

# Opći oblik III. Keplerovog zakona

---

**Tamajo, Ettore**

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2003, 211, 186 - 190**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:244679>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-08**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)

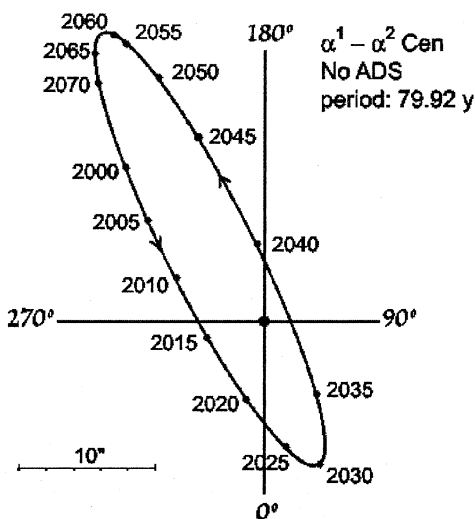




## Opći oblik III. Keplerovog zakona

Ettore Tamajo<sup>1</sup>, Zagreb

Više od polovice zvijezda u Galaksiji nalazi se u dvojnim ili višestrukim sustavima zvijezda. U dvojnog sustavu zvijezde kruže oko zajedničkog centra mase sustava. Uzmimo dvije zvijezde s masama  $M_1$  i  $M_2$  koje obilaze centar mase sustava  $C$  (sl. 1) u kružnim orbitama s polumjerima  $r_1$  i  $r_2$ .



Slika 1. Dvojni sustav  $\alpha$  Centauri u kojem komponente kruže oko gravitacijskog središta s periodom 80 godina.

U svakoj točki staze pojedine zvijezde gravitacijska sila između zvijezda  $F_g$  jednaka je centripetalnoj sili  $F_c$ :

$$\frac{GM_1M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_1r_1\Omega^2, \quad (1)$$

$$\frac{GM_1M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_2r_2\Omega^2, \quad (2)$$

gdje je  $G$  konstanta gravitacije, a  $\Omega$  kutna brzina zvijezda, i za obje mora biti jednaka. Sređene, jedn. (1) i (2) možemo napisati u obliku:

$$\frac{GM_2}{(r_1 + r_2)^2} = r_1\Omega^2, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Autor je mlađi asistent u Fizičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: etamajo@phy.hr

$$\frac{GM_1}{(r_1 + r_2)^2} = r_2 \Omega^2. \quad (4)$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{(r_1 + r_2)^3}. \quad (5)$$

U slučaju kružnih staza kutna brzina  $\Omega$  određena je iznosom perioda kruženja  $P$

$$\Omega = \frac{2\pi}{P}. \quad (6)$$

Uvrstimo izraz za kutnu brzinu  $\Omega$  u jedn. (5) i preuredimo dobiveni izraz tako da izrazimo sumu masa zvijezda pomoću ostalih veličina

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2}. \quad (7)$$

Gornji je izraz poopćeni oblik III. Keplerovog zakona gibanja planeta. Johannes Kepler (1571. – 1630.) je 1619. godine otkrio da su kvadrati sideričkih perioda obilaska planeta oko Sunca razmjerni s kubovima velikih poluosi njihovih eliptičnih staza

$$\frac{P^2}{a_p^3} = \text{konstanta}.$$

U planetarnim sustavima, poput Sunčevog, gdje se masa planeta u odnosu na matičnu zvijezdu (Sunce) može zanemariti, vrijedi Keplerov harmonijski zakon. U slučaju dvojnih zvijezda takva aproksimacija više nije opravdana i potrebno je koristiti opći oblik III. Keplerovog zakona (jedn. 7).

Podijelivši jedn. (3) i (4) dobivamo uvjet za polumjere staza

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (8)$$

ili

$$M_1 r_1 = M_2 r_2.$$

Drugim riječima, točka  $C$  je centar mase dvojnog sustava (vrijedi zakon poluge).

