Topološki solitoni i čestice (I) : Jednostavni mehanički model Siue-Gordonovog sistema i njegovi solitoni

Klabučar, Dubravko

FIZIKA

Topološki solitoni i čestice (I)

Jednostavni mehanički model Sine-Gordonovog sistema i njegovi solitoni

Dubravko Klabučar, Zagreb

Pojam "soliton" se u fizici najčešće upotrebljava u vrlo širokom smislu[1]. Naime, za većinu fizičara je to bilo koje nesingularno, **stabilno** i **lokalizirano** rješenje neke nelinearne diferencijalne jednadžbe koje ima konačnu energiju, i koje se tokom vremena **ne disperzira**. Očigledno, radi se o fizikalno vrlo zanimljivoj pojavi: to je val koji međutim sliči čestici, jer mu je neiščezavajuća gustoća energije koncentrirana na ograničeni prostor i jer se za razliku od običnih valova ne proširuje, tj. ne disperzira. Naprotiv, soliton tokom gibanja zadržava svoju veličinu i oblik. Uz gibanje je vezana i jedna sličnost solitona i čestica, koju se obično zaboravlja istaći. Baš kao i masivne čestice, neki od tih "usamljenih valova" se uopće ne moraju gibati, već mogu stajati na mjestu posve mirno, za razliku od običnih valova koji se naprosto moraju nekako gibati već po samoj definiciji. Jer, čak ako i ostavimo putujuće valove po strani, očito mora biti nekakvog osciliranja, nekakvog "talasanja" barem na mjestu, da bi bilo makar i stojnih valova.

Solitonska rješenja često možemo označiti i klasificirati nečim što nazivamo topološki sačuvan broj ili indeks, ili (što je posebno uobičajeno u fizici elementarnih čestica) topološki sačuvan naboj. Za razliku od onih konstanti gibanja čije sačuvanje ima porijeklo u simetrijama određene fizikalne teorije (odnosno njezinih jednadžbi gibanja) topološki su brojevi sačuvane veličine zbog posebnog odnosa između rubnih uvjeta koje zadovoljavaju rješenja jednadžbi i prostora koji ta rješenja ispunjavaju. Na primjer, u teorijama polja važnim u raznim područjima fizike, posebno su zanimljive konfiguracije polja koje tako ispunjavaju prostor da se ne mogu nikakvim kontinuiranim transformacijama (bez trganja, rezanja i lijepljenja) prevesti u konfiguraciju niže energije, koje imaju drugačiji topološki naboj. Grana matematike koja je počela proučavanjem svojstava koja se ne mogu promijeniti kontinuiranim transformacijama je upravo **topologija**. Prema tome, stabilnost topološkog solitona, odnosno sačuvanje broja ("naboja") koja takav soliton obilježava, potječe isključivo od topologije fizikalnog polja na kojem se formirao soliton. Dakle, za razliku od netopoloških solitona (kojih su jedan poznat primjer rješenja Kortewega i de Vriesa u nelinearnoj hidrodinamici), stabilnost topoloških solitona je posve neovisna od dinamike, to jest od detalja jednadžbi gibanja – kao na primjer da li je ovaj ili onaj parametar u jednadžbama nešto veći ili manji. To čini topološke

[1] U matematici je naprotiv značenje tog pojma znatno uže i matematičari ga upotrebljavaju mnogo restriktivnije.

solitone posebno značajnim za neke grane fizike, primjerice za fiziku elementarnih čestica.

Na ovom nivou moramo naravno izbjeći komplicirana razmatranja i zamijeniti ih što više jednostavnim ilustrativnim primjerima. Zanimljivo je da je kod topoloških solitona moguće baš to: napredne i inače apstraktne pojmove vezane uz njih možemo učiniti vrlo zornim preko jednostavnih primjera, koje je onda lako generalizirati barem na pojmovnom nivou, bez obzira na to koliko je puna, egzaktna generalizacija tehnički složena.

