

U potrazi za konačnom teorijom - trijumf renormalizacije

Picek, Ivica

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2000, 198, 74 - 80**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:011489>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-05**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



U potrazi za konačnom teorijom – trijumf renormalizacije

Ivica Picek¹, Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Uvod

Riječ atom (“nedjeljiv”) prerano je pripisana objektima koje danas zovemo atomima. Temeljne građevne objekte svijeta, elementarne čestice, naći ćemo tek na puno manjoj, subatomske ljestvici. Prirodno pitanje koje se onda nameće je: kako opisati zbivanja na najmanjim dimenzijama?! Naime, već je na razini atoma bio potreban radikalni zahvat, uvođenje **kvantne mehanike**. Bez toga nije bilo moguće razriješiti dilemu je li elektron koji kruži oko protona stvarno čestica ili je on zapravo val (neobično dualno pojavljivanje nepoznato dotadašnjoj klasičnoj fizici).

Ipak, kvantna mehanika sama po sebi nije potpuna fizikalna teorija. Ona ništa ne govori o tome koje nas sve čestice okružuju ili o tome koje bi sve sile mogle postojati u prirodi, pa tako niti o eventualnim teorijama tih čestica i sila. Stoga fizičarima treba dodatno načelo – vodilja za uspješni opis subatomske svijeta. Krug prihvatljivih teorija bitno se sužava ako se ograničimo samo na one kvantnomehaničke teorije koje su u suglasju sa **specijalnom teorijom relativnosti**. Takvo relativističko poopćenje kvantne mehanike pred nas stavlja novu dilemu: je li riječ o česticama ili poljima? Iz pokušaja razrješenja te dileme izrasla je relativistička kvantna teorija polja. I doista, danas jedini uspješni opis čestica u međudjelovanju (a međudjelovanja su jedini način da uopće dođemo do informacija o česticama) oslanja se na opis čestica “*kvantnim poljima*”.

Prva uspješna teorija te vrste koja se pojavila na fizikalnoj sceni poznata je kao kvantna elektrodinamika (**QED** od engl. *Quantum Electro-Dynamics*). Bili su potrebni golemi naponi da bi ta, prvotno teorija elektrona i fotona, izrasla u “prediktivnu teoriju”, teoriju čija će se predviđanja slagati s pokusima na desetak decimalnih mjesta. Pritom su ključni doprinos dali Richard Feynman, Julian Schwinger i Sin-Itiro Tomonaga. Oni su 1965. godine podijelili Nobelovu nagradu za fiziku “*za njihov temeljni rad u kvantnoj elektrodinamici, s dalekosežnim posljedicama za fiziku elementarnih čestica*”.

Ovogodišnja Nobelova nagrada dodijeljena je za postavljanje na solidne temelje ambicioznije teorije polja, koja uz opis elektromagnetskih procesa obuhvaća i slaba međudjelovanja. Ova potonja, razotkrivena kroz procese prirodne radioaktivnosti, ostvaruju san alkemičara. Riječ je o procesima koji omogućuju pretvorbu elemenata (primjerice, pretvorbu vodika u helij, izvor Sunčeve energije), iza čega se skriva pretvorba jedne elementarne čestice u neku drugu. Jasno razumijevanje takvih procesa postignuto je u okviru nove teorije polja, koja objedinjuje elektromagnetska i slaba međudjelovanja u tzv. **ujedinjenoj elektroslaboj teoriji**. Za svoj rad koji je “*rasvijetlio kvantnu strukturu elektroslabih međudjelovanja u fizici*”, Nobelovu nagradu za fiziku za 1999. godinu dijele Gerardus 't Hooft (sveučilište u Utrechtu, Nizozemska) i njegov bivši učitelj na istom sveučilištu, Martinus Veltman (potom na američkom sveučilištu Michigan, gdje je danas umirovljen kao zaslužni profesor emeritus).

Da bi olakšali razumijevanje 't Hooft-Veltmanovog rada, podsjetit ćemo se nekih povijesnih epizoda koje su mu prethodile.

