Jednostavan model Sunca

Milin, Matko

Jednostavan model Sunca

Matko Milin[1], *Zagreb*

Uvod

Svi znamo da su temperature na površini Sunca vrlo visoke, a već i jednostavna analiza spektra Sunčeve svjetlosti pokazat će da je riječ o ≈ 6000 K. Ocjena temperature u središtu Sunca puno je teža – jasno je jedino da mora biti veća od milijuna Kelvina nužnih za odigravanje termonuklearnih reakcija (pogledaje npr. MFL, broj 215). U nastavku ćemo temperaturu središta Sunca izračunati uz pomoć vrlo jednostavnog modela i matematičkog aparata (bez integrala i derivacija). Sve što trebamo znati su četiri izraza:

1) Newtonov izraz za gravitacijsko privlačenje dviju masa m_1 i m_2:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2});

2) izraz za hidrostatski tlak u fluidu (plinu ili tekućini):

$$p = \rho g h,$$

gdje je ρ gustoća fluida, g ubrzanje slobodnog pada, a h visina materijala;

3) jednadžbu stanja idealnog plina:

$$pV = nRT = \frac{m}{\mu}RT, \qquad p = \frac{\rho}{\mu}RT,$$

gdje je n množina tvari, μ molarna masa plina, T njegova temperatura, a R plinska konstanta ($R = 8.314$ JK^{-1}mol^{-1});

4) izraz za volumen kugle:

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi,$$

gdje je R njen polumjer.

Dakako, trebat će nam i podatak o masi ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg) i polumjeru ($R_\odot = 7 \cdot 10^5$ km) Sunca.

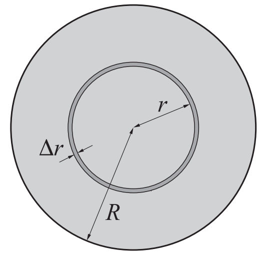
Model Sunca konstantne gustoće

Pretpostavimo prvo da je gustoća Sunca konstantna, tj. ista i na Sunčevoj površini i duboko u njegovoj unutrašnjosti:

[1] Autor je docent na Fizičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, e-mail: `matko.milin@phy.hr`.

$$\rho = \rho_c = \frac{M_\odot}{V} = \frac{3M_\odot}{4R_\odot^3\pi} \approx 1400 \text{ kg/ m}^3,$$

gdje ćemo s indeksom c označavati veličine u središtu Sunca. Dobivena prosječna gustoća Sunca samo je malo veća od gustoće vode! U izrazu za hidrostatski tlak i uz pretpostavku konstantne gustoće ostaje jedna veličina koja se mijenja s promjenom položaja u Suncu, a to je akceleracija slobodnog pada g. Gravitacijsko privlačenje može se zapisati i kao $F = mg$, gdje g dakako nije jednak vrijednosti za Zemlju, već se mijenja s udaljenošću od središta Sunca. Na površini Sunca vrijedi $g \approx 270$ m/ s^2, dok iz Newtonovog izraza dobivamo ovisnost izraza za g u njegovoj unutrašnjosti:



$$g = \frac{MG}{r^2}.$$

U ovom izrazu je r udaljenost od središta Sunca, a M dio mase Sunca koji se nalazi u kugli polumjera r (vidi sliku):

$$M = \rho V = \rho_c \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Ovdje je korištena činjenica da neki objekt (masu) u unutrašnjosti Sunca ubrzava samo onaj dio ukupne mase Sunca koji se nalazi na udaljenosti od središta manjoj od odgovarajuće udaljenosti promatranog objekta (ostali se doprinosi za sferno-simetričan objekt kao što je Sunce poništavaju).

Izaberimo maleni volumen Sunca na polovici njegovog polumjera (razlog zašto uzimamo polovicu je činjenica da g linearno raste s r); jednostavnosti radi neka to bude kocka stranice Δr čija su četiri brida paralelna polumjeru Sunca. Razliku tlakova između "dublje" i "pliće" strane kocke naći ćemo preko izraza za hidrostatski tlak:

$$\Delta p = \rho g h = \rho_c \frac{MG}{r^2} \Delta r = \rho_c^2 \frac{4}{3} r^3 \pi \frac{G}{r^2} \Delta r = \frac{9M_\odot^2}{16R_\odot^6 \pi^2} \cdot \frac{4}{3} Gr\pi \Delta r = \frac{3}{4} \frac{M_\odot^2}{R_\odot^6 \pi} Gr \Delta r.$$

Uzmemo li za duljinu brida naše kocke npr. $\Delta r = 700$ km (jednu tisućinu ukupnog polumjera), uz $r = 3.5 \cdot 10^5$ km dobit ćemo:

$$\Delta p = 1.3 \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

Pretpostavimo li da bi promjena tlaka bila ista na svakoj od tisuću takvih kocaka od središta do ruba Sunca, za ukupan tlak u središtu dobili bi tisuću puta veću vrijednost (tlak na rubu Sunca je zanemarivo malen):

$$p_c = 1.3 \cdot 10^{14} \text{ Pa}.$$

Rezultat bi bio isti da smo za brid naše zamišljene kocke uzeli i neku drugu vrijednost, sve dok je ista puno manja od ukupnog polumjera Sunca. Dakako, točniji rezultat dobili bi integriranjem porasta tlaka duž polumjera, ali konačan rezultat ne bi bio jako različit. Dakle, uz pretpostavku konstatne gustoće od 1400 kg/ m^3, tlak u središtu Sunca je $1.3 \cdot 10^{14}$ Pa.

