Linearna regresija u srednjoškolskoj nastavi matematike

Meštrić, Lenka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lenka Meštrić

LINEARNA REGRESIJA U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na svakom savjetu i pomoći tijekom pisanja ovog diplomskog rada, a ujedno i veliko hvala za stečeno znanje metodičkog poučavanja matematike što me posebno, kao buduću nastavnicu, raduje primijeniti u nastavi!

Veliko, veliko hvala mojoj obitelji na potpori tijekom školovanja, na svoj pozitivnoj energiji koju su mi nadomjestili. Posebno se želim zahvaliti tati koji je, čak i unatoč cjelodnevnog radnog dana i kasnog dolaska doma, tijekom mojeg srednjoškolskog obrazovanja sjeo samnom za stol te mi pomogao objasniti nastavne jedinice i zadatke koje samostalno nisam znala riješiti. Također mu hvala za svaki savjet metodičkog pristupa te postupka vrednovanja unutar nastave matematike.

Mom zaručniku Antoniju od srca hvala što mi je svojom blizinom olakšao sve teške trenutke, hvala za svako zajedničko učenje, za ogromnu podršku i pomoć koju mi pruža.

Najveća hvala dragom Bogu na svemu pruženom jer sve što imam dobila sam po Njegovoj milosti.

Sadržaj

Uvod

Matematika se kao znanost sastoji od mnogo različitih područja: aritmetike, algebre, geometrije, infinitezimalnog računa, statistike i dr. Sva ta područja najčešće su se razvila iz potrebe rješavanja nekih (matematičkih) problema i modeliranja situacija – primjerice, geometrija se bavi modeliranjem i rješavanjem problema u prostoru, statistika se bavi prikupljanjem, organizacijom, analizom, interpretacijom i prikazivanjem podataka itd. Upravo zbog toga statistika kao grana matematike pronalazi široku primjenu u modeliranju problema iz stvarnog života: društvenih, industrijskih i znanstvenih.

Regresijska analiza je područje unutar statistike kojoj je cilj za zadani skup podataka procijeniti odgovarajuću međuovisnost. Dakle, ona analizira odnos jedne zavisne i jedne ili više nezavisnih varijabli. Od skupa raspršenih podataka time dobivamo skup podataka povezan konkretnim zakonom. U najjednostavnijem slučaju taj je zakon linearan, a općenito je, prilikom modeliranja, ta ovisnost često nelinearna. Odnos je linearan ukoliko ga grafički možemo prikazati pravcem, a u suprotnom je nelinearan.

Linearna regresija je pristup modeliranju problema koji odnos zavisnih i nezavisnih varijabli opisuje linearno. Dakle, svakom jediničnom porastu vrijednosti jedne varijable odgovara približno jednaka linearna promjena druge varijable. Upravo zbog svoje jednostavnosti i široke primjenjivosti, to je oblik regresije koji je najranije proučavan.

U srednjoškolskoj nastavi matematike linearna regresija trenutno nije u sadržaju nastavnih tema koje se poučavaju. Usprkos tome, ona se ipak koristi kako u matematici, tako i drugim predmetima poput fizike, biologije, kemije... Tada se primarno radi na intuitivnoj primjeni te metode, kao što je slučaj kod povlačenja regresijskog pravca nakon ucrtavanja podatka ili korištenja računalnih programa u istu svrhu, no ne stavlja se dovoljan naglasak na matematičku pozadinu same metode.

Cilj ovog diplomskog rada je izložiti teorijsku pozadinu i primjenu linearne regresije primjereno srednjoškolskoj nastavi matematike. U radu će se izložiti kratka povijesna pozadina razvoja linearne regresije (metoda najmanjih kvadrata), zatim će se detaljnije opisati linearna veza (egzaktna i približna linearna veza). Prikazat ću široku primjenu linearne regresije te predložiti moguću realizaciju u srednjoškolskoj nastavi matematike.

Poglavlje 1

Povijesni pregled

Još u davna vremena ljudi su prikupljali demografske podatke, no tek su od 16. stoljeća nadalje dobivene podatke počeli i analizirati. [1] Mogućnost interpretacije i analize prikupljenih podataka omogućio je razvoj teorije vjerojatnosti. Na taj je način engleski trgovac John Graunt 1662. godine analizirao popis rođenih i umrlih te je uočio veću vjerojatnost rođenja muške djece. Pojavom takvog pristupa mnoštvu podataka javio se problem pogreške. Temeljne postavke računa pogreške iznio je Galileo Galilei 1632. godine u svojem djelu *Dialogo sopra i due Massimi Sistemi Del Mondo Tolemaico e Copernicano*. Poticao je potrebu što većeg broja mjerenja jer je uočio da će time zaključak o podatcima biti pouzdaniji. Također, uz Galilea vežemo i sljedeće zaključke o računu pogreške:

- Samo je jedna stvarna vrijednost prikupljenih podataka;
- Pogreške tijekom mjerenja su se pojavile zbog; nesavršenosti mjernog instrumenta, ali i zbog nepreciznosti promatrača;
- Pogreške su raspršene simetrično oko nule;
- Manje pogreške su vjerojatnije od većih.

Međutim, Galileo nije dao zaključak kako iz skupa velikog broja podataka procijeniti stvarnu vrijednost. Prva uobičajena procjena stvarne vrijednosti bila je aritmetička sredina koja se pojavila najkasnije sedamdesetih godina osamnaestog stoljeća.

Prvi općenitiji problem javio se u 18. stoljeću. Mnogi znanstvenici bavili su se promatranjem dviju međusobno ovisnih veličina (x_i, y_i) sa željom pronalaska odgovarajuće regresijske krivulje – krivulje koja najbolje opisuje dani skup podataka (x_i, y_i). Među tim znanstvenicima bio je i Josip Ruđer Bošković koji je predložio vezu između podataka x i y minimizacijom ukupne pogreške. Tu istu metodu opisao je i Laplace 1789. godine. Takav pristup analizi podataka smatra se najranijim oblikom regresije.

Ubrzo nakon toga su Legendre i Gauss poboljšali navedenu metodu. Uočili su da se koeficijenti regresijskog pravca dobiju minimizacijom zbroja kvadrata odstupanja. Osnove te metode najmanjih kvadrata Gauss je koristio još 1795. godine premda je objavljena 1809. godine. Legendre je do spomenute metode došao prije Gaussove objave, 1805. godine. Ta situacija dovela je do rasprave o prvenstvu i prava na otkriće ove metode. Velik broj povjesničara prvenstvo ipak daje Gaussu, a takvo stajalište potkrepljuju Gaussovim predviđanjem putanje asteroida Ceresa 1801. godine. Pratio je njegovu kretnju četrdesetak dana te je metodom najmanjih kvadrata uspješno predvidio položaj Ceresa. Nakon tog događaja metoda najmanjih kvadrata se često koristi za analizu astronomskih podataka.[2]

Poglavlje 2

Linearna veza

Premda se linearna funkcija kao poglavlje unutar matematike javlja tek u sedmom razredu, gotovo cijela nastava matematike u osnovnoj školi vrti se oko linearnosti. U ovom poglavlju ću ukratko opisati egzaktnu i približnu linearnu vezu između dviju veličina. [3]

2.1 Egzaktna linearna veza

Definicija 2.1.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Linearna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:*

$$f(x) = ax + b.$$

Koeficijent a je vodeći koeficijent, a koeficijent b je slobodni koeficijent linearne funkcije.

Definicija isključuje slučaj kada je $a = 0$ jer se tada funkcija svodi na konstantnu funkciju koja najčešće nije interesantna kao veza dviju varijabli, iako je i njen graf pravac.

Najjednostavniju linearnu vezu dobijemo u slučaju kada je $b = 0$, a tada kažemo da su veličine $f(x)$ i x proporcionalne: $f(x) = ax$, tj. $f(x) : x = a$. Navedeni stalni omjer shvaća se u obliku:

$$f(x_2) : f(x_1) = x_1 : x_2$$

gdje su x_1, x_2 bilo koje dvije vrijednosti veličine x, a $f(x_1), f(x_2)$ odgovarajuće vrijednosti veličine $f(x)$.

Propozicija 2.1.2. *Funkcija je linearna ako i samo ako je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$ za svaki izbor $x_i, i = 1, 2$.*

Dokaz. Dokažimo za početak prvi smjer: funkcija f je linearna ako vrijedi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Dakle, $a(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$. Općenito, zbroj funkcija f i g je funkcija u oznaci $f+g$ definirana sa $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(f) \cap D(g)$ (primijetimo da je $f+g$ funkcija jer za $x \in D(f) \cap D(g)$ brojevi $f(x)$ i $g(x)$ su jednoznačno određeni, pa je i njihova suma jednoznačno određena). Uočimo dakle da vrijedi:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1).$$

Time je dokazan prvi smjer propozicije.

Dokažimo drugi smjer: ako je funkcija linearna onda za nju vrijedi:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Znamo da vrijedi $f(x) = ax + b$ te uvrstimo u izraz:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

□

Graf linearne funkcije je pravac $y = ax + b$ čiji je nagib/koeficijent smjera jednak a , a odsječak na osi y jednak b . Ipak, nije svaki pravac u ravnini graf neke linearne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Na primjer, pravac $x = c, c = const.$ ne zadovoljava kriterije funkcije.

2.2 Približna linearna veza

U praksi do željenih podataka dolazimo pokusom odnosno mjerenjem. Rezultati takvih mjerenja su uglavnom približne vrijednosti, a ne točne, tako da ako veličine i jesu povezane određenim pravilom rezultati mjerenja to samo približno pokazuju. To je slučaj i kod linearno povezanih veličina. Općenito imamo:

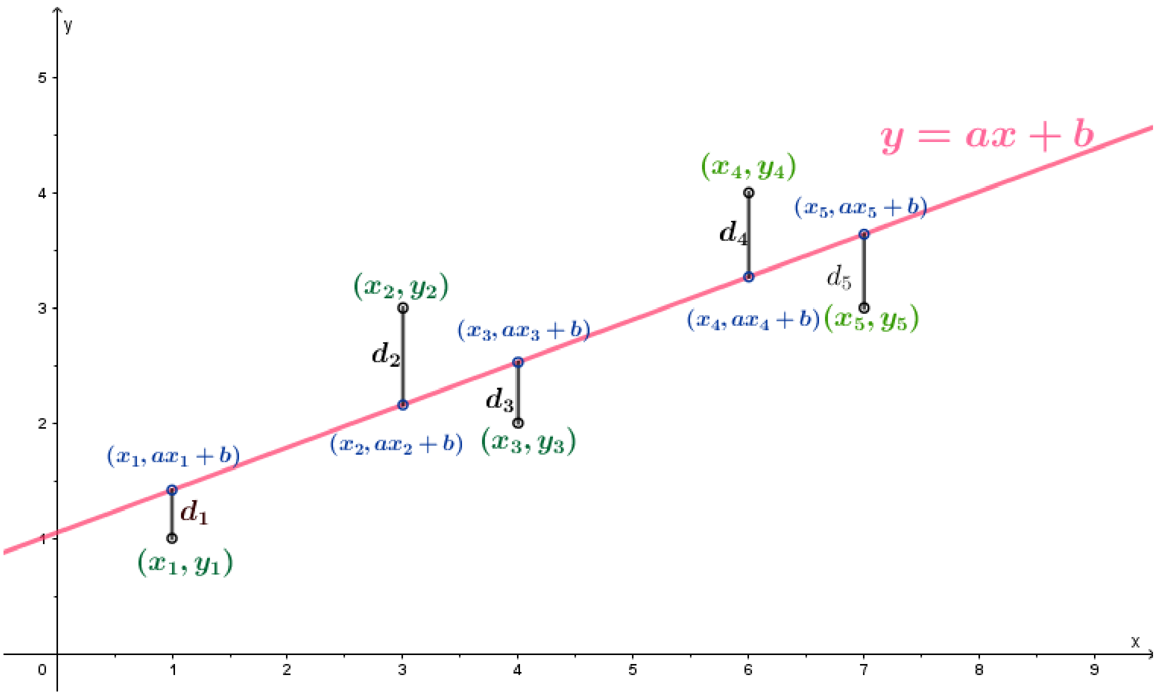
- $x_1, x_2, ..., x_n \to$ vrijednosti veličine x
- $y_1, y_2, ..., y_n \to$ pripadajuće vrijednosti veličine y
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) \to$ pripadajuće točke ravnini

