

Bokulić, Ana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:508276>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2021-11-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ana Bokulić
ERGOPODRUČJA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Ana Bokulić

Diplomski rad

Ergopodručja

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2019.

Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Ivici Smoliću na stručnom vođenju i pomoći prilikom izrade ovog rada.

Također zahvaljujem svojim dugogodišnjim prijateljima, onima koje sam stekla tijekom studija, prijateljima s međunarodnih studentskih konferencija te obitelji na podršci u ovih pet godina.

Sažetak

Lense-Thirringova precesija općerelativistički je efekt koji nastaje kao posljedica "povlačenja" prostorvremena oko rotirajućeg tijela. Efekt se opaža i u blizini Zemlje, gdje je eksperimentalno provjeren sondom Gravity Probe B. Ekstremni oblik Lense-Thirringove precesije javlja se u ergopodručjima, dijelovima prostorvremena unutar kojih su svi fizikalni promatrači prisiljeni rotirati zajedno s objektom koji ju uzrokuje. Zbog svojih svojstava, ergopodručja omogućuju ekstrakciju rotacijske energije objekta mehanizmima kao što je Penroseov proces. U ovom je radu opisana geometrija ergopodručja koja se pojavljuju u rješenjima Einsteinove jednadžbe, s posebnim naglaskom na klasu slabo omeđenih ergopodručja. Uz to, analizirane su efikasnosti Penroseovog procesa i njegovih inačica u različitim vrstama prostorvremena.

Ključne riječi: crne rupe, Kerrovo prostorvrijeme, rotirajuće crvotočine, Lense-Thirringova precesija, Penroseov proces

Ergoregions

Abstract

Lense-Thirring precession is an effect predicted by general relativity which arises due to the dragging of spacetime near rotating body. This effect can be observed in the vicinity of Earth, where it was experimentally confirmed using the Gravity Probe B satellite. Extreme version of Lense-Thirring precession can be found inside ergoregions, parts of spacetime in which all physical observers must corotate with the object causing the aforementioned effect. Because of its properties, it is possible to extract rotational energy from ergoregions via physical mechanisms such as Penrose process. In this work we will describe the geometry of the ergoregions that appear in the solutions of Einstein's equation, with special emphasis on a subclass of ergoregions called weakly bounded. Additionally, we analyse the efficiency of Penrose process and its variants in different types of spacetimes.

Keywords: black holes, Kerr spacetime, rotating wormholes, Lense-Thirring precession, Penrose process

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Utjecaj rotirajućih masa na prostorvrijeme	1
1.2	Rotirajuća ljuska	3
1.3	Gravity Probe B	7
2	Definicija i osnovna svojstva ergopodručja	10
3	Geometrija ergopodručja	13
3.1	Klasifikacija ergopodručja	13
3.2	Lokalna struktura ergoplohe i degenerirane točke	14
3.3	Slabo omeđena ergopodručja	16
4	Ergopodručja u rješenjima Einsteinove jednačbe	19
4.1	Vakuumska rješenja	19
4.1.1	Kerovo prostorvrijeme	19
4.1.2	Kerr-Newmanovo prostorvrijeme	21
4.1.3	Kerr-Newman-NUT rješenje	22
4.1.4	Tomimatsu-Sato rješenje	23
4.1.5	BTZ crna rupa	24
4.2	Nevakuumska rješenja	25
4.2.1	Rotirajuće zvijezde	25
4.2.2	Rotirajuće crvotočine	26
5	Ekstrakcija energije	29
5.1	Penroseov proces	29
5.1.1	Efikasnost Penroseovog procesa	30
5.2	Superzračenje	31
5.3	Waldova nejednakost	34
5.4	Sudari u Kerrovom prostorvremenu	37
5.4.1	Energija u CM sustavu	37
5.4.2	Efektivni potencijal Kerrove crne rupe	38
5.4.3	Početni uvjeti	40
5.4.4	Specijalni slučajevi	41

5.5 Penroseov proces kod crvotočina	44
6 Zaključak	49
Dodaci	51
A Prostorvrijeme s Killingovim vektorskim poljem	51
B Kauzalna struktura prostorvremena	53
C Energijski uvjeti	55
Literatura	57

1 Uvod

1.1 Utjecaj rotirajućih masa na prostorvrijeme

U Newtonovoj teoriji, prostor je opisan kao nepromjenjiva struktura na koju prisutna materija ne utječe ni na koji način. U svom djelu *Principia*, Newton uvodi koncept apsolutnog prostora koji je “uvijek homogen i nepomičan” te bi kao takav postojao čak i kada u njemu ne bi bilo nikakve materije. Ideja apsolutnog prostora već je u Newtonovo doba naišla na protivnike. Prema Leibnizovom tumačenju, prostor se može definirati isključivo u kontekstu relativnih odnosa. Ako bi sva materija u svemiru nestala, pojam prostora izgubio bi značenje budući da je prostor ništa drugo nego skup udaljenosti između objekata. Kao glavni argument u prilog apsolutnom prostoru, Newton navodi misaoni eksperiment s kantom vode, u literaturi poznat kao “bucket experiment”. Ideja eksperimenta vrlo je jednostavna, kantu punu vode objesimo na učvršćeno uže koje potom zakrenemo u smjeru kazaljke na satu i pustimo. Kao što nam je iskustveno poznato, kanta će se početi okretati u suprotnom smjeru pritom ubrzavajući. Uz to, voda će se povući prema rubovima i njezina će površina poprimiti konkavni oblik. Dok je odgovor na pitanje zašto površina vode mijenja oblik očit, manje je jasno kako odrediti u odnosu na što ona tada rotira. Relativna rotacija između vode i kante ne može biti zaslužna za promjenu oblika površine vode. Naime, nakon što je puštena, kanta rotira u odnosu na vodu, ali površina ostaje ravna. Nakon nekog vremena voda i kanta rotiraju zajedno, nema relativnog gibanja, a površina je konkavna. Nakon što se kanta zaustavi, voda nastavlja rotirati i površina je i dalje konkavna. Prema Newtonu, jedino je moguće objašnjenje rotacija vode u odnosu na apsolutni prostor. Kada voda rotira u odnosu na apsolutni prostor njezina površina postaje konkavna, a ako nema relativne rotacije, površina je ravna.

U 19. stoljeću, fizičar E. Mach daje svoju interpretaciju Newtonovog eksperimenta. U knjizi o mehanici *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* tvrdi da “relativna rotacija vode u odnosu na kantu ne proizvodi opservabilne centrifugalne sile, već su te sile rezultat relativne rotacije u odnosu na masu Zemlje i ostalih nebeskih tijela”. Mach je Newtonov eksperiment preslikao i na samu Zemlju. Uspostavljajući tu analogiju, Zemljin ekvator ispupčen je iz istog razloga iz kojeg površina vode poprima konkavni oblik. U hipotetskoj situaciji u kojoj bi se Zemlja zaustavila, ali planeti se vrtjeli oko nje, njezin bi oblik ostao nepromijenjen. Newtonov bi zaključak bio drugačiji budući

da u tom slučaju Zemlja miruje u odnosu na postulirani apsolutni prostor. Slijedeći Machovo tumačenje, sva materija u svemiru odgovorna je za oblik Zemlje i površinu vode u Newtonovom eksperimentu. Hipoteza da su lokalni zakoni fizike određeni globalnom strukturom svemira naziva se Machovim principom.

