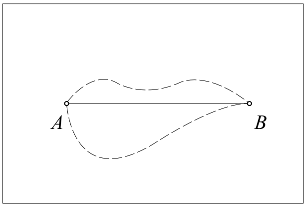
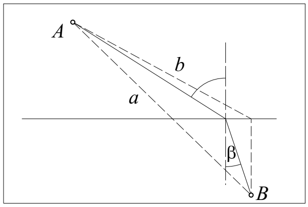
Optika iz Fermatove perspektive

Milivoj Uroić[1], *Zagreb*

Učeći geometrijsku optiku u školi, susrećemo zakon refleksije i loma, jednadžbe prizme i leće, te razne optičke sustave, teleskope, mikroskope, kamere, naočale i ljudsko oko. Namjera ovog teksta je jednostavna i lako razumljiva svakom matematičaru i fizičaru: pokazati da se svi sustavi geometrijske optike daju prikazati dosljednom primjenom *jednog jednostavnog pravila – Fermatovog principa*. Prije iznošenja samog principa, pogledajmo jedan primjer. Odabrao sam najjednostavniji, toliko jasan da ga često uzimamo zdravo za gotovo, niti ne navodeći ga kao posebnu zakonitost – pravocrtno širenje svjetlosti u jednolikom mediju (npr. u zraku).



Slika 1.



Slika 2.

Na slici 1 prikazane su točke A i B. Ako zraka svjetlosti putuje kroz obje točke, Fermatov princip (i zdrav razum) nam govori da će proći po dužini $\overline{AB}$. Zašto ne po iscrtkanim krivuljama, ili po bilo kojem drugom putu između A i B? Od brojnih svojstava dužine, tj. odsječka pravca, za ovo razmatranje bitno je sljedeće: to je *najbrži* put iz A u B. Pravocrtno rasprostiranje svjetlosti nam je tako očigledno da se pomoću njega snalazimo u prostoru, određujemo kada je nešto između nas i objekta promatranja, nišanimo, procjenjujemo kvalitetu ravnih predmeta, a kada se kojim slučajem svjetlost *ne* kreće pravocrtno, govorimo o lomu, refleksiji, optičkoj varci... No, evo konačno poopćenja pravocrtnog širenja, *Fermatovog principa*:

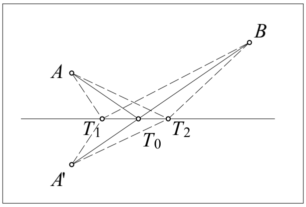
> Zraka svjetlosti koja prolazi kroz dvije točke (A i B), između tih točaka će proći najbržim mogućim putem.

Francuski matematičar Pierre de Fermat (1601. – 1665.) poznatiji je po jednom svom matematičkom teoremu (Fermat's last theorem), no bavio se intenzivno i problemima minimuma i maksimuma, te je svojim publikacijama bitno pridonio razvoju matematičke analize. I ovdje izloženi princip je dio njegovog rada na području traženja ekstremnih (minimalnih i maksimalnih) vrijednosti.

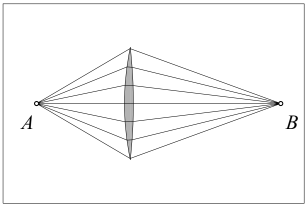
Sljedeći primjer je pogodan za ilustraciju Fermatovog principa – lom svjetlosti. Želimo odrediti put zrake svjetlosti kroz točke A i B na slici 2. Točka B je u optički gustom sredstvu, npr. vodi, a vodoravna crta je granica zraka i vode. Poznato je da je brzina svjetlosti u vodi n puta manja od brzine u zraku (vakuumu), gdje je n *indeks*

