SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lidija Sokić

UMNOŽAK TETIVA ELIPSE I REKURZIVNI NIZOVI POLINOMA

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lidija Sokić

UMNOŽAK TETIVA ELIPSE I REKURZIVNI NIZOVI POLINOMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Ako se na jediničnoj kružnici izabere n ekvidistantnih točaka, umnožak udaljenosti jedne od tih točaka do ostalih $n - 1$ točaka iznosi n. Taj iznenađujuće jednostavan rezultat davno je poznat i sa sobom nosi zanimljivu povijest opisanu u prvom poglavlju.

Međutim, središnja tema ovog rada je poopćenje tog rezultata na elipsu, koje je iznio Th. E. Price (2002.), a njegov pristup izložen je u drugom poglavlju. Proučavanjem jedne familije polinoma sa zanimljivim svojstvima, osobito karakterizacijom pomoću rekurzije, dolazi do podjednako neočekivanog rezultata za umnožak duljina tetiva elipse. Uočivši sličnost tog izraza s Binetovom formulom za Fibonaccijev niz brojeva, daljnjim istraživanjem ustanovio je da doista postoji veza i to ne samo s Fibonaccijevim, nego i s Lucasovim nizom. Ta veza izražena je pomoću familija poopćenih Fibonaccijevih i Lucasovih polinoma te pripadnih nizova brojeva. Dakle, u trećem poglavlju dolazimo do geometrijske interpretacije navedenih rekurzivnih nizova.

Četvrto poglavlje je posvećeno alternativnom pristupu središnjoj temi ovog diplomskog rada. Objedinjuju se prethodni rezultati i povezuju s nekim klasičnim formulama počevši od Cardanovog rješenja kubne jednadžbe, čime se na drugi način dolazi do poopćenih Lucasovih polinoma.

Poglavlje 1

Teorem o kružnici

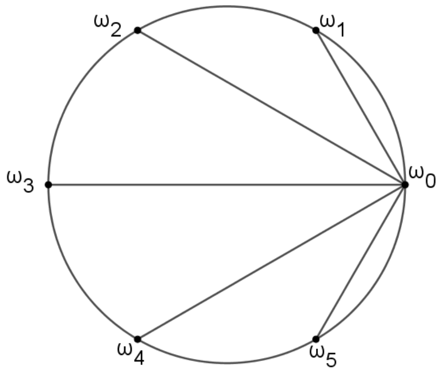
Kratki naslov "Teorem o kružnici" ne otkriva mnogo o stvarnom sadržaju stavka koji je motivirao Thomasa E. Pricea za rad na temu umnoška duljina tetiva elipse, objavljen 2002. godine [6]. Riječ je o zapravo elementarnom teoremu koji dopušta više formulacija i pristupa pa onda i različitih dokaza, od geometrije i algebre do kompleksne analize. U tome se mogu vidjeti razlozi zašto je više puta iznova otkrivan i reinterpretiran, a zahvaljujući svom potencijalu za zanimljiva poopćenja navodi se u matematičkoj literaturi i u 21. stoljeću. Za početak, izložit ćemo glavne podatke o povijesti tog teorema, a zatim ćemo provesti njegov dokaz koji se danas smatra standardnim, pomoću kompleksnih brojeva.

1.1 Povijesni pregled

U svojem radu iz 1954. godine potaknutom jednim problemom iz hidraulike, M. Sichardt [8] izračunavao je umnožak duljina tetiva kružnice povučenih iz jedne njezine točke do $n-1$ točaka kružnice, pri čemu je svih tih n točaka raspoređeno ekvidistantno, dakle kao vrhovi pravilnog n-trokuta upisanog kružnici. Elementarnim geometrijskim razmatranjem, problem se svodi na izračunavanje produkta vrijednosti $\sin(j\pi/n)$ za $j = 1, 2, ..., n-1$, a konačni rezultat dobiva se množenjem još i s faktorom $2^{n-1}A^{n-1}$, pri čemu je A kod Sichardta oznaka za polumjer kružnice. Prikladno je uzeti $A = 1$, čime se rezultat pojednostavljuje pa ćemo odsad i promatrati samo jediničnu kružnicu. Krajnji rezultat tada je jednostavno n, dakle umnožak duljina tetiva jednak je broju ekvidistantnih točaka na kružnici. Iskažimo sada teorem o (jediničnoj) kružnici:

Teorem 1.1.1. *Ako se na jediničnoj kružnici izabere n ekvidistantnih točaka umnožak udaljenosti jedne od tih točaka od ostalih* $n-1$ *točaka iznosi točno n.*

Na slici 1.1 prikazana je jedinična kružnica sa 6 ekvidistantnih točaka i 5 tetiva iz točke $\omega_0 = 1$. Iako je duljina većina tetiva iracionalan broj, prema Teoremu 1.1.1 njihov umnožak je jednak točno 5.



Slika 1.1: Jedinična kružnica sa 6 ekvidistantnih točaka

Sichardt je zapravo još puno ranije, 1927. godine naveo taj rezultat u jednoj bilješci o praktičnom inženjerskom problemu o konstrukciji bunara, a dokaz nije ni pripisao sebi, nego je do pravila o umnošku duljina tetiva došao empirijski. Kao autora danog dokaza naveo je prof. Szaboa s Tehničkog univerziteta u Berlinu, a u samom dokazu ipak su korišteni kompleksni brojevi, točnije $2n$-ti korijeni jedinice, na način malo kompliciraniji od današnjeg standardnog dokaza pomoću n-tih korijena jedinice. Uzimajući u obzir interpretaciju vrhova pravilnog n-terokuta upisanog jediničnoj kružnici kao n-tih korijena jedinice, moglo bi se reći da je "Teorem o kružnici" bio implicitno sadržan još u radovima velikih matematičara C.F. Gaussa i E.E. Kummera, samo što oni nisu spominjali baš takvo geometrijsko tumačenje.

No, još davno ranije, godine 1716. Roger Cotes, inače poznat kao urednik 2. izdanja Newtonovog kapitalnog djela "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", otkrio je rezultat veoma sličan teoremu o jediničnoj kružnici. Taj je rezultat objavio 1722. u radu Harmonia Mensurarum i on glasi:

Teorem 1.1.2. *Ako se na jediničnoj kružnici sa središtem u točki O odaberu ekvidistantne točke $A_0, ..., A_{n-1}$, i ako je P točka na $\overline{OA_0}$ takva da vrijedi $|OP| = x$, tada*

$$|PA_0| \cdot |PA_1| \cdots |PA_{n-1}| = 1 - x^n.$$

Nije poznato kako je Cotes došao do ovog rezultata, no Teorem o kružnici slijedi odatle kao granični slučaj, kad se obje strane jednakosti podijele s $|PA_0| = 1 - x$ i primijeni se limes za $P \to A_0$, odnosno $x \to 1$. Neki povjesničari matematike smatraju mogućim da se Cotes poslužio stanovitom varijantom formule koju se najčešće naziva po de Moivreu: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, pomoću koje se n-ti korijeni jedinice pridružuju točkama na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini.

Zanimljivo razdoblje "popularnosti" Teorema o kružnici uočava se 1995. godine, u nekoliko brojeva časopisa "Mathematics Magazine", što ujedno pruža priliku za sažetak dijela povijesti tog teorema u 20. stoljeću. Naime, A.P. Mazzoleni i S. Shan-Pu Shen objavili su kratki članak u kojem izvode dokaz pomoću teorema o reziduumu iz kompleksne analize, s odgovarajućom geometrijskom interpretacijom, ali bez referenci na starije verzije i dokaze. U sljedećim brojeva časopisa uredništvo je objavilo nekoliko reakcija matematičara koji su ukazali na jednostavnije dokaze i na prethodne radove na istu temu. Najprije je J.-N. Silva sugerirao kako je dostatno promatrati faktorizaciju polinoma $z^n - 1$. Zatim je Z. Usiskin ukazao na svoj rad "Product of Sines" iz 1979. godine, u časopisu namijenjenom za dvogodišnje studije, dok je T.P. Apostol rezultat prepoznao kao ekvivalentan "dobro znanoj produktnoj formuli" koja se može naći i u njegovoj knjizi "Mathematical Analysis" (1974.). Nadalje, K. Eisemann je naveo najstariji izvor, očito malo poznati Sichardtov članak iz 1954., a uz to i njegovo vlastito proširenje Teorema o kružnici objavljeno 1972. u istom časopisu ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik).

Konačno dolazimo do Thomasa Pricea koji poopćuje rezultat teorema o jediničnoj kružnici na elipsu te ga povezuje s Fibonaccijevim i Lucasovim nizovima. No, tu njegov rad ne staje. Iz njegovih se poopćenja javljaju nove interesantne problematike i izazovi za današnje matematičare. Primjerice, Price je izdao rad o umnošku udaljenosti središta elipse i nožišta okomica iz središta na pravce na kojima leže tetive elipse, što prepoznajemo kao generalizaciju Eisemannovog rezultata iz 1972.

1.2 Standardni dokaz

Na kraju članku S. Galovicha [2] iz 1987. čiji je cilj bilo poopćenje Usiskinovih rezultata o različitim umnošcima sinusa pogodno odabranih kutova izričito se navodi teorem čiji dokaz se dobiva izravnom primjenom identiteta (9) u tom članku. To je zapravo Teorem o (jediničnoj) kružnici, a autor ga je uvrstio, jer "iako su teorem i njegov dokaz očito dobro poznati, prirodno je uključiti ih u ovaj članak": Neka je P pravilni n-terokut upisan u jediničnu kružnicu i neka je v fiksni vrh od P. Umnožak duljina tetiva povučenih iz v do ostalih $n-1$ vrhova jednak je n. Time je ovaj teorem napokon dobio jasan iskaz, kao i dokaz koji se može smatrati standardnim.

