ako je A (striktno) totalno pozitivna matrica, tada je i C (striktno) totalno pozitivna matrica.

Dokaz. Zbog jednostavnosti, dokaz provodimo za $n = 2$, $m = 4$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \in M_{24}$$

striktno totalno pozitivna matrica i

$$A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Matricu $B \in M_2$ konstruirajmo pomoću A. Imamo

$$b_{11} = A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \end{pmatrix}, \qquad b_{12} = A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,4 \end{pmatrix}, \qquad b_{21} = A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \qquad b_{22} = A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Nadalje je $c_{11} = b_{21}, c_{12} = b_{22}, c_{21} = b_{11}, c_{22} = b_{12}$ pa je matrica

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo kako je matrica C nastala iz B preokretom redaka. Po propoziciji 1.2.2 jedna od njih nije totalno pozitivna matrica. Po teoremu 1.2.9, matrica C je striktno totalno pozitivna pa to i dokažimo. Znamo da je

$$b_{11} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \quad b_{12} = a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22},$$

$$b_{21} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, \quad b_{22} = a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\det C &= \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{12}a_{23}a_{24} - a_{12}a_{13}a_{21}a_{24} - a_{11}a_{14}a_{22}a_{23} + a_{13}a_{14}a_{21}a_{22} \\
&\quad - a_{11}a_{12}a_{23}a_{24} + a_{12}a_{14}a_{21}a_{23} + a_{11}a_{13}a_{22}a_{24} - a_{13}a_{14}a_{21}a_{22} \\
&= a_{12}a_{21}(a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}) + a_{11}a_{22}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) \\
&= (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{13} \\ a_{24} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} > 0.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali teorem. □

Pogledajmo na primjeru teorem 1.2.9. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \end{bmatrix} \in M_{35}$$

striktno totalno pozitivna matrica. Tada je

$$b_{11} = A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 1, \qquad b_{12} = A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 2,3,5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix} = 3,$$

$$b_{21} = A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 3, \qquad b_{22} = A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,3,5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 15 \end{vmatrix} = 8,$$

$$b_{31} = A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,2,4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 3, \qquad b_{32} = A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 1,2,5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 6$$

pa je

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Primjetimo kako matrica B nije totalno pozitivna jer su joj minore drugog stupnja negativne. Nadalje je $c_{11} = b_{31}, c_{12} = b_{32}, c_{21} = b_{21}, c_{22} = b_{22}, c_{31} = b_{11}$ i $c_{32} = b_{12}$ pa je matrica

$$C = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Minore prvog reda matrice C su elementi matrice i pozitivni su. Provjerimo minore drugog reda:

$$C\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 18 = 6 > 0, \qquad C\begin{pmatrix} 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 > 0,$$

$$C\begin{pmatrix} 2,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Uvjerili smo se kako je C striktno totalno pozitivna matrica. Analogno bi napravili u slučaju da je A totalno pozitivna matrica.

1.3 Još neke konstrukcije (striktno) totalno pozitivnih matrica

Još su 1930. godine F. R. Gantmacher i M. G. Krein proučavali operacije koje čuvaju klasu (striktno) totalno pozitivnih matrica te otkrili ako je A (striktno) totalno pozitivna matrica, tada postoje druge (striktno) totalno pozitivne matrice povezane s A i izvedene iz A. U prošloj sekciji vidjeli smo poveznice između (striktno) totalno pozitivnih matrica, proučili neka osnovna svojstva (striktno) totalno pozitivnih matrica i dokazali ih. Postoje i neke druge operacije koje čine svojstva (striktno) totalno pozitivnih matrica te čuvaju svojstvo (striktne) totalne pozitivnosti, ali one nisu toliko očigledne kao navedene pa ćemo ih navesti u ovoj točki bez dokaza.

Teorem 1.3.1. *Pretpostavimo da je $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ totalno pozitivna matrica. Za zadani k, neka je*

$$b_{ij} = a_{ij}A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1,\dots,k,i \\ 1,\dots,k,j \end{pmatrix}$$

za $i = k+1,\dots,n$, $j = k+1,\dots,m$. Tada je $B = (b_{ij}) \in M_{n-k,m-k}$ totalno pozitivna matrica.

Primijetimo da je

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{i-1,j} \end{matrix} \\ a_{i1}\dots a_{i,j-1} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Propozicija 1.3.2. *Pretpostavimo da je $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ (striktno) totalno pozitivna matrica. Za $p < \min\{m,n\}$ definiramo*

$$c_{ij} = A\begin{pmatrix} i-p,\dots,i-1,i \\ 1,\dots,p,j \end{pmatrix}$$

za $i = p+1,\dots,n$, $j = p+1,\dots,m$. Tada je $C = (c_{ij}) \in M_{n-p,m-p}$ (striktno) totalno pozitivna matrica.

Teorem 1.3.3. *Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n$ te $B = (b_{ij}) \in M_n$ definirana na sljedeći način:*

$$b_{1j} = a_{1j}, \qquad j = 1,\dots,n,$$

i za $i \geq 2$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{i-1,k}a_{kj}, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Ako je A (striktno) totalno pozitivna matrica, tada je i B (striktno) totalno pozitivna matrica.

Poglavlje 2

Kriteriji za provjeru (striktne) totalne pozitivnosti matrica

2.1 Kriteriji za striktno totalno pozitivne matrice

U ovom poglavlju susrest ćemo se s kriterijima za provjeru totalne pozitivnosti i striktne totalne pozitivnosti matrica. Krenut ćemo s kriterijima za provjeru minora striktno totalno pozitivnih matrica jer kod kriterija za totalno pozitivne matrice nemamo jednako elegantne metode.

Broj provjera minora za $A \in M_{nm}$ bi trebao biti:

$$\sum_{p=1}^{\min\{n,m\}} \binom{n}{p}\binom{m}{p} = \binom{n+m}{n} - 1.$$

Za $n = m$, taj broj je reda $4^n n^{-1/2}$. Na sreću, nije potrebno provjeravati sve ove uvjete, većina provjera u definiciji striktne totalne pozitivnosti su suvišne. U ovom poglavlju želimo broj minora, koje trebamo računati, svesti na minimum.