Dakle, ukoliko postoji linearna ovisnost veličina x i y, točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ u pravilu neće pripadati jednom pravcu. Postavlja se pitanje kako onda odrediti pravac, odnosno, najprikladniju linearnu vezu između veličina x i y. Za početak moramo biti sigurni da linearna veza postoji. To se može uočiti u dijagramu rasipanja ili pomoću tablice u kojoj se nalaze podatci. Nakon toga cilj je pronaći pravac $y = ax + b$, odnosno koeficijente a i b koji te podatke najbolje opisuju. Željeni pravac "najmanje odstupa" od točaka $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$. Tom odstupanju možemo pristupiti na više načina [5]:

1. Zbrojiti razlike x-koordinata / y-koordinata
2. Zbrojiti apsolutne vrijednosti razlike x-koordinata / y -koordinata
3. Zbrojiti euklidske udaljenosti od pravca za svaku točku
4. Zbrojiti kvadrate razlika y-koordinata (metoda najmanjih kvadrata)

Proučimo kako dobiti koeficijente a, b pravca $y = ax + b$ "koji najbolje opisuje zadane podatke" u pojedinim navedenim situacijama.

Zbrajanjem razlika y-koordinata (prema načinu 1.) vrijedi:



Slika 2.1: Odstupanje y koordinata

Prvo primjetimo sljedeće: prihvaćamo da vrijedi jednostavno i intuitivno jasno načelo ravnoteže koje podrazumijeva međusobno poništavanje pogrešaka, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$, stoga slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

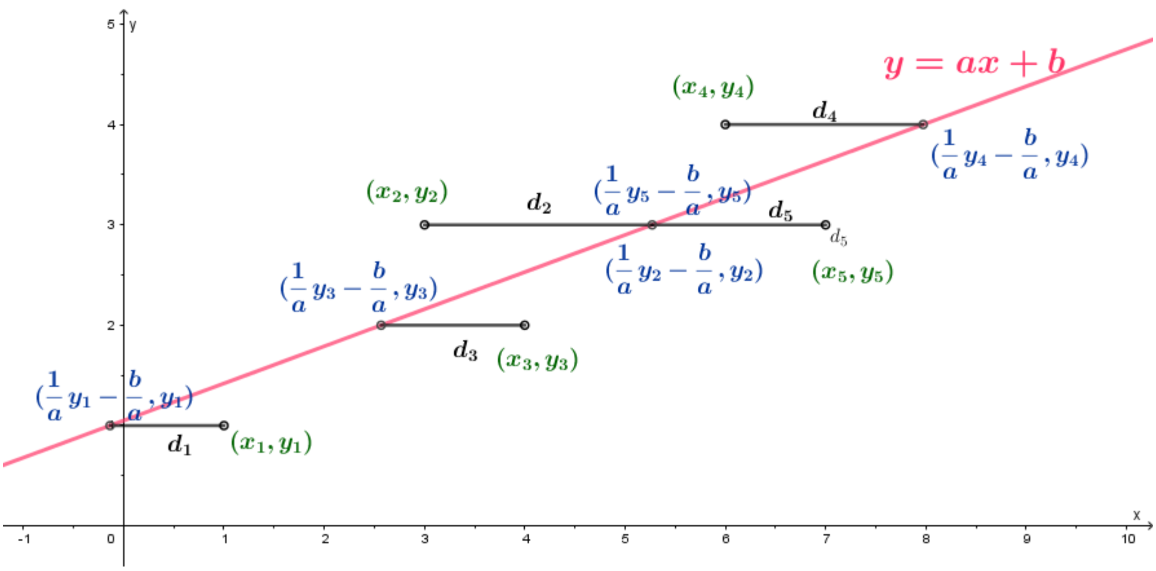
Uočimo dakle da naš „najbolji“ pravac prolazi aritmetičkom sredinom danih podataka, tj. točkom $(\overline{x}, \overline{y})$, gdje je

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$$

Primijetimo pritom da se prethodno navedena točka ne mora nužno nalaziti među početnim podacima.

Sličan rezultat dobili bismo promatrajući razlike x-koordinata:



Slika 2.2: Odstupanje x koordinata

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{1}{a}y_i + \frac{b}{a}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} y_i - n\frac{b}{a}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{a}\overline{y} - \frac{b}{a}$$

$$\overline{y} = a\overline{x} + b$$

Stoga gledanjem razlika x-koordinata nismo dobili novu informaciju u odnosu na prethodna razmatranja.

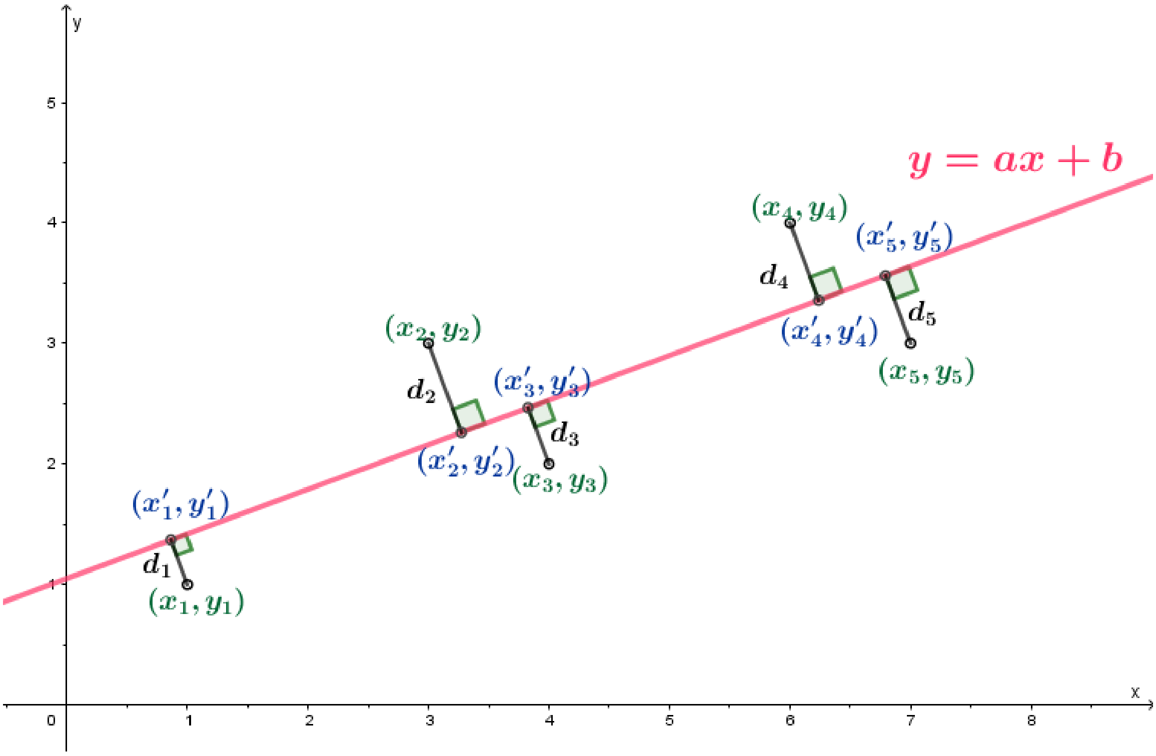
Iduća mogućnost (prema načinu 3.) je gledati prema euklidskoj udaljenosti točaka od pravca. To je ujedno i intuitivno najjasniji način budući da se pritom gleda najkraća udaljenost točaka do pravca.

Definicija 2.2.1. *Neka su $A = (x_1, y_1)$ te $B = (x_2, y_2)$ dvije točke u koordinatnoj ravnini $\mathbb{R}^2$. Tada $d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_x)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ zovemo euklidska udaljenost točaka A i B.*

Propozicija 2.2.2. *Euklidska udaljenost zadovoljava sljedeća svojstva:*

- $d_2(A, B) \geq 0, \forall A, B \in \mathbb{R}^2$
- $d_2(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d_2(A, B) = d_2(B, A), \forall A, B \in \mathbb{R}^2$
- $d_2(A, C) + d_2(C, B) \geq d_2(A, B), \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2$

Općenito, svaku funkciju $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ koja zadovoljava gore navedena svojstva zovemo funkcijom udaljenosti na $\mathbb{R}^2$. Inače, funkcija udaljenosti se općenito ne definira samo na $\mathbb{R}^2$, no zbog problema kojim se ovdje bavimo zadržat ćemo se na spomenutoj definiciji 2.2.1.



Slika 2.3: Euklidske udaljenosti točaka od pravca

Okomiti pravci na pravac $y = ax + b$ su oblika $y = -\frac{1}{a}x + c, c \in \mathbb{R}$. Mi tražimo one okomite pravce koji prolaze našim točkama (x_i, y_i), odnosno vrijedi $c = y_i + \frac{1}{a}x_i$ pa stoga traženi okomiti pravci imaju jednadžbu $y = -\frac{1}{a}x + y_i + \frac{1}{a}x_i$. Pronađimo točke presjeka tih pravaca s pravcem $y = ax + b$:

$$ax + b = -\frac{1}{a}x + y_i + \frac{1}{a}x_i$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)x = y_i + \frac{1}{a}x_i - b$$

$$x = \frac{a}{a^2+1}y_i + \frac{1}{a^2+1}x_i - \frac{ab}{a^2+1}$$

$$y = \frac{a^2}{a^2+1}y_i + \frac{a^2}{a^2+1}x_i - \frac{a^2 b}{a^2+1} + b$$

Radi jednostavnosti označimo dobivene koordinate s $\left(x_i', y_i'\right)$ kao na Slici 2.3. Po definiciji 2.2.1. euklidske udaljenosti za dvije točke $T = (x, y)$ (proizvoljna točka pravca $y = ax + b$) i $T_i = (x_i, y_i)$ slijedi:

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (ax + b - y_i)^2}$$

Želimo da zbroj tih udaljenosti $\sum_{i=1}^{n} d_i$ bude što manji.