Dokaz. Za konstrukciju tetiva koristimo n-te korijene jedinice. Označimo ih s ω_j, $j = 0, 1, ..., n-1$. Neka je $\omega_0 = 1$ početna točka te ju spojimo dužinama s preostalim točkama.

Nultočke polinoma $z^n - 1$ su n-ti korijeni jedinice. Tada je traženi umnožak duljina tetiva jednak

$$\prod_{j=1}^{n-1}(\omega_0 - \omega_j), \qquad j = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.1}$$

Jediničnu kružnicu promatramo kao skup točaka u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi $|z| = 1$. Za početnu točku izaberimo $\omega_0 = 1$. Tada ostalih $n-1$ ekvidistantnih točaka na kružnici odgovaraju kompleksnim brojevima

$$\omega_j = \cos(j\pi/n) + i\sin(j\pi/n), \qquad j = 1, 2, ..., n-1.$$

Zajedno s $\omega_0 = 1$, to su n-ti korijeni jedinice, dakle nultočke polinoma $z^n - 1$. Umnožak duljina tetiva povučenih iz točke ω_0 do ostalih $n-1$ točaka jednak je apsolutnoj vrijednosti umnoška $(1-\omega_1)\cdots(1-\omega_{n-1})$. Budući da je

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1}),$$

a vrijedi i $z^n - 1 = (z-1)\left(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1\right)$, slijedi jednakost

$$(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1}) = z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1$$

jer su to polinomi s jednakim nultočkama i vodećim koeficijentom 1. Uvrštavanjem $z = 1$ u tu jednakost dobivamo $(1-\omega_1)\cdots(1-\omega_{n-1}) = n$ pa je i apsolutna vrijednost umnoška jednaka n. □

Napominjemo da se traženi produkt $\prod_{j=1}^{n-1}(\omega_0 - \omega_j)$ može izračunati i kao

$$\lim_{z\to 1}[(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1})],$$

što je jednako

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^n - 1}{z-1}.$$

Primjenom L'Hopitalovog pravila ovaj limes neodređenog oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$ jednak je

$$\frac{d}{dz}(z^n - 1)\bigg|_{z=1} = nz^{n-1}\bigg|_{z=1} = n,$$

dakle jednak je n.

Posebno, ako je duljina polumjera kružnice duljine a, $a > 0$, onda duljinu svake od $n-1$ tetiva moramo pomnožiti s a. Tada je umnožak duljina tetiva jednak na^{n-1}.

Poglavlje 2

Poopćenje na elipsu

Može li se Teorem 1.1.1 nekako poopćiti? Jednu mogućnost pruža promatranje elipse dobivene horizontalnim i/ili vertikalnim skaliranjem kružnice. Tijekom ovog postupka upoznat ćemo jednu zanimljivu familiju polinoma, poopćiti teorem o kružnici i proučiti utjecaj rotacije krajeva promatranih tetiva na umnožak njihovih duljina.

2.1 Skaliranje kružnice

Neka je $b \neq 0$ te neka je $z = u+vi$ kompleksan broj. Promotrimo skup točaka $ae^{i\theta}+be^{-i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Tada vrijedi $ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = a(\cos\theta + i\sin\theta) + b(cos\theta - i\sin\theta) = (a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta$. Slijedi da skup točaka

$$ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = (a+b)\cos\theta + i(a-b)\sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{2.1}$$

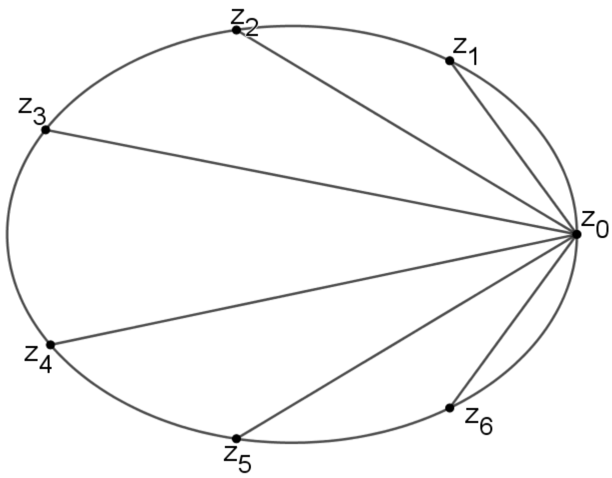
čini elipsu s velikom osi duljine $\pm(a+b)$ i malom osi duljine $\pm i(a-b)$ jer za $x = (a+b)\cos\theta$ i $y = (a-b)\sin\theta$ vrijedi

$$\left(\frac{x}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-b}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Jednadžba (2.1) za odgovarajuće vrijednosti a i b opisuje bilo koju elipsu čije je središte ishodište na realnoj osi. Napomenimo da u slučaju $b = 0$ odabrane točke su ekvidistantne te u tom slučaju ponovno promatramo kružnicu.
Za konstrukciju tetiva biramo n točaka na elipsi. Označimo ih sa $z_j := ae^{i\theta_j} + be^{-i\theta_j}$, gdje je $\theta_j = \dfrac{2j\pi}{n}$. Pri tom su θ_j, $j = 0, 1, ..., n-1$, argumenti n-tih korijena jedinice tako da je skup $\{z_j\}$ slika korijena jedinice pri pridruživanju

$$e^{i\theta} \to ae^{i\theta} + be^{-i\theta}. \tag{2.2}$$

Sada, za razliku od prethodno promatrane kružnice, lukovi između susjednih točaka elipse nemaju jednake duljine. Za početnu točku uzimamo tjeme elipse koje se nalazi na pozitivnom dijelu realne osi, tj. $z_0 = a + b$. Iz te točke vučemo tetive prema preostalim $n - 1$ točkama.



Slika 2.1: Elipsa sa šest tetiva

Imajući na umu Teorem 1.1.1, naslućujemo da je umnožak duljina tetiva na ovaj način dobivene elipse ovisan o faktoru skaliranja i broju promatranih točaka. U ostatku rada za umnožak duljina tetiva koristimo oznaku d_n.

2.2 Familija polinoma $P_n(z)$

Pogledajmo familiju polinoma $\prod_{j=1}^{n-1}(\omega_0 - \omega_j), n = 1, 2, ...$ iz izraza (1.1). Nju možemo generalizirati pomoću rekurzije, no Price je pronašao njoj blisku familiju polinoma s povoljnijim svojstvima i ona je jednaka

$$P_n(z) := \prod_{j=0}^{n-1}(z - z_j) + (a^n + b^n), \qquad n = 1, 2, ... \tag{2.3}$$

Uvođenjem izraza $a^n + b^n$ nismo uzrokovali nikakve dodatne komplikacije budući da za proizvoljni kompleksni broj z vrijedi

$$d_n = \begin{cases} \left|\dfrac{P_n(z) - (a^n + b^n)}{z - z_0}\right|, & \text{ako } z \neq z_0 \\ \left|P_n'(z_0)\right| = \lim_{z \to z_0} \left|\dfrac{P_n(z) - (a^n + b^n)}{z - z_0}\right|, & \text{ako } z = z_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Primijetimo da u točkama z_j, $0 \leq j \leq n-1$, polinom P_n poprima konstantnu vrijednost $a^n + b^n$

$$P_n\left(z_j\right) = a^n + b^n. \tag{2.5}$$

Svojstvo (2.5) karakterizira polinom $P_n(z)$ kao jedinstven interpolacijski polinom vodećeg koeficijenta jednakog 1 i stupnja točno $n \in \mathbb{N}$. Kako je polinom stupnja n sa navedenim svojstvima jedinstven, zaključujemo da je on karakteriziran tim svojstvom. To znači da ako na drugi način dobijemo polinom s istim svojstvom, onda to mora biti taj isti polinom. Ova činjenica poslužit će nam za određivanje rekurzivne relacije pomoću koje eksplicitno računamo polinome $P_n(z)$.

Očito, $P_1(z) = z$ zadovoljava svojstvo (2.5) jer $P_1(a+b) = a+b$. Budući da za $\theta_j = \dfrac{2j\pi}{n}$ je $e^{\pm in\theta_j} = 1$, $j = 0, 1, ..., n-1$, tada svojstvo (2.5) možemo zapisati

$$P_n\left(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}\right) = a^n e^{in\theta} + b^n e^{-in\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Ustanovit ćemo da polinomi stupnja većeg od 1 zadovoljavaju rekurziju

$$P_n(z) = zP_{n-1}(z) - abP_{n-2}(z), \tag{2.6}$$

uz $P_0(z) = 2$. Ako polinomi generirani rekurzijom (2.6) u točkama z_j, $j = 0, 1, ..., n-1$ poprimaju vrijednosti $a^n + b^n$, onda se radi o istim polinomima zadanim u (2.3).

Teorem 2.2.1. *Polinomi $P_n(z), n > 1$, generirani rekurzijom* (2.6) *zadovoljavaju svojstvo*

$$P_n\left(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}\right) = a^n e^{in\theta} + b^n e^{-in\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2.7}$$

Dokaz. Dokaz provodimo pomoću principa matematičke indukcije.

Baza: Uvrštavanjem vidimo da za $n = 0$ polinom poprima vrijednost $P_0(z) = 2$, dok za $n = 1$ je $P_1(z) = ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = z$.

Pretpostavka indukcije: Svi polinomi stupnja manjeg od $n, n > 1$, generirani rekurzijom (2.6) zadovoljavaju svojstvo (2.7).