Lema 2.1.1. *(Feketeova lema). Pretpostavimo da je $A \in M_{nm}$ matrica ($n \geq m$) kod koje su sve minore $(m-1)$-og reda sa stupcima $1, \ldots, m-1$ te sve minore m-tog reda koje su sačinjene od uzastopnih redaka također strogo pozitivne. Tada su sve minore m-tog reda matrice A pozitivne.*

Primijetimo kako bi, u Feketeovoj lemi, za $n < m$ imali isti broj provjera minora kao i za $n \geq m$. Tada bi provjeravali minore $(n-1)$-og reda s retcima $1, \ldots, n-1$ te sve minore n-tog reda uzastopnih stupaca. Ako su provjerene minore pozitivne, tada su sve minore n-tog reda matrice A pozitivne.

Na primjer, kod matrice reda (5,3) prema Feketeovoj lemi je dovoljno provjeriti pozitivnost sljedećih minora:

$$C\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,3\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,4\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,5\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2,3\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2,4\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2,5\\1,2\end{pmatrix},$$

$$C\begin{pmatrix}3,4\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}3,5\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}4,5\\1,2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2,3,4\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}3,4,5\\1,2,3\end{pmatrix}$$

i iz toga možemo zaključiti da su i minore

$$C\begin{pmatrix}1,2,4\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,2,5\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,3,4\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1,3,5\\1,2,3\end{pmatrix},$$

$$C\begin{pmatrix}1,4,5\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2,3,5\\1,2,3\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2,4,5\\1,2,3\end{pmatrix}$$

pozitivne.

Dokaz. Za određeni strogo rastući niz $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ u skupu $\{1, \ldots, n\}$, tj. za $\mathbf{i} \in I_k^n$ definiramo disperziju od $\mathbf{i}$ kao broj cijelih brojeva između $i_1, \ldots, i_k$, što formulom možemo zapisati kao

$$d(\mathbf{i}) := \sum_{l=2}^{k}(i_l - i_{l-1} - 1) = (i_k - i_1) - (k-1) \geq 0.$$

Tako je $d(\mathbf{i}) = 0$ ako i samo ako je niz $\mathbf{i}$ sačinjen od uzastopnih cijelih brojeva. Ovu ćemo lemu dokazati indukcijom po $d(\cdot)$. Neka je $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in I_m^n$. Želimo dokazati da je

$$C\begin{pmatrix}i_1, \ldots, i_m\\1, \ldots, m\end{pmatrix} > 0. \tag{2.1}$$

Prema našoj pretpostavci, (2.1) vrijedi kada je $d(\mathbf{i}) = 0$.

U slučaju $n = m$ nemamo što dokazivati pa pretpostavljamo kako je $n > m$. Neka je $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ pri čemu je $d(\mathbf{i}) = r > 0$ te pretpostavimo da rezultat vrijedi za sve $\mathbf{i}$ za koje je $d(\mathbf{i}) < r$. Kako se niz $\mathbf{i}$ ne sastoji od uzastopnih cijelih brojeva, tom nizu možemo dodati neki cijeli broj između i_1 i i_m. Neka je $1 \leq j_1 < \cdots < j_{m+1} \leq n$ prošireni niz te neka je j_l dodani indeks. Primjenom jednakosti (1.1) vrijedi

$$C\begin{pmatrix}j_2, \ldots, j_m\\1, \ldots, m-1\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}j_1, \ldots, \widehat{j_l}, \ldots, j_{m+1}\\1, \ldots, m\end{pmatrix}$$

$$= C\begin{pmatrix}j_1, \ldots, \widehat{j_l}, \ldots, j_m\\1, \ldots, m-1\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}j_2, \ldots, j_{m+1}\\1, \ldots, m\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}j_2, \ldots, \widehat{j_l}, \ldots, j_{m+1}\\1, \ldots, m-1\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}j_1, \ldots, j_m\\1, \ldots, m\end{pmatrix}.$$

U gore navedenoj jednakosti sve tri minore $(m-1)$-og reda su pozitivne prema pretpostavci, s obzirom da se temelje na stupcima $1, \dots, m-1$. Sada je $d(\mathbf{i}) = (i_m - i_1) - (m-1) = (j_{m+1} - j_1) - (m-1) = r$, dok su $(j_{m+1} - j_2) - (m-1)$ te $(j_m - j_1) - (m-1)$ striktno manji od r. Stoga, prema pretpostavci indukcije, imamo

$$C\begin{pmatrix} j_2, \dots, j_{m+1} \\ 1, \dots, m \end{pmatrix} > 0 \quad i \quad C\begin{pmatrix} j_1, \dots, j_m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix} > 0.$$

Možemo zaključiti da je

$$C\begin{pmatrix} j_1, \dots, \widehat{j_l}, \dots, j_{m+1} \\ 1, \dots, m \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix} > 0.$$

$\square$

Direktna posljedica Feketeove leme je sljedeći teorem.

Teorem 2.1.2. *Neka je $A \in M_{nm}$. Pretpostavimo da su sve minore k-tog reda matrice A sačinjene od uzastopnih redaka i uzastopnih stupaca strogo pozitivne za $k = 1, \dots, \min\{n, m\}$. Tada je A striktno totalno pozitivna matrica.*

Neka je $A \in M_{53}$. Inače bi provjeravali 54 minore za minore k-tog reda. Ovaj teorem nam kaže da je dovoljno provjeriti pozitivnost samo 26 minora, što nam uvelike olakšava posao. Ako je $A \in M_4$ morali bi provjeriti 69 minora. Iz teorema 2.1.2 slijedi da je dovoljno provjeriti samo 29 minora kako bi mogli zaključiti da je A striktno totalno pozitivna matrica.

Prethodnim teoremom smo broj provjera pozitivnosti minora sveli na manji broj, a sljedećim dokazujemo da možemo i bolje.

Teorem 2.1.3. *(Gasca-Penna teorem). Neka je $A \in M_{nm}$. Pretpostavimo da su sve minore k-tog reda matrice A sačinjene od prvih k redaka i od uzastopnih k stupaca te da su sve minore k-tog reda matrice A sačinjene od prvih k stupaca i uzastopnih k redaka strogo pozitivne za $k = 1, \dots, \min\{n, m\}$. Tada je A striktno totalno pozitivna matrica.*

Pretpostavimo da je $A \in M_{53}$. Koristeći prethodni teorem, broj provjera minora k-tog reda se s 54, odnosno 26, smanji na 15.