Tragajući za relativističkom teorijom gravitacije, Einstein je unutar prvotno formuli-rane skalarne teorije gravitacije uočio efekt koji je smatrao direktnim dokazom Mac-hovog principa. Uveo je model tanke sferne ljuske mase M i radijusa R u čijem se centru nalazi probna masa m . Vanjska sila koja bi djelovala na ljusku linearno ju ubrzavajući, uzrokovala bi i linearnu akceleraciju mase m . Nedugo nakon što je pos-tavljena opća teorija relativnosti, Lense i Thirring objavili su članak u kojem je opisan utjecaj sporo rotirajuće kugle radijusa R na udaljen dio prostorvremena ($r \gg R$). Budući da doprinosi viših potencija omjera R/r iščezavaju, rezultat vrijedi ne samo za dio prostorvremena daleko od ljuske, već i čim je ispunjen uvjet $r/R > 1$. Dobiven je izraz za silu koja zakreće probnu masu u smjeru rotacije kugle. Sila je nalik na Coriolisovu:

$$\vec{a} = 2\vec{v} \times \vec{H}, \quad \vec{H} = \frac{2MR^2}{5r^3} \left(\vec{\omega} - 3 \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} \right), \quad (1.1)$$

gdje oblik \vec{H} možemo objasniti koristeći argument simetrije. Rotacijska perturbacija sfernog sistema u najnižem redu ima oblik dipolnog polja koje opada s r^{-3} . Ovaj općerelativistički efekt naziva se Lense-Thirringovom precesijom ili “povlačenjem inercijalnih sustava”. Ekstremna manifestacija efekta pojavljuje se u ergopodručjima unutar kojih nema statičnih promatrača, već svi rotiraju u smjeru tijela koje ga uzrokuje.

Einsteinova opća teorija relativnosti udružila je prostor i vrijeme u jedinstvenu struk-turu nazvanu prostorvremenom. Materija oblikuje prostorvrijeme na način da ga masivni objekti zakrivljuju, a rotirajući povlače za sobom. Iako je sam Einstein za-ključio da su ti efekti toliko slabi da nije realno očekivati njihovu eksperimentalnu provjeru, do danas je uspješno provedeno nekoliko eksperimenata. Najpoznatiji od njih je Gravity Probe B, o kojem će više riječi biti u narednim poglavljima.

1.2 Rotirajuća ljuska

Za ilustraciju Lense-Thirringove precesije možemo se poslužiti modelom rotirajuće ljuske [2]. Zanima nas kako se gibaju promatrači unutar spororotirajuće sferne ljuske radijusa R , mase M i angularnog momenta J . Prostorvrijeme izvan ljuske dobro je opisano Kerrovom metrikom u aproksimaciji u kojoj zadržavamo samo linearne doprinose u parametru $a = J/M$:

$$ds_+^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{4Ma}{r}\sin^2\theta dt d\phi. \quad (1.2)$$

U odnosu na vanjski dio prostorvremena, inducirana metrika ljuske glasi:

$$ds_\Sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)dt^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{4Ma}{R}\sin^2\theta dt d\phi. \quad (1.3)$$

Promjenom koordinatnog sustava, gornja se metrika može svesti na dijagonalni oblik. Prelazimo u rotirajući sustav koji u odnosu na početni rotira angularnom brzinom Ω , što se postiže uvođenjem nove angularne koordinate ψ povezane s ϕ sljedećom relacijom:

$$\psi = \phi - \Omega t. \quad (1.4)$$

Očekujemo da će angularna brzina Ω biti proporcionalna angularnom momentu ljuske a te stoga $d\phi^2$ možemo aproksimirati s $d\psi^2 + 2\Omega dt d\psi$. Nedijagonalni član u induciranoj metrici nestaje ako Ω izaberemo kao:

$$\Omega = \frac{2Ma}{R^3}. \quad (1.5)$$

Uz ove zamjene, inducirana metrika poprima oblik:

$$h_{ab}dy^a dy^b = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)dt^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2). \quad (1.6)$$

Iz prostornog dijela metrike jasno je vidljiva sferna geometrija ljuske.

Prostorvrijeme unutar ljuske je ravno:

$$ds_-^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)dt^2 + d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.7)$$

gdje ρ označava radijalnu koordinatu. Unutrašnje rješenje mora se podudarati s vanjskim za $\rho = R$. Usporedbom s izrazom (1.6) vidimo da je taj uvjet ispunjen i inducirana metrika ljuske je kontinuirana.

Vanjska zakrivljenost hiperplohe tenzor je koji opisuje geometriju hiperplohe u odnosu na prostor više dimenzije u koji je uronjena. Definira se s:

$$K_{ab} = (\nabla_\beta n_\alpha) e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (1.8)$$

Vanjsku zakrivljenost prvo računamo u odnosu na vanjsku metriku. Normala plohe je u tom slučaju $n_\alpha = f^{-1/2}\partial_\alpha r$, a parametarske jednadžbe hiperploha su oblika $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ te glase $t = t_0$, $\theta = \theta_0$, $\phi = \psi + \Omega t$. Tangentni vektori $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$ su:

$$e_t^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi, \quad (1.9)$$

$$e_\theta^\alpha \partial_\alpha = \partial_\theta, \quad (1.10)$$

$$e_\psi^\alpha \partial_\alpha = \partial_\phi. \quad (1.11)$$

Preostaju sljedeće komponente vanjske zakrivljenosti:

$$K^t_t = \frac{M}{R^2\Gamma}, \quad (1.12)$$

$$K^t_\psi = -\frac{3Ma\sin^2\theta}{R^2\Gamma}, \quad (1.13)$$

$$K^\psi_t = \frac{3Ma}{R^4}\Gamma, \quad (1.14)$$

$$K^\theta_\theta = K^\psi_\psi = \frac{\Gamma}{R}, \quad (1.15)$$

gdje je kao pokrata uveden faktor $\Gamma = \sqrt{1 - 2M/R}$.