Korak indukcije: Na osnovu pretpostavke pokažimo da svojstvo vrijedi i za polinome stupnja n.

$$\begin{aligned}
P_n\left(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}\right) &= \left(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}\right)\left(a^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + b^{n-1}e^{-i(n-1)\theta}\right) - ab\left(a^{n-2}e^{i(n-2)\theta} + b^{n-2}e^{-i(n-2)\theta}\right) \\
&= a^n e^{in\theta} + ab^{n-1}e^{-i(n-2)\theta} + a^{n-1}be^{i(n-2)\theta} + b^n e^{-in\theta} - ab^{n-1}e^{-i(n-2)\theta} - a^{n-1}be^{i(n-2)\theta} \\
&= a^n e^{in\theta} + b^n e^{-in\theta}.
\end{aligned}$$

$\square$

Dakle, prema principu matematičke indukcije svi polinomi generirani relacijom (2.6) zadovoljavaju svojstvo (2.7). To znači da su polinomi $P_n(z) = zP_{n-1}(z) - abP_{n-2}(z)$ jednaki polinomima $P_n(z)$ zadanim s (2.3).

Rekurzija (2.6) uvelike nam olakšava izračun polinoma $P_n(z)$ za stupanj $n > 2$. Prednost je u tome što imamo eksplicitno izražene koeficijente preko a i b, te ih računamo stupanj po stupanj. Izračunajmo prvih nekoliko polinoma

$$\begin{aligned}
P_2(z) &= zP_1(z) - abP_0(z) = z^2 - 2ab \\
P_3(z) &= zP_2(z) - abP_1(z) = z^3 - 3abz \\
P_4(z) &= zP_3(z) - abP_2(z) = z^4 - 4abz^2 + 2a^2b^2 \\
P_5(z) &= zP_4(z) - abP_3(z) = z^5 - 5abz^3 + 5a^2b^2z.
\end{aligned}$$

2.3 Umnožak duljina tetiva elipse

Ponovimo, skaliranjem kružnice faktorima a i b dobili smo elipsu čije su točke dane s $z = ae^{i\theta} + be^{-i\theta}$. Na elipsi biramo n točaka takve da su slike korijena jedinice pri preslikavanju (2.2). Kao početnu točku uzeli smo tjeme na pozitivnom dijelu osi apscisa $z_0 = a+b$. Osim toga, pokazali smo da polinome $P_n(z)$ zadane u (2.4) možemo generirati rekurzijom (2.6). Sada možemo iskazati i dokazati teorem o umnošku duljina tetiva elipse.

Teorem 2.3.1. *Neka su $z_j := ae^{i\theta_j} + be^{-i\theta_j}, \theta_j = \dfrac{2j\pi}{n}, j = 0, 1, ..., n-1$ točke na elipsi. Tada je umnožak udaljenosti točke $z_0 = a + b$ od preostalih $n - 1$ točaka dan s*

$$d_n = n\frac{a^n - b^n}{a - b}. \tag{2.8}$$

Dokaz. Kako je limes kompleksne funkcije iz jednakosti (2.4) neovisan o putu kojim se iz točke z dođe do točke z_0, možemo ograničiti z na elipsu. Primjenom Teorema 2.2.1 imamo

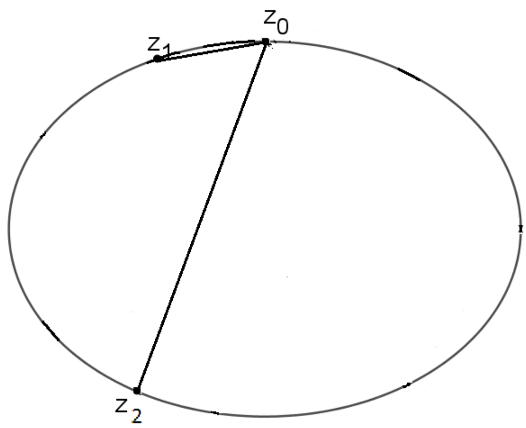
$$d_n(z_0) = \lim_{\theta\to 0}\left|\frac{\left(a^ne^{in\theta} + b^ne^{-in\theta}\right) - (a^n + b^n)}{(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}) - (a + b)}\right|. \tag{2.9}$$

Primjenom L'Hopitalovog pravila dobivamo

$$\begin{aligned}
d_n(z_0) &= \lim_{\theta\to 0}\left|\frac{\left(a^ne^{in\theta} + b^ne^{-in\theta}\right) - (a^n + b^n)}{(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}) - (a + b)}\right| \\
&= \lim_{\theta\to 0}\left|\frac{in\left(a^ne^{in\theta} - b^ne^{-in\theta}\right) - 0}{i\,(ae^{i\theta} - be^{-i\theta}) - 0}\right| \\
&= n\frac{a^n - b^n}{a - b}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

□

U sljedećem primjeru ilustrirat ćemo primjenu Teorema 2.3.1.



Slika 2.2: Elipsa s dvije tetive povučene iz točke $z_o = i(a-b)$.

Primjer 2.3.2. *Uzmimo kao početnu točku tjeme elipse na pozitivnom dijelu imaginarne osi* $z_0 = i(a-b)$, *tada je*

$$P_n\left[i\left(a-b\right)\right] = a^n e^{in\frac{\pi}{2}} + b^n e^{-in\frac{\pi}{2}} = i^n a^n + i^{-n} b^n,$$

pa je umnožak duljina tetiva jednak

$$d_n = \left|\frac{i^n a^n + i^{-n} b^n - (a^n + b^n)}{i\left(a-b\right) - \left(a+b\right)}\right|. \tag{2.11}$$

U izrazu (2.11) *se pojavljuju potencije imaginarne jedinice, stoga za n promatramo ostatak pri dijeljenju s 4.*

1° *Neka je* $n \equiv 0 \bmod 4$, *tada je* $i^n = 1 = i^{-n}$, *pa je*

$$d_0 = \left|\frac{a^n + b^n - a^n - b^n}{i\left(a-b\right) - \left(a+b\right)}\right| = \left|\frac{0}{i\left(a-b\right) - \left(a+b\right)}\right| = 0;$$

2° *Neka je* $n \equiv 1 \bmod 4$, *tada je* $i^n = i, i^{-n} = -i$,

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \left|\frac{i(a^n - b^n) - (a^n + b^n)}{i(a-b) - (a+b)} \cdot \frac{-i(a-b) - (a+b)}{-i(a-b) - (a+b)}\right| \\
&= \left|\frac{(a^n - b^n)(a-b) + (a^n - b^n)(a+b) + i\left[(a^n - b^n)(a-b) + (a^n - b^n)(a+b)\right]}{2a^2 + 2b^2}\right| \\
&= \left|\frac{2\left[a^{n+1} + b^{n+1} + i(ab^n - a^n b)\right]}{2(a^2 + b^2)}\right| = \sqrt{\left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{ab^n - a^n b}{a^2 + b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^{2n+2} + b^{2n+2} + 2a^{n+1}b^{n+1} + a^{2n+2} + b^{2n+2} - 2a^{n+1}b^{n+1}}{(a^2 + b^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2\left(a^{2n} + b^{2n}\right) + b^2\left(a^{2n} + b^{2n}\right)}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^2 + b^2}};
\end{aligned}
$$

3° *Neka je* $n \equiv 2 \bmod 4$, *tada je* $i^n = -1 = i^{-n}$,

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \left|\frac{-a^n - b^n - a^n - b^n}{i(a-b) - (a+b)} \cdot \frac{-i(a-b) - (a+b)}{-i(a-b) - (a+b)}\right| \\
&= \left|\frac{2\left[i(a^n + b^n)(a-b) + (a^n + b^n)(a+b)\right]}{2(a^2 + b^2)}\right| \\
&= \sqrt{\frac{(a^n + b^n)^2(a-b)^2 + (a^n + b^n)^2(a+b)^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a^n + b^n)^2\, 2\left(a^2 + b^2\right)}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{\sqrt{2}\,(a^n + b^n)}{\sqrt{a^2 + b^2}};
\end{aligned}
$$

4° *Neka je* $n \equiv 3 \bmod 4$*, tada je* $i^n = -i, i^{-n} = i$*,*

$$d_3 = \left| \frac{-i\,(a^n - b^n) - (a^n + b^n)}{i\,(a-b) - (a+b)} \cdot \frac{-i\,(a-b) - (a+b)}{-i\,(a-b) - (a+b)} \right|$$

$$= \left| \frac{-\,(a^n - b^n)\,(a-b) + (a^n - b^n)\,(a+b) + i\,[(a^n - b^n)\,(a+b) + (a^n + b^n)\,(a-b)]}{2a^2 + 2b^2} \right|$$

$$= \left| \frac{2\left[ab^n + a^n b + i\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)\right]}{2\,(a^2 + b^2)} \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ab^n + a^n b}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^2 + b^2}},$$

odakle se vidi da $d_1 = d_3$*.*

Dakle, umnožak duljina tetiva elipse s početnom točkom $z_0 = i(a-b)$ *iznosi*

$$d_n\,[i\,(a-b)] = \begin{cases} 0, & ako\ n = 0 \bmod 4 \\ \dfrac{\sqrt{2}\,(a^n + b^n)}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & ako\ n = 2 \bmod 4 \\ \dfrac{\sqrt{a^{2n} + b^{2n}}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & ako\ n = 1, 3 \bmod 4 \end{cases} \tag{2.12}$$

Uočimo da je rezultat u slučaju $n \equiv 0 \bmod 4$ *jednak* 0 *zato što je početna točka* $i\,(a-b)$ *ujedno i jedna od izabranih na elipsi pa se u umnošku pojavljuje* 0 *kao udaljenost te točke od same sebe.*

2.4 Rotacija krajnjih točaka tetiva elipse

Zarotiramo li krajnje točke tetiva kružnice promatranih u prvom poglavlju za neki kut, vrijednost umnoška njihovih duljina će ostati isti. Isto ne možemo reći i za elipsu. Promotrimo sliku 2.1. Rotacijom krajnjih točaka tetiva elipse za neki kut mijenja se njihova duljina, a samim time i umnožak njihovih duljina.