U tu svrhu, pozabavit ćemo se malo teorijom skalarnog polja $\phi(x,t)$ u jednoj prostornoj i vremenskoj dimenziji. Ali, i to bi bilo preteško i daleko preapstraktno za ovaj nivo popularnog članka, da nema sljedeće sretne okolnosti: za jednu važnu varijantu te teorije čitalac može lako sam, za dvije-tri minute, napraviti mehanički model na kojem onda kao u igri stvara statičke ili putujuće solitone ili antisolitone. Taj model je zista izvanredno ilustrativan, a bez njega većina čitalaca ne bi mogla shvatiti sadržaj ovog članka niti njegova nastavka u idućem broju. Zato uistinu molim čitatelja da ga za čas napravi po sljedećim uputama. Prvo uzmite uže duljine oko metar i pol do dva. (Dobro je da uže ima nešto jaču torziju. Zato je plastični konopac za preskakanje obično nešto bolji od običnog užeta za sušenje rublja.) Zatim uzmite što je moguće više štipaljki za sušenje rublja. Prikvačite ih uredno na njega tako da sve štipaljke budu poravnate. (Najbolje da to radite na stolu.) Međutim, u praksi nije nužno prekriti štipaljkama više od jednog metra – srećom, jer za više možda nemate pri ruci dovoljno štipaljki. Uostalom, na krajevima morate ostaviti mjesta da na jednom kraju uže vežete za nešto čvrsto, a drugi kraj samo zatežite rukom da biste lako mogli – kad vam objasnimo igru – mijenjati konfiguraciju svog mehaničkog modela nelinearne teorije polja. Neka na zategnutom užetu najprije sve štipaljke mirno vise okomito prema dolje, a zatim malo zarotirajte uže oko njegove osi tako da nekoliko štipaljki odstupi od vertikale. Za početak se zabavljajte pokušavajući tako slati niz uže obična valna pobuđenja – jer ovaj sistem u linearnom režimu, tj. za male otklone štipaljki, naravno može podržavati i njih. Doduše, na ovoj gruboj igrački ta se titranja brzo guše, pa ćemo tim više cijeniti stabilnost solitona kad upoznamo i njih.

Kojem najjednostavnijem idealiziranom sistemu odgovara vaša gruba igračka? Evo odgovora: zamislite da se duž osi x proteže nit na koju su – u jednakim razmacima a – učvršćena njihala mase m i duljine r u beskonačnom nizu, i to tako da se mogu njihati u ravnini $\langle yz \rangle$, okomitoj na x-os. Položaj njihala obješenog u nekoj općenitoj točki $x_n = na$ je tada u potpunosti dan njegovim kutom otklona od osi y, koji ćemo označiti sa $\phi(x_n,t)$. Zgodno nam je uzeti da je os y uperena prema dolje, kao na slici 1.

Zanima nas energija našeg sistema. Njihalo na n-tom mjestu ima kinetičku energiju

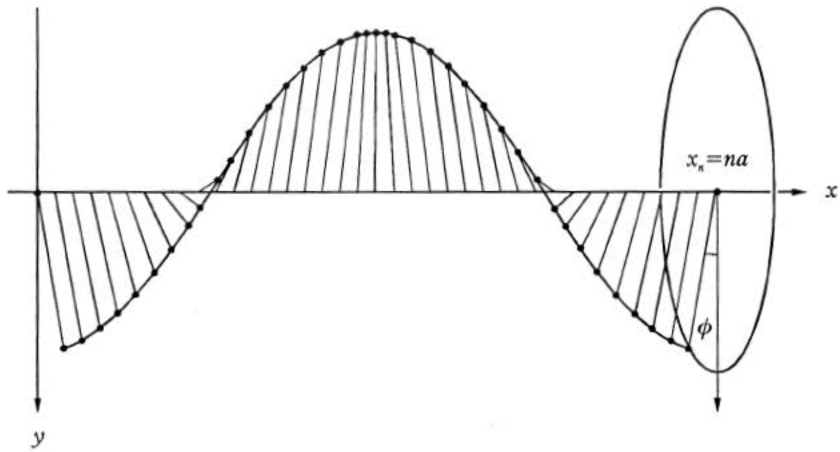
$$\frac{1}{2}mr^2\left[\frac{\partial\phi(x_n,t)}{\partial t}\right]^2, \tag{1}$$

te gravitacijsku potencijalnu energiju

$$mgr[1-\cos\phi(x_n,t)]. \tag{2}$$

Uz to, pretpostavimo da su susjedna njihala povezana oprugama, tako da imamo i ovu elastičnu energiju proporcionalnu razlici kutova otklona među susjednim njihalima:

$$\frac{1}{2}k^2[\phi(x_{n+1},t)-\phi(x_n,t)]^2. \tag{3}$$



Sl. 1.