Ponavljamo postupak računanja vanjske zakrivljenosti u odnosu na unutrašnjost lju-

ske. Normala plohe je sada $n_\alpha = \partial_\alpha \rho$, a tangentni vektori:

$$e_t^\alpha \partial_\alpha = \partial_t, \quad (1.16)$$

$$e_\theta^\alpha \partial_\alpha = \partial_\theta, \quad (1.17)$$

$$e_\psi^\alpha \partial_\alpha = \partial_\psi. \quad (1.18)$$

Jedine neiščezavajuće komponente vanjske zakrivljenosti su:

$$K_\theta^\theta = K_\psi^\psi = \frac{1}{R}. \quad (1.19)$$

Na mjestu ljuske vanjska zakrivljenost nije kontinuirana. Sljedeći izraz povezuje navedeni skok u ekstrinzičnoj zakrivljenosti s površinskim tenzorom energije i impulsa S_{ab} :

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi}([K_{ab}] - [K]h_{ab}), \quad (1.20)$$

gdje su $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$ i $[K] = K_{ab}^+ h^{ab} - K_{ab}^- h^{ab}$ razlike tenzora K_{ab} i njegovog traga pri prijelazu s vanjske u unutrašnju stranu ljuske, a ϵ norma vektora normale plohe. Za komponente površinskog tenzora energije i impulsa dobiva se:

$$S_t^t = -\frac{1}{4\pi R}(1 - \Gamma), \quad (1.21)$$

$$S_\psi^t = \frac{3Ma \sin^2 \theta}{8\pi R^2 \Gamma}, \quad (1.22)$$

$$S_t^\psi = -\frac{3Ma}{8\pi R^4} \Gamma, \quad (1.23)$$

$$S_\theta^\theta = S_\psi^\psi = \frac{1 - M/R - \Gamma}{8\pi R \Gamma}. \quad (1.24)$$

Kako bismo mogli fizikalno interpretirati izračunate komponente, tenzor S_{ab} zapisujemo u obliku koji odgovara idealnom fluidu:

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b + p(h^{ab} + u^a u^b), \quad (1.25)$$

gdje je u^a normaliziran vektor četverobrzine fluida, σ površinska gustoća i p površinski tlak. Kontrahiranjem gornjeg izraza prvo s metričkim tenzorom, a potom

s čeverovektorom brzine, dobiva se svojstvena jednadžba:

$$S^a_b u^b = -\sigma u^a. \quad (1.26)$$

Četverovektor u^a vlastiti je vektor tenzora površinske energije i impulsa s pripadnom vlastitom vrijednošću $-\sigma$. Umjesto rješavanja sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice (dvije komponente četverobrzine i površinska gustoća), možemo zaključiti kakav oblik ima vektor u^a . Sferna ljuska giba se u smjeru ψ jednolikom angularnom brzinom pa njezinu brzinu zapisujemo kao

$$u^a = \gamma(t^a + \omega\psi^a), \quad (1.27)$$

gdje su $t^a = \partial y^a / \partial t$ i $\psi^a = \partial y^a / \partial \psi$ Killingovi vektori inducirane metrike h_{ab} . Angularna brzina ljuske u rotirajućem sustavu jednaka je $\omega = d\psi/dt$, a norma vektora $\gamma = 1/\Gamma$ dobivena je iz normalizacijskog uvjeta za vektore vremenskog tipa $h_{ab}u^a u^b = -1$. Članove kvadratne u angularnoj brzini ω odbacujemo budući da je proporcionalna parametru a . Raspisivanjem svojstvene jednadžbe po komponentama slijede jednadžbe (1.28) i (1.29), a površinski tlak dobiva se kontrahiranjem izraza (1.25) metričkim tenzorom h_{ab} :

$$\sigma = -S^t_t, \quad (1.28)$$

$$\omega = -\frac{S^{\psi}_t}{-S^t_t + S^{\psi}_\psi}, \quad (1.29)$$

$$p = \frac{1}{2}(S^{ab}h_{ab} + \sigma). \quad (1.30)$$

Uvrštavanjem pripadnih komponenti tenzora S_{ab} te pojednostavljivanjem izraza, gornje jednadžbe svode se na

$$\omega = \frac{6Ma}{R^3} \frac{\Gamma^2}{(1-\Gamma)(3+\Gamma)}, \quad (1.31)$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi R}(1-\Gamma), \quad (1.32)$$

$$p = \frac{1 - M/R - \Gamma}{8\pi R\Gamma}. \quad (1.33)$$

Metrika (1.2) u asimptotskom se području ($r \rightarrow \infty$) svodi na statični prostor Minkowskog. Sustav u kojem je zapisana služi kao fiksni sustav u odnosu na koji određujemo

brzinu rotacije objekata. Transformacijom (1.4) prelazimo u novi sustav te je metrika unutar ljuske zapisana u sustavu koji rotira u odnosu na fiksni. Promatrač čija je koordinata ψ konstantna giba se angularnom brzinom $d\phi/dt = \Omega$. Gledano iz fiksnog sustava, zaključujemo da promatrači unutar ljuske rotiraju angularnom brzinom $\Omega_u = \Omega$:

$$\Omega_u = \frac{2Ma}{R^3}. \quad (1.34)$$

Angularno gibanje promatrača posljedica je rotacije ljuske, što je demonstracija efekta povlačenja inercijalnih sustava. Angularna brzina ljuske ω (1.31) izračunata je u rotirajućem sustavu. Promatrano iz fiksnog sustava, brzina rotacije ljuske iznosi $\Omega_{ljuska} = d\phi/dt = d\psi/dt + \Omega = \omega + \Omega_u$. Uvrštavanjem poznatih rezultata slijedi

$$\Omega_{ljuska} = \frac{2Ma}{R^3} \frac{1 + 2\Gamma}{(1 - \Gamma)(1 + 3\Gamma)}. \quad (1.35)$$

Obratimo pažnju na dva limesa; kada je radijus ljuske puno veći od njezine mase te kada se radijus približava vrijednosti $2M$:

$$\Omega_u/\Omega_{ljuska} = \begin{cases} 4M/(3R), & R \gg 2M \\ 1, & R \rightarrow 2M \end{cases}$$

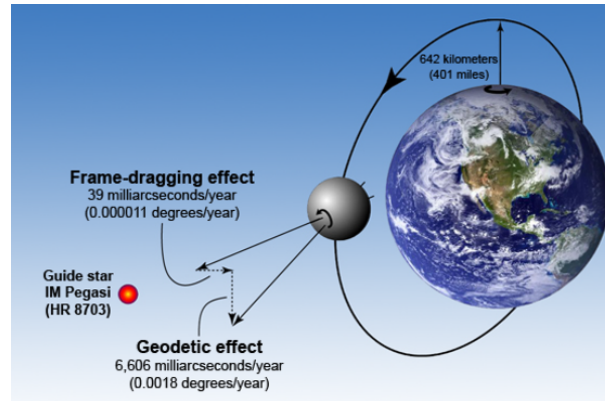
U prvom slučaju promatrači unutar ljuske rotiraju brzinom koja je puno manja od angularne brzine ljuske, dok u drugom rotiraju jednakom brzinom kao i sama ljuska.

1.3 Gravity Probe B

Eksperiment Gravity Probe B [3], [4] dizajniran je u svrhu provjere dviju predikcija opće teorije relativnosti, geodetske i Lense-Thirringove precesije. Oba su efekta mjerena u Zemljinoj orbiti na visini od 642 km pomoću četiri žiroskopa satelita Gravity Probe B.

Geodetska precesija javlja se zbog zakrivljenosti prostorvremena oko masivnog objekta. Tijekom gibanja oko Zemlje, os žiroskopa sporo precesira u ravnini orbite satelita. Ovaj efekt može se vizualizirati tako da zamislimo štap koji se giba duž površine Zemlje u smjeru paralelnom vlastitoj duljini te se zbog zakrivljenosti

površine vraća u ishodišnu točku malo drugačije usmjeren nego što je bio na početku. Kao posljedica Zemljine rotacije događa se Lense-Thirringova precesija zbog koje žiroskop precesira u ravnini okomitoj na orbitu.