Neka je $\psi \in [0, 2\pi\rangle$. Točke $z_j, j = 0, 1, ..., n-1$ zarotirajmo za kut ψ na jediničnoj kružnici, a potom ju skalirajmo do elipse tako da dobijemo točke koje ćemo označiti sa z_j^ψ, gdje je $z_j^\psi = ae^{i\left(\theta_j + \psi\right)} + be^{-i\left(\theta_j + \psi\right)}$, $j = 0, ..., n-1$. Napomenimo da na ovaj način nismo rotirali svaku točku elipse za kut ψ. Tada polinom $P_n(z)$ u točkama z_j^ψ poprima vrijednost

$$P_n\left(z_j^\psi\right) = a^n e^{i\psi} + b^n e^{-i\psi}, \qquad j = 0, 1, ..., n-1. \tag{2.13}$$

Analogno kao u prethodnom potpoglavlju, umnožak duljina tetiva s rotiranim krajnjim točkama iznosi

$$d_n^{\psi}(z) := \begin{cases} \left|\dfrac{P_n(z) - (a^n e^{in\psi} + b^n e^{-in\psi})}{z - (ae^{i\psi} + be^{-i\psi})}\right|, & \text{ako } z \neq z_0^{\psi} \\ \left|P_n'(z_0^{\psi})\right| = \lim_{z\to z_0^{\psi}} \left|\dfrac{P_n(z) - (a^n e^{in\psi} + b^n e^{-in\psi})}{z - (ae^{i\psi} + be^{-i\psi})}\right|, & \text{ako } z = z_0^{\psi} \end{cases} \tag{2.14}$$

Propozicija 2.4.1. *Neka su* $z_j^{\psi} = ae^{i(\theta_j+\psi)} + be^{-i(\theta_j+\psi)}$ *točke dobivene rotacijom točaka* z_j, $j = 0, 1, ..., n-1$, *za kut* ψ, $\psi \in [0, 2\pi\rangle$. *Umnožak udaljenosti točke* z_0^{ψ} *od preostalih* $n-1$ *točaka iznosi*

$$d_n^{\psi} = n\sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(2n\psi)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos(2\psi)}}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Ponovno, zbog neovisnosti limesa kompleksne funkcije o putu od z do z_0, ograničimo z na elipsu. Tada

$$d_n^{\psi}(z_0^{\psi}) = \left|P_n'(z_0^{\psi})\right| = \lim_{\theta\to\psi}\left|\frac{\left(a^n e^{in\theta} + b^n e^{-in\theta}\right) - \left(a^n e^{in\psi} + b^n e^{-in\psi}\right)}{(ae^{i\theta} + be^{-i\theta}) - (ae^{i\psi} + be^{-i\psi})}\right|.$$

Uvrštavanjem $\theta = \psi$ dobivamo neodređeni oblik $\left[\frac{0}{0}\right]$ pa ponovno možemo primijeniti L'Hopitalovo pravilo. Slijedi

$$d_n^{\psi}(z_0^{\psi}) = \lim_{\theta\to\psi}\left|\frac{ina^n e^{in\theta} - inb^n e^{-in\theta}}{iae^{i\theta} - ibe^{-i\theta}}\right| = \left|n\frac{a^n e^{in\psi} - b^n e^{-in\psi}}{ae^{i\psi} - be^{-i\psi}}\right|. \tag{2.16}$$

Radi lakšeg računa koristimo trigonometrijske prikaze kompleksnih brojeva

$$\begin{aligned} ae^{i\psi} - be^{-i\psi} &= (a-b)\cos\psi + i(a+b)\sin\psi \\ a^n e^{in\psi} - b^n e^{-in\psi} &= (a^n - b^n)\cos(n\psi) + i(a^n + b^n)\sin(n\psi). \end{aligned}$$

Slijedi

$$d_n^{\psi}(z_0^{\psi}) = \left|n\,\frac{(a^n - b^n)\cos(n\psi) + i(a^n + b^n)\sin(n\psi) + (a-b)\cos\psi + i(a+b)\sin\psi}{(a-b)\cos\psi + i(a+b)\sin\psi}\right|,$$

razlomak proširimo s konjugirano kompleksnim nazivnikom, pa imamo

$$Re\left(P_n'(z_0^{\psi})\right) = n\,\frac{(a^n - b^n)(a-b)\cos(n\psi)\cos\psi + (a^n + b^n)(a+b)\sin(n\psi)\sin\psi}{(a-b)^2\cos^2\psi + (a+b)^2\sin^2\psi}$$

$$Im\left(P_n'(z_0^{\psi})\right) = n\,\frac{(a^n + b^n)(a-b)\cos\psi\sin(n\psi) + (a^n - b^n)(a+b)\cos(n\psi)\sin\psi}{(a-b)^2\cos^2\psi + (a+b)^2\sin^2\psi}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
d_n^{\psi}(z_0^{\psi}) &= \sqrt{\left[Re\left(P_n'(z_0^{\psi})\right)\right]^2 + \left[Im\left(P_n'(z_0^{\psi})\right)\right]^2} \\
&= n\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2-2ab\cos(2\psi)\right)\left(a^{2n}+b^{2n}-2a^nb^n\cos(2n\psi)\right)}{\left(a^2+b^2-2ab\cos(2\psi)\right)^2}} \\
&= n\sqrt{\frac{a^{2n}+b^{2n}-2a^nb^n\cos(2n\psi)}{a^2+b^2-2ab\cos(2\psi)}}.
\end{aligned}$$

□

Zbog simetrije elipse, kut ψ možemo restringirati na $[0, \pi]$. Međutim, budući da je

$$\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right) = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right),$$

kut ψ možemo dalje restringirati na $[0, \pi/2]$. U slučaju $\psi = \theta_k$ za neki k, tada (2.8) daje vrijednost umnoška udaljenosti točke $z_0^{\psi} = z_k$ od točaka z_j, $j \neq k$. U sljedećem primjeru prikazat ćemo primjenu Propozicije 2.4.1.

Primjer 2.4.2. *Neka je* $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ *i* $z_0^{\pi/2} = i\,(a-b)$, *tada je prema Propoziciji 2.4.1*

$$d_n^{\pi/2}\left[i\,(a-b)\right] = n\sqrt{\frac{a^{2n}+b^{2n}-2a^nb^n\cos n\pi}{(a+b)^2}}.$$

Razlikujemo dva slučaja.

1° *Neka je n paran, tada* $\cos(n\pi) = 1$, *pa*

$$d_n^{\pi/2}\left[i\,(a-b)\right] = n\frac{a^n-b^n}{a+b}.$$

2° *Neka je n neparan, tada* $\cos(n\pi) = -1$, *pa*

$$d_n^{\pi/2}\left[i\,(a-b)\right] = n\frac{a^n+b^n}{a+b}.$$

Iako smo promatrali tetive iz iste početne točke, rezultati primjera 2.3.2 i 2.4.2 se razlikuju.

Poglavlje 3

Veza s Fibonaccijevim brojevima

Price je u svojim rezultatima (2.5) i (2.8) uočio sličnosti s oblikom poznatih Lucasovih i Fibonaccijevih polinoma. Dakle, pojavila se ideja da se klasični Lucasovi i Fibonaccijevi polinomi mogu geometrijski interpretirati preko duljine tetiva elipsa. U ovom poglavlju definirat ćemo navedene polinome, a zatim ćemo ih povezati s tetivama elipse.

3.1 Lucasovi i Fibonaccijevi brojevi

Fibonaccijev niz je niz brojeva

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

pri čemu je svaki član $F_n, n > 2$, jednak zbroju prethodna dva člana niza.

Definicija 3.1.1. *Neka je $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Niz brojeva definiran rekurzivnom relacijom*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 3 \tag{3.1}$$

naziva se Fibonaccijev niz. Član niza F_n naziva se n-ti Fibonaccijev broj.

Fibonaccijeve brojeve možemo računati i eksplicitno pomoću Binetove formule

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{3.2}$$

pri čemu su α i β korijeni ”zlatne jednadžbe” $x^2 - x - 1 = 0$, tj.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \tag{3.3}$$

Konstantu α nazivamo zlatni rez.

Istom rekurzijom (3.1), ali uz drugačije početne uvjete, definiran je niz Lucasovih brojeva. Nekoliko prvih Lucasovih brojeva su

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...$$

Definirajmo Lucasov niz, tj. Lucasove brojeve.

Definicija 3.1.2. *Neka je $L_0 = 2$ i $L_1 = 1$. Niz brojeva definiran rekurzivnom relacijom*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \qquad n \geq 2 \tag{3.4}$$

za naziva se Lucasov niz. Član niza L_n naziva se n-ti Lucasov broj.

Lucasove brojeve također možemo računati eksplicitno pomoću Binetove formule za Lucasove brojeve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \tag{3.5}$$

gdje su α i β dani s (3.3). Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi zadovoljavaju niz algebarskih identiteta. Za Fibonaccijeve brojeve vrijedi sljedeći identitet.

Propozicija 3.1.3. *Za dva prirodna broja m i n vrijedi*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo pomoću principa matematičke indukcije.