Astronomi najčešće udaljenosti planeta od zvijezda, ili zvijezda u dvojnog sustavu, izražavaju u astronomskim jedinicama AJ, orbitalni period u godinama, a mase u jedinicama Sunčeve mase  $M_\odot$ . Tada je konstanta  $4\pi^2/G$  u jedn. (7) jednaka jedinici. (Provjerite za vježbu!)

**Zadatak 1.** Izračunajte mase zvijezda u dvojnog sustavu Cyg X-1 na osnovi podataka da je udaljenost među komponentama 0.21 AJ, a period ophoda je 5.6 d, te da se udaljenosti komponenata od centra mase odnose kao 1 : 3. Jedna od zvijezda u tom sustavu je kandidat za crnu rupu.

*Rješenje.* Iz uvjeta

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

i jednadžbe (8) slijedi

$$M_1 = 3M_2. \quad (10)$$

Kao drugu jednadžbu po masama (imamo dvije jednadžbe jer imamo dvije nepoznanice), iskoristit ćemo opći oblik III. Keplerovog zakona (jedn. 7),

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{P^2},$$

gdje smo s  $r$  označili udaljenost među komponentama ( $r = r_1 + r_2$ ). Sve poznate veličine stavili smo na desnu stranu jednadžbe. Nakon uvrštenja njihovih numeričkih vrijednosti ( $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ) dobivamo:

$$M_1 + M_2 = 40 M_{\odot}. \quad (11)$$

Rješenje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice (jedn. (10) i (11)) daje pojedinačne mase komponentata u dvojnog sustavu Cyg X-1:

$$M_1 = 30 M_{\odot},$$

$$M_2 = 10 M_{\odot}.$$

Cyg X-1, kao što sam naziv objekta govori, jedan je od prvih otkrivenih i vrlo snažnih izvora rendgenskog zračenja. U spektru se vidi samo komponenta manje mase, dok je komponenta s trostruko većom masom skrivena. Zbog toga je Cyg X-1 kandidat za crnu rupu.

**Zadatak 2.** Izvedite izraz za brzinu kruženja tijela u dvojnog sustavu ako je period ophoda sustava  $P$ , komponente sustava kruže na udaljenostima  $r_1$  i  $r_2$  od gravitacijskog središta, a mase su im  $M_1$  i  $M_2$ . Iskoristite podatke iz prethodnog zadatka i odredite kojim se brzinama kreću komponente u sustavu Cyg X-1.

*Rješenje.* Brzine tijela dvojnog sustava na kružnoj stazi komponentata su

$$v_1 = \frac{2r_1\pi}{P}, \quad (12)$$

$$v_2 = \frac{2r_2\pi}{P}. \quad (13)$$

Treći Keplerov zakon za dvojni sustav glasi

$$M_1 + M_2 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2} \frac{4\pi^2}{G}. \quad (14)$$

Iz čega je period

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{G(M_1 + M_2)}}. \quad (15)$$

Uvrštavanjem izraza za period u izraze za brzine, dobijemo:

$$v_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_1 + r_2}}, \quad (16)$$

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_1 + r_2}}. \quad (17)$$

Uvrštavanjem poznatih veličina za Cyg X-1 dobili bismo  $v_1 = 72 \text{ km s}^{-1}$  i  $v_2 = 216 \text{ km s}^{-1}$ . Uočimo da komponenta veće mase ima manju brzinu kruženja i bliže je centru mase od komponente čija je masa manja.

**Zadatak 3.** Jupiter se nalazi 5.2 AJ od Sunca i ima masu od  $0.001 M_{\odot}$ . Koliki je polumjer Sunčeve staze oko zajedničkog centra mase zbog gravitacijske sile Jupitera? ( $1 \text{ AJ} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ )

*Uputa.* Sunčeva staza zbog privlačenja Jupitera ima polumjer  $7.8 \cdot 10^8 \text{ m}$ , što je malo veće od Sunčevog polumjera  $i$ , prema tome, pojava koja se može utvrditi preciznim mjerenjima.