Slika 1.1: Shematski prikaz orbite satelita Gravity Probe B i precesija uzrokovanih relativističkim efektima, preuzeto iz [3]

Temeljni dio eksperimentalnog postava čine četiri žiroskopa i teleskop. Svaki je žiroskop sferni rotor veličine ping-pong loptice te je prekriven slojem niobija. Žiroskopi su pohranjeni u spremnike s tekućim helijem ohlađenim na temperaturu od 1.8K. Osim što tekući helij vrlo niske temperature služi kao termalna izolacija, na toj temperaturi niobij postaje supravodljiv. Struje u niobiju induciraju magnetski moment paralelan osi rotacije žiroskopa. Vrlo osjetljivi detektori magnetskog polja pričvršćeni za kućište žiroskopa mogu zabilježiti promjene u orijentaciji magnetskog momenta reda veličine minute te na taj način mjere navedene precesije. Olovni štit oko žiroskopa služi kao zaštita od vanjskih magnetskih smetnji. Žiroskopi su poravnati duž osi simetrije satelita koja je ujedno i optička os teleskopa. Kao referentna zvijezda izabrana je IM Pegasi budući da je dovoljno sjajna da ju se može pratiti teleskopom na sondi, a i dovoljno je snažan radio izvor da se njezina putanja može odrediti radio teleskopima na Zemlji. Za kalibraciju detektora magnetskog polja korištena je aberacija svjetlosti. Usmjerenje teleskopa mora se mijenjati kako bi se kompenziralo orbitalno gibanje satelita i Zemlje. Tada teleskop i rotori nisu međusobno poravnati, ali se pomak u usmjerenju između njih može izračunati. Prilikom mjerenja, pojavilo se nekoliko povezanih problema. Uočeno je da se događaju nasumični skokovi u orijentaciji rotora te da se unatoč olovnom štitu javljaju vanjski magnetski momenti sile. Ispostavilo se da zbog nečistoća postoje razlike između elektrostatičkih potencijala na površini rotora i kućišta, čija interakcija uz-

rokuje spomenute skokove u orijentaciji rotora. Utjecaj vanjskih momenata uzet je u obzir te kvantificiran uvođenjem dodatnih parametara u model. Nakon primjene tako modificiranog modela na svaki pojedini žiroskop, problem s promjenom orijentacije žiroskopa je uklonjen te su dobivene konzistentne vrijednosti precesija. Osim toga, trebalo je uzeti u obzir i da rotori nisu u potpunosti sferični pa njihove glavne osi rotiraju oko osi spina. Glavni nedostatak modela s velikim brojem parametara porast je nepouzdanosti mjerenja. Umjesto početno planiranih 1%, nepouzdanost je u konačnom rezultatu narasla na oko 20% kod Lense-Thirringove precesije.

Unatoč preprekama prilikom mjerenja, eksperiment je uspješno proveden i konačni su rezultati objavljeni 2011. godine. Usporedbom izmjerenih vrijednosti precesija te onih teorijski predviđenih, zaključujemo da je opća teorija relativnosti uspješno prošla još jedan test.

	izmjereno	teorijski
Geodetska precesija	6602 ± 18	6606
Lense-Thirringova precesija	37.2 ± 7.2	39.2

Tablica 1.1: Izmjerene i izračunate vrijednosti precesija izražene u tisućinkama lučnih sekunda (eng. *mas*) po godini, preuzeto iz [3]

2 Definicija i osnovna svojstva ergopodručja

Dio prostorvremena izvan horizonta rotirajuće crne rupe u kojem asimptotski vremensko Killingovo vektorsko polje⁽¹⁾ postaje svjetlosnog tipa naziva se **ergopodručjem**. Iako se pojam ergopodručja najčešće susreće u kontekstu Kerrovih crnih rupa, ona su prisutna i u drugačijim vrstama prostorvremena. Zbog toga je nužno definirati ergopodručje na najopćenitiji način, ne pozivajući se ni na jedno specifično rješenje Einsteinove jednadžbe. Za asimptotski ravna prostorvremena Hajiček [5] formulira matematički preciznu definiciju⁽²⁾.

Definicija 1.1 (Ergopodručje)

Neka je (M, g_{ab}) stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme i k^a Killingov vektor vremenskog tipa u otvorenoj podmnogostrukosti $O \subseteq M$, čiji rub uključuje hiperplohe \mathcal{S}^+ i \mathcal{S}^- .⁽³⁾ Otvorena podmnogostrukost $E \subseteq M$ naziva se ergopodručjem ako zadovoljava sljedeće uvjete:

- a) k^a je prostornog tipa u E ,
- b) $\partial E \cap \partial O \neq \emptyset$,
- c) $I^+(\mathcal{S}^-) \cap I^-(\mathcal{S}^+) \cap E \neq \emptyset$.⁽⁴⁾

Posljedica prvog uvjeta je ta da u ergopodručju ne postoje statični promatrači, odnosno oni čije su prostorne komponente četverovektora brzine jednake nuli. Četverovektor brzine statičnog promatrača zapisujemo kao $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ te znamo da se bilo koji fizikalno realistični objekti kreću po krivuljama vremenskog ili svjetlosnog tipa. U skladu s tim, normalizacija četverovektora brzine je $u^\mu u_\mu \leq 0$ iz čega slijedi $(u^0)^2 g_{tt} \leq 0$. Za Killingovo vektorsko polje unutar ergopodručja vrijedi $k^\mu k_\mu = g_{tt} \geq 0$. Iz toga zaključujemo da uvjet statičnosti nije konzistentan s definicijom ergopodručja. Kasnije će biti eksplicitno pokazano da svi promatrači u ergopodručju Kerrove crne rupe rotiraju zajedno s njom.

Iz drugog uvjeta slijedi da postoji statička granica na kojoj je $g_{tt} = 0$. Granična ploha $\partial E \cap \partial O$ koja odvaja područje O od ergopodručja naziva se **ergoplohom**. U prostorvremenu može postojati više hiperploha na kojima komponenta g_{tt} iščezava

⁽¹⁾definicija A.1., dodatak A

⁽²⁾Njegova definicija ergopodručja uključuje i dio unutar horizonta gdje je vektor k prostornog tipa.

⁽³⁾značenje navedenih hiperploha objašnjeno je u odlomku o Penroseovim dijagramima u dodatku B

⁽⁴⁾skupovi I^+ i I^- objašnjeni su u definiciji B.3. u dodatku B

(kao npr. u Kerrovom), no fizikalno je važna ona vanjska. Definiranjem O kao područja koje uključuje beskonačnost, u obzir se automatski uzima samo vanjska granica.

Za razliku od horizonta, ergoploha nije hiperploha svjetlosnog tipa te stoga propušta čestice u oba smjera. To svojstvo ergoplohe sadržano je u trećem uvjetu, a ključno je za realizaciju mehanizama ekstrakcije energije. Njegova je interpretacija sljedeća: čestice koje dolaze iz daljine mogu ući u ergopodručje, a čestice koje ga napuštaju mogu doći do asimptotskog područja.