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (ax + b - y_i)^2} \to \min$$

To je ekvivalentno

$$(x - x_i)^2 + (ax + b - y_i)^2 \to \min$$

Minimum gornje funkcije ne moramo nužno računati pomoću diferencijalnog računa jer imamo kvadratnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}(x - x_i)^2 + (ax + b - y_i)^2 &= x^2 - 2xx_i + x_i^2 + a^2x_i + b^2 + y_i^2 + 2abx - 2axy_i - 2by_i \\ &= \left(1 + a^2\right)x^2 + (-2x_i + 2ab - 2ay_i)\,x + x_i^2 + b^2 + y_i^2 - 2by_i\end{aligned}$$

Možemo uočiti da dobivena kvadratna jednadžba poprima svoj globalni minimum u tjemenu parabole. Dakle možemo računati:

$$\begin{aligned}&\frac{4\cdot\left(a^2+1\right)\cdot\left(x_i^2 + b^2 + y_i^2 - 2by_i\right) - (-2x_i + 2ab - 2ay_i)^2}{4\left(a^2+1\right)} \\ &= \frac{4b^2 + 4y_i^2 - 8by_i + 4a^2x_i^2 + 8abx_iy_i}{4\left(a^2+1\right)} \\ &= \frac{(ax_i + b - y_i)^2}{a^2+1}\end{aligned}$$

Naša početna funkcija je korijen gornjeg izraza, dakle imamo $\frac{|ax_i+b-y_i|}{\sqrt{a^2+1}}$. Upravo smo dokazali propoziciju:

Propozicija 2.2.3. *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca $p ... y = ax + b$ iznosi:*

$$d\left(T_0, p\right) = d(T_0, T') = \frac{|ax_0 + b - y_0|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

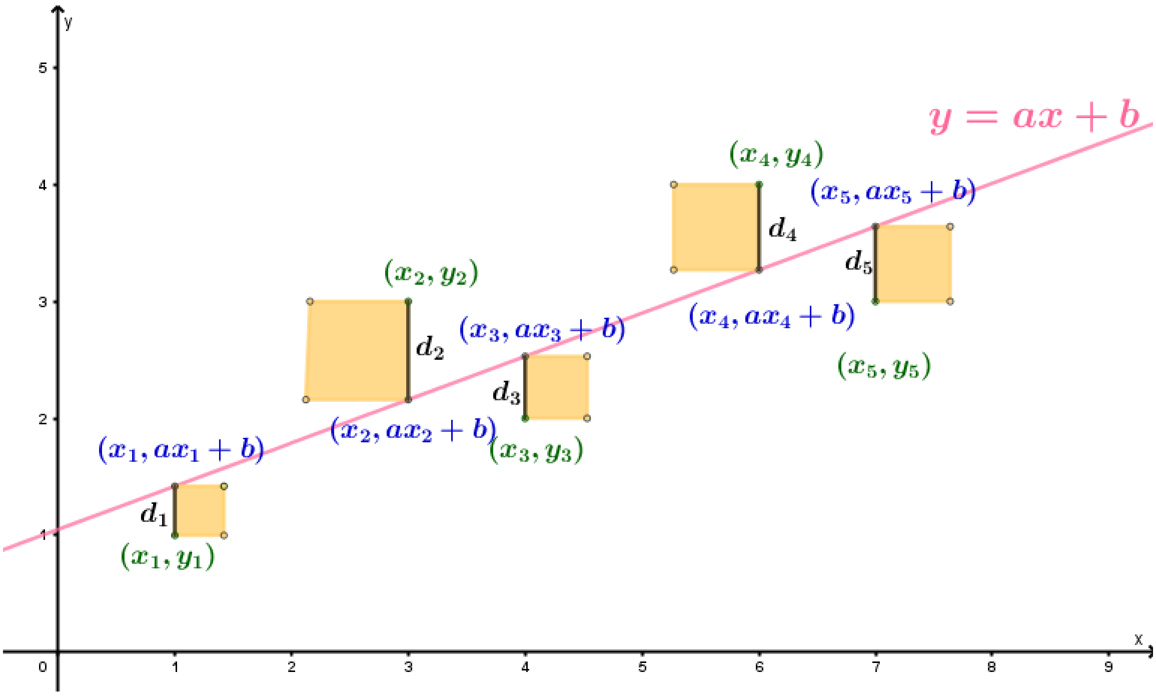
Pri čemu je točka $T' = (x', y')$ ortogonalna projekcija točke $T_0 = (x_0, y_0)$ na pravac p.

Ukupna suma odstupanja stoga je jednaka:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{|ax_i + b - y_i|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

2.3 Metoda najmanjih kvadrata

U prethodno prikazanim primjerima navedena su osnovna i najjednostavnija načela za izračun odstupanja pravca od eksperimentalnih vrijednosti. Ipak, najvažnija metoda za obradu takvih podataka je metoda najmanjih kvadrata čije otkriće pripisujemo Gaussu. Naime, matematičari toga doba uočili su kako nije dobro razmatrati samo zbroj razlika eksperimentalnih i teoretskih podataka jer se pri tom pozitivne i negativne razlike poništavaju. Prvi pomak prema otkriću ove metode bio je pokušaj gledanja apsolutnih vrijednosti razlika teoretskih od eksperimentalnih vrijednosti uz zahtjev da taj zbroj bude minimalan. Nakon toga otkrića, metoda najmanjih kvadrata pokazala se prikladnijom te ću je iz tog razloga detaljnije opisati.



Slika 2.4: Vizualizacija metode majmanjih kvadrata

Jednostavno i intuitivno načelo ravnoteže glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0.$$

Kao što govori i sam naziv metode, za pravac koji je optimalan po metodi najmanjih kvadrata vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \to \min,$$

tj. minimizirana je suma kvadrata pogrešaka d_i individualnih točaka od pravca. Pogreška individualne točke opisana je sljedećim izrazom:

$$d_i = y_i - (ax_i + b)\,,$$

gdje su x_i, y_i koordinate svake od točaka, a a, b koeficijenti pravca, pa se stoga problem minimizacije sume kvadrata pogrešaka svodi na minimiziranje funkcije $F(a, b)$:

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \to \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

Parcijalnim deriviranjem F po a dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} 2\,(y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\left(-x_i y_i + a{x_i}^2 + bx_i\right) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0.$$

Analogno, parcijalnim deriviranjem F po b dobivamo:

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\,(y_i - (ax_i + b)) = 2\sum_{i=1}^{n} y_i - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Sređivanjem dobivenih izraza slijedi:

$$a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Stoga su konačni izrazi za a i b:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Budući da prethodno navedeni matematički dokaz nije pogodan za rad s učenicima, potrebno je osmisliti način na koji ipak možemo provesti dokaz koji se temelji na dosadašnjim zaključcima, a koji bi i učenici mogli razumjeti [5]. U gore navedenom dokazu za metodu najmanjih kvadrata problematičan je pojam funkcije dviju varijabli te parcijalna integracija, no više smo puta dokazali da načelom ravnoteže dolazimo do zaključka da traženi pravac prolazi aritmetičkim sredinama podataka. Ako koordinate aritmetičke sredine označimo sa:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n},$$

te uvrstimo izraz $b = \overline{y} - a\overline{x}$ u prethodno navedenu funkciju dviju varijabli, dobivamo funkciju koja ovisi o jednoj varijabli:

$$\begin{aligned}
F(a) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - (\overline{y} - a\overline{x}))^2 = \sum_{i=1}^{n} ((y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x}))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a^2 (x_i - \overline{x})^2 - 2a(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x}) + (y_i - \overline{y})^2\right) \\
&= a^2\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right) - 2a\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})\right) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2
\end{aligned}$$

Budući da se radi o kvadratnoj funkciji jedne varijable, učenici znaju izračunati njezin maksimum koji se nalazi u tjemenu [8]:

$$a = -\frac{B}{2A} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

Pa su konačni izrazi za a i b:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

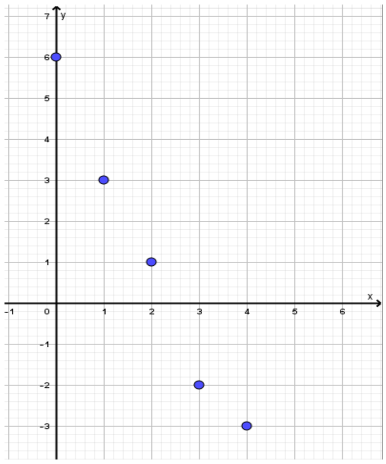
$$b = \overline{y} - a\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} - \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Primjer 2.3.1. *Pokusom su dobiveni sljedeći podatci:*

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
y	*6*	*3*	*1*	*-2*	*-3*

Metodom najmanjih kvadrata odredite funkcijsku vezu koja najbolje opisuje navedene podatke.

Rješenje: Za početak ucrtajmo dane podatke u koordinatnom sustavu:



Slika 2.5: Dijagram rasipanja

Vidimo da se točke nalaze približno na pravcu, stoga za zadane podatke tražimo linearnu vezu oblika $y = ax + b$. Također, prije određivanja vrijednosti za a i b možemo uočiti i procijeniti da je $a < 0$ te $b \approx 6$. Radi lakšeg računa načinimo tablicu:

x_i	0	1	2	3	4	$\sum_{i=1}^{5} x_i = 10$
y_i	6	3	1	-2	-3	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 5$
x_i^2	0	1	4	9	16	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 30$
x_iy_i	0	3	2	-6	-12	$\sum_{i=1}^{5} x_iy_i = -13$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{5\cdot(-13) - 10\cdot 5}{5\cdot 30 - 100} = -2,3$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{30\cdot 5 - 10\cdot(-13)}{5\cdot 30 - 100} = 5,6$$

Dakle, pripadni regresijski pravac ima jednadžbu $y = -2,3x + 5,6$.

U gornjem primjeru smo imali svega 5 točaka kroz koje smo tražili regresijski pravac metodom najmanjih kvadrata. Možemo uočiti kako je ta metoda bila spora i mukotrpna i za ovaj mali broj točaka. Zbog toga je pogodno naučiti primjenu nekih od tehničkih pomagala poput grafičkog kalkulatora ili nekog dostupnog računalnog programa.

Poglavlje 3

Matrični prikaz

3.1 Teorijska pozadina

Problem traženja regresijskog pravca možemo riješiti i pomoću linearne algebre [4]. Neka su, dakle, $(x_i, y_i), i = 1, 2 \ldots, n$ dobiveni podatci nekog pokusa. Ukoliko bi pravac $y = kx + l$ prolazio kroz sve zadane točke, onda bi za svaku točku vrijedilo $kx_i + l = y_i$. No pokazalo se da dobiveni podatci iz pokusa ne leže na pravcu, stoga općenito imamo sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{cases} x_1k + l = y_1 \\ x_2k + l = y_2 \\ \ldots \\ x_nk + l = y_n \end{cases}$$

Dakle, dobili smo sustav n linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama k i l. Taj problem možemo zapisati i matrično na slijedeći način:

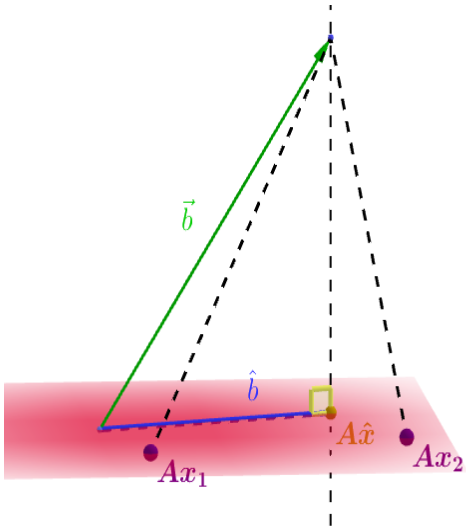
$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = b$$

Budući da ne postoji pravac koji prolazi kroz zadane točke, zadani sustav očito nije rješiv. Očito, vektor $\hat{b}$ ne leži u slici od A. Stoga možemo pokušati naći x takav da je umnožak Ax što bliži matrici b (zamislimo Ax kao aproksimaciju b). Odnosno, problem se svodi na određivanje x tako da udaljenost između matrica b i Ax bude što manja: $||Ax - b|| \longrightarrow min$.