Model linearnog porasta gustoće Sunca

Dakako, Sunce nema konstatnu gustoću kako smo do sada pretpostavljali, već je očito najrjeđe na rubovima, a najgušće u središtu. Osnovno poboljšanje gornjeg razmatranja može se stoga postići npr. uz pretpostavku da gustoća linearno raste od vrlo (zanemarivo) malene gustoće na rubu Sunca do maksimalne gustoće ρ_c u njegovom središtu. Ponovimo li razmatranje "kocke" na polovici Sunca, nije nerazumno da će gustoća na tom mjestu biti identična prosječnoj gustoći izračunatoj u modelu konstantne gustoće, $\rho = 1400$ kg/ m^3. Ono što će se promijeniti u izrazu za hidrostatski tlak je veličina g (koja se mijenja jer je M sada različit). Uzmemo li da je prosječna gustoća kugle polumjera $R_\odot/2$ jedanaka $3/4$ maksimalne gustoće (odnosno $3/2$ puta gustoća na polovici), dobivamo:

$$\Delta p = \frac{3}{2} \cdot 1.3 \cdot 10^{11} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \qquad p_c = 2 \cdot 10^{14} \text{ Pa}.$$

Dakle, uz pretpostavku linearnog porasta gustoće, dobivamo $\rho_c = 2800$ kg/ m^3, a $p_c = 2 \cdot 10^{14}$ Pa. Rezultat za tlak vrlo je sličan rezultatu koji se dobio uz pretpostavku konstatne gustoće (a isto tako nije previše različit od rezultata koji bi se dobio integriranjem).

Temperatura u središtu Sunca

Materija na Suncu je u stanju plazme, odnosno visokoioniziranog plina. Iako postoji kulonska interakcija između čestica plazme (pa ona sigurno nije idealan plin), u prvoj aproksimaciji za nju se ipak može upotrijebiti jednadžba stanja idealnog plina, a da bi se izračunala temperatura

$$T = \frac{p_c \mu}{\rho_c R}.$$

Veličine p_c i ρ_c smo izračunali; za izračun temperature fali nam još samo molarna masa. Sunce se, po masi, sastoji od 75% vodika ($\mu = 1$ g/ mol) i 25% helija ($\mu_2 = 4$ g/ mol) – količina težih elemenata je u kontekstu ovog zadatka posve zanemariva. Kolika je onda masa jednog mola (tj. molarna masa) Sunčeve plazme? Kao prvo, pola mola otpada na elektrone zanemarive mase (masa elektrona je skoro 2000 puta manja od mase protona). U preostaloj polovici čestica 25% mase otpada na helijeve jezgre – lako je provjeriti da to znači da na 12 vodikovih jezgara (protona) dolazi jedna helijeva jezgra (ukupna masa tih trinaest čestica je 16 atomskih jedinica mase, a na helij optada 4 atomske jedinice mase, odnosno 75%). Dakle, ukupna masa jednog mola takve plazme dana je s

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{13} \cdot 1 + \frac{1}{13} \cdot 4\right) \approx 0.6 \text{ g/ mol}.$$

Uvrštavanjem ovako izračunate molarne mase plazme, te prije dobivene gustoće i tlaka u središtu Sunca, dobivamo temperaturu

$$T_c = \frac{2 \cdot 10^{14} \text{ Pa} \cdot 0.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ mol}}{2.8 \cdot 10^3 \text{ kg/ m}^3 \cdot 8.314 \text{ J/ K/ mol}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ K}.$$

Ovaa vrijednost je oko tri puta manja od standardno prihvaćene temperature središta Sunca (15 milijuna Kelvina) – s obzirom na jednostavnost modela i zanemarivanje mnogih faktora, rezultat je i više nego zadovoljavajući i zorno pokazuje da u Suncu i drugim zvijezdama postoje uvjeti pogodni za odvajanje termonuklearnih reakcija. Detaljniji modeli, osim ozbiljnijeg matematičkog aparata, moraju uzeti u obzir i način prijenosa energije iz središta k rubu Sunca (tj. činjenicu da u Suncu postoji i tlak zračenja) – tada se i ovisnost gustoće o udaljenosti od središta Sunca može izračunati, a ne pretpostaviti kao što smo mi to učinili u ovom najelementarnijem razmatranju. . .