Ergopodručja mogu postojati isključivo u nestatičnim prostorvremenima. Prije formalnog dokaza te tvrdnje, navedeno je nekoliko definicija i tehničkih rezultata iz diferencijalne geometrije korištenih prilikom dokazivanja.

Definicija 1.2.

Neka je K^a Killingovo vektorsko polje. Funkciju N i 1-formu ω definirane s

$$N = (K|K), \quad \omega = - * (K \wedge dK), \quad (2.1)$$

nazivamo normom Killingovog vektora i zakretom (eng. *twist*).

Definicija 1.3. (statično prostorvrijeme)

Prostorvrijeme nazivamo statičnim ako je Killingovo vektorsko polje k^a koje generira simetriju na translacije u vremenu ortogonalno na hiperplohe.

Korolar 1.1.

Stacionarno prostorvrijeme je statično ako i samo ako je $k \wedge dk = 0$, odnosno, ako zakret Killingovog vektora k iščezava.

Dokaz: Rezultat slijedi primjenom identiteta koji povezuje dk i ω (dodatak A, identitet f):

$$-2 * \left(k \wedge \frac{\omega}{N^2} \right) = d \left(\frac{k}{N} \right), \quad (2.2)$$

iz kojeg je odmah vidljivo da $\omega = 0$ nužno povlači $d(k/N) = 0$ i obrnuto. Ako ω iščezava, 1-forma k/N je zatvorena i lokalno postoji funkcija f takva da je $k = Ndf$, što implicira da je vektor k ortogonalan na hiperplohe $f = \text{konst}$.

Definicija 1.4. (Killingov horizont)

Neka je K^a općenito Killingovo vektorsko polje. Killingov horizont H hiperploha je svjetlosnog tipa takva da je polje K^a ortogonalno na nju. Vektorsko polje koje je ortogonalno na hiperplohu svjetlosnog tipa ujedno je i tangentno na nju pa vrijedi $K^\mu K_\mu = 0$ na H .

Teorem 1.1. (Carter-Vishveshwara) [7], [8]

Neka je k^a Killingovo vektorsko polje i $S[k]$ hiperploha takva da vrijedi:

$$N = (k|k) \stackrel{S}{=} 0 \text{ i } dN \stackrel{S}{\neq} 0.$$

Tada je $S[k]$ hiperploha svjetlosnog tipa ako i samo ako je Killingovo vektorsko polje ortogonalno na hiperplohu $S[k]$. Posljedica je ta da se u statičnom prostoru vremenu ergoploha podudara s Killingovim horizontom.

Dokaz: Iz identiteta e) i g) u teoremu A.2. (dodatak A) slijedi: $(dN|dN) \stackrel{S}{=} (\omega|\omega)$ i $(dN|\omega) \stackrel{S}{=} 0$. Ako je Killingovo vektorsko polje ortogonalno na $S[k]$, tada je po definiciji 1.3. i korolaru 1.1. $\omega \stackrel{S}{=} 0$ i samim time i $(dN|dN) \stackrel{S}{=} 0$. Budući da vrijedi $dN \stackrel{S}{\neq} 0$, dN mora biti proporcionalan normalni na $S[k]$, koja je u tom slučaju svjetlosnog tipa.

Ako polazimo od pretpostavke da je $S[k]$ svjetlosnog tipa i nedegenerirana ($dN \stackrel{S}{\neq} 0$), tada je $(dN|dN) \stackrel{S}{=} 0$. Dakle, k^a i $(dN)^a$ svjetlosnog su tipa na $S[k]$ i međusobno ortogonalni jer uvijek vrijedi $(k|dN) = \mathcal{L}_k N = 0$. Zbog toga su i proporcionalni, $k \stackrel{S}{=} \rho dN$, gdje je ρ neka funkcija. Odnosno, k^a proporcionalan je normalni na $S[k]$ pa je ortogonalan na tu hiperplohu. Iz toga slijedi i $dN \wedge dK \stackrel{S}{=} dN \wedge d(\rho dN) = 0$, pa i $\omega \stackrel{S}{=} 0$.

3 Geometrija ergopodručja

Ergopodručja možemo podijeliti u dvije klase ovisno o svojstvima pripadnih ergoploha (oznaka: \mathcal{E}). Za klasu tzv. slabo omeđenih ergopodručja (eng. *weakly bounded ergospheres*) [5], kojoj između ostalih pripadaju ergopodručja Kerr-Newmanove familije crnih rupa, možemo dokazati netrivialnu tvrdnju. Naime, pokazat ćemo da ergoplohe ovog tipa u određenim točkama dodiruju ili horizont crne rupe ili singularitet. Prvo definiramo lokalna svojstva ergoplohe, što podrazumijeva odabir koordinatnog sustava na ergoplohi te identifikaciju degeneriranih točaka u kojima neki od vektora postaju linearno zavisni. Potom iz svojstava degeneriranih točaka i činjenice da na ergoplohi slabo omeđenog ergopodručja postoje bar dvije takve točke slijedi traženi rezultat. Kako bismo pokazali da degenerirane točke uistinu postoje na ergoplohi, pretpostavljamo određenu vezu Killingovog vektorskog polja i tenzora energije i impulsa ili, manje općenito, vakuumsko rješenje.

3.1 Klasifikacija ergopodručja

Prije podjele ergopodručja u dvije skupine, zadajemo uvjete koje mora zadovoljavati promatrano prostorvrijeme. Uvjeti su općenitog tipa, a tiču se stabilnosti i kauzalne strukture prostorvremena. Ako je prostorvrijeme stabilno, proizvoljno male promjene metrike neće mijenjati na njegova svojstva. Osim toga, prostorvrijeme mora biti bez zatvorenih vremenskih krivulja (barem unutar ergopodručja). Taj uvjet ekvivalentan je stabilnoj kauzalnosti (definicija B.5.), što znači da postoji globalno definirana vremenska funkcija t . Duž bilo koje buduće usmjerene kauzalne krivulje, t mora rasti, a skupovi S_t za koje je funkcija t konstantna trodimenzionalne su i glatke hiperplohe prostornog tipa bez ruba.

Presjek ergoplohe i plohe S_t u trenutku t označit ćemo s \mathcal{E}_t . Presjek \mathcal{E}_t dvodimenzionalna je ploha, koja može, ali i ne mora biti omeđena u S_t . Ako je omeđena, takva ergopodručja nazivamo slabo omeđenima.