[1] Autor je viši asistent na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Bavi se procesima u unutarnjim ljuskama atoma, te nuklearnom fizikom; e-mail: muroic@phy.hr

loma vode. Ako je u oba sredstva brzina manja od brzine u vakuumu, govorimo o *relativnom* indeksu loma, koji je jednak omjeru tih dviju brzina. Koji je put najbrži? Najkraći je očigledno direktan put (a), ali njegov veliki dio prolazi kroz vodu, gdje je brzina manja. Najkraći put kroz vodu je varijanta (b), ali ona bitno produljuje put kroz zrak. Najbrži put je negdje između (puna linija), kompromis između što kraćeg puta kroz vodu i što kraćeg ukupnog puta. Može se pokazati, što i preporučam zainteresiranom čitatelju, da je najbrži onaj put za koji vrijedi *Snellov zakon loma*, tj. kod kojeg za upadni kut α i lomljeni kut β, označene na slici, vrijedi $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Za izvod nije nužno poznavanje derivacija (dovoljno je odrediti minimum kvadratne funkcije), ali je potrebna trigonometrija pravokutnog trokuta. Rješenje je ujedno i odgovor na nešto manje apstraktan problem: Nalazite se na plaži u točki A i osoba se utapa u moru u točki B. Trčite n puta brže nego što plivate. Kojim ćete putem najbrže doći do utopljenika? Horizontalna crta je linija obale. Problem je, naravno, čisto teorijske prirode. Ako se netko utapa, nećete ništa računati...



Slika 3.



Slika 4.

Refleksija svjetlosti od glatke površine, zrcala, zaslužuje novu skicu, razmatranje i komentar. Od zraka na slici 3 koje kreću iz A, reflektiraju se od zrcala (horizontalna crta) i dolaze u B, stvarni put zrake bit će onaj najbrži, a ovdje ujedno i najkraći. Nije se teško uvjeriti da je to onaj put za koji vrijedi *zakon refleksije*, takav da je upadni kut jednak reflektiranom. Promotrimo točku A', koju zovemo *slika* od A, simetričnu u odnosu na ravninu zrcala. Lako se vidi da je za svaki odabir točke T na zrcalu put ATB jednak putu $A'TB$, što znači da će stvarna točka refleksije T_0 ležati na dužini $\overline{A'B}$, što povlači jednakost spomenutih kutova.

Ali, zar nije brži put *dužina* $\overline{AB}$? Opažač u točki B će vidjeti *dvije* zrake iz A, jednu direktno, a drugu reflektiranu u zrcalu iz smjera A'. Prvi je put globalno najbrži, a drugi je najbrži od onih koji dolaze do zrcala. Dakle, pojam "najbrži" u Fermatovom principu ne znači nužno globalno, apsolutno najbrži, već *brži od svih bliskih puteva*.

Netko će se pobuniti: Zašto bi zraka iz A uopće morala stići u točku B? Zraka koja krene prema T_1 ili T_2 to očito neće učiniti. Fermatov princip ne govori o tome kuda će prolaziti i kamo će stići zraka koja krene iz A nekim smjerom, već kojim je putem prošla *ako* je stigla u neku točku (B).

Fokusiranje

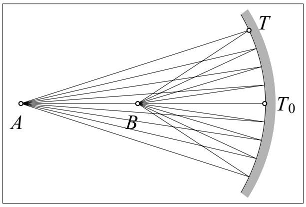
Slika 4 je tipična ilustracija upotrebe sabirne leće u optici: snop zračenja izlazi iz točke A, prolazi kroz leću i fokusira se (ponovno sabire, konvergira) u točki B. Pogledajmo ju imajući na umu Fermatov princip. Zar ne bi samo jedna zraka trebala prolaziti najbržim putem? A zrake prolaze *svim* putevima kroz leću (nacrtano ih je samo nekoliko). Ako želimo postići fokusiranje na slici, a da putevi zraka zadovoljavaju Fermatov princip, *svi* bi trebali biti najbrži, ili kao logična posljedica:

Da bismo snop zraka koje izlaze iz točke A fokusirali u točku B, moramo postići da svi putevi iz A u B budu jednako brzi.