Dokaz. Trebamo dokazati da je

$$A\begin{pmatrix} i+1, \dots, i+k \\ j+1, \dots, j+k \end{pmatrix} > 0$$

za $i = 1, \ldots, n-k$, $j = 0, \ldots, m-k$ i $k = 1, \ldots, \min\{n, m\}$ te onda primijeniti prethodni teorem. Naša je pretpostavka kako taj rezultat vrijedi kada je $i = 0$ i $j = 0$. Dokažimo za $j = 1$, tj. da je

$$A\begin{pmatrix} i+1, \ldots, i+k \\ 2, \ldots, k+1 \end{pmatrix} > 0. \tag{2.2}$$

To ćemo dokazati indukcijom po i i po k. Pretpostavimo da je $i = 1$. Za $k = 1$ moramo dokazati da je

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{22} > 0.$$

To slijedi iz pretpostavki $a_{11}, a_{21}, a_{12} > 0$ te

$$A\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0.$$

Stoga je $a_{22} > 0$. Pretpostavimo nadalje kako (2.2) vrijedi i za $k-1$. Primjenom Sylvestrove jednakosti imamo

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k+1 \\ 2, \ldots, k+1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ 2, \ldots, k+1 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k+1 \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} \\ = A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k \\ 2, \ldots, k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1, \ldots, k+1 \\ 1, \ldots, k+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sve determinante koje sadrže polazne uzastopne retke ili stupce su pozitivne prema pretpostavci teorema, a iz pretpostavke indukcije slijedi

$$A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k \\ 2, \ldots, k \end{pmatrix} > 0.$$

Stoga je

$$A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k+1 \\ 2, \ldots, k+1 \end{pmatrix} > 0.$$

Sada razmotrimo slučaj kada je $i = 2$. Za $k = 1$ moramo dokazati da je $a_{32} > 0$. Iz pretpostavki

$$A\begin{pmatrix} 2, 3 \\ 1, 2 \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} > 0$$

i $a_{21}, a_{31} > 0$ te prethodne analize slijedi da je $a_{22} > 0$ pa je i $a_{32} > 0$. Pretpostavimo da taj rezultat vrijedi i za $k-1$. Iz Sylvestrove jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k+1 \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 3, \ldots, k+2 \\ 2, \ldots, k+1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k+1 \\ 2, \ldots, k+1 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 3, \ldots, k+2 \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} \\ = A\begin{pmatrix} 3, \ldots, k+1 \\ 2, \ldots, k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 2, \ldots, k+2 \\ 1, \ldots, k+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sve determinante koje sadrže početne uzastopne retke ili stupce su pozitivne, a prema gore navedenom slučaju gdje je $i = 1$ vrijedi i

$$A\begin{pmatrix} 2,\ldots,k+1 \\ 2,\ldots,k+1 \end{pmatrix} > 0.$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi

$$A\begin{pmatrix} 3,\ldots,k+1 \\ 2,\ldots,k \end{pmatrix} > 0.$$

Stoga je

$$A\begin{pmatrix} 3,\ldots,k+2 \\ 2,\ldots,k+1 \end{pmatrix} > 0.$$

Ovaj proces nastavljamo za sve moguće i. Isto radimo i za $i = 1$ te za sve j i k. Tada ponovno prolazimo kroz pretpostavku indukcije za $j = 2$, zatim za $i = 2$, itd ili pak, obzirom da gore navedeni rezultat vrijedi za $i = 1$ te za $j = 1$, možemo primijeniti pretpostavku indukcije na matricu iz $M_{n-1,m-1}$ dobivenu iz A brisanjem njenog prvog retka i stupca. □

Kada imamo striktno totalno pozitivne matrice, prema propoziciji 1.2.2 možemo preokrenuti redoslijed redaka i stupaca, a da pritom ne promijenimo iznos determinante, pa za posljedicu imamo sljedeći korolar.

Korolar 2.1.4. *Neka je $A \in M_{nm}$. Pretpostavimo da su sve minore k-tog reda matrice A sačinjene od posljednjih k redaka i uzastopnih k stupaca te da su sve minore k-tog tog reda matrice A sačinjene od posljednjih k stupaca i uzastopnih k redaka strogo pozitivne za $k = 1, \ldots, \min\{n, m\}$. Tada je A striktno totalno pozitivna.*

Do sada smo u teoremima imali početne uzastopne retke i stupce, a sada imamo posljednje. Iskoristit ćemo propoziciju 1.2.2 kako bi mogli primijeniti Feketeovu lemu. Primjenom 2.1.1 nisu samo minore k-tog reda matrice A sačinjene od posljednjih k redaka/stupaca i uzastopnih k stupaca/redaka strogo pozitivne već sve minore k-tog reda. Zaključujemo kako je matrica A striktno totalno pozitivna.

Propozicija 2.1.5. *Neka je $A \in M_{nm}$ totalno pozitivna matrica. A je striktno totalno pozitivna ako vrijedi*

$$A\begin{pmatrix} 1,\ldots,k \\ n-k+1,\ldots,n \end{pmatrix} > 0$$
$$A\begin{pmatrix} n-k+1,\ldots,n \\ 1,\ldots,k \end{pmatrix} > 0$$

za $k = 1, \ldots, n$.

Iz definicije 1.1.1 slijedi da su sve minore od A nenegativne. Treba provjeriti da niti jedna nije jednaka 0. Neka je npr. $A \in M_5$. Iz ove propozicije zaključujemo, ako provjerom ustanovimo kako sljedeće minore nisu 0:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 4,5 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1,3 \\ 3,5 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 3,5 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1,4 \\ 2,5 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

tada ni preostale neće moći biti jednake 0.

2.2 Konstrukcija striktno totalno pozitivnih matrica

U ovoj sekciji prikazat ćemo konstrukciju striktno totalno pozitivnih matrica koristeći prethodne rezultate.

Teorem 2.2.1. *Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ nizovi pozitivnih brojeva takvi da je $a_1 = b_1$. Tada postoji beskonačno mnogo striktno totalno pozitivnih matrica $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ za koje vrijedi $a_{n1} = a_n$ i $a_{1n} = b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada možemo odabrati a_{ij} tako da A bude simetrična.*

Dokaz. Za početak odaberimo x takav da je

$$A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & x \end{vmatrix} > 0.$$

Kako je $a_1 > 0$ ovo vrijedi ako i samo ako je

$$x > \frac{a_2 b_2}{a_1}.$$

Dakle, takav x postoji pa neka je $a_{22} = x$. Analogno napravimo za ostale elemente. Dakle, za svaki element drugog retka ili drugog stupca uzmemo onu minoru reda 2 kojoj je taj element u donjem desnom kutu te uz uvjet pozitivnosti te minore nalazimo taj element. Točnije, ako smo odabrali $a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{k2}$, onda $a_{k+1,2}$ odaberemo tako da je

$$\begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} \end{vmatrix} > 0. \tag{2.3}$$

Konstrukcija je provedena tako da su ispunjene pretpostavke. Nakon toga, ponavljamo isto za elemente drugog stupca, trećeg retka, trećeg stupca i tako dalje dok ne popunimo matricu.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \dots & b_n \\ a_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots & a_{3n} \\ a_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots & a_{4n} \\ a_5 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

□

Sada ćemo navesti beskonačnu familiju totalno pozitivnih matrica koju smo konstruirali koristeći teorem 2.2.1.