Baza: Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer prema (3.1)

$$F_{m+1} = F_{m-1} + F_m = F_{m-1} \cdot 1 + F_m \cdot 1 = F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \leq k, k \in \mathbb{N}$.

Korak indukcije: Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. Tada

$$\begin{aligned} F_{m+k+1} &= F_{m+k} + F_{m+k-1} \\ &= F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1} + F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k \\ &= F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k) \\ &= F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}. \end{aligned}$$

□

Pokažimo da vrijedi i sljedeće svojstvo djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.

Teorem 3.1.4. *Neka su m i n prirodni brojevi. Ako $m \mid n$, onda $F_m \mid F_n$.*

Dokaz 1. Pretpostavimo da $m \mid n$, tj. $n = mk, k \in \mathbb{N}$. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po k.

Baza: Za $k = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer $F_m \mid F_m$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da $F_m \mid F_{mk}$ za svaki prirodni broj k.

Korak indukcije: Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $m = k + 1$. Prema Propoziciji 3.1.3 znamo da je $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$, pa iz pretpostavke indukcije slijedi

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$

Primijetimo, $F_m \mid F_{mk-1}F_m$ i prema pretpostavci indukcije $F_m \mid F_{mk}F_{m+1}$. Dakle, $F_m \mid F_{m(k+1)}$ □

Pomoću rekurzija nalik onima za Fibonaccijeve brojeve i Lucasove brojeve možemo definirati različite klase polinoma. Takve polinome nazvat ćemo Fibonaccijevi polinomi $U_n(x)$ i Lucasovi polinomi $V_n(x)$. Fibonaccijevi polinomi generirirani su rekurzijom

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x), \qquad n \geq 3, \tag{3.6}$$

gdje je $U_1(x) = 1$ i $U_2(x) = x$. Lucasove polinome računamo pomoću rekurzivne formule

$$V_n(x) = xV_{n-1}(x) + V_{n-2}(x), \qquad n \geq 2, \tag{3.7}$$

pri tom $V_0(x) = 2$ i $V_1(x) = x$.

Očito vrijedi $U_n(1) = F_n$ te $V_n(1) = L_n$, dakle vrijednosti ovih polinoma u točki 1 upravo su jednake Fibonaccijevim, odnosno Lucasovim brojevima.

Kao i Fibonaccijev i Lucasov niz, ove polinome možemo računati i eksplicitno pomoću Binetovih formula sličnim (3.2) i (3.5). Vrijedi:

1)
$$U_n(x) = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \qquad n \geq 1, \tag{3.8}$$

2)
$$V_n(x) = a^n + b^n, \qquad n \geq 0, \tag{3.9}$$

gdje su

$$a = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \qquad b = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

Varijable $t_1 = a$ i $t_2 = b$ su rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 = xt + 1$, koja je karakteristična jednadžba za rekurziju (3.6), odnosno (3.7).

3.2 Generalizirani Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi

U Poglavlju 2 ključnu ulogu imala je familija polinoma P_n, zadana s (2.3) uz izbor parametara a, b takvih da je $a > |b|$. Polinomi su zadani tako da vrijedi $P_n(z_j) = a^n + b^n$, pri čemu su z_j, $j = 0, 1, ..., n-1$, n-ti korijeni jedinice. Vidimo da vrijedi $P_n(z_j) = a^n + b^n$, što za izbor $a = \alpha, b = \beta$ upravo daje n-ti Lucasov broj, prema (3.5).

Također, usporedbom relacija (2.8) i (3.2) uočavamo da je

$$P'_n(1) = d_n = n\frac{a^n - b^n}{a - b} = nF_n,$$

kad se izabere $a = \alpha, b = \beta$.

Jasno je stoga da su polinomi $P_n(z)$ i $\frac{1}{n}P'_n(z)$ usko povezani s Lucasovim i Fibonaccijevim polinomima, kad se uzme $a = \alpha$ i $b = \beta$. Za općeniti izbor a i b pripadne polinome $P_n(z)$ i $\frac{1}{n}P'_n(z)$ nazvat ćemo poopćenim (generaliziranim) Lucasovim odnosno Fibonaccijevim polinomima, a pokazat će se da se za $a = \alpha, b = \beta$ oni doista podudaraju s klasičnim Lucasovim odnosno Fibonaccijevim polinomima. Uz to, pokazat će se, bez primjene Binetove formule, da vrijedi $P'_n(1) = nF_n$ i $P_n(z_j) = L_n$ uz izbor $a = \alpha, b = \beta$.

U prethodnom odjeljku vidjeli smo da su polinomi $P_n(z)$ generirani rekurzijom (2.6). Zanimljivo je da i polinomi $\frac{1}{n}P'_n(z)$ zadovoljavaju sličnu rekurziju, odnosno vrijedi

$$\frac{1}{n}P'_n(z) = \frac{z}{n-1}P'_{n-1}(z) - \frac{ab}{n-2}P'_{n-2}(z). \tag{3.10}$$

Kako se radi o polinomima, dovoljno je provjeriti vrijedi li (3.10) za točke na elipsi. Primjenom lančanog pravila imamo

$$\frac{dP_n}{d\theta} = \frac{dP_n/dz}{dz/d\theta},$$

odakle je prema identitetu (2.7) $\frac{dP_n}{d\theta} = in\left(a^n e^{in\theta} - b^n e^{-in\theta}\right)$.

Tada, za $n > 2$

$$\frac{z}{n-1}\frac{dP_{n-1}(z)}{dz} - \frac{ab}{n-2}\frac{dP_{n-2}(z)}{dz} = \frac{z}{n-1}\frac{dP_{n-1}(z)/d\theta}{dz/d\theta} - \frac{ab}{n-2}\frac{P_{n-2}(z)/d\theta}{dz/d\theta}$$

$$= \frac{\frac{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}{n-1} i\,(n-1)\left(a^{n-1}e^{i(n-1)\theta} - b^{n-1}e^{-i(n-1)\theta}\right) - \frac{ab}{n-2} i\,(n-2)\left(a^{n-2}e^{i(n-2)\theta} - b^{n-2}e^{-i(n-2)\theta}\right)}{dz/d\theta}$$

$$= \frac{i\left(a^n e^{in\theta} - ab^{n-1}e^{-i(n-2)\theta} + a^{n-1}be^{i(n-2)\theta} - b^n e^{-in\theta} - a^{n-1}be^{i(n-2)\theta} + ab^{n-1}e^{-i(n-2)\theta}\right)}{dz/d\theta}$$

$$= \frac{i\left(a^n e^{in\theta} - b^n e^{-in\theta}\right)}{dz/d\theta} = \frac{1}{n}\frac{dP_n/d\theta}{dz/d\theta} = \frac{1}{n}\frac{dP_n}{dz},$$

odakle slijedi jednakost (3.10).

Definicija 3.2.1. *Dva realna broja a i b, takva da $a \geq |b|$, nazovimo prikladnima ako su i $a + b$ i ab cijeli brojevi.*

Primijetimo da su a i b prikladni ako i samo ako postoje cijeli brojevi u i v takvi da

$$a = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4v}, \qquad b = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4v},$$

pri čemu $u^2 \geq 4v$.

Pretpostavimo da su a i b prikladni. Tada su $P_1(z_0) = a + b$ i $P_2(z_0) = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$ cijeli brojevi. Ove vrijednosti zajedno s onima dobivenim rekurzijom (2.6) generiraju niz cijelih brojeva

$$a + b, a^2 + b^2, a^3 + b^3, \ldots.$$

Označimo n-ti član ovog niza s $L_n^{(a,b)}$, što možemo opravdati jednostavnom provjerom da se za izbor $a = \alpha, b = \beta$ taj niz svodi na klasičan Lucasov niz (L_n). Članove niza $\left(L_n^{(a,b)}\right)$ nazivamo stoga generalizirani Lucasovi brojevi. Slično pomoću polinoma $\frac{1}{n}P'_n(z)$ dolazimo do niza $\left(F_n^{(a,b)}\right)$ poopćenih Fibonaccijevih brojeva. Za $a = \alpha, b = \beta$ taj niz se svodi na klasičan Fibonaccijev niz.

Prisjetimo se, vrijedi $P_1(z_0) = z$ i $P_2(z_0) = z^2 - 1$. Uočimo da su P_1 i P_2 prva dva Lucasova polinoma.

Također, P_1' i P_2' su prva dva Fibonaccijeva polinoma. Budući da $P_n(z)$ i $\frac{1}{n}P_n'(z)$ zadovoljavaju rekurzije Lucasova i Fibonaccijeva polinoma, slijedi da $P_n(z)$ i $\frac{1}{n}P_n'(z)$ jesu klasični Lucasovi i Fibonaccijevi polinomi.

Sada jednostavno dolazimo do Binetovih formula. Zaista, iz jednakosti (2.5) slijedi generalizirana Binetova formula za niz $\left(L_n^{(a,b)}\right)$. Prema jednakosti $\frac{dP_n}{d\theta} = in\left(a^n e^{in\theta} - b^n e^{in\theta}\right)$, dobivamo

$$\frac{dP_n}{dz} = \frac{dP_n/d\theta}{dz/d\theta} = \frac{in\left(a^n e^{in\theta} - b^n e^{-in\theta}\right)}{i\,(ae^{i\theta} - be^{-i\theta})},$$

što u točki $z = z_0$, tj. $\theta = 0$, poprima vrijednost $n\frac{a^n - b^n}{a - b}$, a to prepoznajemo kao rezultat Teorema 2.3.1. Slijedi

$$d_n = nF_n^{(a,b)}. \tag{3.11}$$

Za a i b jednake α i β iz (3.3) umnožak duljina tetiva jednak je $d_n = nF_n$, pri čemu je F_n n-ti Fibonaccijev broj. Dakle, prema Teoremu 2.3.1 pribrojnik nF_n predstavlja umnožak duljina tetiva elipse određenih početnom točkom z_0 i točkama z_j, $j = 1, ..., n-1$. Ovo opažanje nam omogućava geometrijski dokaz nekih svojstava djeljivosti generaliziranih Fibonaccijevih brojeva. Primjerice, Teorem 3.1.4 možemo dokazati na sljedeći način.