Takva situacija s povezanim njihalima je prikazana na slici 1. Umjesto da uvedemo takvo vezanje susjednih njihala preko opruga, možemo uzeti u obzir da imamo elastičnu energiju uslijed torzije niti kad susjedna njihala imaju različite otklone. Elastična energija je tada opet oblika (3). To je zapravo bolji način gledanja, jer to baš i jest ono što imamo u našem mehaničkom modelu: elastična energija je tu već zbog torzije našeg užeta, pa srećom nema nikakve potrebe da se mučimo povezujući štipaljke oprugama.

Ukupna energija je u svakom slučaju dana s

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}mr^2\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}(x_n,t)\right]^2+\frac{1}{2}k^2\left[\phi(x_{n+1},t)-\phi(x_n,t)\right]^2+mgr\left[1-\cos\phi(x_n,t)\right]. \tag{4}$$

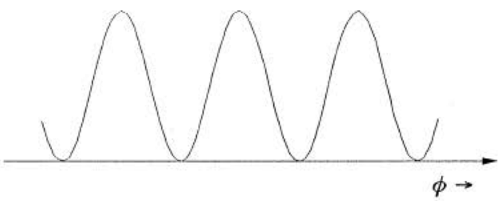
Pretpostavimo sada da razmak a između njihala postaje sve manji i manji. Naravno, da nam ukupna masa sve većeg broja njihala po jedinici duljine ne bi postala beskonačna, i njihala moraju postati sve lakša i lakša: drugim riječima, pretpostavljamo da dobivamo konačnu kontinuiranu gustoću mase $m/a\to\varrho$ dok a postaje beskonačno maleni diferencijal duljine, $a\to \mathrm{d}x$. Analogno, $k^2a\to\sigma$. Konačne diferencije u doprinosima (3) dovode do derivacija, a suma po diskretnim pozicijama njihala, postaje integral po kontinuiranoj varijabli x. Kutovi $\phi(x_n, t)$ postaju **kontinuirana polja** $\phi(x,t)$. Energija takvog kontinuiranog polja beskonačno bliskih njihala je dana kao ovaj integral gustoće energije:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\varrho r^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \varrho g r(1-\cos\phi) \right] \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Dakle, to je ono što zovemo **energijom skalarnog polja** $\phi(x,t)$, i to za poseban slučaj "teorije polja" koji nazivamo Sine-Gordonov model koji je karakteriziran time da je posljednji, "potencijalni" član u integrandu (tj. u gustoći energije) dan formulom

$$V(\phi) = p(1-\cos\phi), \qquad (p \equiv \varrho g r). \tag{6}$$

Taj periodični potencijal je skiciran na slici 2.



Sl. 2.

Do energije (5) smo došli preko konkretnog fizikalnog sistema niza njihala, u kontinuiranom limesu. Postoje i druge teorije polja koje bi opisivale druge fizikalne sisteme ili njihove idealizacije, ili limese. U tom slučaju bismo imali neki drugi "potencijal" $V(\phi)$. Međutim, u teorijama polja su kvadrati prostornih i vremenskih derivacija polja uvijek ovako prisutni u gustoćama energije. Omjer koeficijenata ta dva člana je kvadrat karakteristične brzine širenja ("običnih") valnih pobuđenja polja $\phi(x,t)$. To je ujedno i granična brzina solitonskih konfiguracija polja $\phi(x,t)$, slično kao što je brzina svjetlosti granična brzina za masivne čestice. Koliki su i kakvi su ti koeficijenti, i kolika je odgovarajuća brzina c, ovisi naravno o kojem se fizikalnom sistemu radi i o tome kakvi su mu parametri. Na razini popularnog članka ne možemo pokazati, već samo napominjemo da možemo reći da ta gustoća energije u (5) definira odgovarajuću fizikalnu teoriju (Sine-Gordonov model, u ovom slučaju) jer preko nje možemo dobiti i gustoću Lagrangiana i jednadžbe gibanja za polje $\phi(x,t)$. Zapravo, za Sine-Gordonov model su i jednadžbe gibanja za $\phi(x,t)$ i njihova rješenja tako jednostavna i lijepa, da se jedva suzdržavam da ne napišem i jedno i drugo. Međutim, ostavimo to za neki drugi put, jer jedna od svrha ovog članka je da pokaže da se i s daleko manjim zalaženjem u detalje, naime naprosto globalnim razmatranjem energije kao funkcionala polja $\phi(x,t)$, može doći do pojma topološkog solitona i razumjeti o njima vrlo mnogo.