Teorem 2.2.2. *Neka je* $T(d) = \left[t_{ij}(d)\right]_{i,j=1}^{\infty}$ *matrica s koeficijentima*

$$t_{ij}(d) = (1 + (i-1)d)(1 + (j-1)d) + \binom{i+j-2}{j-1} - 1, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

za sve nenegativne realne brojeve d*.*

Napomena 2.2.3. Napomenimo kako za svaki $d \geq 0$ imamo

$$T(d) = \begin{bmatrix} 1 & 1+d & 1+2d & \dots \\ 1+d & (1+d)(1+d)+1 & (1+d)(1+2d)+2 & \dots \\ 1+2d & (1+2d)(1+d)+2 & (1+2d)(1+2d)+5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ako je $d = 0$, tada je $t_{ij}(0) = \binom{i+j-2}{j-1}$ pa je matrica

$$T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Pascalova. To je striktno totalno pozitivna matrica jer je konstruirana koristeći teorem 2.2.1 i uvjet (2.3). Primijetimo još kako sve minore Pascalove matrice reda većeg ili jednakog 2, koje sadrže prve retke ili prve stupce, a retci i stupci su im uzastopni, iznose 1. Takve minore se nazivaju inicijalne minore. Dokazat ćemo u trećem poglavlju kako je iznos svake inicijalne minore u Pascalovoj matrici jednak 1. Nadalje, u prvom retku (i stupcu) nalaze se elementi aritmetičkog niza $t_{1n}(d) = 1 + (n-1)d$.

2.3 Kriteriji za totalno pozitivne matrice

Za utvrđivanje je li matrica totalno pozitivna nemamo jednostavne kriterije kao kod striktne totalne pozitivnosti.

Teorem 2.3.1. *Matrica $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ ranga r je totalno pozitivna ako je*

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix} \geq 0$$

za sve $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ koji zadovoljavaju uvjet $d(\boldsymbol{i}) \leq n - r$, za sve $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_k)$, $k = 1, \ldots, r$.

Ponovimo što je $d(\mathbf{i})$. Za određeni strogo rastući niz $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I_k^n$ definiramo disperziju od $\mathbf{i}$ kao skup cijelih brojeva između $i_1, \ldots, i_k$ što zapisujemo kao

$$d(\mathbf{i}) := \sum_{l}^{k} (i_l - i_{l-1} - 1) = (i_k - i_1) - (k - 1) \geq 0.$$

Primijetimo kako je $d(\mathbf{i}) = 0$ ako i samo ako se niz $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ sastoji od uzastopnih brojeva.

Neka je $A \in M_{43}$. Ako je rang maksimalan, $r = 3$, brojevi u danoj matrici A su uzastopni. Tada je broj minora koje provjeravamo jednak 19. Znači, za maksimalan rang, nemamo smanjeni broj provjera. Pogledajmo koliki broj minora imamo ako r nije maksimalan, npr. $r = 2$. Tada moramo provjeriti sve minore prvog reda (elementi matrice, ima ih 9) i jednu minoru drugog reda, npr. $\left(A\begin{pmatrix} i_1, i_2 \\ j_1, j_2 \end{pmatrix} \geq 0\right)$. Ukupan broj provjera je 10, što nam uvelike olakšava posao. A ako je $r = 1$, provjeravamo samo prvi element matrice, tj. $a_{11} \geq 0$.

Teorem 2.3.2. *Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n$ regularna gornjetrokutasta matrica koja zadovoljava*

$$A\begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix} \geq 0$$

za sve $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n, k = 1, \ldots, n$ tada je A totalno pozitivna matrica. Analogno, ako je $A = (a_{ij}) \in M_n$ regularna donjetrokutasta matrica koja zadovoljava

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} \geq 0$$

za sve $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k = 1, \ldots, n$ tada je A totalno pozitivna matrica.

Prije dokaza, prokomentirajmo teorem. Neka je $A \in M_3$ gornjetrokutasta matrica. Teorem nam kaže da moramo provjeriti manji broj minora kako bi dokazali totalnu pozitivnost od A. Pogledajmo koje su to minore.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ j_1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ j_2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ j_3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1,2 \\ j_1, j_2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1,2 \\ j_1, j_3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1,2 \\ j_2, j_3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ j_1, j_2, j_3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Gornjetrokutasta matrica A je totalno pozitivna ako su joj gornje minore pozitivne. Moramo provjeriti 7 minora, a kod matrice trećeg reda inače provjeravamo 19 minora. Na analogan način bi provjerili za donjetrokutastu matricu. Primijetimo kako trokutaste matrice ne mogu biti striktno totalno pozitivne zbog nula koje sadrže iznad ili ispod dijagonale.

Dokaz. Dokazat ćemo za gornjetrokutastu matricu, a na analogan način se dokaže za donjetrokutastu (ili primijenimo dokazano na A^τ). Kako je A regularna gornjetrokutasta matrica nužno je $a_{mm} > 0$ za $m = 1, \ldots, n$. Prema teoremu 2.3.1 dovoljno je dokazati da je

$$A\begin{pmatrix} i+1, \ldots, i+k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix} \geq 0$$

za sve odgovarajuće $i, 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ i k (odnosno moramo provjeriti slučaj $d(\mathbf{i}) = 0$). Dovoljno je razmotriti samo one minore gdje je $i + m \leq j_m, m = 1, \ldots, k$ s obzirom da svi ostali minori nestaju zbog gornjetrokutaste strukture matrice A. Sukladno pretpostavci slijedi

$$0 \leq A\begin{pmatrix} 1, \ldots, i, i+1, \ldots, i+k \\ 1, \ldots, i, j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix} = \Pi_{m=1}^{i} a_{mm} A\begin{pmatrix} i+1, \ldots, i+k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix}.$$