Dokaz 2. Pretpostavimo da $m \mid n$. Tada su m-ti korijeni jedinice također i n-ti korijeni jedinice. To znači da se tetive iz umnoška $\frac{1}{m}P_m'(z_0)$ također pojavljuju i u umnošku $\frac{1}{n}P_n'(z_0)$. Slijedi

$$\frac{1}{n}P_n'(z_0) = \frac{1}{m}P_m'(z_0) \cdot l, \qquad \text{za neki } l \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $F_m \mid F_n$. □

Sljedeći primjer ilustrira ovaj pristup.

Primjer 3.2.2. *Prema Teoremu 3.1.4 F_3 dijeli F_{3n} za proizvoljni prirodni broj n. Kako je treći korijen jedinice ujedno i $3n$-ti korijen jedinice, slijedi da se duljina dviju tetiva koje čine F_3 također pojavljuju u umnošku F_{3n}, pa je $\frac{1}{3n}P_{3n}'(z_0) = \frac{1}{3}P_3'(z_0) \cdot l, l \in \mathbb{N}$. Stoga, $\frac{1}{3}P_3'(z_0) = F_3$ će uvijek biti jedan faktor od $\frac{1}{3n}P_{3n}'(z_0) = F_{3n}$.*

Pokažimo još jednu posljedicu Teorema 3.1.4.

Korolar 3.2.3. *Ako su m i n prirodni brojevi takvi da $(m, n) = 1$, onda umnožak $F_m^{(a,b)}F_n^{(a,b)}$ dijeli $F_{mn}^{(a,b)}$.*

Dokaz. Budući da su m i n relativno prosti, slijedi da, osim 1, niti jedan m-ti korijen jedinice se ne nalazi među n-tim korijenima jedinice, i obrnuto. Zato se sve duljine tetiva koje čine umnožak $\frac{1}{m}P'_m(z_0) \cdot \frac{1}{n}P'_n(z_0)$ također moraju pojaviti u umnošku $\frac{1}{mn}P'_{mn}(z_0)$. □

Generalizirani Lucasovi brojevi se također mogu prikazati kao duljine tetiva elipse. No, da bismo uočili poveznicu moramo fiksirati $\psi \in [0, 2\pi\rangle$ i rotirati krajnje točke tetiva elipse tako da $z_j^\psi = ae^{i(\theta_j+\psi)} + be^{-i(\theta_j+\psi)}$, $j = 0, ..., n-1$. Tada polinom P_n u svakoj točki z_j^ψ, $j = 0, 1, ...n-1$ poprima konstantnu vrijednost $a^n e^{in\psi} + b^n e^{-in\psi}$, tj. vrijedi svojstvo (2.13). Prema tome je polinom $P_n(z)$ jedinstven interpolacijski polinom vodećeg koeficijenta jednakog 1 i stupnja točno $n \in \mathbb{N}$ u točkama z_j^ψ, $j = 0, 1, ..., n-1$. Stoga,

$$P_n(z) - \left(a^n e^{in\psi} + b^n e^{-in\psi}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(z - z_j^\psi\right) \tag{3.12}$$

ima korijene z_j^ψ, $j = 0, 1, ..., n-1$. Nadalje, za pozitivan cijeli broj n i $\psi = \frac{\pi}{n}$ neka je

$$Q_n(z) = P_n(z) + a^n + b^n, \tag{3.13}$$

odnosno

$$Q_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(z - z_j^{\pi/n}\right). \tag{3.14}$$

Vrijedi spomenuti dvije činjenice o polinomu $Q_n(z)$. Prvo, prema jednakostima (2.5) i (3.13) slijedi

$$Q_n(z_0) = P_n(a+b) + a^n + b^n = 2\left(a^n + b^n\right) = 2L_n^{(a,b)}.$$

To znači da broj $2L_n^{(a,b)}$ možemo geometrijski interpretirati kao umnožak duljina tetiva elipse određenih točkom z_0 i točkama $z_j^{\pi/n}$, $j = 0, 1, ..., n-1$, jer su prema jednakosti (3.14) $z - z_j^{\pi/n}$ faktori polinoma $Q_n(z)$.

Drugo, za korijene $z_j^{\pi/n}$, $j = 0, 1, ..., n-1$, polinoma $Q_n(z)$ vrijedi

$$\begin{aligned} z_j^{\pi/n} &= ae^{\left[i(2j+1)\pi\right]/2n} + be^{-\left[i(2j+1)\pi\right]/2n} \\ &= z_{2n,2j+1}. \end{aligned}$$

Prema tome, tetive koje se pojavljuju u umnošku $P'_{2n}(z_0)$ su upravo one korištene u umnošcima koji određuju $P'_n(z_0)$ i $Q_n(z_0)$. Iz ovoga slijedi dobro znani identitet

$$F_{2n}^{(a,b)} = \frac{1}{2n}P'_{2n}(z_0) = \left(\frac{1}{n}P'_n(z_0)\right)\left(\frac{1}{2}Q_n(z_0)\right) = F_n^{(a,b)}\, L_n^{(a,b)}.$$

Poglavlje 4

Umnožak duljina tetiva elipse i klasične matematičke formule

Matematičari B. Blum-Smith i J. Wood, motivirani Priceovim primjerom, u svom radu izdanom 2018. godine, povezuju njegove rezultate s klasičnim matematičkim formulama te poopćenim Lucasovim polinomima. U nastavku pratimo njihove korake i pritom ponovno promatramo točke elipse (2.1).

4.1 Poopćenje Cardanove reducirane kubne jednadžbe

Blum-Smith i Wood započeli su svoje razmatranje s Cardanovom reduciranom kubnom jednadžbom $z^3 + pz + q = 0$. Nazivamo ju reduciranom jer ne sadrži kvadratni član i vodeći koeficijent iznosi 1. Prema klasičnoj Cardanovoj formuli, sva tri korijena ove jednadžbe imaju oblik (2.1), gdje su

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{4.1}$$

Pritom $a > |b| \geq 0$ i moraju biti takvi da vrijedi $ab = -\frac{p}{3}$. U posebnom slučaju $a = 1$ i $b = 0$ ponovno promatramo jediničnu kružnicu iz prvog poglavlja.

Kako bismo pokazali da Cardanova formula uistinu vrijedi, možemo se poslužiti identitetom

$$(a + b)^3 - 3ab\,(a + b) - \left(a^3 - b^3\right) = 0 \tag{4.2}$$

koji vrijedi u svakom polju pa i u komutativnom prstenu. Uvrstimo li $z = a + b$, $p = -3ab$ i $q = -\left(a^3 + b^3\right)$ tada navedeni identitet postaje reducirana kubna jednadžba.

Dakle, prema Cardanovoj formuli, umjesto da tražimo kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednadžbu $z^3 + pz + q = 0$, možemo tražiti a i b takve da vrijedi $ab = -\frac{p}{3}$ i $a^3 + b^3 = -q$. Tada je $z = a + b$ rješenje.

To pak možemo postići proučavanjem kubova a^3 i b^3. Naime, to su vrijednosti čija suma i produkt su poznati, tj. $a^3 + b^3 = -q$ i $a^3\, b^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$. Iz toga slijedi da su a^3 i b^3 rješenja kvadratne jednadžbe $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ s korijenima oblika (4.1).

Već smo napomenuli da pri odabiru vrijednosti a i b mora vrijediti svojstvo $ab = -\frac{p}{3}$. To znači da ako varijablu a skaliramo za faktor $e^{i\theta_j}$ istovremeno moramo skalirati i varijablu b za faktor $e^{-i\theta_j}$ kako bi to svojstvo bilo očuvano. Upravo iz tog razloga sva tri rješenja reducirane kubne jednadžbe imaju oblik (2.1).

Time smo pokazali da $ae^{i\theta_j}$ i $be^{-i\theta_j}$ također zadovoljavaju identitet (4.2). Sljedeći korak je pronalazak polinoma koji poopćava identitet (4.2) za $n > 3$ i pri tom je invarijantan na supstitucije $a \to ae^{i\theta_j}$ i $b \to be^{-i\theta_j}$. Ako takav polinom postoji, tada je on ujedno i poopćenje reducirane kubne jednadžbe.

Promotrimo izraz $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$. On prikazuje zbroj kubova preko elementarnih simetričnih polinoma $a + b$ i ab. Poznato je da se svaki zbroj $a^n + b^n$ može prikazati u obliku polinoma s varijablama $a + b$ i ab. Upravo o tome govori osnovni teorem o simetričnim polinomima za dvije varijable. On glasi da za svaki simetrični polinom p postoji jedinstveni polinom q takav da je $p(a, b) = q(a + b, ab)$. Prema tome slijedi da sumu potencija $a^n + b^n$ također možemo jedinstveno prikazati preko elementarnih polinoma $a + b$ i ab. Štoviše, cijeli se izraz na jedinstven način može uzeti kao polinom čiji su koeficijenti cijeli brojevi.