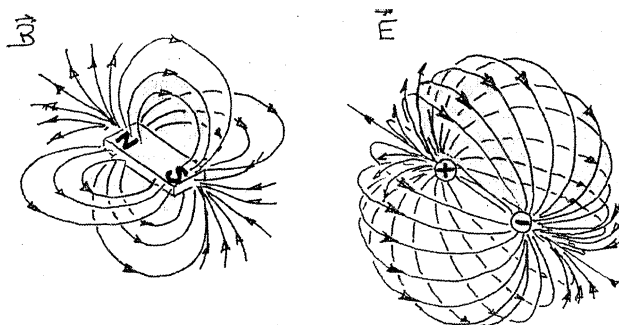
¹ Autor je redoviti profesor teorijske fizike. Bavi se problemima fizike elementarnih čestica u pristupu teorije polja te dodirnim točkama fizike čestica i kozmologije, <http://www.phy.hr/~picek/>

Svjetlost u svjetlu načela simetrije

Uvođenje ideje polja

Jedno od najupečatljivijih poglavlja u fizici obilježio je James Clark Maxwell (1831. – 1879.) radom pod naslovom “*Dinamička teorija elektromagnetskog polja*”, objavljenim 1865. godine. U njemu se po prvi put eksplicitno spominje riječ **polje**. Najveću zaslugu za svoje djelo Maxwell pripisuje svom prethodniku Michaelu Faradayu (1791. – 1867.). Općenjen *silnicama* koje kod Faradaya imaju ključnu ulogu, Maxwell još kao dvadesetogodišnjak počinje matematički oblikovati Faradayeve ideje.

Za Faradaya su “silnice” koje ocrtava željezna prašina oko polova magneta [slika 1, lijevo] odraz postojanja nečega što danas zovemo poljem sila. Isto tako, oko električnog naboja postoji polje [slika 1, desno] čija se jakost smanjuje s udaljenošću na način opisan Coulombovim zakonom.



Slika 1. Prikaz magnetskog i električnog polja.

Sam pak Faraday govori o utjecaju koji je na njega imalo Boškovićevo shvaćanje po kojemu su atomi važniji kao izvori *sila* nego kao sastavnice tvari. Riječ je o divljenju koje ovi velikani ljudske misli osjećaju za postignuća svojih prethodnika, za prepoznavanje onih mentalnih odraza fizikalne realnosti, koja će omogućavati nove prodore u spoznaji. Maxwell u jednom svom napisu o Faradayu proročanski izriče da “*matematički proračuni služe usporedbi rezultata primjene tih ideja s mjerenjem veličina dostupnih pokusima. Znanost o elektricitetu je sada (u Maxwellovo vrijeme) na takvom stupnju da su takva mjerenja i proračuni od najveće važnosti. Najvjerojatnije ne znamo niti ime znanosti koja će se razviti iz materijala koji sada prikupljamo ...*”

Ondašnje ukupno znanje o elektromagnetizmu Maxwell je sažeo u četiri zakona [slika 2, lijevo], četiri jednadžbe. Maxwellove jednadžbe pokazuju kako naboji opisani raspodjelama naboja $\rho(\vec{x}, t)$ i struja $\vec{j}(\vec{x}, t)$ određuju šest veličina, po tri komponente električnog polja $\vec{E}(\vec{x}, t)$ i magnetskog polja $\vec{B}(\vec{x}, t)$ u svakoj promatranoj točki prostora i vremena.