Kako je $a_{mm} > 0$ za sve m, dokazali smo teorem. □

Za dokaz sljedeće propozicije, treba nam ***LDU*** **faktorizacija matrica** pa ju zapišimo. Pretpostavimo da je $A = (a_{ij}) \in M_n$ striktno totalno pozitivna matrica. Kako je

$$A\begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} > 0$$

za $k = 1, \ldots, n$, tada matrica A ima jedinstvenu LDU faktorizaciju gdje je $L = (l_{ij})$ donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, $D = (d_{ij})$ je dijagonalna matrica, dok je $U = (u_{ij})$ gornjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali. Vrijednost elemenata L, D i

U nikada nije nula, a eksplicitno se dobivaju na sljedeći način:

$$l_{ij} = \frac{A\begin{pmatrix} 1,\dots,j-1,i \\ 1,\dots,j-1,j \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1,\dots,j-1,j \\ 1,\dots,j-1,j \end{pmatrix}}, \qquad i \geq j,$$

$$u_{ij} = \frac{A\begin{pmatrix} 1,\dots,i-1,i \\ 1,\dots,i-1,j \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1,\dots,i-1,i \\ 1,\dots,i-1,i \end{pmatrix}}, \qquad i \leq j,$$

$$d_{ii} = \frac{A\begin{pmatrix} 1,\dots,i-1,i \\ 1,\dots,i-1,i \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1,\dots,i-1 \\ 1,\dots,i-1 \end{pmatrix}}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Propozicija 2.3.3. *Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n$ regularna matrica. Tada je A totalno pozitivna ako i samo ako A zadovoljava sljedeće:*

$$(i) \quad A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} > 0, \quad k = 1,\dots,n$$

$$(ii) \quad A\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k = 1,\dots,n$$

$$(iii) \quad A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ j_1,\dots,j_k \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n, k = 1,\dots,n.$$

Dokaz. Ako je A totalno pozitivna tada (ii) i (iii) vrijede, a kako je A ujedno i regularna, tada vrijedi i (i).

Pretpostavimo da (i)-(iii) vrijede. Kako (i) vrijedi, LDU faktorizacija od A dobro je definirana. Iz (i), (ii) te (iii) vidimo kako je D dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi striktno pozitivni, L donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali te U gornjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali. Sada imamo:

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} &= \sum_{1\leq l_1<\cdots<l_k\leq n} L\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_k \\ l_1,\dots,l_k \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} l_1,\dots,l_k \\ l_1,\dots,l_k \end{pmatrix} U\begin{pmatrix} l_1,\dots,l_k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} \\ &= L\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

te

$$A\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ j_1,\dots,j_k \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} U\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ j_1,\dots,j_k \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Kako je

$$D\begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix} > 0$$

za posljedicu imamo

$$L\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix}, U\begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix} \geq 0.$$

To vrijedi za sve $1 \leq i_i < \cdots < i_k \leq n$, $1 \leq j_i < \cdots < j_k \leq n$ te $k = 1, \dots, n$. Stoga slijedi da je L donjetrokutasta totalno pozitivna matrica i U gornjetrokutasta totalno pozitivna matrica pa nam (2.4) i (2.5) ukazuju kako je

$$A = LDU$$

totalno pozitivna. $\square$

Poglavlje 3

Primjeri (striktno) totalno pozitivnih matrica

U ovom poglavlju proučit ćemo razne primjere totalno pozitivnih matrica. Neke od poznatih primjera su Pascalova, Cauchyjeva i Vandermondeova matrica. Najpoznatija striktno totalno pozitivna matrica je Pascalova matrica. Drugi primjeri su primjeri općenite klase matrica gdje predstavljamo uvjete za utvrđivanje totalne pozitivnosti unutar klase, kao Jacobijeva, Hankelova te Toeplitzova matrica.

3.1 Pascalova, Cauchyjeva i Vandermondeova matrica

Pascalova matrica

Pascalova matrica je matrica koja sadrži binomne koeficijente kao svoje elemente. Opći član Pascalove matrice $T(0)$ reda n je

$$t_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

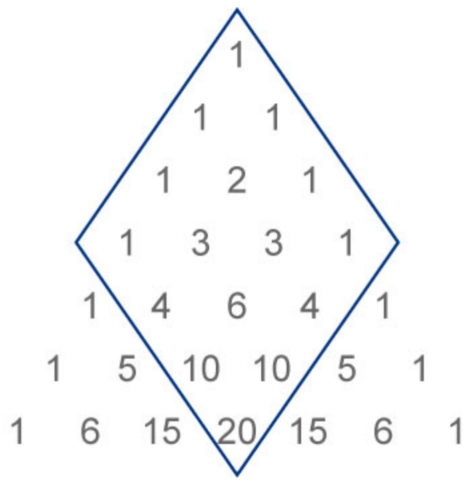
Znamo da vrijedi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, pa je

$$t_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1} = \binom{i+j-2}{(i+j-2)-(j-1)} = \binom{i+j-2}{i-1} = t_{ji},$$

tj. $T(0)$ je simetrična matrica.

$$T(0) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} & \cdots & \binom{n+2}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{5}{4} & \binom{6}{4} & \binom{7}{4} & \binom{8}{4} & \cdots & \binom{n+3}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+2}{3} & \binom{n+3}{4} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{bmatrix}$$

Pogledajmo na sljedećoj slici Pascalovu matricu koja se vidi unutar Pascalovog trokuta.



Slika 3.1: Pascalov trokut i Pascalova matrica

Inicijalne minore matrice su sve minore koje sadrže prve retke ili prve stupce, a retci i stupci su im uzastopni. Primijetili smo još u točki 2.2 kako sve takve minore Pascalove matrice reda većeg ili jednakog od dva iznose 1. Sada ćemo to i dokazati.

Lema 3.1.1. *Sve inicijalne minore Pascalove matrice T(0) su jednake 1.*

Dokaz. Koeficijenti Pascalove matrice su

$$t_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{3.1}$$

Podsjetimo se na dobro poznati identitet

$$\binom{i+j-1}{j} = \binom{i+j-2}{j-1} + \binom{i+j-2}{j}, \quad i \geq 2, j \geq 1, \tag{3.2}$$

tj.

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + t_{i-1,j+1}, \quad i \geq 2, j \geq 1. \tag{3.3}$$

Sve inicijalne minore prvog reda (to su svi koeficijenti u prvom retku i prvom stupcu) iznose 1.