Kasnije ćemo se vratiti na Sine-Gordonov slučaj (6), a sada budimo općenitiji. Da malo pojednostavimo formule, možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da su jedinice takve da je $\sigma = 1$. Tada je energija polja ϕ dana funkcionalom

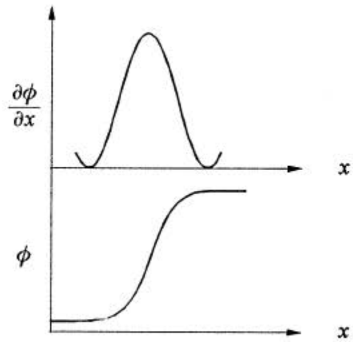
$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right]. \tag{7}$$

Pretpostavimo da skalarni potencijal $V(\phi)$ ima više diskretnih i jednakih apsolutnih minimuma za vrijednosti polja $\phi = \varphi_i$. Ubrzo će nam postati jasno da je to ključan uvjet za postojanje solitona u jednodimenzionalnim sustavima. Periodički Sine-Gordonov potencijal, dan u jednadžbi (6) i na slici 2, ili pak dvo-minimumski potencijal takozvane ϕ^4-teorije ($V(\phi) = (\phi^2 - \mu)^2$), samo su dva specijalna slučaja potencijala $V(\phi)$.

Zbog pozitivnosti energije, a i zbog jednostavnosti, možemo bez gubitka općenitosti odabrati da referentna vrijednost tih minimuma bude nula:

$$V(\varphi_i) = 0, \qquad \forall i. \tag{8}$$

Energija (7) je minimizirana ($E[\phi] = 0$) kada je ϕ u svim točkama prostora x i u svakom času t, jednak jednoj od konstanti φ_i. Konfiguracija polja ϕ u kojoj je $\phi = \varphi_i = \text{const}$ svugdje, pa je kinetička energija nula, a potencijalna energija minimizirana, jest konfiguracija energetski najnižeg, osnovnog stanja. Takvo stanje se još naziva i (klasični) vakuum. Jedina zanimljiva, netrivijalna stvar u vezi s takvim vakuumskim stanjem jest to, da odabir jednog određenog, i-tog minimuma između svih drugih ravnopravnih i ekvivalentnih vakuumskih stanja, predstavlja primjer fenomena koji nazivamo spontanim lomljenjem vakuumske simetrije. Međutim, i netrivijalno rješenje mora u beskonačnosti ($x = -\infty$, te $x = +\infty$) imati neku od vrijednosti φ_i, da bi energija konfiguracije bila konačna (vidi (7)!). Ukoliko imamo više od jednog takvog minimuma, tada $\phi(x,t)$ i u $+\infty$ očito može težiti bilo kojem od mogućih minimuma, i takva konfiguracija će imati konačnu energiju $E[\phi]$. To je pojašnjeno na slici 3, koja pokazuje da interpoliranje između dvije **različite** konstante vakuumske vrijednosti implicira da barem prostorna derivacija mora biti na konačnom prostoru različita od nule, dajući $E[\phi] \neq 0$.



Sl. 3.

Sada već možemo uočiti da se u vezi s tim rješenjima mora pojaviti neka naročita sačuvana veličina. Iako polje $\phi(x,t)$ može evoluirati i mijenjati s vremenom svoj oblik, njegova vrijednost u beskonačnosti je zauvijek fiksirana, jer bi bila potrebna beskonačna energija da prebaci vrijednosti polja ϕ u svim udaljenim točkama ($x \to \to \pm\infty$) iz jedne vakuumske vrijednosti φ_i u neku drugu φ_j. Kontinuirane deformacije dane konfiguracije polja $\phi(x,t)$ nikad i nikako ne mogu promijeniti vakuume između kojih ta konfiguracija interpolira: to je nepromjenjiva topološka karakteristika te konfiguracije.

Korisno je primijetiti da vremenska evolucija sistema također spada među takve kontinuirane deformacije. Dakle, ni eventualna vremenska ovisnost ne može promijeniti topološke karakteristike. Dok je samo o njima riječ, ništa ne gubimo ako zbog jednostavnosti razmišljamo samo o statičkim, vremenski neovisnim konfiguracijama.