Definicija 4.1.1. *Neka je $L_n(X, Y)$ jedinstveni polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da vrijedi*

$$L_n\,(a + b, ab) - (a^n + b^n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

U nastavku ćemo vidjeti da nam je polinom L_n zapravo već poznat.

Suma potencija $a^n + b^n$ sastoji se od monoma istog stupnja, pa je suma potencija homogen polinom stupnja n u varijablama a i b. Tada, prema Definiciji 4.1.1, polinom $L_n(a + b, ab)$ također mora biti homogen polinom stupnja n u varijablama $a + b$ i ab. Prema tome, polinom $L_n(X, Y)$ je homogen ako su X i Y redom jednaki $a + b$ i ab.

Također uočimo da suma potencija $a^n + b^n$ nije djeljiva s polinomom ab, stoga ni polinom $L_n(X, Y)$ ne smije biti djeljiv s Y. Iz toga možemo zaključiti da traženi polinom mora sadržavati član bez Y. Stoga je stupanj polinoma $L_n(X, Y)$ jednak stupnju u članu X, a to je upravo n.

Time smo došli do poopćenja identiteta (4.2). Primijetimo, ako supstituiramo a s $ae^{i\theta_j}$ i b s $be^{-i\theta_j}$, polinomi ab i $a^n + b^n$ ostaju nepromijenjeni. Tada izraz (4.3) ima oblik

$$L_n\left(ae^{i\theta_j} + be^{-i\theta_j}, ab\right) - (a^n + b^n) = 0.$$

Ponavljanjem ove supstitucije $n-2$ puta dolazimo do zaključka da su svi brojevi oblika (2.1) korijeni polinoma $L_n(z, ab) - (a^n + b^n)$.

Propozicija 4.1.2. *Korijeni polinoma*

$$\Omega_n(z) := L_n(z, ab) - (a^n + b^n)$$

su brojevi oblika $z_j = ae^{i\theta_j} + be^{-i\theta_j}$ za $j = 0, 1, ..., n-1$, pri čemu je L_n polinom iz Definicije 4.1.1.

Polinomi $L_n(z, ab)$ i $a^n + b^n$ imaju stupanj n, pa slijedi da je i stupanj polinoma $\Omega_n(z)$ isto n. Dakle, polinom $\Omega_n(z)$ imat će točno n korijena oblika (2.1). Prema (4.3) polinom Ω_n možemo zapisati i kao $\Omega_n(z) = L_n(z, ab) - L_n(a + b, ab)$. Na kraju zaključimo, polinom $\Omega_n(z)$, uveden Definicijom 4.1.1, poopćenje je identiteta (4.2), a samim time i Cardanove reducirane kubne jednadžbe.

4.2 Newtonova formula i Binetova formula za Lucasove polinome

Prije nego upotrijebimo Propoziciju 4.1.2 za računanje umnoška duljina tetiva elipse, moramo pronaći rekurzivnu formulu koja karakterizira polinom $\Omega_n(z)$ i pokazati da je vodeći koeficijent polinoma $\Omega_n(z)$ jednak 1. Prema Propoziciji 4.1.2, ako pronađemo rekurzivnu formulu za $L_n(X, Y)$, pronašli smo rekurziju koja generira polinom $\Omega_n(z)$. Polinom $L_n(X, Y)$ možemo računati pomoću rekurzije koju nam daje Newtonova formula za polinome više varijabli.

Teorem 4.2.1. *Neka su $s_1, ..., s_n$ sume potencija od m varijabli i $\sigma_1, ..., \sigma_m$ elementarni simetrični polinomi, $m \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

$$s_n - s_{n-1}\sigma_1 + s_{n-2}\sigma_2 - ... \pm s_1\sigma_{n-1} \mp \sigma_n = 0, \forall n < m. \tag{4.4}$$

Dokaz. Neka su $a_1, ..., a_m$ promatrane varijable. Tada je suma potencija s_n zbroj svih članova oblika a_j^n, dok je σ_n elementarni simetrični polinom stupnja n. Članovi od s_n poništavaju se s članovima $s_{n-1}\sigma_1$, ali se pojavljuju članovi oblika $a_j^{n-1}a_k$. No, oni se poništavaju s članovima iz $s_{n-2}\sigma_2$, ali preostaju članovi oblika $a_j^{n-2}a_k a_l$, itd. Konačno, $n\sigma_n$ poništava sve preostale članove. □

Posebno, budući da promatramo dvije varijable a i b, imamo $m = 2$. Newtonova formula za dvije varijable glasi

$$(a^n + b^n) - \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right)(a + b) + \left(a^{n-2} + b^{n-2}\right)(ab) = 0, \qquad \forall n \geq 3. \tag{4.5}$$

Napomenimo da svojstvo (4.5) vrijedi i za $n = 2$ jer $a^2 + b^2 - (a + b)(a + b) + 2ab = 0$. U (4.5) uvodimo sljedeće supstitucije $X = a + b, Y = ab$, $L_j(a + b, ab) = a^j + b^j$, $j = n, n - 1, n - 2$, pa vrijedi

$$L_n(X, Y) - XL_{n-1}(X, Y) + YL_{n-2}(X, Y) = 0.$$

Dakle, za $n \geq 2$ polinom $L_n(X, Y)$ možemo izračunati pomoću rekurzije

$$L_n(X, Y) = XL_{n-1}(X, Y) - YL_{n-2}(X, Y), \tag{4.6}$$

gdje su $L_0(X, Y) = 2$ i $L_1(X, Y) = X$ početni uvjeti. Nakon što smo pronašli rekurzivnu formulu za $L_n(X, Y)$ i $\Omega_n(z)$, preostaje nam pokazati da je vodeći koeficijent polinoma $\Omega_n(z)$ jednak 1. Dovoljno je pokazati da polinom $L_n(X, Y)$ ima to svojstvo.

Propozicija 4.2.2. *Svi polinomi $L_n(X, Y)$ stupnja $n, n > 1$, generirani rekurzijom* (4.6) *imaju vodeći koeficijent jednak 1.*

Dokaz. Dokaz provodimo pomoću matematičke indukcije.

Baza: Prema (4.3), $L_0(X, Y) = 2$ i $L_1(X, Y) = a + b = X$. Dakle, vodeći koeficijenti polinoma $L_n(X, Y)$ za $n = 0, 1$ jednaki su 1.

Pretpostavka indukcije: Svi polinomi $L_n(X, Y)$ stupnja manjeg od $n, n \geq 0$, generirani rekurzijom (4.6) imaju vodeći koeficijent jednak 1.

Korak indukcije: Na osnovu pretpostavke pokažimo da isto svojstvo imaju i polinomi stupnja n.

$$\begin{aligned} L_n(X, Y) &= XL_{n-1}(X, Y) - YL_{n-2}(X, Y) \\ &= (a + b)\left(a^{n-1} + b^{n-1}\right) - ab\left(a^{n-2} + b^{n-2}\right) \\ &= a^n + b^n. \end{aligned}$$

□

Pomoću principa matematičke indukcije dokazali smo da svi polinomi $L_n(X, Y)$ generirani relacijom (4.6) imaju vodeće koeficijente jednake 1. Tada, prema Propoziciji 4.1.2, polinom $\Omega_n(z)$ također ima vodeći koeficijent 1 i korijene $z_j = ae^{i\theta_j} + be^{-i\theta_j}$, $j = 0, ..., n - 1$.

Promotrimo ponovno rekurzivnu formulu (4.6). Uz promjenu predznaka $Y \to -Y$ ona postaje rekurzivna definicija dvaju polinoma s kojima smo se već susreli, Lucasova i Fibonaccijeva polinoma.

Direktnim uvrštavanjem u rekurziju (4.6) za $n = 0$ i $n = 1$ dobivamo dva polinoma, $L_0(X, Y) = 2$ i $L_1(X, Y) = X$, od kojih niti jedan ne sadrži faktor Y. Iz ovih opažanja slijedi da je polinom $L_n(X, Y)$ slika n-tog generaliziranog Lucasovog polinoma $V_n(X, Y)$.

Propozicija 4.2.3. *Polinom $L_n(X, Y)$ iz Definicije 4.1.1 je slika n-tog poopćenog Lucasovog polinoma $V_n(X, Y)$ uz supstituciju $Y \to -Y$.*

Propozicija 4.2.3 je proizlazi iz Binetove formule za Lucasove polinome (3.9), pri čemu $a = \dfrac{X + \sqrt{X^2 + 4Y}}{2}$ i $b = \dfrac{X - \sqrt{X^2 + 4Y}}{2}$, tj. $X = a + b$ i $Y = ab$. Dokaz Binetove formule u praksi se provodi ili matematičkom indukcijom ili pronalaskom zatvorenog oblika linearne rekurzije $V_n = XV_{n-1} + YV_{n-2}$. Razlog tome je što u standardnim razmatranjima X, Y, V_n konceptualno prethode a, b. Međutim, u našem su slučaju razmatranje počinje s varijablama a i b. Iz (3.9) slijedi da polinom $V_n(X, Y)$ prikazuje sumu potencija $a^n + b^n$ preko elementarnih simetričnih polinoma $X = a + b$ i $Y = ab$ do na promjenu predznaka, što prepoznajemo kao sadržaj Propozicije 4.2.3. Dakle, Binetova formula je posljedica interpretacije polinoma $\Omega_n(z)$ pomoću osnovnog teorema o simetričnim polinomima dviju varijabli.