Pretpostavimo da su sve inicijalne minore k-tog reda jednake 1. Moramo dokazati da to vrijedi i za sve minore $(k+1)$-og reda. Kako je Pascalova matrica $T(0)$ simetrična, dovoljno je izračunati inicijalne minore prvih $k+1$ stupaca od $T(0)$.

Neka je $n \geq k+1$. Tada je

$$T(0)\binom{n-k, n-k+1, \dots, n}{1, 2, \dots, k+1} = \begin{vmatrix} t_{n-k,1} & t_{n-k,2} & \dots & t_{n-k,k+1} \\ t_{n-k+1,1} & t_{n-k+1,2} & \dots & t_{n-k+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,k+1} \end{vmatrix}.$$

Determinanta matrice T(0) se neće promijeniti ako od svakog retka matrice oduzmemo njemu prethodni redak, počevši od dna. Na taj način, koristeći (3.3), determinanta matrice $T(0)$ je

$$T(0)\binom{n-k, n-k+1, \dots, n}{1, 2, \dots, k+1} = \begin{vmatrix} t_{n-k,1} & t_{n-k,2} & \dots & t_{n-k,k+1} \\ 0 & t_{n-k+1,1} & \dots & t_{n-k+1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_{n1} & \dots & t_{n,k} \end{vmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem po prvom stupcu dobivamo

$$\begin{aligned} T(0)\binom{n-k, n-k+1, \ldots, n}{1, 2, \ldots, k+1} &= t_{n-k,1} \cdot \begin{vmatrix} t_{n-k+1,1} & t_{n-k+1,2} & \ldots & t_{n-k+1,k} \\ t_{n-k+2,1} & t_{n-k+2,2} & \ldots & t_{n-k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{n,k} \end{vmatrix} \\ &= t_{n-k,1} \cdot T(0)\binom{n-k, n-k+1, \ldots, n}{1, 2, \ldots, k} \end{aligned}$$

Po formuli (3.1) je

$$t_{n-k,1} = \binom{n-k-1}{0} = 1,$$

a po pretpostavci $T(0)\binom{n-k,n-k+1,\ldots,n}{1,2,\ldots,k} = 1$ pa je naša tvrdnja dokazana, odnosno

$$T(0)\binom{n-k, n-k+1, \ldots, n}{1, 2, \ldots, k+1} = T(0)\binom{n-k, n-k+1, \ldots, n}{1, 2, \ldots, k} = 1.$$

□

Cauchyjeva matrica

Neka su $0 < x_1 < \cdots < x_n$, $0 < y_1 < \cdots < y_n$. *Cauchyjeva matrica* je matrica reda n čiji je opći član zadan s

$$a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j},$$

$i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, tj. matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{bmatrix}.$$

Teorem 3.1.2. *Cauchyjeva matrica je striktno totalno pozitivna.*

Dokaz. Dokažimo da vrijedi sljedeća formula

$$\det\left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \frac{\prod_{1\leq l<k\leq n}(x_k-x_l)\prod_{1\leq l<k\leq n}(y_k-y_l)}{\prod_{i=j=1}^{n}(x_i+y_j)}. \tag{3.4}$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Očito je da (3.4) vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da vrijedi i za $n-1$.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1+y_1} \begin{vmatrix} \frac{x_1+y_1}{x_1+y_1} & \frac{x_1+y_1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{x_1+y_1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$$

Pomnožimo prvi redak s $\frac{1}{x_i+y_1}$ te oduzmimo od i-tog retka za sve $i = 2, \ldots, n$, pa imamo

$$= \frac{1}{x_1+y_1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1+y_1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{x_1+y_1}{x_1+y_n} \\ 0 & \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{(x_2+y_2)(x_1+y_2)(x_2+y_1)} & \cdots & \frac{(x_2-x_1)(y_n-y_1)}{(x_2+y_n)(x_1+y_n)(x_2+y_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{(x_n-x_1)(y_2-y_1)}{(x_n+y_2)(x_1+y_2)(x_n+y_1)} & \cdots & \frac{(x_n-x_1)(y_n-y_1)}{(x_n+y_n)(x_1+y_n)(x_n+y_1)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Pi_{k=1}^{n}(x_k - x_1)(y_k - y_1)}{(x_1 + y_1)\Pi_{i=2}^{n}(x_i + y_1)\Pi_{j=2}^{n}(x_1 + y_j)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1 + y_1}{x_1 + y_2} & \dots & \frac{x_1 + y_1}{x_1 + y_n} \\ 0 & \frac{1}{x_2 + y_2} & \dots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{x_n + y_2} & \dots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Pi_{k=1}^{n}(x_k - x_1)(y_k - y_1)}{(x_1 + y_1)\Pi_{i=2}^{n}(x_i + y_1)\Pi_{j=2}^{n}(x_1 + y_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_2 + y_2} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \dots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_2} & \frac{1}{x_n + y_3} & \dots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Pi_{k=1}^{n}(x_k - x_1)(y_k - y_1)}{(x_1 + y_1)\Pi_{i=2}^{n}(x_i + y_1)\Pi_{j=2}^{n}(x_1 + y_j)} \cdot \frac{\Pi_{2\le l<k\le n}(x_k - x_l)\Pi_{2\le l<k\le n}(y_k - y_l)}{\Pi_{i,j=2}^{n} x_i + y_j}$$

$$= \frac{\Pi_{1\le l<k\le n}(x_k - x_l)\Pi_{1\le l<k\le n}(y_k - y_l)}{\Pi_{i,j=1}^{n} x_i + y_j}$$

čime smo dokazali (3.4). Iz ove formule direktno slijedi striktna totalna pozitivnost Cauchyjeve matrice, budući da je svaka kvadratna podmatrica Cauchyjeve matrice opet Cauchyjeva matrica. □

Vandermondeova matrica

Neka je $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.*Vandermondeova matrica* je matrica zadana s

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Teorem 3.1.3. *Vandermondeova matrica je striktno totalno pozitivna matrica.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti sljedeću formulu

$$\det V(x_0, \ldots, x_n) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j) \tag{3.6}$$

pa najprije pogledajmo kako doći do nje.