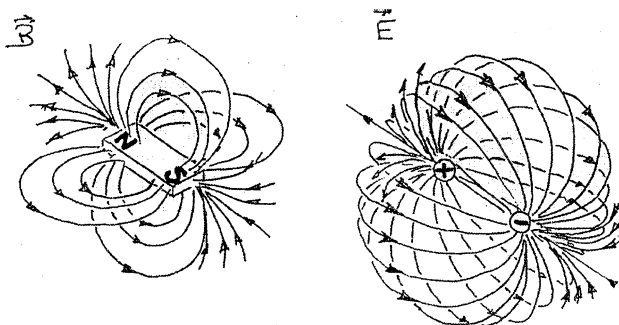
Naoružan svojim zakonima Maxwell je mogao kročiti dalje – otkriti elektromagnetske valove [slika 2, desno]: promjenjiva električna polja \vec{E} i magnetska polja \vec{B} u svom smjenjivanju guraju jedna drugo kroz inače prazan prostor i tvore “nematerijalni” elektromagnetski val. Godine 1867. Maxwell predlaže da je i vidljiva svjetlost elektromagnetski val, jedna “vidljiva oktava” u “moru” nevidljivog elektromagnetskog zračenja.

Svjetlost u svjetlu načela simetrije

Uvođenje ideje polja

Jedno od najupečatljivijih poglavlja u fizici obilježio je James Clark Maxwell (1831. – 1879.) radom pod naslovom “*Dinamička teorija elektromagnetskog polja*”, objavljenim 1865. godine. U njemu se po prvi put eksplicitno spominje riječ **polje**. Najveću zaslugu za svoje djelo Maxwell pripisuje svom prethodniku Michaelu Faradayu (1791. – 1867.). Općinjen *silnicama* koje kod Faradaya imaju ključnu ulogu, Maxwell još kao dvadesetogodišnjak počinje matematički oblikovati Faradayeve ideje.

Za Faradaya su “silnice” koje ocrtava željezna prašina oko polova magneta [slika 1, lijevo] odraz postojanja nečega što danas zovemo poljem sila. Isto tako, oko električnog naboja postoji polje [slika 1, desno] čija se jakost smanjuje s udaljenošću na način opisan Coulombovim zakonom.

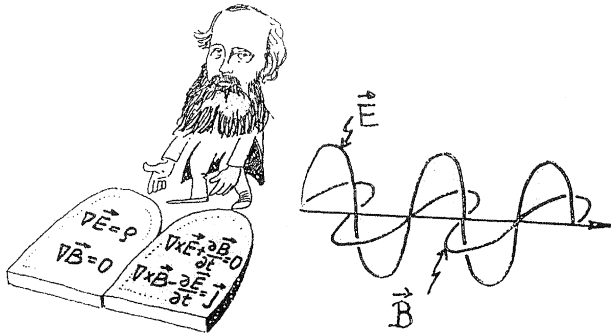


Slika 1. Prikaz magnetskog i električnog polja.

Sam pak Faraday govori o utjecaju koji je na njega imalo Boškovićevo shvaćanje po kojemu su atomi važniji kao izvori *sila* nego kao sastavnice tvari. Riječ je o divljenju koje ovi velikani ljudske misli osjećaju za postignuća svojih prethodnika, za prepoznavanje onih mentalnih odraza fizikalne realnosti, koja će omogućavati nove prodore u spoznaji. Maxwell u jednom svom napisu o Faradayu proročanski izriče da “*matematički proračuni služe usporedbi rezultata primjene tih ideja s mjerenjem veličina dostupnih pokusima. Znanost o elektricitetu je sada (u Maxwellovo vrijeme) na takvom stupnju da su takva mjerenja i proračuni od najveće važnosti. Najvjerojatnije ne znamo niti ime znanosti koja će se razviti iz materijala koji sada prikupljamo ...*”

Ondašnje ukupno znanje o elektromagnetizmu Maxwell je sazeo u četiri zakona [slika 2, lijevo], četiri jednadžbe. Maxwellove jednadžbe pokazuju kako naboji opisani raspodjelama naboja $\rho(\vec{x}, t)$ i struja $\vec{j}(\vec{x}, t)$ određuju šest veličina, po tri komponente električnog polja $\vec{E}(\vec{x}, t)$ i magnetskog polja $\vec{B}(\vec{x}, t)$ u svakoj promatranoj točki prostora i vremena.