3.2 Lokalna struktura ergoplohe i degenerirane točke

Iz norme N Killingovog vektora k i ranije uvedenog zakreta ω :

$$N = (k|k), \quad (3.1)$$

$$\omega = - * (k \wedge dk), \quad (3.2)$$

konstruiramo 1-formu l i skalar $\delta\omega$:

$$l = dN = -i_k dk, \quad (3.3)$$

$$\delta\omega = *(dk \wedge dk), \quad (3.4)$$

gdje l^a mjeri zakrivljenost integralnih krivulja vektora k^a (orbita). Vektorska polja l^a i ω^a ortogonalna su na vektor k^a :

$$(k|l) = (k|\omega) = 0. \quad (3.5)$$

Svugdje u prostoru vremenu vrijede sljedeći identiteti⁽⁵⁾:

$$Ndk = -k \wedge l + *(k \wedge \omega), \quad (3.6)$$

$$(\omega|\omega) = (l|l) - N(dk|dk), \quad (3.7)$$

$$(\omega|l) = \frac{N}{2}\delta\omega. \quad (3.8)$$

Riccijev tenzor i zakret povezani su izrazom:

$$d\omega = -2 * (k \wedge R(k)), \quad (3.9)$$

koji je jednak nuli u vakuumu te je ω_a zatvorena forma. Tada postoji funkcija ω takva da je:

$$\omega_a = \partial_a \omega. \quad (3.10)$$

⁽⁵⁾Dokazi identiteta korištenih u ovom poglavlju mogu se naći u teoremu A.2. unutar dodatka A

Funkciju ω možemo definirati i u općenitijem slučaju kada je vektor ω^a ortogonalan na hiperplohe u okolini U točke p . Taj je uvjet ispunjen ako u U vrijedi:

$$T^a_b k^b = \rho k^a, \quad (3.11)$$

gdje je T^a_b tenzor energije i impulsa, a ρ funkcija. Gornja jednakost znači da se u području gdje je k^a vremenskog tipa tok materije podudara s integralnim krivuljama k^a do na parametrizaciju.

Sada nas zanimaju lokalna svojstva ergoplohe \mathcal{E} . Na ergoplohi je po definiciji $N = 0$ i općenite se relacije svode na:

$$-k \wedge l + *(k \wedge \omega) = 0, \quad (3.12)$$

$$(\omega|\omega) = (l|l), \quad (3.13)$$

$$(\omega|l) = 0. \quad (3.14)$$

Vektori k^a , l^a i ω^a međusobno su ortogonalni na \mathcal{E} , k^a svjetlosnog je tipa, a l i ω imaju jednake norme. Točke na ergoplohi u kojima su navedeni vektori linearno zavisni ($k \wedge l \wedge \omega = 0$) nazivamo degeneriranim točkama. Ovisno o ponašanju vektora k^a i l^a u degeneriranoj točki p , razlikujemo tri vrste degeneracije [5]:

a) $k^a = 0$ u p

Dokazujemo da niti jedna kauzalna krivulja (definicija B.2.) ne može ući ili napustiti ergopodručje kroz točku a-tipa. Izaberemo okolinu U točke p tako da je svaka točka u U povezana s p geodezikom sadržanim u U . Neka je $q \in U$ unutar ili na rubu svjetlosnog stošca točke p . Tada u U postoji geodezik vremenskog ili svjetlosnog tipa γ koji povezuje p i q . Ako je u^a vektor tangentan geodeziku γ , produkt $(u|k)$ konstantan je duž γ (teorem A.1.). No, u točki p vektor k^a iščezava, pa je konstanta jednaka nuli. Tada k^a ne može biti vremenskog tipa u q jer je u^a kauzalan, što znači da se svjetlosni stožac od p u potpunosti nalazi u ergopodručju.

b) $k^a \neq 0$ i $l^a \neq 0$ u p

Dokazujemo tvrdnju da su vektori k^a i l^a kolinearni u b-točki. Ako je $(\omega|\omega)|_p = 0$, tada je i $(l|l) = 0|_p$. Iz $(k|l) = 0|_p$ i $(k|k) = 0|_p$ slijedi $k \wedge l = 0$ jer su ortogonalni vektori

svjetlosnog tipa kolinearni. Ako je $(\omega|\omega)|_p \neq 0$, vektor ω^a u točki p možemo zapisati kao linearnu kombinaciju $\omega^a = \alpha k^a + \beta l^a$ jer je p po pretpostavci degenerirana. Vektori l^a i ω^a međusobno su ortogonalni pa je $\beta = 0$ i $(k \wedge \omega)|_p = 0$. Iz identiteta (3.14) proizlazi $k \wedge l = 0$. Vektor l^a proporcionalan je vektoru k^a u p pa pišemo $l^a = \alpha k^a$, gdje je α konstanta različita od nule.

Vektor l^a ortogonalan na \mathcal{E} svjetlosnog je tipa u točki p zbog čega sve kauzalne krivulje kroz p mogu ili izlaziti ili ulaziti u ergopodručje. Orbita γ kroz p geodezik je svjetlosnog tipa čija parametrizacija nije afina, što je vidljivo iz definicije vektora l . Izraz (3.5) u točki b-tipa glasi $\alpha k_a = -2k^b \nabla_b k^a$, a to je upravo jednačba geodezika čiji parametar nije afina.

Orbita γ nepotpuna je u smjeru l^a . Postoje dvije mogućnosti: γ ili ima krajnju točku q koja je točka a-tipa na \mathcal{E} ili je prostorvrijeme singularno i ergoploha dodiruje taj singularitet [6].

c) $k^a \neq 0$ i $l^a = 0$ u p .

Iz definicije vektora l^a u ovom slučaju slijedi $k^b \nabla_b k^a = 0$, što je jednačba afino parametriziranog geodezika. Dakle, orbita γ kroz p geodezik je svjetlosnog tipa čiji je parametar afina te je potpuna u oba smjera [6]. U realističnim prostorvremenima generičkih svojstava ne očekuje se prisustvo c-točaka zbog njihove nestabilnosti.

3.3 Slabo omeđena ergopodručja

Pozivajući se na tvrdnje o lokalnim svojstvima ergoplohe, možemo opisati klasu slabo omeđenih ergopodručja u cjelini. Svojstvo slabo omeđenih ergopodručja navedeno je u sljedećem teoremu koji je potom i dokazan.

Teorem 2.1. Unutar slabo omeđenog ergopodručja postoji ili singularitet ili horizont crne rupe [5].

Dokaz: Neka je t takav da je skup \mathcal{E}_t neprazan i omeđen u S_t . Uz to, \mathcal{E}_t je i zatvoren u S_t pa postoje dvije mogućnosti: ili je \mathcal{E}_t kompaktan ili S_t nije geodetski potpun. Ako S_t nije potpun, mnogostrukost M je singularna i ergoploha \mathcal{E} dodiruje taj singularitet jer bi u protivnom bila kompaktan.

Kako bismo dokazali drugi dio tvrdnje, pretpostavimo da je skup \mathcal{E} kompaktan. Budući da je kontinuirana, funkcija ω ima bar jedan minimum i maksimum na \mathcal{E}_t .