Solitoni u Sine-Gordonovoj teoriji, gdje $V(\phi) \propto (1 - \cos\phi)$, predstavljaju jedan od vrlo poznatih primjera. Tada imamo periodični skup minimuma, i to po jedan za svaki cijeli broj, dan sa

$$\phi = \varphi_n = 2\pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{9}$$

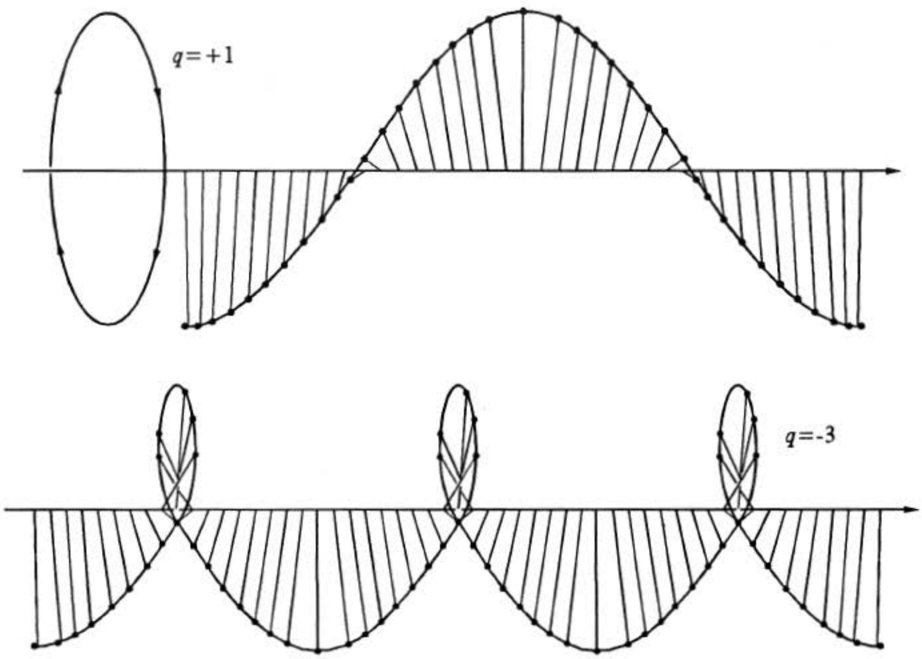
Da bi energija bila konačna, polje ϕ u $x = -\infty$ mora imati neku vrijednost oblika $\phi_{-\infty} = \varphi_{n_-} = 2\pi n_-$, i analogno u $x = +\infty$ neku vrijednost $\phi_{+\infty} = \varphi_{n_+} = 2\pi n_+$.

n_- i n_+ mogu biti bilo koji cijeli brojevi. Taj par indeksa (n_-, n_+) specificira topologiju polja ϕ. Po simetriji, vidimo da su sve vrijednosti ϕ modulo 2π ekvivalentne. Zato je i sama razlika

$$q = n_+ - n_- = \frac{1}{2\pi}\left[\phi(x=+\infty) - \phi(x=-\infty)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x \tag{10}$$

dovoljna da klasificira sve konfiguracije konačne energije u različite topološke sektore. q je apsolutno sačuvan topološki naboj (broj, indeks) koji karakterizira dani Sine-Gordonov soliton. Jasno je da je q cijeli broj. Za takvu veličinu u fizici kažemo da je *kvantizirana*, ali ovdje to naravno nema veze s kvantnom fizikom. Ovo je **topološka kvantizacija** koja se događa na nivou klasične fizike.

Da bismo sve ovo učinili zornim, vratimo se na naš mehanički model solitona: štipaljke-klatna na zategnutom užetu. Neka najprije sve vise prema dolje. Zatim na onom kraju koji vam je u ruci prebacite štipaljke za jedan puni krug. Dobivate konfiguraciju s gornjeg dijela slike 4, dakle soliton s topološkim brojem $q = +1$. Jasno je da to prebacivanje ne biste mogli učiniti da je niz štipaljki zaista beskonačan. Ako ste malo strpljiviji, možete biti i disciplinirani i ne"varati" s prebacivanjem krajeva, već slagati štipaljke tako da postepeno sve većim njihovim otklonima $\phi(x)$ u pozitivnom smjeru, sve do punog kuta, dospijete opet do te konfiguracije s $q = +1$, i tog topološkog broja se više ne možete riješiti kontinuiranim transformacijama. S otklonima u drugom smjeru, i to dostižući puni kut recimo tri puta, dolazimo do konfiguracije s nepromjenjivim topološkim "nabojem" $q = -3$, to jest do tri topološka **anti**solitona, što je prikazano na donjem dijelu slike 4.



Sl. 4.