Ako od drugog retka oduzmemo prvi redak, ne mijenjamo determinantu matrice V pa je

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \ldots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} & x_1^n - x_0^n \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_0^{n-1} & x_2^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_0^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} - x_0^{n-1} & x_{n-1}^n - x_0^n \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix}.$$

Slično, bez da promijenimo iznos determinante matrice V pomnožimo $(n-1)$-i stupac s x_0 i oduzmimo ga od n-tog stupca, $(n-2)$-i stupac pomnožimo s x_0 i oduzmemo ga od $(n-1)$-og stupca, itd. Primijetimo da je tada

$$\begin{aligned} a_{ij} &= x_{j-1} - x_{j-1} - x_0(x_i^{j-2} - x_0^{j-2}) \\ &= x_i^{j-1} - x_0^{j-1} - x_0 x_i^{j-2} + x_0^{j-1} \\ &= x_i^{j-2}(x_i - x_0), \end{aligned}$$

tj.

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & x_1^2(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1 - x_0) & x_1^{n-2}(x_1 - x_0) \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2 - x_0) & x_2^{n-2}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}(x_{n-1} - x_0) & x_{n-1}^2(x_{n-1} - x_0) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_0) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_0) \\ 0 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & x_n^2(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-3}(x_n - x_0) & x_n^{n-2}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Uočimo kako k-ti redak ima zajednički faktor $(x_k - x_0)$ pa ga izlučimo. Tada je

$$V_n = \Pi_{k=2}^{n}(x_k - x_0)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3} & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$V_n = \Pi_{k=1}^{n}(x_k - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3} & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

pa se V_n može zapisati kao $V_n = \Pi_{k=1}^{n}(x_k - x_0)V_{n-1}$ odakle slijedi (3.6). S obzirom da je $0 < x_1 < \cdots < x_n$ imamo

$$\det V(x_0, \ldots, x_n) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j) > 0.$$

Kako bismo dokazali da je V striktno totalno pozitivna matrica, dovoljno je dokazati kako su determinante matrice V oblika

$$V_{i,j,k} = \begin{bmatrix} x_i^j & x_i^{j+1} & \ldots & x_i^{j+k} \\ x_{i+1}^j & x_{i+1}^{j+1} & \ldots & x_{i+1}^{j+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i+k}^j & x_{i+k}^{j+1} & \ldots & x_{i+k}^{j+k} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

pozitivne za sve $i, j, k \geq 0$ takve da je $i + k, j + k \leq n$. Izlučimo li zajedničke faktore iz redaka, imamo

$$\begin{aligned}\det V_{i,j,k} &= (x_i \cdots x_{i+k})^j \det V(x_i, \ldots, x_{i+k}) \\ &= (x_i \cdots x_{i+k})^j \cdot \Pi_{i>j}(x_i - x_j) > 0.\end{aligned}$$

Znamo da je

$$\det V(x_i, \ldots, x_{i+k}) = \Pi_{i \leq r < s \leq i+k}(x_s - x_r) > 0,$$

a umnožak $(x_i \cdots x_{i+k})^j$ je uvijek nenegativan. Time smo dokazali našu tvrdnju. □

3.2 Još neki primjeri matrica

Jacobijeva matrica

Jacobijeva matrica je naziv koji se koristi za kvadratne trodijagonalne matrice, odnosno matrice $A = (a_{ij}) \in M_n$ pri čemu je $a_{ij} = 0$ ako je $|i - j| \geq 2$. Drugim riječima, to je matrica reda n oblika

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

gdje smo označili $a_{ii} = a_i, i = 1, \ldots, n$ te $a_{i,i+1} = b_i$, $a_{i+1,i} = c_i$, za $i = 1, \ldots, n-1$.

Teorem 3.2.1. *Jacobijeva matrica A je totalno pozitivna ako i samo ako su svi njeni vandijagonalni elementi b_i, c_i te sve njene glavne minore koje sadrže uzastopne retke i stupce nenegativne.*

Dokaz. Odmah možemo provjeriti iz (3.8) kako je

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix} = 0$$

ako je $|i_k - j_k| \geq 2$ za bilo koji $k \in \{1, \ldots, r\}$. Također, ako je $|i_l - j_l| = 1$ za svaki $l = \{1, \ldots, r\}$ tada je

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{l-1} \\ j_1, \ldots, j_{l-1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_l \\ j_l \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{l+1}, \ldots, i_r \\ j_{l+1}, \ldots, j_r \end{pmatrix}.$$

Iz ovih formula možemo izračunati svaku minoru matrice A. To jest, ako je

$$i_1 = j_1, \ldots, i_{k_1} = j_{k_1}, i_{k_1+1} \neq j_{k_1+1}, \ldots, i_{k_2} \neq j_{k_2},$$

$$i_{k_2+1} = j_{k_2+1}, \ldots, i_{k_3} = j_{k_3}, \ldots$$

tada je

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_r \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_{k_1} \\ j_1, \ldots, j_{k_1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{k_1+1} \\ j_{k_1+1} \end{pmatrix} \cdots A\begin{pmatrix} i_{k_2} \\ j_{k_2} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{k_2+1}, \ldots, i_{k_3} \\ j_{k_2+1}, \ldots, j_{k_3} \end{pmatrix} \cdots .$$

Prilikom računanja glavne minore

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ i_1, \ldots, i_r \end{pmatrix}$$

vidimo da, ako je $i_j + 1 < i_{j+1}$ za neke $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, tada je

$$A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ i_1, \ldots, i_r \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_j \\ i_1, \ldots, i_j \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{j+1}, \ldots, i_r \\ i_{j+1}, \ldots, i_r \end{pmatrix}.$$

□

Hankelova matrica

Neka je $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ niz. Matrica

$$B = (b_{i+j})_{i,j=0}^{n},$$

odnosno

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \ldots & b_{2n} \end{pmatrix}$$

naziva se *Hankelova matrica*. Za ovako definiranu matricu B vrijedi sljedeći teorem.

Prisjetimo se najprije definicije striktno pozitivne matrice.

Definicija 3.2.2. *Matrica $B \in M_n$ je striktno pozitivna ako je $x^\tau Bx > 0$ za svaki $x \neq 0 \in M_{n1}$, tj. ako je*

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{i+j} x_i x_j > 0,$$

za sve $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Teorem 3.2.3. *Hankelova matrica B je striktno totalno pozitivna ako i samo ako za sve* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *vrijedi*

$$\sum_{i,j=0}^{n} b_{i+j} x_i x_j > 0, \qquad \sum_{i,j=0}^{n-1} b_{i+j+1} x_i x_j > 0$$

odnosno ako su simetrične matrice

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \ldots & b_{2n} \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \ldots & b_{2n-1} \end{pmatrix}$$

striktno pozitivne.