Točku u kojoj ω postiže ekstremalnu vrijednost označit ćemo s p . U točki p tada vrijedi

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \quad (3.15)$$

gdje su x i y lokalne koordinate na \mathcal{E}_t . U idućem koraku treba pokazati da je točka p degenerirana. Pretpostavimo suprotno, točka p je nedegenerirana i u njoj vrijedi

$$k_a l_b - k_b l_a \neq 0. \quad (3.16)$$

Ova relacija mora vrijediti i u okolini U točke p . Koordinatni sustav na U biramo na sljedeći način: integralne krivulje k^a nazivamo u -linijama, a integralne krivulje l^a v -linijama. Koordinatni sustav na $\mathcal{E}_t \cap U$ određen je s $u = v = 0$ i dvije glatke koordinate x i y koje su konstantne duž u i v linija. Ovako izabran koordinatni sustav dobro je definiran jer vektorska polja k^a i l^a međusobno komutiraju te su nezavisna. Iz izraza (3.5), (3.14) i (3.10) slijedi:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial v} = 0, \quad (3.17)$$

dok je zbog (3.10), (3.15) i (3.17) $\omega^a = 0$ u p . To je u kontradikciji s tvrdnjom (3.16) da je točka p nedegenerirana jer je drugi član u izrazu (3.12) jednak nuli. Po klasifikaciji degeneriranih točaka, ako je \mathcal{E} nesingularna i prostorvrijeme bez specifičnih fizikalnih svojstava (nestabilnost, zatvorene vremenske krivulje...), degenerirana točka pripada a-tipu. Preostaje dokazati da svaka degenerirana točka a-tipa na \mathcal{E} podrazumijeva horizont u \bar{E} .

Točku a-tipa na \mathcal{E} označit ćemo s q , kronološku budućnost točke q u M s $I^+(q)$, a rub $I^+(q)$ u M s $\partial I^+(q)$. Ograničili smo se na generička prostorvremena pa M mora biti kauzalno. $I^+(q)$ je neprazan skup, pa i $\partial I^+(q)$ također mora biti neprazan jer bi inače vrijedilo $I^+(q) = M$ i M ne bi bilo kauzalno. Hiperploha $\partial I^+(q)$ generirana je geodezicima svjetlosnog tipa.

Točka q fiksna je točka grupe izometrija prostorvremena G generirana Killingovim vektorskim poljem k^a . Slijedi da je za svaki $g \in G$:

$$g(\partial I^+(q)) = \partial I^+(q), \quad (3.18)$$

budući da grupa G vektore svjetlosnog tipa ostavlja nepromijenjenima. Ako je $r \in \partial I^+(q)$ i γ orbita kroz r , tada je $\gamma \subset \partial I^+(q)$ (teorem B.1.) i krivulja γ nije vremenskog tipa. Posljedica toga je:

$$\partial I^+(q) \cap O = \emptyset. \quad (3.19)$$

Podmnogostrukost O je povezana pa je ili $O \subset I^+(q)$ ili $O \subset M - I^+(q)$.

Prostorvrijeme je jako kauzalno (definicija B.4.), što znači da svaka točka prostorvremena ima okolinu kroz koju niti jedna kauzalna krivulja ne prolazi više od jednom. Neka je V takva okolina točke q . Točka q dio je ergoplohe ($\partial E \cap \partial O$), pa je $V \cap O \neq \emptyset$. Ranije je pokazano da V možemo izabrati tako da se svjetlosni stožac točke q u potpunosti nalazi u E , to jest da kauzalna prošlost i budućnost q u V nisu dio prostora O . Tada $V \cap O$ ne može sjeći $I^+(q)$ i od dvije opcije preostaje:

$$O \subset M - I^+(q). \quad (3.20)$$

Budući da je O otvoren skup, niti jedna buduće usmjerena kauzalna krivulja s početkom u q ne dolazi do O , a time niti do \mathcal{I}^+ . Tada za kronološku budućnost q vrijedi

$$I^+(q) \subset M - I^-(\mathcal{I}^+). \quad (3.21)$$

Jedini podskupovi povezanog skupa, a čiji su rubovi prazni su cijeli skup i prazan skup pa rub $\partial I^-(\mathcal{I}^+)$ u M nije prazan. Rub $\partial I^-(\mathcal{I}^+)$ definicija je horizonta crne rupe, hiperplohe svjetlosnog tipa koja je invarijantna na djelovanje grupe G (definicija B.6.). Iz istog razloga kao i $\partial I^+(q)$, nije dio O . Slijedi $q \in \partial I^-(\mathcal{I}^+)$, pa i $\partial I^-(\mathcal{I}^+) \subset \bar{E}$.

Identične tvrdnje vrijede i ako kronološku budućnost zamijenimo s kronološkom prošlošću. Analognim postupkom zaključujemo da tada u \bar{E} postoji drugi horizont, $\partial I^+(\mathcal{I}^-)$, koji zbog relacije $q \in \partial I^+(\mathcal{I}^-)$ siječe $\partial I^-(\mathcal{I}^+)$.

4 Ergopodručja u rješenjima Einsteinove jednađbe

U nastavku slijedi pregled rješenja Einsteinove jednađbe u kojima se pojavljuju ergopodručja. Iz ranije napravljenih općenitih razmatranja, zaključujemo da će zajednička svojstva svih prostorvremena biti stacionarnost i nestatičnost. Rješenja možemo podijeliti u dvije skupine, vakuumska i nevakuumska. U kategoriji vakuumskih rješenja fizikalno su relevantna ona koja opisuju različite vrste rotirajućih crnih rupa. Crvotočine i rotirajuće zvijezde primjeri su nevakuumskih rješenja.

4.1 Vakuumska rješenja

4.1.1 Kerrovo prostorvrijeme

Kerovo rješenje opisuje osnosimetrične, rotirajuće i nenabijene crne rupe. Zapisana u Boyer-Lindquistovim koordinatama (t, r, θ, ϕ) , metrika glasi [9]:

$$ds^2 = -dt^2 \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \left(r^2 + a^2 - \frac{2Mr a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.1)$$

gdje je $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, M je masa, a $a = J/m$ angularni moment po jedinici mase. Komponente metrike singularne su za $\rho = 0$, odnosno $r = 0$ i $\theta = \pi/2$. Ponašanje Kretschmannovog skalara $R_{abcd}R^{abcd}$ u limesu $\rho \rightarrow 0$ potvrđuje da je riječ o pravom singularitetu. Prelaskom na nove Kerr-Schildove koordinate može se pokazati da je singularitet prstenastog oblika, čiji je radijus jednak a te se nalazi u ekvatorijalnoj ravnini. Osim toga, potencijalno su problematična i rješenja jednađbe $\Delta = 0$, no taj je singularitet posljedica odabira koordinatnog sustava. Hiperplohe $r = r_{\pm}$ za koje je $\Delta = 0$ Killingovi su horizonti:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4.2)$$

Vanjski horizont r_+ je horizont događaja (eng. *event horizon*). Zbog korijena u izrazu (4.2), horizont postoji pod uvjetom $a \leq M$. Crne rupe za koje vrijedi jednakost $a = M$ nazivamo ekstremalnim. Za $a > M$ singularitet nije skriven horizontom pa tu vrstu singulariteta nazivamo "golim". Ovaj se slučaj ne smatra fizikalno mogućim budući da je u kontradikciji s kozmičkom cenzurom, principom koji zabranjuje pos-

tojanje golih singulariteta u prostorvremenu. Killingovi horizonti generirani su Killingovim vektorskim poljima ξ_{\pm} koji su dani kao linearna kombinacija vremenskog i aksijalnog ($k = \partial/\partial t, m = \partial/\partial\phi$) Killingovog vektorskog polja:

$$\xi_{\pm} = k + \left(\frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} \right) m. \quad (4.3)$$

Jednadžba ergoplohe pronalazi se iz zahtjeva $k^2 = g_{tt} = 0$:

$$k^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Gornja jednadžba ima dva rješenja, no od interesa je samo ono koje se nalazi izvan unutrašnjosti crne rupe:

$$r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta}. \quad (4.5)$$

U egzaktnom izrazu za površinu ergoplohe pojavljuju se dva nepotpuna eliptička integrala koji se mogu razviti po parametru $A = a/M$ te se tada površina ergoplohe aproksimira s [10]:

$$A_E = 16\pi M^2 + 4\pi M^2 A^2 + \frac{3}{5}\pi M^2 A^4 + \frac{33}{70}\pi M^2 A^6 + O(A^8). \quad (4.6)$$

Porastom omjera a/m raste i površina ergoplohe. Ergoploha dotiče horizont za $\theta = 0$ i $\theta = \pi$, a za ostale se vrijednosti koordinate θ nalazi izvan horizonta. U limesu $a \rightarrow 0$ metrika se svodi na statično Schwarzschildovo rješenje pa se ergoploha podudara s horizontom $r = 2M$.