Ako vas zanima vremenska evolucija Sine-Gordonovih solitona, pokušajte rukom pogurnuti svoj soliton. Iako je naša igračka u realnosti nažalost prilično kratka, pa je proces zato kratkotrajan, promatranje kretanja solitona s kraja na kraj užeta je vrlo poučno. Naime, vidi se velika razlika u odnosu na širenje "običnih" valova/titraja male amplitude.

Zanimljivo je također stvarati parove soliton-antisoliton na bilo kojoj konfiguraciji s određenim $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ako vam još nije jasno što to znači, na vakuumskoj konfiguraciji $q = 0$ načinite ono prikazano na slici 1, pa i nastavite tako da uzdignute štipaljke potisnete još dalje, dakle opet prema dolje. Kad dostignete puni kut u sredini svog sistema, na jednoj strani imate soliton, a na drugoj antisoliton: $q = +1 + (-1) = 0$.

Kad ste se tako naigrali, pročitajte ponovo ponešto apstraktna razmatranja dana gore i sve ono što je eventualno ostalo nejasno sada bi trebalo biti jasno.

Na kraju, nakon igre s našim konkretnim mehaničkim modelom, krenimo opet u suprotnom smjeru, prema apstrakciji: sva dosadašnja jednostavna razmatranja prevedimo na apstraktniji jezik i terminologiju.

Dakle, neka naše polje $\phi(c,t)$ bude faza novog polja $v(x,t)$, koje je element grupe $U(1)$; to naprosto znači da je $v(x,t) = e^{i\phi(x,t)}$. Time smo u svakom času t definirali preslikavanje s jednodimenzionalnog prostora koordinate x, tj. s brojevnog pravca $\mathbf{R}^1$, na elemente grupe $U(1)$, dakle na jediničnu kružnicu S_1 na kojoj leže kompleksne vrijednosti $e^{i\phi}$. (Da bi se naglasila razlika u odnosu na koordinatni, "vanjski" prostor, takav prostor grupe ponekad nazivamo i unutrašnji ili interni prostor, pa ga označujemo $S^{(\mathrm{int})}$.) Da bi Sine-Gordnov soliton interpolirao od jedne vakuumske konfiguracije (φ_i) do susjedne (φ_{i+1}), polje ϕ mora prebrisati jednom preko cijele mjere grupe $U(1)$, to jest preko cijelog raspona punog luka 2π. Očigledno, topološki naboj q nam kaže koliko puta polje $v(x)$ svojim vrijednostima prebriše $S^{(\mathrm{int})}$, naime prostor grupe $U(1)$, dok ispuni koordinatni pravac od $x = -\infty$ do $x = +\infty$. Zbog tog razloga q se još naziva i broj namotaja (ili pak navoja ili, recimo, zavijutaka – stručna terminologija nam tu, izgleda, još nije fiksirana).

Ovakva formulacija može se činiti nepotrebno kompliciranom – možemo se zapitati da li o topološkim solitonima znamo više nego prije petnaestak redaka. Ona se zaista može činiti suvišnom ako se imaju na umu samo stvari izložene u ovom članku, a koje je bilo jednostavno vizualizirati. Međutim, taj način gledanja nam omogućava da na jednostavnom, zornom primjeru Sine-Gordonovih topoloških solitona uvedemo pojmove koje na popularnoj razini ne možemo rigorozno uvesti, a koji će nam biti potrebni u nastavku ovog članka u idućem broju, a za prikaz barionskih elementarnih čestica kao topoloških solitona.

* * *

Magični broj u Bibliji

U Bibliji u Evanđelju po Ivanu (21:11), gdje se opisuje ukazanje na Tiberijadskom jezeru piše: "Uspe se u lađicu Šimun Petar te izvuče na kopno mrežu krcatu: sto pedeset i tri velike ribe. Iako ih je bilo toliko mnogo, mreža se nije istrgala."

Zašto je ovdje stavljen baš broj 153?

Malo-pomalo otkrilo se da ovaj broj ima neka zanimljiva svojstva i vjerojatno je i u vrijeme pisanja ove knjige bilo poznato za neka od njih. Evo ih:

1) suma prvih 17 prirodnih brojeva jednaka je 153, tj.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 17 = 153;$$

2) broj 153 jednak je sumi faktorijela prvih pet prirodnih brojeva, tj.

$$\begin{aligned} 153 &= 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = \\ &= 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5; \end{aligned}$$

3) suma kubova znamenaka broja 153 jednaka je tom broju tj.

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3.$$