Definicija 3.1.1. *Neka je $A \in M_{m,n}$. Rješenje problema najmanjih kvadrata $Ax = b$ je $\hat{x} \in M_{n,1}$ takav da je*

$$\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\|, \forall x \in M_{n,1}.$$

Nužno je napomenuti kako za bilo koji odabrani x, Ax nužno mora pripadati slici od A. Zbog toga tražimo x takav da se Ax nalazi u slici od A i što bliže vektoru b. Takve zahtjeve zadovoljava vektor kojemu je početak u vektoru b, a završetak mu je upravo ortogonalna projekcija na ravninu A. Nazovimo taj traženi vektor $\hat{b}$ (slika 3.1).



Slika 3.1: Ortogonalna projekcija vektora b na sliku od A

Stoga postoji rješenje jednadžbe $Ax = \hat{b}$ te ga označimo s $\hat{x}$. Uočimo nadalje kako je vektor $b - A\hat{x}$ okomit na sve vektore ravnine A, tj. vrijedi: $a_j \cdot (b - A\hat{x}) = 0$. Prethodni uvjet možemo zapisati kao:

$$a_j^T(b - A\hat{x}) = 0$$

Iz čega dakle slijedi:

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0$$

$$A^T b - A^T A\hat{x} = 0$$

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

Zadnja dobivena jednadžba naziva se normalna jednadžba.

Teorem 3.1.2. *Neka su stupci matrice A linearno nezavnisni. Tada je rješenje problema najmanjih kvadrata $\|Ax - b\|^2 \longrightarrow \min$ ujedno i rješenje normalne jednadžbe:*

$$A^T Ax = A^T b.$$

Dokaz. Kao što je gore prikazano, skup rješenja $\hat{x}$ problema najmanjih kvadrata je neprazan i svako rješenje najmanjih kvadrata $\hat{x}$ zadovoljava normalnu jednadžbu. Obrnuto, pretpostavimo da za neki $\hat{x}$ vrijedi:

$$A^T A\hat{x} = A^T b.$$

Tada $\hat{x}$ zadovoljava

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0,$$

što pokazuje da je $b - A\hat{x}$ ortogonalan na sve redove matrice A^T i stoga je ortogonalan na sve stupce matrice A. Budući da stupci matrice A razapinju $\operatorname{Im} A$, vektor $b - A\hat{x}$ je ortogonalan na cijelu sliku od A. Stoga je jednadžba $b = A\hat{x} + b - A\hat{x}$ rastav vektora b kao linearne kombinacije vektora iz $\operatorname{Im} A$ i vektora ortogonalnog na $\operatorname{Im} A$. Po jedinstvenosti ortogonalnog rastava, $A\hat{x}$ mora biti ortogonalna projekcija od b na $\operatorname{Im} A$. To jest, $A\hat{x} = \hat{b}$ i $\hat{x}$ rješenje problema najmanjih kvadrata. □

3.2 Primjer korištenja

Primjer 3.2.1. *Pronađi rješenje najmanjih kvadrata pomoću normalne jednadžbe ako je:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Rješenje: Koristeći teorem 3.1.2. tražimo rješenje:

$$A^T Ax = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Dakle slijedi:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Izračunajmo ukupnu nastalu pogrešku:

$$A\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$||b - A\hat{x}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{84}$$

Za svaki $x \in M_{n,1}$ udaljenost između vektora b i Ax je barem $\sqrt{84}$.

Poglavlje 4

Područja primjene

Uz čestu primjenu regresijskog pravca kod izravno linearno povezanih veličina, često se u praksi koristi i kod logaritamskih i eksponencijalno povezanih veličina. Naime, upravo kako bi se pojednostavila veza, kako bi se bolje uočila svojstva veličina, inženjeri se često koriste logaritamskim skalama. Te skale omogućuju prikaz podataka koji dobro razlikuje velike razlike u podatcima. Tako su na primjer uobičajene primjene koje uključuju potrese, glasnoću zvuka, intenzitet svijetla i pH vrijednost otopina. Osim uobičajenih xy-pravokutnih sustava, postoje i sustavi (na pravcu, u ravnini...) kojima se na nekoj ili obje osi prikazuje logaritam veličine. Te sustave nazivamo $Lin-log, Log-lin, Log-log$. Dakle, na koordinatnim osima se u jednakim razmacima stavljaju logaritmi brojeva, ali se pišu nelogaritmirani brojevi. [6]

Opći primjeri nelinearnih modela koji se mogu linearizirati:

- Zadana je opća eksponencijalna funkcija $y = a^x$

  Logaritmiranjem izraza i korištenjem svojstva logaritama slijedi:

  $\log y = \log a^x$

  $\log y = x \log a$

  Dobiveni izraz s desne strane je linearan stoga eksponencijalna funkcija u $Log - lin$ sustavu postaje pravac.

- Zadana je eksponencijalna funkcija $y = ab^x$

  Ponovno kao i u prethodnom slijedi:

  $\log y = \log (ab^x) = \log a + \log b^x$

  $\log y = \log a + x \log b$

Dobiveni izraz s desne strane je ponovno linearan – pravac s $\log a$ odsječkom na osi y i nagibom jednakim $\log b$. U *Log – lin* sustavu ova bi eksponencijalna funkcija bila linearna.

- Zadana je logaritamska funkcija $y = \log x$

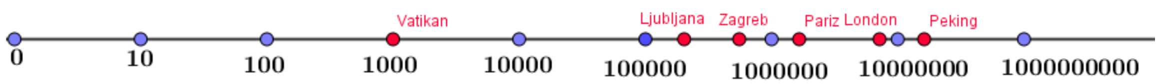
  Dakle, $x = 10^y$. U *Lin – log* koordinatnom sustavu veličine na osi y se ne mijenjaju, a x os poprima vrijednosti $\log x$. Zbog toga će dobiveni graf u novom koordinatnom sustavu biti pravac.

Primjer prikaza na pravcu – primjena logaritamske skale

Kao što je već ranije rečeno, često treba usporediti brojeve kojima se vrijednosti kreću od vrlo malih do vrlo velikih pa se javlja problem njihova predočavanja. Recimo da imamo podatke broja stanovnika u pojedinim gradovima:

Grad	Vatikan	Ljubljana	Zagreb	Pariz	London	Peking
Broj stanovnika	1000	300 000	790 000	2 000 000	9 000 000	20 000 000

Prikaz tih podataka na brojevni pravac čini se nemogućim. Prvo bismo označili broj 0, a nakon toga, znajući da nas očekuju veliki brojevi, Vatikan bismo stavili što bliže nuli, recimo na 0.1 cm desno od nule. Tada bi se Ljubljana nalazila 30 cm, Zagreb 79 cm, Pariz 2 m, London 9 m, a Peking čak na 2 km daleko od nule. Očito je da smo početnu jediničnu dužinu trebali još više smanjiti, što se ne čini izvedivo. No ukoliko podatke sagledamo na način da uočimo njihov odnos u znamenkama, a ne kao točne vrijednosti, podatke možemo prikazati na način:

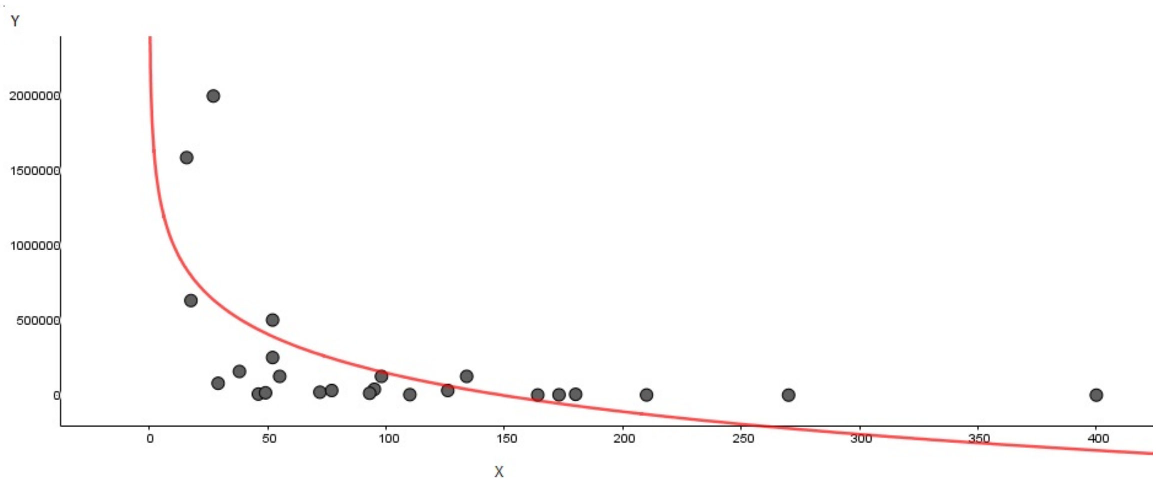


Slika 4.1: Logaritamska skala na pravcu

Kako su potencije broja 10 smještene na pravcu na jednakoj udaljenosti, to položaj broja pokazuje koliko taj broj ima znamenaka. Upravo se takva ljestvica zove logaritamskom ljestvicom jer su gradovi smješteni na pravcu kako su smješteni njihovi logaritmi. Nisu sve logaritamske ljestvice jednostavne kao navedena, ali one sve pokazuju red veličine podataka, a ne sam podatak te olakšavaju usporedbu međusobno jako različitih vrijednosti. U sljedećem ću primjeru navesti logaritamsku ljestvicu u ravnini te njezinu značajnu ulogu povezanu s pravcem regresije.