Naoružan svojim zakonima Maxwell je mogao kročiti dalje – otkriti elektromagnetske valove [slika 2, desno]: promjenjiva električna polja \vec{E} i magnetska polja \vec{B} u svom smjenjivanju guraju jedna drugo kroz inače prazan prostor i tvore “nematerijalni” elektromagnetski val. Godine 1867. Maxwell predlaže da je i vidljiva svjetlost elektromagnetski val, jedna “vidljiva oktava” u “moru” nevidljivog elektromagnetskog zračenja.



Slika 2. Elektromagnetske pojave ujedinjene u Maxwellovim zakonima (lijevo), koji predviđaju postojanje elektromagnetskih valova (desno).

Uvođenje baždarnog polja

Za upoznavanje 't Hooft-Veltmanovog rada nužno je sagledavanje svjetlosti kao "baždarnog polja"! Riječ je o koraku učinjenom u novije doba, koraku koji je tehnički nešto zahtjevniji, ali će uporni čitatelj biti nagrađen razumijevanjem "podrijetla" svjetlosti!

Same Maxwellove jednadžbe navode na mogućnosti izražavanja električnog i magnetskog polja putem potencijala, na način

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (1)$$

gdje su $\phi(\vec{x}, t)$ i $\vec{A}(\vec{x}, t)$ polja skalarnog i vektorskog potencijala, a oznaka ∇ ("nabla") objedinjuje tri prostorne derivacije i omogućava elegantni vektorski zapis i onih jednadžbi [slika 2, lijevo] u kojima se pojavljuju derivacije po prostornim koordinatama. Uvedeni potencijali, iako se uvijek mogu konstruirati, nisu definirani jednoznačno. Naime, za slobodnu funkciju prostora-vremena $\Lambda(\vec{x}, t)$, promjena

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla\Lambda, \quad \phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (2)$$

ostavlja \vec{E} i \vec{B} nepromjenjenima. U to se lako uvjerimo uvrštavanjem relacije (2) u (1) uz uporabu $\nabla \times (\nabla\Lambda) = 0$, identiteta iz vektorskog računa. Ta sloboda odabira potencijala (sloboda odabira vrijednosti od koje ćemo ga početi mjeriti) omogućava pticama da slijeću na vodove visokog napona!

Sloboda iskazana transformacijama u (2) naziva se *lokalnom baždarnom simetrijom*. Dok u klasičnoj elektrodinamici prijelaz na potencijale nije bitan, on je nezaobilazan pri formulaciji Schrödingerove jednadžbe za električki nabijene čestice. Uočimo da zamjeni $\vec{p} \rightarrow \vec{p} + e\vec{A}$, kojom se u klasičnoj elektrodinamici uvodi magnetsko polje, odgovara u kvantnoj mehanici zamjena obične derivacije ∂_μ kovarijantnom D_μ ,

$$\partial_\mu \psi \rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \equiv D_\mu \psi. \quad (3)$$

Istovremeno, (2) mora biti praćeno promjenom valne funkcije Schrödingerove jednadžbe

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\{ie\Lambda\} \psi. \quad (4)$$

Za takvo svojstvo preuzet je naziv "*baždarne transformacije*", prema gotovo zaboravljenoj Weylovoj zamisli iz 1918. godine. Izvorna Weylova ideja odnosila se na zahtjev simetrije na promjenu udaljenosti između prostorno-vremenskih točaka, sloboda na "baždarenje". Kvantna mehanika je oživjela inačicu Weylove ideje u formi slobode na izbor **lokalne** faze u izrazu (4) – faze koja ovisi o tome u kojoj točki prostora i vremena je

promatramo. Važno je opažanje zahtjeva da relacija (4) vrijedi za lokalnu funkciju $\Lambda \equiv \Lambda(\vec{x}, t)$ povlači nužnost uvođenja elektromagnetskog potencijala, s već spomenutim “kompenzirajućim” transformacijama (2). Drugim riječima, zahtijevamo li da valna funkcija elektrona zadovoljava lokalnu simetriju (4), to će se moći ispuniti samo ako se uvede elektromagnetsko polje, dakle svjetlost. Kad je Stvoritelj rekao, “neka bude svjetlost”, pritom je mislio “neka simetrije budu lokalne”.