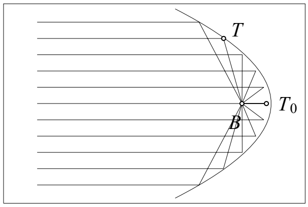
Ako pogledate različite nacrtane puteve na slici 4, vidjet ćete kako "radi' sabirna leća: najkraći, ravan put prolazi najdebljim slojem leće. Kako je brzina svjetlosti u leći n puta manja nego u zraku, to produžuje vrijeme puta do B. Zraka koja krene prema rubu leće prolazi kroz vrlo malu debljinu leće, ali prolazi geometrijski najduljim putem. Te zrake, kao i sve između njih, trebaju *jednako* vremena za put iz A u B. Ova je tvrdnja egzaktan uvjet fokusiranja, dok je jednadžba leće koja se koristi u srednjoškolskoj fizici aproksimacija koja vrijedi za tanke leće sa sfernim graničnim plohama (dioptrima) i za indeks loma stalnog iznosa tj. neovisnog o boji svjetlosti. Uz navedene aproksimacije jednadžba leće se može izvesti neposredno Fermatovim principom, ili posredno iz Snellovog zakona loma svjetlosti. Njen matematički oblik je

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

gdje je a udaljenost od A do leće, b udaljenost od leće do B, n indeks loma materijala leće u odnosu na okolinu, te R_1 i R_2 radijusi sfernih dioptara leće, uz pozitivne predznake za bikonveksnu leću kao na slici 4.



Slika 5.



Slika 6.

Umjesto leće, koja je računski vrlo zahtjevna, želi li se dobiti egzaktan oblik, odredit ćemo oblik *zrcala* potrebnog za fokusiranje. Odgovarajući hod zraka sa zrcalom umjesto leće prikazuje slika 5. S obzirom na prethodni zaključak o fokusiranju, trebamo se zapitati: Kojeg je oblika ploha (na slici je njen presjek, krivulja), takva da svi putevi iz A u B budu jednako brzi? S obzirom da je sada brzina svjetlosti svugdje jednaka, pitanje se svodi na jednakost prijeđenih puteva. Ili, još preciznije formulirano: koje je geometrijsko mjesto točaka T za koje je zbroj udaljenosti $|AT|$ i $|BT|$ konstantan? Rješenje ovog problema je *elipsa*, s točkama A i B kao *fokusima* ili *žarištima*. Odnosno, prostorna ploha koja opisuje naše zrcalo je *rotacijski elipsoid*. Elipsa se upravo i definira pomoću konstantne sume udaljenosti točke na krivulji od oba fokusa. Razmotrimo neke specijalne slučajeve ovog rješenja.

Aproksimacija elipsoida sferom – jednadžba sfernog zrcala

Ukoliko se ograničimo na zrake blizu optičke osi ABT_0, položaj predmeta, zrcala i slike možemo opisati približnom jednadžbom koja se uči u školi. Zrake bliske optičkoj osi znače da trebamo razmatrati samo manji dio plohe (presječne krivulje) oko tjemena. Tada elipsoid (elipsu) možemo zamijeniti sferom (kružnicom) jednakog radijusa zakrivljenosti. Radijus zakrivljenosti elipse u tjemenu može se izraziti kao $R = b_e^2/a_e$, gdje su a_e i b_e velika i mala poluos elipse (Matematički priručnik Bronštejn, str. 206). Poznavatelj svojstava krivulja drugog reda sjetit će se da vrijedi i $a_e^2 = b_e^2 + e^2$, gdje je e linearni ekscentricitet elipse. Udaljenosti predmeta i slike od tjemena ($|AT_0|$ i $|BT_0|$) obično se označavaju s a i b (zato indeksi e za poluosi elipse). Te se udaljenosti lagano izraze pomoću veličina karakterističnih za elipsu:

$$a = a_e + e, \quad b = a_e - e$$

Umnožak tih jednakosti daje

$$ab = (a_e + e)(a_e - e) = a_e^2 - e^2 = b_e^2,$$

a zbroj

$$a + b = (a_e + e) + (a_e - e) = 2a_e.$$

To su upravo veličine pomoću kojih je izražen radijus zakrivljenosti, pa vrijedi:

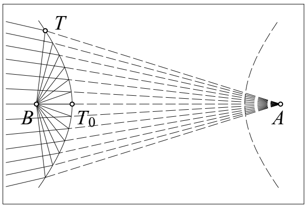
$$R = \frac{b_e^2}{a_e} = \frac{ab}{(a+b)/2}$$