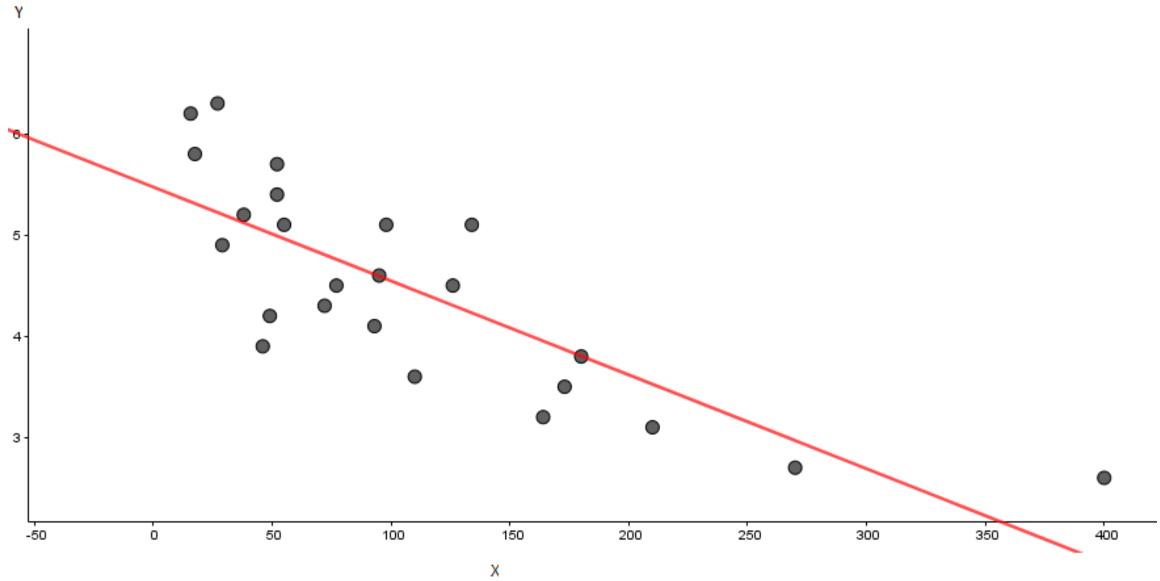
Primjer - potres

Potres je iznenadna i kratkotrajna vibracija tla uzrokovana urušavanjem stijena, magmatskom aktivnošću ili tektonskim poremećajima. Ovisnost jačine potresa (u odnosu na potres nulte razine) o udaljenosti od epicentra (mjesto na Zemljinoj površini okomito od žarišta potresa) dan je grafičkim prikazom:



Slika 4.2: Ovisnost jačine potresa o udaljenosti od epicentra

Iz prikazanog grafa možemo zaključiti da je ovisnost logaritamska – jačina potresa s porastom udaljenosti od epicentra pada odjednom naglo, a potom pada usporeno [7]. Iz ovakvog prikaza podataka seizmografima je bilo teško zaključiti pojedina svojstva potresa. Zbog toga je C. F. Richter 1935. godine objavio svoju ljestvicu potresa koja je odmah postala standardna mjera intenziteta potresa. On je svaki potres odlučio usporediti s potresom nulte razine kojeg seizmografi na udaljenosti od 100 km od epicentra bilježe kao pomak od 0,001 mm. Jačina na Richterovoj ljestvici dana je formulom: $R = \log \frac{I}{I_0}$, gdje je I intenzitet potresa, a I_0 intenzitet nultog potresa. Sada grafički prikaz podataka postaje linearan:



Slika 4.3: Prikaz ovisnosti jačine potresa o udaljenosti od epicentra u Log-lin koordinatnom sustavu

Novonastali pravac regresije smješten je u $Log - lin$ koordinatnom sustavu – vrijednosti na x osi su ostale nepromijenjene, dok su vrijednosti na y osi poprimile logaritam prijašnje vrijednosti. Spomenuti pravac preglednije prikazuje podatke o jačini potresa od prethodnog.

Poglavlje 5

Primjeri upotrebe u školi

U ovom poglavlju ću navesti primjere upotrebe regresijskog pravca s kojima sam se kao učenica susretala tijekom svoga srednjoškolskog obrazovanja. Također, navest ću primjere koje sam samostalno osmislila na temelju navedenog iskustva. Navedeni primjeri su iz područja:

- Fizike
- Informatike

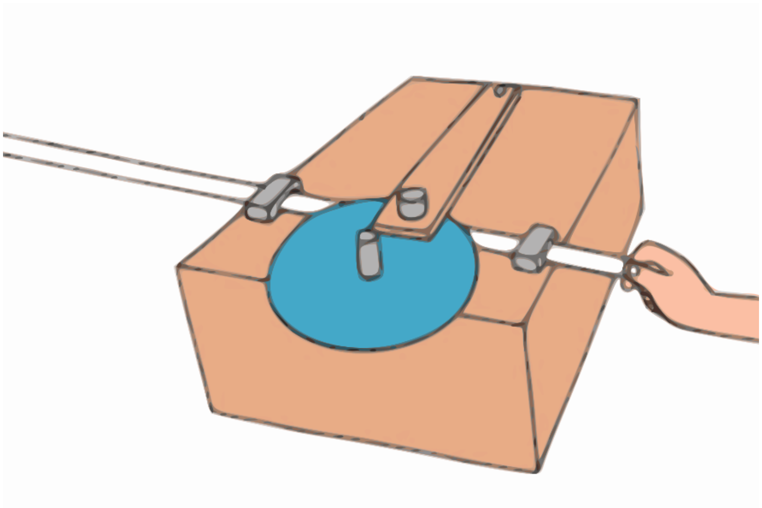
5.1 Fizika

Određivanje i analiza brzine ruke

U ovoj vježbi koristi se elektromagnetsko tipkalo, papirnata traka duljine jednog metra te ravnalo. Na tipkalo postavimo indigo papir, a papirnatu traku postavimo između batića i indigo papira (slika 5.1). Nakon što se uključi elektromagnetsko tipkalo, primimo jedan kraj papirnate trake i povlačimo je kroz batić. Batić u jednakim vremenskim intervalima ostavlja tragove (točkice) pomoću indigo papira. Dobivenim otiskom na papiru možemo analizirati gibanje naše ruke, što je ujedno i cilj ove vježbe.

Zadatci:

1. Tipkalo je na traci ostavilo tragove u obliku točkica u jednakim vremenskim razmacima. Zašto, međutim, razmaci između točkica nisu uvijek jednaki?
2. Unesite u tablicu vaša mjerenja za 10 vremenskih intervala.
3. Nacrtajte s-t graf gibanja.



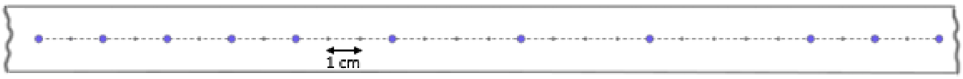
Slika 5.1: Elektromagnetsko tipkalo

Rezultati mjerenja:

Redni broj	$t(s)$	$s(cm)$	$\Delta s\,(cm)$
1.	0,2	2,25	2,50
2.	0,4	5,25	2,75
3.	0,6	8,00	2,75
4.	0,8	11,40	3,40
5.	1,0	15,00	3,80
6.	1,2	19,50	4,50
7.	1,4	24,60	5,20
8.	1,6	30,40	5,50
9.	1,8	36,90	6,50
10.	2,0	43,70	6,80

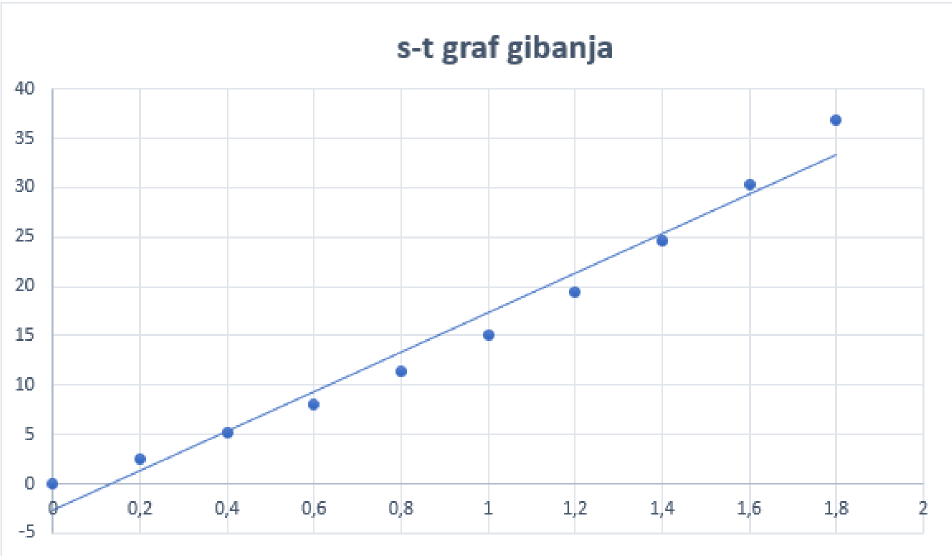
Zaključak vježbe i odgovori na pitanja:

Razmaci između točkica nisu uvijek jednaki zbog različite brzine gibanja ruke – iz toga proizlazi nejednolika udaljenost između točkica:



Slika 5.2: Papirnata traka - prikaz gibanja ruke

Međutim, cilj vježbe je bilo jednoliko gibanje ruke te smo zbog toga dobili približno linearnu vezu. Nagib tog pravca je prosječna brzina ruke.

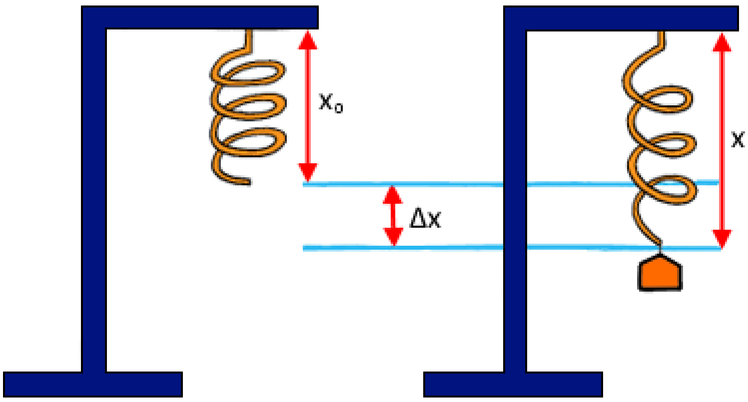


Komentar vježbe:

Ova vježba iz fizike izvodi se u prvom polugodištu prvog razreda te učenici nisu upoznati s pravcem regresije. On je učenicima intuitivno jasan, i za predočavanje ovakvog gibanja učenici su koristili mogućnost programskog paketa Microsoft Excel za crtanje takvog pravca. Međutim, sjećam se i iz vlastitog iskustva kako smo kao učenici bili nesigurni – pravac prolazi kroz neke dvije točke, gdje su te točke na prikazanom grafu?

Određivanje konstante elastičnosti

Na početku vježbe potrebno je objesiti oprugu na dani stalak te izmjeriti duljinu opruge u neopterećenom položaju (x_0 sa slike 5.3). Izvršite 10 različitih mjerenja s utezima različitih masa i pratite produljenje opruge Δx . Dobivenim mjerenjima odredite konstantu elastičnosti opruge statičkom metodom, a potom iz nagiba krivulje odgovarajućeg grafa.