Sjaj poopćene svjetlosti

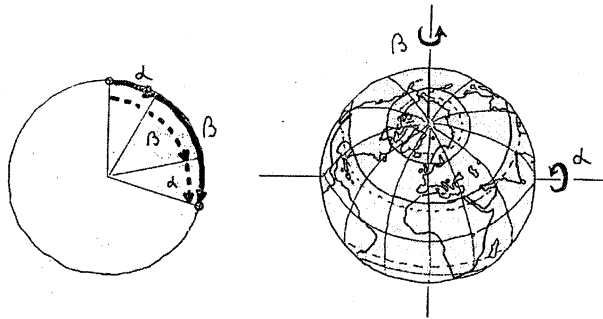
Yang-Millsovo poopćenje lokalne simetrije

Ključnim se u fizici elementarnih čestica pokazalo opažanje C. N. Yanga i R. Millsa iz 1954. godine, da se relacija (4) može poopćiti na kompliciranije “faze”.

Poopćenje s “abelovske U(1) transformacije” u (4) na “neabelovske SU(N) transformacije”, [slika 3] vodilo je na matematički prekrasnu teoriju. Oznake transformacija preuzete su iz matematičke teorije grupa, uz naziv po norveškom matematičaru s početka 19. stoljeća, Nielsu Henriku Abelu.² Budući da su Yang-Millsove teorije složenije od prethodnih Abelovih, kod njih se pojavljuje više parova električnih i magnetskih polja, odnosno više fotona³ opisanih potencijalima $A^a(\vec{x}, t)$. No to umnožavanje fotona nije sve – Yang-Millsovi fotoni, za razliku od običnih, posjeduju naboj. To znači da oni međusobno djeluju, da posjeduju svojstvo samointerakcije!

Ipak, u to su se vrijeme Yang i Mills s tugom mogli zapitati, gdje su dodatni “fotoni”, bezmaseni “baždarni bozoni” koje predviđa njihova teorija? Zašto priroda nije upotrijebila najljepšu zamislivu teoriju?!

I najljepše teorije padaju u zaborav ako nemaju eksperimentalnu potporu. Tako je trebalo pričekati do početka 70-tih da se spozna, najprije kako elektromagnetsko i slabo međudjelovanje može biti ujedinjeno u SU(2) x U(1) Yang-Millsovu teoriju, a potom da se i temeljno jako međudjelovanje može svesti na SU(3) Yang-Millsovu teoriju!



Slika 3. QED kao Abelova teorija razlikuje se od Yang-Millsovih ne-Abelovih teorija po rezultatu ponovljenih transformacija. Rotacije u 2-dimenzionalnoj ravnini dočaravaju komutativnost abelovskih transformacija: rezultat dvije transformacije ne ovisi o poretku u kojem su učinjene (lijevi dio slike). Rotacije u 3 dimenzije dočaravaju nekomutativnost neabelovskih transformacija. Uvjerite se da će se, ovisno o poretku rotacija za po 90° oko naznačenih osi globusa, Hrvatska naći na mjestu južnog Čilea ili u Indijskom oceanu. Nije baš svejedno, zar ne? (desni dio slike).

² O matematičaru N. H. Abelu pročitajte na četvrtoj stranici omota.

³ Za SU(N) grupu broj potencijala je $N^2 - 1$: a=1,2,3 za N=2, a=1,2,...8 za N=3, itd.

Svladavanje problema renormalizacije

Želimo li Yang-Millsovu teoriju oživjeti primjenom na slaba međudjelovanja, tada kandidate za nove fotone treba potražiti među masivnim česticama spina 1, “vektorskim” česticama koje bi mogle kandidirati za prijenosnike kratkodosežnih sila. No, ta je ideja imala jedan bitni nedostatak. Problem s beskonačnostima u teoriji s masivnim “fotonima” pokazao se daleko ozbiljnijim od onog u elektrodinamici. Tehnike renormalizacije, uklanjaju beskonačnosti u QED-u, nedostatne su za rješavanje problema Yang-Millsovih beskonačnosti.