Odatle sređivanjem izraza slijedi *jednadžba sfernog zrcala*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}.$$

Vrlo udaljen predmet ili slika

Vratimo se ponovno elipsi i zamislimo da želimo jedan od fokusa znatno udaljiti od drugog i nasuprotnog tjemena. Na slici 5 to bi značilo zadržati točke B i T_0, uz pomicanje točke A na veliku udaljenost. Koliko veliku? Budimo praktični, i zamislimo da je B prijemnik satelitske antene, T tjeme "tanjura" antene, a A *satelit*. Komunikacijski sateliti su vrlo daleko od antene u usporedbi s dimenzijama i udaljenostima same antene. Za beskonačno udaljenu točku A, snop zraka s nje će dolaziti paralelno (slika 6). Kojeg je oblika tanjur? Odgovor vjerojatno znate, to je *paraboloid* (presjek je parabola). Ako pitate matematičara zašto, priznat će vam da je, uz priličnu slobodu izražavanja, parabola ustvari elipsa kojoj je jedan fokus pobjegao u beskonačnost...



Slika 7.

Može li točka A "pobjeći" dalje od beskonačnosti? U optici može! Točka A je sjecište dolaznih zraka (slika 5). Nalazi se u beskonačnosti ako su dolazne zrake paralelne (slika 6). Ako zamislimo konvergentan dolazni snop, ne takav da dolazi *iz* točke A, nego takav da ide *prema* točki A, dobit ćemo situaciju kao na slici 7. Poznavaoci krivulja drugog reda pogodit će da je ovaj put rješenje *hiperboloid* (presjek je hiperbola), s fokusima B i A. Radi jasnoće, prikazana je refleksija zraka s jedne grane hiperbole, ali i druga predstavlja egzaktno rješenje. Iako ovdje nema fokusiranja zraka, Fermatov princip uvjetuje da će se u B fokusirati snop zraka koje bi došle istovremeno u A (crtkani produžeci), ili da snop iz B nakon refleksije izgleda kao da su zrake krenule istovremeno iz A.

Mali matematički nusprodukt

S obzirom da smo zaključili da se zračenje emitirano u jednom žarištu elipse fokusira u drugom, ali znamo i da se u svakoj točki elipse svjetlost reflektira tako da je upadni kut jednak reflektiranom, iz obje tvrdnje zajedno slijedi jedno matematičko svojstvo elipse: Iz svake točke elipse, spojnice sa žarištima zatvaraju jednake kutove s tangentom (i normalom). Ista tvrdnja vrijedi i za hiperbolu, a zainteresirani čitatelj će ju lagano preinačiti u odgovarajuću tvrdnju za parabolu.

Još malo o Fermatovom principu

Čak i kada se, lakše ili teže, utvrdi da zakoni geometrijske optike slijede iz Fermatovog principa, ostaje nekoliko tema koja se nameću. Zakoni loma i refleksije vrlo dobro odgovaraju predodžbama o kretanju zraka baziranim na klasičnoj mehanici: uz određeni početni položaj i smjer kretanja, zrake imaju *deterministički* određen daljnji hod. Fermatov princip izražava zakone geometrijske optike na drukčiji, možda manje intuitivan način, jer naša je intuicija temeljena na klasičnoj mehanici. Pitanje koje bi si trebali postaviti analizirajući primjere upotrebe Fermatovog principa je – *kako zrake svjetlosti određuju koji je put najbrži?* U ovom tekstu korišteno je znanje o određivanju minimuma, o trigonometrijskim funkcijama, o krivuljama drugog reda. Svjetlost sigurno ne *zna* za te pojmove. Svjetlost je jedan od najjednostavnijih fenomena u prirodi, dok je ljudsko logično razmišljanje jedan od najsloženijih. Dakle mi koristimo npr. funkciju sinus kad određujemo hod lomljene zrake, ali svjetlost to sigurno "radi" na neki drugi način.

Odgovor je u *valnoj* prirodi svjetlosti. Fermatov princip može objasniti svu geometrijsku optiku, ali nije objašnjiv *unutar* geometrijske optike. O ovoj opsežnoj temi možda nekom drugom prilikom...