Slika 5.3: Prikaz produljenja opruge

Rezultati mjerenja:

$x_0 = 0,28m$

Redni broj	$m(kg)$	$x(m)$	$\Delta x\,(m)$	$k(N/m)$	$\Delta k\,(N/m)$	$F(N)$
1.	0,109	0,325	0,045	23,769	0,831	1,069
2.	0,152	0,340	0,060	24,852	0,259	1,491
3.	0,261	0,385	0,105	24,384	0,208	2,561
4.	0,372	0,420	0,140	26,066	1,473	3,650
5.	0,429	0,450	0,170	24,755	0,162	4,208
6.	0,120	0,330	0,050	23,544	1,049	1,177
7.	0,110	0,325	0,045	23,980	0,613	1,079
8.	0,252	0,380	0,100	24,721	0,128	2,472
9.	0,315	0,405	0,125	24,721	0,128	3,090
10.	0,346	0,415	0,135	25,142	0,550	3,394

Primjer računa:

$$F_{el} = k \cdot \Delta x$$

$$k = \frac{F_{el}}{\Delta x}$$

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{x_n - x_0}$$

$$g \approx 9,81 ms^{-2}$$

$$\Delta x = |x_i - x_0|$$

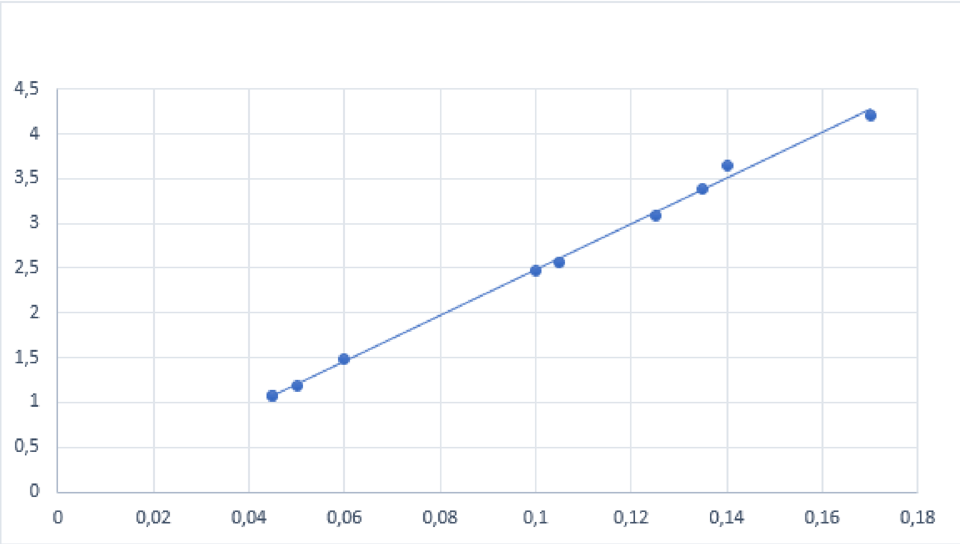
$$\Delta x = |0,325m - 0,280m| = 0,045m$$

$$\overline{k} = \frac{k_1 + k_2 + ... + k_{10}}{10} = \frac{(23,762 + 24,852 + ... + 25,142)\, Nm^{-1}}{10} = 24,593Nm^{-1}$$

$$k_1 = \frac{0,109kg \cdot 9,81ms^{-2}}{0,045m} = 23,762Nm^{-1}$$

$$F_{el1} = k_1 \cdot \Delta x_1 = 23,762Nm^{-1} \cdot 0,045m = 1,069N$$

$F - \Delta x$ ovisnost



Graf prikazuje ovisnost sile o produljenju opruge. Nagib prikazanog pravca predstavlja konstantu elastičnosti opruge – otprilike: $\frac{2,5-1,5}{0,1-0,06} = 25Nm^{-1}$.

Zaključak vježbe:

Ovom vježbom smo odredili konstantu elastičnosti opruge na dva načina, računom $\left(k = 24,6Nm^{-1}\right)$ i pomoću grafičkog prikaza ovisnosti sile o produljenju opruge $\left(k \approx 25Nm^{-1}\right)$. Vrijednost dobivena iz grafa je neznatno promijenjena jer smo nagib dobivenog približnog pravca računali pomoću točaka koje približno pripadaju nacrtanom pravcu.

Komentar vježbe:

Ova vježba izvodi se na početku drugog polugodišta prvog razreda. Učenici su dakle, već prijašnjim vježbama, uočili postojanje približnog pravca. Izdvojila bih rečenicu iz referata: „Točke ne leže na istom pravcu, pa smo u skladu s time morali povući najvjerojatniji pravac budući da nismo mogli samo povezati točke“. Učenicima je jasna približna linearna veza, a svoje zaključke temelje na formuli $F = \Delta x \cdot k$.

5.2 Informatika

Primjena regresijskog pravaca moguća je i na nastavnim satovima informatike. Naime, učenici drugih razreda u prirodoslovno-matematičkim gimnazijama uče programski jezik Python. U drugom polugodištu upoznati su s osnovnim naredbama poput for i while petlji te rada s nizovima. Budući da učenici još matematički nisu spremni za pravac regresije, učenicima je moguće samo dati formulu za udaljenost točke od pravca. Dakle zadatak koji sijedi je ipak primjereniji nakon što se u trećem razredu iz matematike prođe cjelina Pravci. U tom slučaju zadatak ima dvostruku ulogu - ponavljanje sadržaja iz informatike te povezivanje s novostečenim iskustvom iz matematike.

Zadatak:

Spužva Bob i njegov prijatelj Patrik odlučili su uživo pratiti najvažniju utakmicu na morskome dnu. Tjedan dana prije početka utakmice otvorio se kiosk za prodaju ulaznica. Organizatore je jako naljutio nepregledni i neuredni red koji se stvorio ispred kioska. Naime, opće je poznato kako rijetko koja osoba ide samostalno bez prijatelja na utakmice. Dakle, svaka skupina prijatelja međusobno se zapričala tako da su se stvorile razbacane grupice, red ispred kioska dakle nije bio lijepo linearan. Stoga su organizatori odlučili dati besplatne karte skupini prijatelja koji odrede pravac koji bi s najmanje pomaka gledatelja bio idealan za red ispred kioska. Spužva Bob i Patrik odlučili su prihvatiti ovu dobru priliku besplatnih ulaznica te su odredili koordinatni sustav i zapisali položaje svakog gledatelja. Procjenom su izdvojili pravce koji bi najbolje opisivali podatke, no nisu znali odrediti koji je među njima najbolji. Pomozi Spužvi Bobu i Patriku da osvoje besplatne ulaznice i odredi koji pravac od njihovih ponuđenih najbolje opisuje položaje gledatelja.

Ulazni podatci su koordinate gledatelja (zadnja upisana koordinata uvijek je $(0,0)$), broj približnih pravaca koje su Spužva Bob i Patrik odredili te vodeći i slobodni koeficijenti pravaca. Program treba ispisati sumu najmanje udaljenosti od točaka do najboljeg (upisanog) pravca te koeficijente pripadnog pravca.

Test podatci:

Ulazni podatci: 1,1,5,5,-3,-3,0,0 3 3,2,-1,0,1,0	Ulazni podatci: 1,4,1,2,3,3,2,3,0,0 2 0,3,-1,-1	Ulazni podatci: 1,1, 0.5,2.5,-1,-2, 0,0 2 1,1,1,0
Izlazni podatci: 0.0 1 0	Izlazni podatci: 5.0 0 3	Izlazni podatci: 2.12 1 0

Rješenje:

```
import math
niz1=[]
niz2=[]
print("Upisi x koordinatu: ")
x=input()
niz1.append(x)
print("Upisi y koordinatu: ")
y=input()
niz2.append(y)
brojtocaka=0
while ((x<>0) or (y<>0)):
print("Upisi x koordinatu: ")
x=input()
niz1.append(x)
print("Upisi y koordinatu: ")
y=input()
niz2.append(y)
brojtocaka=brojtocaka+1
brojtocaka=brojtocaka+1

print("Upisi broj mogucih pravaca: ")
i=input()
```

```
niza=[]
nizc=[]
for j in range(i):
print("Upisi koeficijente pravca: ")
a=input()
niza.append(-a)
b=input()
nizc.append(-b)

min = float('inf')
suma=0
for j in range(i):
for k in range(brojtocaka):
suma=suma+(abs(niza[j]*niz1[k]+niz2[k]+nizc[j]))/(math.sqrt(niza[j]*niza[j]+1))
if suma<=min:
min=suma
pamtia=-niza[j]
pamtib=-nizc[j]
suma=0
print(min,pamtia,pamtib)
```

Poglavlje 6

Moguća realizacija u nastavi matematike

Cilj svakog obrazovnog programa je razvoj kompetencija. Taj pojam obuhvaća dinamičku kombinaciju kognitivnih i metakognitivnih vještina, znanja i razumijevanja, međuljudskih i praktičkih vještina, a razlikujemo generičke (opće) i područno specifične kompetencije. Generičke ili opće kompetencije su one kompetencije koje su prenosive u različita područja djelovanja, dok su područno specifične kompetencije svojstvene određenoj disciplini (struci). Dakle, cilj svakog obrazovanja je omogućiti učeniku razvoj tih kompetencija kako bi u modernom svijetu odgovorio na probleme koje se pred njega stavljaju. Upravo je matematička kompetencija definirana kao sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama. Zbog toga je u matematičkom obrazovanju naglasak na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Takav pristup omogućuje razvoj ne samo proceduralnog već i konceptualnog znanja. Jedna od metoda učenja koja omogućuje ostvarivanje i razvoj potencijala kod učenika je metoda aktivnog rada učenika na nastavi. Takav oblik nastave podrazumijeva učeničko otkrivanje novih pojmova i veza te međusobnu učeničku suradljivost na problemu. Na taj se način u nastavi ostvaruje bit – učenik je u središtu nastave.

U dosadašnjem kurikulumu pravac regresije nije bio dio nastavnog sadržaja za učenike. No ipak, u prethodnom poglavlju smo naveli primjere gdje se pravac regresije koristio u srednjoškolskoj nastavi. Zbog toga novi kurikulum uvodi pravac regresije kao novu nastavnu jedinicu unutar 3. razreda srednjih škola. U realizaciji ove nastavne jedinice koristila sam zadatak koji je Ministarstvo dalo kao preporuku za ostvarivanje navedenog odgojno-obrazovnog ishoda.[9]

1. GLAVNI CILJ NASTAVNOG SATA

Učenici će na osnovi nekoliko podataka određivati njihovu približnu linearnu vezu.

2. OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA
Učenici će:

- ispitati koji pravac bolje opisuje dane podatke
- razvijati vještinu zaključivanja i kritičkog mišljenja
- raditi u skupinama uz razmjenu i sučeljavanje ideja, mišljenja i stavova

3. KORELACIJE UNUTAR MATEMATIKE I S DRUGIM NASTAVNIM PREDMETIMA
Povezivanje s koordinatnim sustavom u ravnini

4. TIP NASTAVNOG SATA
Sat obrade.

5. NASTAVNI OBLICI
Diferencirana nastava u obliku rada u paru, diferencirana nastava u obliku rada u skupini, frontalna nastava.

6. NASTAVNE METODE

- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda demonstracije, eksperimentalna metoda
- prema oblicima zaključivanja: metoda analogije, heuristička metoda

7. NASTAVNA POMAGALA
Ploča, kreda, kreda u boji, nastavni listić, GeoGebra.

Aktivnost: Pravac i tri točke

Cilj aktivnosti:
Učenici će uočiti koji od tri moguća pravca (kroz tri nekolinearne točke) najbolje opisuje dani skup zadanih točaka.

Nastavni oblik:

Diferencirana nastava u obliku rada u paru, diferencirana nastava u obliku rada u skupini, frontalna nastava.