4.3 Binetova formula za Fibonaccijeve polinome

Analognim postupkom možemo dokazati Binetovu formulu za generalizirane Fibonaccijeve polinome. Izraz $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ jednak je

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

Drugim riječima, $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ je potpuni homogeni simetrični polinom stupnja $n - 1$ u varijablama a i b. Stoga, kao u slučaju sume potencija $a^n + b^n$, koristimo osnovni teorem o simetričnim polinomima. Prema njemu, za polinom $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ postoji jedinstveni polinom $f_n(X, Y)$, $X = a + b$ i $Y = ab$. Kako bismo pokazali da $f_n(X, Y)$ zadovoljava rekurziju (4.6) potreban je analogon Newtonova teorema.

Teorem 4.3.1. *Neka je h_j potpuni homogeni simetrični polinom stupnja j u m varijabli, to jest suma svih monoma stupnja j u m varijabli, a $\sigma_1, ..., \sigma_m$ elementarni simetrični poli-*

nomi, $m \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$h_n - h_{n-1}\sigma_1 + h_{n-2}\sigma_2 - ... \pm h_1\sigma_{n-1} \mp \sigma_n = 0, \qquad \forall n \leq m. \tag{4.7}$$

Dokaz. Poslužit ćemo se formalnim redovima, tj. funkcijom izvodnicom $H(t)$ za potpune homogene simetrične polinome $H(t) = \sum_0^\infty h_j t^j$, $j \in \mathbb{N}$. Tada je

$$H(t) = \left(1 + a_1 t + a_1^2 t^2 + ...\right) \cdots \left(1 + a_m t + a_m^2 t^2 + ...\right) = \left(\frac{1}{1 - a_1 t}\right) \cdots \left(\frac{1}{1 - a_m t}\right),$$

odakle je

$$H(t)^{-1} = (1 - a_1 t) \cdots (1 - a_m t) = \sum_0^\infty (-1)^k \sigma_k t^k,$$

jer je koeficijent uz t^k suma svih umnožaka od po k članova $-a_j$. Slijedi

$$1 = H(t)H(t)^{-1} = \sum_0^\infty h_j t^j \sum_0^\infty (-1)^k \sigma_k t^k.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz t^n na obje strane slijedi

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i h_{n-i} = 0, \qquad n \geq 1.$$

□

Ponovno, budući da promatramo dvije varijable a i b, tada (4.7) je

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} - (a + b)\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} + ab\frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{a - b} = 0, n > 2.$$

Za $n > 2$ slijedi

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = (a + b)\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} - ab\frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{a - b}. \tag{4.8}$$

Prema osnovnom teoremu o simetričnim polinomima za dvije varijable, simetrični polinom $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ postoji polinom $f_n(X, Y)$ takav da $f_n(X, Y) = \frac{a^n - b^n}{a - b}$. Stoga iz jednadžbe (4.8) i prethodnog zaključka, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(X, Y)$ generiran je rekurzijom

$$f_n(X, Y) = X f_{n-1}(X, Y) - Y f_{n-2}(X, Y), \tag{4.9}$$

pri čemu $f_1(X, Y) = 1$ i $f_2(X, Y) = a + b = X$. Uz promjenu predznaka $Y \to -Y$ dolazimo do zaključka da je polinom $f_n(X, Y)$ generiran rekurzijom (4.9) jednak n-tom generaliziranom Fibonaccijevom polinomu $U_n(X, Y)$.

4.4 Veza Lucasova i Fibonaccijeva polinoma s umnoškom duljina tetiva elipse

Primjenom rezultata iz prethodnih odjeljaka dolazimo do drugog dokaza za Priceov teorem o umnošku duljina tetiva elipse. No, prije samog dokaza pokazat ćemo da vrijedi sljedeći teorem koji govori o vezi Lucasovih i Fibonacijevih polinoma.

Teorem 4.4.1. *Neka su $V_n(X, -Y)$ i $U_n(X, -Y)$ redom Lucasovi i Fibonaccijevi polinomi te $X = a + b$ i $Y = ab$. Tada vrijedi*

$$\frac{d}{dz} V_n(z, -ab) = nU_n(z, -ab). \tag{4.10}$$

Dokaz. Neka je Y konstanta. Tada je $b = Ya^{-1}$ funkcija varijable a pa $\frac{db}{da} = Ya^{-2} = -ba^{-1}$. Prema Binetovim formulama za Lucasov i Fibonaccijev polinom (3.9) i (3.8), te primjenom lančanog pravila, slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dX} V_n(X, Y) &= \frac{dV_n(X, Y)/da}{dX/da} = \frac{d\left(a^n + b^n\right)/da}{d\left(a + b\right)/da} \\
&= \frac{na^{n-1} + nb^{n-1}\left(-ba^{-1}\right)}{1 - ba^{-1}} = n\frac{\frac{a^n - b^n}{a}}{\frac{a-b}{a}} \\
&= n\frac{a^n - b^n}{a - b} = nU_n(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Dokažimo sada Teorem 2.3.1, tj. relaciju (2.8).

Dokaz. Prema Propoziciji 4.1.2, polinomi s korijenima (2.1) dani su s

$$\Omega_n(z) = L_n(z, ab) - (a^n + b^n).$$

Polinom $\Omega_n(z)$ ima istu ulogu kao polinom $z^n - 1$ u umnošku duljina tetiva kružnice. Osim toga, točka $z = a + b$ je slika jedinice s obzirom na skaliranje. Analogno zaključku iz Poglavlja 1, umnožak duljina tetiva elipse $d_n(z)$ jednak je

$$d_n(z) = \left|\frac{\Omega_n(z)}{z - (a + b)}\right|$$

u točki $z = a + b$. Budući da je promatrana točka ujedno i korijen polinoma $\Omega_n(z)$, slijedi $\Omega'_n(a + b) = \left|\frac{\Omega_n(z)}{z - (a + b)}\right|$. Prema Propozicijama 4.1.2 i 4.2.3 slijedi

$$\Omega'_n(z) = \frac{d}{dz} L_n(z, ab) = \frac{d}{dz} V_n(z, -ab)$$

gdje je V_n generalizirani Lucasov polinom.

Sada, prema Teoremu 4.4.1 i Binetovoj formuli za generalizirane Fibonaccijeve polinome (3.8), za $z = a + b$ je

$$d_n(z) = \frac{d}{dz} V_n(z, -ab) = nU_n(a + b, -ab) = n\frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

□

Prisjetimo se, $a > |b| \geq 0$ su pozitivni, pa ne moramo uzeti apsolutnu vrijednost jer je cijeli izraz pozitivan. Time smo na drugi način dokazali Priceov teorem za elipsu.

Bibliografija

[1] B. Blum - Smith, J. Wood, *Chords of an Ellipse, Lucas Polynomials and Cubic Equations*, dostupno na `https://arxiv.org/abs/1810.00492`, (veljača 2019.)

[2] S. Galovich, *Products of sines and cosines*, Mathematics Magazine 60(2) (1987) 105-113.

[3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley & Sons, 2001.

[4] A. P. Mazzoleni, S. S. Shen, *The product of chord lengths of a circle*, Mathematics Magazine 68(1) (1995) 59-60.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[6] Th. E. Price, *Products of Chord Lengths of an Ellipse*, Mathematics Magazine 75(4) (2002) 300 - 307.

[7] Th. E. Price, *Products of Elliptical Chord Lengths and the Fibonacci numbers*, Fibonacci Quarterly 43(2) (2005) 149 - 156.

[8] W. Sichardt, *Ein Satz vom Kreis*, Z. Angew. Math. Mech. 34 (1954) 429-431.

Sažetak

Središnja tema ovog rada je izračunavanje umnoška d_n duljina tetiva elipse dobivene skaliranjem kružnice na kojoj je odabrano n ekvidistantnih točaka. Motivacija za ovaj problem proizlazi iz odgovarajućeg rezultata za jediničnu kružnicu gdje vrijedi $d_n = n$.

Th. E. Price izveo je poopćenje tog teorema proučavanjem stanovite familije polinoma $P_n(z)$. Ti polinomi karakterizirani su rekurzijom koja ih dovodi u vezu s poopćenim Lucasovim i Fibonaccijevim polinomima. Za prikladni izbor parametara koji određuju promatranu elipsu dobiva se $P_n(1) = L_n$ i $P'_n(1) = d_n = nF_n$, pri čemu su L_n i F_n n-ti Lucasov, odnosno Fibonaccijev broj.

U završnom poglavlju izložen je alternativni pristup Priceovom radu, prema nedavno objavljenom članku B. Blum - Smitha i J. Wooda (2018.). Veći dio Priceovih rezultata izveden je i protumačen na novi način, polazeći od klasičnog Cardanovog rješenja kubne jednadžbe.

Summary

The main topic of this thesis is computation of the product d_n of chord lengths for the ellipse obtained by scaling a circle on which n equidistant points were chosen. The motivation for this problem originates from the corresponding result for the unit circle, namely $d_n = n$.

Th. E. Price derived a generalization of that result by exploring a certain family of polynomials $P_n(z)$. These polynomials are characterized by a recursion which brings them into a relation with generalized Lucas and Fibonacci polynomials. For an appropriate choice of parameters that describe the observed ellipse, one obtains $P_n(1) = L_n$ and $P'_n(1) = d_n = nF_n$, where L_n and F_n are the Lucas and Fibonacci numbers, respectively.

In the final chapter an alternative approach to Price's work is laid out, according to a recent paper by B. Blum-Smith and J. Wood (2018.). The main part of Price's results is derived and explained in a new fashion, starting with the classical Cardano's solution of the cubic equation.

Životopis

Rođena sam 01. 04. 1994. godine u Zadru. Tijekom školovanja u gimnaziji Jurja Barakovića posebno sam se zainteresirala za fiziku i matematiku. Uz podršku roditelja i prijatelja upisala sam se na Prirodoslovno - matematički fakultet 2013. godine.