S beskonačnostima u igri ugrožen je temeljni ideal fizičara – posjedovanje “prediktivne” teorije. Na sposobnost predviđanja možemo računati ukoliko naša teorija posjeduje konačni broj konačnih veličina, kao što su to mase ili naboji čestica. No, odmah po naglom uspjehu koji je pokazivalo uvođenje kvantne mehanike nastupili su problemi s beskonačnim vrijednostima koje su se pojavile ako se pokušalo točnije izračunati neku od tih veličina. Dva je desetljeća vladala nemoć fizičara pred beskonačnostima uskrslim na mjestima gdje se očekivalo tek zanemarive popravke. Svladavanje “problema renormalizacije” je QED, među ostalim, učinilo uzorom i za uklanjanje beskonačnosti. Osobito se plodotvornom pokazala Feynmanova identifikacija beskonačnosti u njegovim dijagramima s petljom, a potom iznalaženje formalne manipulacije, **renormalizacije**, kojom su se te beskonačnosti mogle ukloniti redefinicijom mase i naboja. Program renormalizacije QED-a zaokružio je engleski fizičar Freeman Dyson 1949. godine demonstracijom da se Feynmanovi rezultati mogu izvesti iz formulacije QED-a koju su istodobno s Feynmanom postavili Tomonaga i Schwinger. Renormalizabilnost koju posjeduje QED pokazala se odlikom samo nekih “odabranih” teorija. Uvjerljivost postupka kojim se QED rješava problema beskonačnosti možemo dočarati na primjeru teorijskog proračuna QED popravke starom Diracovom predviđanju za magnetski moment elektrona. Teorijska popravka, dana faktorom

$$1.00115965214$$

u nevjerojatnom je suglasju s izmjerenom vrijednošću

$$1.001159652193(10),$$

gdje zadnje dvije znamenke u zagradi izriču neodređenost mjerenja zadnjih decimalnih mjesta.⁴ Ako je simetrija na “lokalnu U(1) transformaciju” ključ uspjeha za QED, da li će poopćenje zahtjeva lokalnosti na “neabelovske transformacije” moći učiniti Yang-Millsove teorije “renormalizabilnim”?

Renormalizacijom Yang-Millsove teorije najprije su se pozabavili Martinus J. G. Veltman i John S. Bell, i to za masivnu teoriju s masivnim fotonima. Oni su najprije pokazali, poput Feynmana, da su dijagrami bez petlji konačni. I za dijagrame s jednom petljom beskonačnosti su se, kao čudom, pokratile. Ipak, stvar je zapela na razini dijagrama s dvije petlje. Budući da broj dijagrama *rapidno* raste s brojem petlji, Veltman je već za dijagram s dvije petlje razvio kompjutorski program (Schoonship, program simboličke manipulacije, na čijem se principu temelje svi kasniji programi tog tipa – primjerice Wolframova Mathematica). No problem s beskonačnostima je ostao!

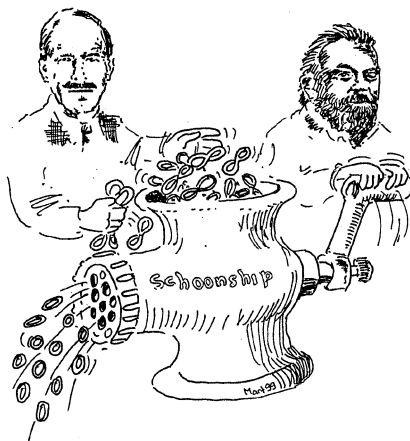
Na ovom je mjestu važnu ulogu odigrao Feynmanov trik. Čestice “duhovi” koje je Feynman uveo još 1963. godine, sada su pomogle i pri rješavanju beskonačnosti u Yang-Millsovoj teoriji. Te čestice, koje se ne pojavljuju u konačnom stanju, jako olakšavaju račun u međukoracima.