Nastavna metoda:

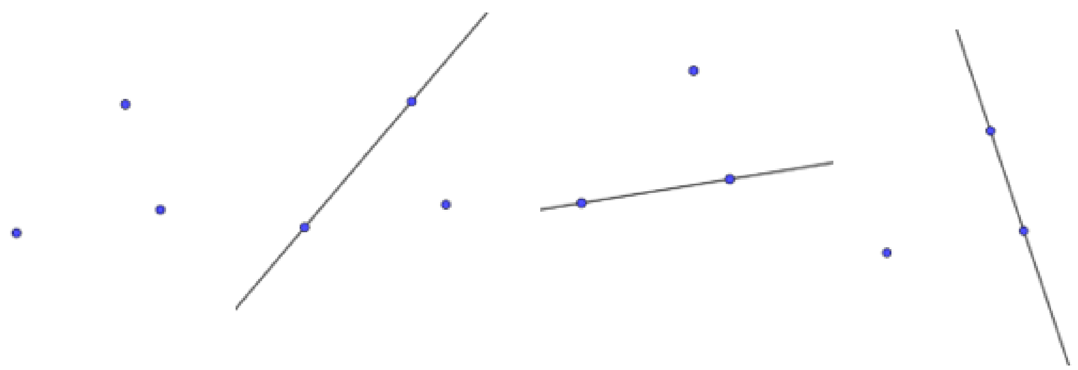
- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda demonstracije, eksperimentalna metoda
- prema oblicima zaključivanja: heuristička metoda, metoda analogije

Potreban materijal:

Ploča, kreda, kreda u boji, geometrijski pribor, GeoGebra

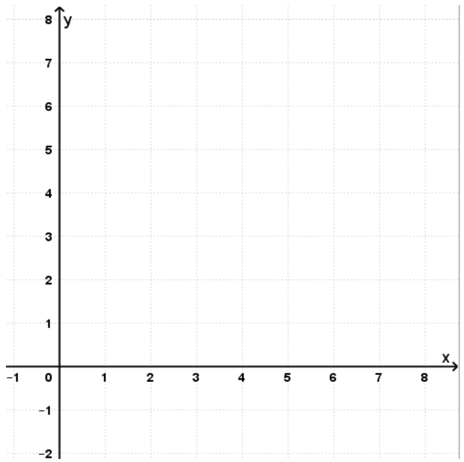
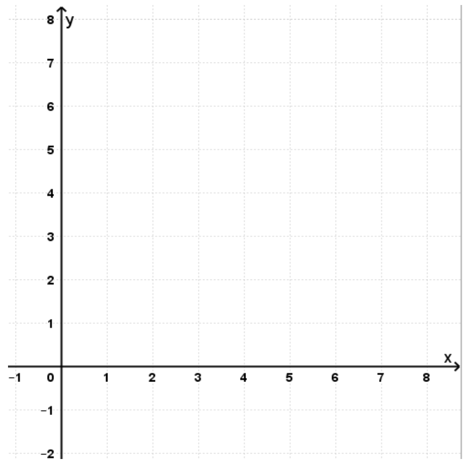
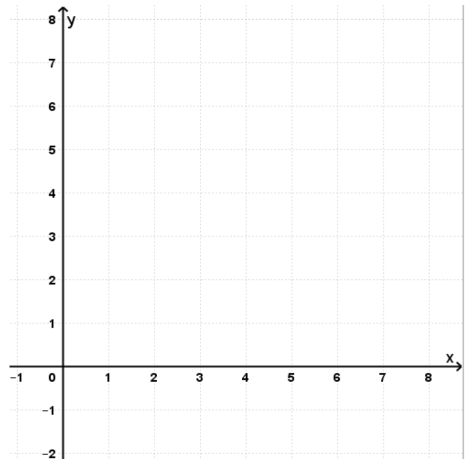
Tijek aktivnosti:

Na početku aktivnosti nastavnik pita učenike s koliko je točaka određen pravac (paralelno uz njihov odgovor crta dvije točke na ploči i odgovarajući pravac). Nakon toga će nastavnik na ploči nacrtati tri nekolinearne točke i pitati učenike koliko pravaca možemo povući kroz te tri točke. Izgled ploče:

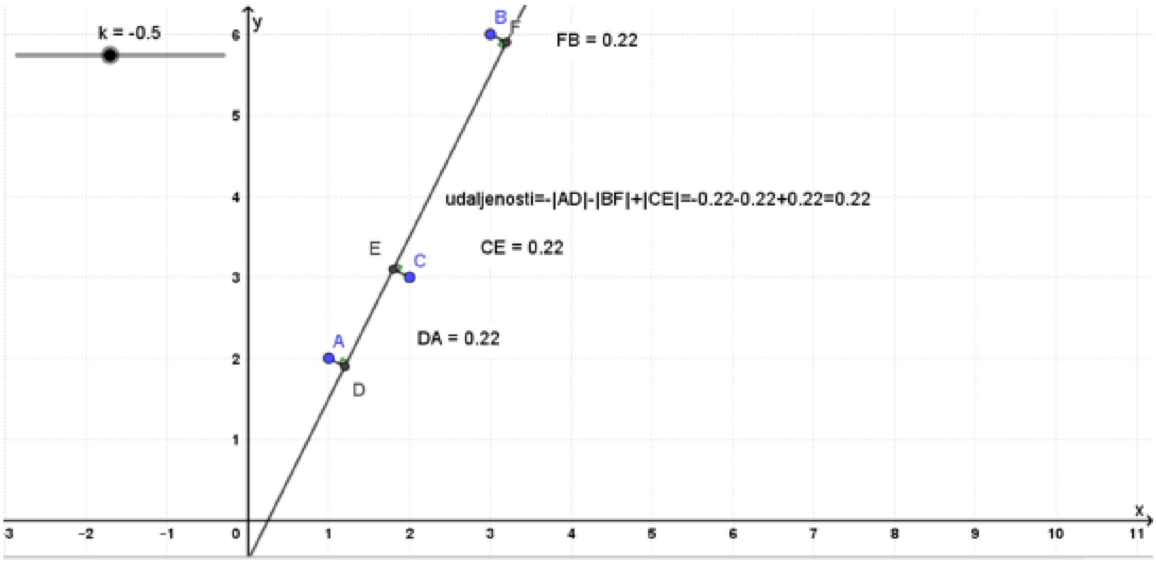


Slika 6.1: Svi mogući pravci kroz tri nekolinearne točke

Nakon ovog uvodnog dijela nastavnik će učenike rasporediti za rad u parovima. Svakom paru učenika podijelit će sljedeći nastavni materijal:

<table>
<tr><td colspan="3">Nakon izvođenja pokusa dobiveni su sljedeći podatci: $(1,2)\,,(3,6)\,,(2,3)$. U svakom od sljedeća tri koordinatna sustava ucrtaj dobivene podatke, a nakon toga nacrtaj i napiši jednadžbu pravca kroz neke dvije točke (u svakom koordinatnom sustavi izaberi druge dvije točke tako da su pravci na slikama različiti).</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Jednadžba nacrtanog pravca:</td><td>Jednadžba nacrtanog pravca:</td><td>Jednadžba nacrtanog pravca:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Za svaki od gornja tri slučaja odredi udaljenost treće točke od pravca.</td></tr>
<tr><td>Udaljenost točke ___ od pravca iznosi:</td><td>Udaljenost točke ___ od pravca iznosi:</td><td>Udaljenost točke ___ od pravca iznosi:</td></tr>
</table>

Nastavnik za vrijeme rješavanja obilazi učenike te pomaže grupama u kojima uoči poteškoće prilikom rješavanja nastavnog listića. Nakon što većina učenika uspije izvršiti zadatak slijedi diskusija koji pravac najbolje opisuje dani skup točaka. Nakon njihovih zaključaka nastavnik pokreće diskusiju te će upitati jesmo li nekako mogli dobiti još bolji pravac. Nastavnik će navoditi učenike na zaključak da pravac ne treba nužno prolaziti zadanim točkama već samo da im je udaljenost do pravca što manja. Mogu li se udaljenosti međusobno poništiti? Nakon ove diskusije slijedi prikaz u GeoGebri:



Slika 6.2: Prikaz u GeoGebri - suma odstupanja tri nekolinearne točke od regresijskog pravca

Aktivnost: Pokušajte sami!

Cilj aktivnosti:

Učenici će radom u četveročlanim skupinama odrediti približnu linearnu vezu zadanih podataka.

Nastavni oblik:

Diferencirana nastava u obliku rada u skupini, frontalna nastava.

Nastavna metoda:

- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda demonstracije, eksperimentalna metoda
- prema oblicima zaključivanja: heuristička metoda, metoda analogije

Potreban materijal:

Ploča, kreda, kreda u boji, geometrijski pribor, nastavni listići

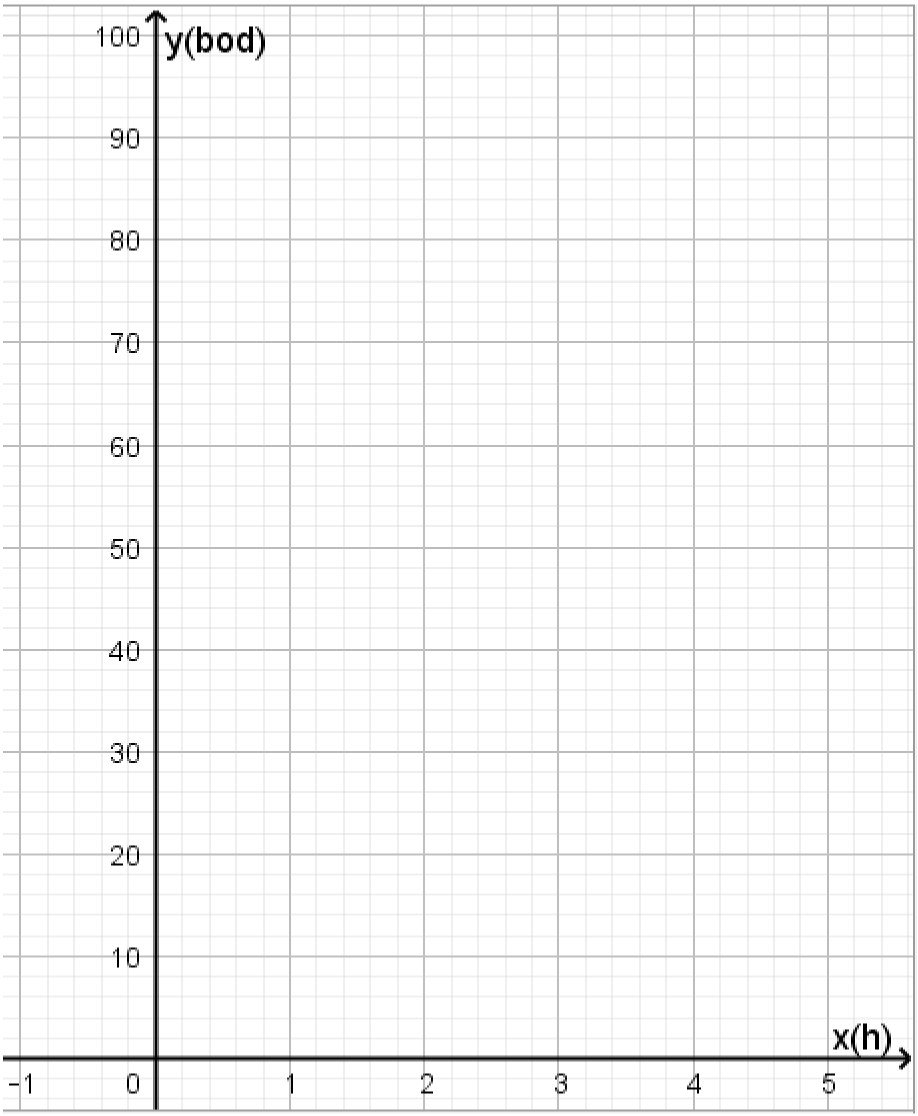
Tijek aktivnosti:

Na početku aktivnosti ću učenike pripremiti za rad u četveročlanim skupinama. Svakoj skupini podijelit ću sljedeći nastavni materijal:

Deset učenika bilo je upitano koliko su se sati pripremali za ispit iz matematike. Njihovi odgovori na to pitanje uspoređeni su s bodovima koje su dobili na ispitu (max 100).