Neka je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 17 \\ 4 & 17 & 97 \end{bmatrix}$$

Hankelova matrica pridružena nizu $b_0 = b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 17, b_4 = 97$. Provjerimo prema teoremu 3.2.3 je li ta matrica striktno totalno pozitivna. Tada je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 17 \\ 4 & 17 & 97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= x_0^2 + 4x_1^2 + 97x_2^2 + 2x_0x_1 + 8x_0x_2 + 34x_1x_2 \\ &= (x_0 + x_1 + 4x_2)^2 + \left(\frac{13}{9}x_1 + 9x_2\right)^2 + \frac{74}{81}x_1^2 > 0 \end{aligned}$$

za sve $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$ i

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} &= x_0^2 + 8x_0x_1 + 17x_1^2 \\ &= (x_0 + 4x_1)^2 + x_1^2 > 0 \end{aligned}$$

za sve $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$. Prema tome, matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 17 \\ 4 & 17 & 97 \end{bmatrix}$$

je jedna Hankelova striktno totalno pozitivna matrica.

Toeplitzova matrica

Ako je zadani niz $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tada definiramo beskonačnu *Toeplitzovu matricu* $A = (a_{ij})$ tako da je $a_{ij} = a_{j-i}$. Dakle,

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots \\ a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ako je zadani niz $(a_n)_{n\in N}$ onda stavimo $a_{-n} = 0, n \in \mathbb{N}$ i primijenimo gornju definiciju pa imamo

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Mi ćemo promatrati konačne matrice, tj. takve da je $a_k = 0$ za $k < 0$ i $k > n$.

Teorem 3.2.4. *Neka je $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$ te $a_k = 0$ za $k < 0$ i $k > n$. Tada je*

$$A = (a_{j-i})_{i,j=1}^{n+1}$$

totalno pozitivna matrica ako i samo ako

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ima n negativnih nultočaka. Nadalje, ako je A totalno pozitivna tada je

$$A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} > 0$$

ako i samo ako je

$$a_{j_k - i_k} > 0, \qquad k = 1, \ldots, r.$$

odnosno $0 \le j_k - i_k \le n$*,* $k = 1, \ldots, r$*.*

Na primjer, Toeplitzova matrica pridružena nizu $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 8$ te $a_k = 0$ za $k \neq 0, 1, 2, 3$ je matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je matrici pridružen polinom $p(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 = (2x + 1)^3$, a nultočke su $x_{1,2,3} = -\dfrac{1}{2}$. Prema tome, ova matrica je totalno pozitivna.

Bibliografija

[1] Lj. Arambašić, D. Bakić, Full spark frames and totally positive matrices, Linear and Multilinear Algebra, 67 (8) (2019) 1685-1700

[2] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008

[3] A. Edelman, G. Strang, Pascal Matrices, The American Mathematical Monthly, 111 (3) (2004) 189-197

[4] S. Fomin, A. Zelevinsky, Total positivity: tests and parametrizations, Mathn Intelligencer 22 (2000) 23-33

[5] J. M. Peña, Determinantal criteria for total positivity, Proceedings of the Eighth Conference of the International Linear Algebra Society, (Barcelona, 1999), Linear Algebra and its Applications 332/334 (2001) 131-137

[6] G. M. Phillips, Interpolation and approximation by polynomials, New York etc., Springer - Verlag, 2000

[7] A. Pinkus, Totally positive matrices, Cambridge University Press, Cambridge, 2010

Sažetak

U ovom radu bavili smo se totalno pozitivnim i striktno totalno pozitivnim matricama. U prvom poglavlju uvodimo osnovne pojmove, navodimo primjere te proučavamo operacije koje čuvaju promatrane klase matrica kao i metode kako iz postojećih (striktno) totalno pozitivnih matrica konstruirati nove matrice iz iste klase. Između ostalog, diskutiramo kako elementarne transformacije nad retcima i stupcima matrice utječu na (striktnu) totalnu pozitivnost matrice, dokazujemo da transponiranje čuva (striktnu) totalnu pozitivnost, kako inverz (striktno) totalno pozitivne matrice, koji ne mora biti striktno totalno pozitivna matrica, modificirati do matrice s ovim svojstom i slično. S obzirom da definicija (striktno) totalne pozitivnosti zahtijeva provjeru pozitivnosti odnosno nenegativnosti svih minora zadane matrice, poželjno je naći dovoljne uvjete kojima bi se broj tih provjera smanjio. Neki od rezultata ovog tipa su Feketeova lema te Gasca-Penna teorem. U posljednjem poglavlju naveli smo primjere poznatih matrica koje pripadaju promatranoj klasi matrica. Najpoznatiji primjer je Pascalova matrica, čiji su elementi binomni koeficijenti. Nadalje, Cauchyjeva te Vandermondeva matrica su, uz pogodno izabrane nizove brojeva koji ih definiraju, također (striktno) totalno pozitivne. U posljednjoj sekciji se proučavaju Jacobijeva, Hankelova i Toeplitzova matrica.

Summary

In this paper we studied totally positive and strictly totally positive matrices. In the first chapter we introduced basic concepts, examples, discussed some operations that preserve the considered classes of matrices as well as the methods for constructing new matrices of the same class from the existing ones. In particular, we discuss how elementary transformations over rows and columns of a matrix effect the (strict) total positivity of matrices, we prove that transposition preserves (strict) total positivity, and show how to modify the inverse of a (strictly) totally positive matrix, which does not have to be a (strictly) totally positive matrix, to a matrix with this property, etc. Since the definition of (strict) total positivitness requires verification of the positivity or nonnegativity of all minors of a given matrix, it is desirable to find sufficient conditions which reduce the number of these verifications. Some of the results of this type are Fekete's lemma and the Gasca-Penna theorem. In the last chapter we have provided examples of known matrices belonging to the considered class of matrices. The best known example is the Pascal matrix, whose elements are binomial coefficients. Further, the Cauchy and the Vandermonde matrix, with the suitably chosen entries, are also (strictly) totally positive matrices. In the last section, we studied Jacobi, Hankel and Toeplitz matrices.

Životopis

Rođena sam 19.7.1994. u Splitu. Odrasla sam u Smokvici, na otoku Korčuli, gdje sam ujedno i pohađala Osnovnu školu Smokvica. Nakon osnovne, 2009. godine upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Blato, također na otoku Korčuli. Po njenom završetku, upisujem 2013. godine integrirani prediplomski i diplomski sveučilišni studij Matematika i fizika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.