⁴ Nobelova nagrada Hansu Dehmeltu za 1989. godinu dodijeljena je za mjerenje magnetizma elektrona s točnošću od dvanaest znamenki.

Drugo otkriće koje je omogućilo oblikovanje Yang-Millsovih teorija vezano je uz imena F. Englerta, R. Brouta i P. Higgasa, a odnosilo se na mogućnost pribavljanja mase česticama, a da ne bude narušena baždarna simetrija, tipa one u izrazu (4). U takvom scenariju sa “spontano slomljenom” simetrijom 't Hooft i Veltman [slika 4] su dovršili posao svojih prethodnika.

Uz pomoć čestica “duhova” (u tzv. renormalizabilnom, 't Hooft-Feynmanovom baždarenju) i pomoću Veltmanovog računalnog programa najprije je 't Hooft pokazao kraćenje preostalih beskonačnosti u dijagramima s dvije petlje, a potom je zajedno s Veltmanom izrađena iscrpna računalna metoda. Elektroslabo teorija je time ušla u red standardnih teorijskih “mašinerija” koje mogu proizvoditi precizne proračune.

Jedan od svjedoka 't Hooft-Veltmanovog postignuća je S. Weinberg.⁵ Do objavljivanja 't Hooftovog članka 1971. godine, Weinbergov članak o elektroslaboj teoriji iz 1967. je bio gotovo nezapažen. Po objavljivanju 't Hooftovog članka, broj citiranja Weinbergovog članka naglo raste sve do razine najcitiranijeg članka iz fizike elementarnih čestica. U podsvijesti fizičara **renormalizabilnost** je promovirana do statusa temeljnog načela za kvantnu teoriju polja. To načelo odabire teoriju koja je dovoljno široka da uključi poznate čestice i interakcije, ali i dovoljno uska da omogući specifična predviđanja prepuštena eksperimentalnim provjerama. Tako je bilo moguće iz preciznih mjerenja CERN-ovog LEP-a odrediti masu t-kvarka prije nego što je on otkriven. U stvari, bez te precizne informacije gdje t-kvark treba tražiti, teško da bi i došlo do njegovog otkrića 1995. na Fermilabu u USA. Danas LEP-ova mjerenja postavljaju slična ograničenja na interval masa gdje se može očekivati Higgsova čestica. Jedino što je, za razliku od izražene ovisnosti tipa m^2 , kod Higgasa ta ovisnost sporog logaritamskog tipa, $\log M_H^2$. Iako to rezultira nešto manje preciznim predviđanjem na kojoj bi vrijednosti mase trebalo tražiti Higgsovu česticu, ohrabrujuće je da će to područje masa biti dostupno LHC sudarivaču na CERN-u! Nije li na pomolu još jedan trijumf renormalizabilnosti standardne teorije?!



Slika 4. 't Hooft i Veltman dovršavaju renormalizacijski program elektro-slabe teorije ('t Hooftova vještina na Veltmanovu Schoonshipu dovodi do neprekinutog niza ništica).

Naravno, kao što to nije bio slučaj s QED, tako ne očekujemo niti da je standardna teorija zadnja riječ. Primjerice, 't Hooft zamjećuje da sve teorije, bez izuzetka, posjeduju

⁵ S. Weinberg je zajedno s A. Salamom i S. Glashowom podijelio Nobelovu nagradu za fiziku u 1979. godini, “za njihove doprinose teoriji ujedinjenih slabih i elektromagnetskih međudjelovanja, uz ostalo predviđanje slabe neutralne struje”.

“zonu sumraka”, područje u kojem računalna pravila teorije padaju u vodu. Srećom, za renormalizabilnu elektroslabu teoriju ta “zona sumraka” je eksponencijalno daleko.

Literatura

- [1] G. 'T HOOFT, *Gauge theories of forces between elementary particles*, Scientific American, June 1980, p. 90.
- [2] M. VELTMAN, *The Higgs Boson*, Scientific American, November 1986, p. 88.