$x\,(h)$	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75
$y\,(bod)$	57	64	59	68	74	76	79	83	85	86

a) Nacrtajte zadane podatke u priloženom koordinatnom sustavu.
b) Nacrtajte pravac koji "dobro" prolazi zadanim točkama i procijenite mu koeficijent smjera te odsječak na osi y (napišite jednadžbu tog pravca, $y = ax + b$).
c) Za svaku eksperimentalnu vrijednost x_i iz tablice odredite pripadnu vrijednost $y_{tv} = ax_i + b$ (y_{tv} je oznaka za teorijsku vrijednost).
d) Odredite pogrešku $D_i = y_i - y_{tv}$ (D_i je razlika između eksperimentalne i teorijske vrijednosti), te zbroj svih pogrešaka $\sum_{i=1}^{10} D_i$.
e) Ako se neki učenik pripremao 0.25h , koji je njegov najvjerojatniji rezultat na ispitu?
f) Koliko se sati učenik trebao pripremati da bi ostvario maksimum na ispitu?

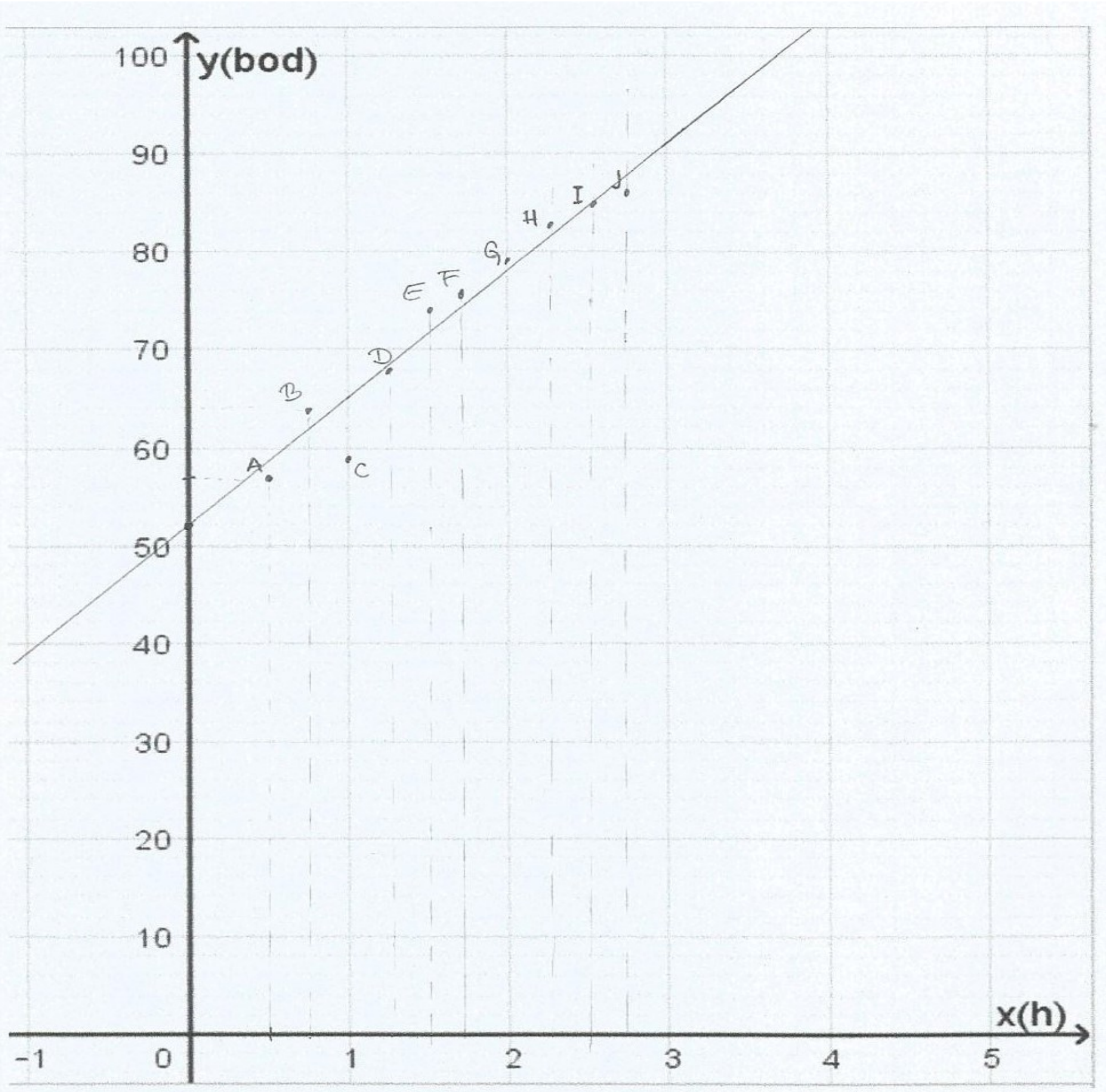


Slika 6.3: Koordinatni sustav - materijal za učenike

Tijekom rada u skupinama nastavnik obilazi razred te pomaže učenicima. Nakon što uoči da su učenici izvršili zadatak, slijedi diskusija. Vođa svake grupe dolazi ispred razreda i pokazuje pravac koji je njihova grupa uočila kao „najbolji“. Uz napisan pravac, učenik će na ploči napisati zbroj pogrešaka $\sum_{i=1}^{10} D_i$. Nastavnik paralelno u GeoGebri crta pravce koje su učenici procijenili kao najbolje. Nakon što svi učenici pokažu svoj rad, nastavnik postavlja pitanje koji od svih navedenih pravaca ima bolju približnu linearnu vezu za dane podatke. Nastavnik navodi učenike na zaključak da je to pravac s najmanjim zbrojem pogrešaka. Nastavnik dalje pita učenike možemo li dobiti još manju sveukupnu pogrešku te nakon diskusije zapisuje na ploči:

Postupak koji smo koristili naziva se ***linearnom regresijom****, a dobiveni pravac zovemo* ***pravcem regresije****. To je pravac koji najbolje povezuje (aproksimira) zadane točke grafa.*

Slijedi jedan od mogućih učeničkih radova:



Slika 6.4: Dijagram rasipanja i približni pravac koji ga opisuje

Nacrtani pravac otprilike prolazi točkama $(0,52),(1,65)$. Jednadžbom pravca kroz te dvije točke, ili "metodom koračaj i skoči" učenici mogu odrediti jednadžbu nacrtanog pravca: $y = 13x + 52$.

Odredimo sada teorijske vrijednosti y_{tv} i pripadnu pogrešku $D_i = y_i - y_{tv}$.

$x\,(h)$	0,50	0,75	1	1,25	1,50	1,75	2	2,25	2,50	2,75
$y\,(bod)$	57	64	59	68	74	76	79	83	85	86
y_{tv}	58,5	61,75	65	68,25	71,50	74,75	78	81,25	84,50	87,75
D_i	-1,50	2,25	-6	-0,25	2,50	1,25	1	1,75	0,50	-1,75

Primjer računa:

$$y_{tv1} = 13x_i + 52 = 13 \cdot 0,50 + 52 = 58,5$$

$$D_1 = y_1 - y_{tv1} = 57 - 58,5 = -1,50$$

Ukupna pogreška iznosi:

$$\sum_{i=1}^{10} D_i = -1,50 + 2,25 - 6 - 0,25 + 1,25 + 1 + 1,75 + 0,50 - 1,75 = -0,25$$

Ako se neki učenik pripremao $0,25h$ onda je njegov najvjerojatniji rezultat na ispitu jednak:

$$y = 13x + 52 = 13 \cdot 0,25 + 52 = 55,25.$$

Učenikov najvjerojatniji rezultat na ispitu je osvojenih 55 boda. Preostaje još odgovoriti na pitanje koliko bi se sati učenik trebao pripremati kako bi ostvario maksimalan uspjeh na ispitu. To znači da je:

$$y = 100$$
$$y = 13x + 52$$
$$100 = 13x + 52$$
$$13x = 48$$
$$x = 3,69h$$

Za maksimalan uspjeh učenik bi se trebao pripremati otprilike 3 sata i 41 minutu.

Bibliografija

[1] F. M. Brueckler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2007.

[2] ______, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2010.

[3] I. Gusić, *Linearna veza u nastavi matematike*, Poučak (2010), br. 41.

[4] D. C. Lay, S. R. Lay i J. J. McDonald, *Linear Algebra and Its Applications*, Pearson, 2016.

[5] Ž. Milin Šipuš, *Materijali kolegija Metodika nastave matematike 2*, Prirodoslovno matematički fakultet - Matematički odsjek (2018).

[6] ______, *Materijali kolegija Metodika nastave matematike 3*, Prirodoslovno matematički fakultet - Matematički odsjek (2018).

[7] United States Geological Survey's Earthquake Hazards Program, *Shizuoka Earthquake, Distance vs. Intensity Plot*, 2011, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shizuoka_Earthquake_Distance_vs_Intensity_Plot_20110315.jpg`.

[8] C. Winslow, *Fodgængerversion af lineær regression*, LMFK (2015).

[9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2. u Republici Hrvatskoj*, 2019, `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_209.html`.

Sažetak

U ovom diplomskom radu analizirana je tematika linearne regresije u kontekstu srednjoškolske nastave matematike. Prvi dio rada primarno je orijentiran prema teorijskoj pozadini, dok je drugi dio orijentiran prema konkretnoj primjeni.

Prvi dio sastoji se kratkog povijesnog pregleda razvoja linearne regresije i metode najmanjih kvadrata, nakon čega su iskazani i demonstrirani različiti oblici linearne veze, a potom je demonstrirano pitanje linearne regresije u matričnom obliku.

Drugi dio rada započinje analizom mogućih područja konkretne primjene u stvarnom životu, nastavlja diskusijom primjera korištenja u nastavi srodnih predmeta (fizika i informatika) te se na koncu predlaže moguća realizacija u nastavi matematike.

Summary

In this thesis, topic of linear regression is analysed in context of high-school mathematics. First part of the thesis is primarily oriented on providing theoretical background, while the second part is oriented to practical implementation.

The first part consists of a short historical background of linear regression development, in particular, of the least squares method. Furthermore, various forms of linear relationships are discussed and demonstrated, after which an approach to linear regression in matrix form is demonstrated.

The second part begins by analysis of possible applications in real life, while the next chapter discusses examples of possible use in teaching, in particular in subjects related to mathematics (e.g. physics or programming). The final chapter suggests possible realisation of the topic while teaching mathematics.

Životopis

Rođena sam 16.11.1995. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje stekla sam u OŠ Vjenceslava Novaka u zagrebačkoj Dubravi. Tijekom tih osam godina u meni se razvila želja za nastavničkim zanimanjem. Pohađala sam OGŠ Ivan Zajc u kojoj sam svirala klavir. 2010. godine upisujem informatički smjer u XV. Gimnaziji (poznatijoj kao MIOC). Nastavnički smjer matematike upisujem na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu 2014. godine te postajem prvostupnica 2017. Iste godine nastavljam diplomski studij.