Ergopodručje se nalazi u granicama $r_+ < r < r_+^E(\theta)$. Na primjeru Kerrove crne rupe, lako se pokaže da unutar ergopodručja svi promatrači moraju rotirati u smjeru crne rupe. Četverovektor brzine u^a fizikalnog promatrača vremenskog je tipa pa je pripadna normalizacija $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu < 0$. Unutar ergopodručja svi su članovi u tom izrazu pozitivni, osim člana $2g_{t\phi}u^t u^\phi = 2g_{t\phi}(dt/d\tau)(d\phi/d\tau)$, gdje je τ vlastito vrijeme duž krivulje. Također vrijedi i $g_{t\phi} < 0$ i $dt/d\tau = u^a \nabla_a t > 0$ jer je $\nabla^a t$ prošlo usmjeren vektor vremenskog tipa. Iz toga proizlazi da u ergopodručju za sve krivulje vremenskog tipa mora vrijediti stroga nejednakost $d\phi/d\tau > 0$.

Unutar ergopodručja umjesto statičnih promatrača možemo definirati "lokalno ne-

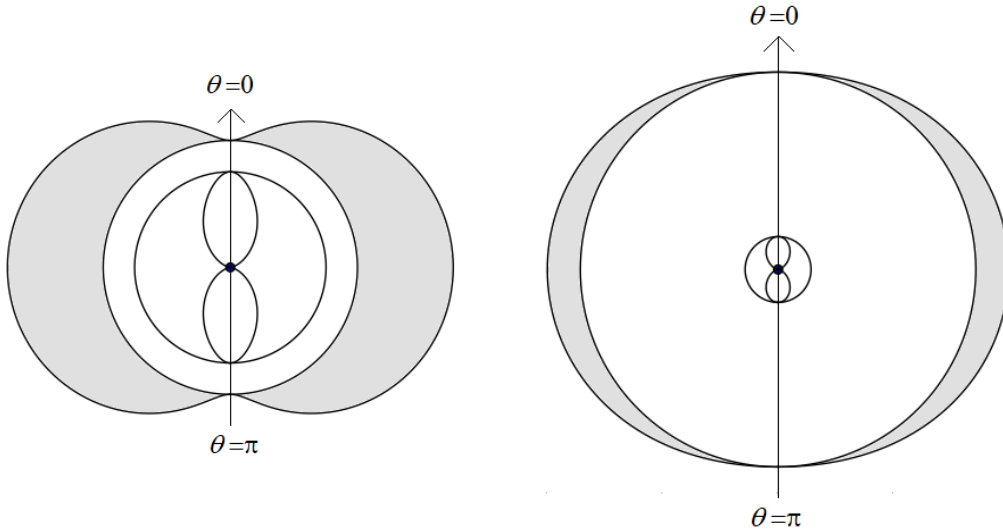
rotirajuće”, odnosno promatrače čiji je angularni moment ($l = u^a m_a$) jednak nuli. Koordinatna angularna brzina takvih promatrača jednaka je:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a(r^2 + a^2 - \Delta)}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}. \quad (4.7)$$

Uvrštavajući $r = r_+$ u gornji izraz dobivamo brzinu rotacije horizonta Ω_H koju nazivamo angularnom brzinom crne rupe:

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.8)$$

što je u skladu s definicijom vektora ξ_+ kao generatora horizonta. Struktura Kerrovog prostorvremena sa svim relevantnim hiperplohama prikazana je na slici 4.1. Unutrašnja ergoploha dodiruje singularitet kojem u Boyer-Lindquistovim koordinatama odgovara točka $r = 0$ u ekvatorijalnoj ravnini.



Slika 4.1: Kerrovo prostorvrijeme za dvije različite vrijednosti angularnog momenta. Na lijevoj je slici $a=1$, a na desnoj $a=0.7$, masa crne rupe je u oba slučaja $M=1$. Redom su prikazani vanjska ergoploha, vanjski horizont, unutrašnji horizont i unutrašnja ergoploha, ergopodručje je označeno sivom bojom, a singularitet tamnoplavom točkom.

4.1.2 Kerr-Newmanovo prostorvrijeme

Kerr-Newmanovo rješenje generalizacija je prethodno opisanog Kerrovog rješenja. Posjeduje iste simetrije kao i Kerrovo rješenje, stacionarno je i osnosimetrično. Odgo-

vara rotirajućim crnim rupama koje su ujedno i električno nabijene. Metrika je u odnosu na Kerrovo rješenje složenija jer se uz masu M i angularni moment a pojavljuje dodatni parametar koji predstavlja električni naboj Q [11]:

$$ds^2 = -dt^2 \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.9)$$

gdje je $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, a $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. Analiza horizonata i ergopodručja provodi se potpuno analogno kao i za Kerrovu crnu rupu i vrijede isti zaključci, razlika je jedino u izrazima za hiperplohe. Unutrašnji i vanjski horizont ponovno se pronalaze kao rješenja jednadžbe $\Delta = 0$:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (4.10)$$

Horizont okružuje singularitet prstenastog oblika radijusa a koji je smješten u ekvatorijalnoj ravnini. Ekstremalna Kerr-Newmanova crna rupa definirana je uvjetom $a^2 = M^2 - Q^2$.

Od dva moguća rješenja:

$$r_{\pm}^E = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2}, \quad (4.11)$$

vanjsku hiperplohu r_+^E nazivamo ergoplohom. Ergopodručje se nalazi između ergoplohe i horizonta događaja.

4.1.3 Kerr-Newman-NUT rješenje

Crne rupe Kerr-Newmanove familije asimptotski su ravna rješenja Einstein-Maxwellovih jednadžbi. Ali ako od prostora vremena ne zahtijevamo da bude asimptotski ravno, uz postojeće je parametre (M, J, Q) opisano jednim dodatnim, tzv. NUT nabojem l . Metrika je dana s [12]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - P d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2 + l^2) d\phi - a dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.12)$$

gdje je $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 - l^2$, $P = a \sin^2 \theta - 2l \cos \theta$, $\rho^2 = r^2 + (l + a \cos \theta)^2$. Za $l = 0$ dobiva se Kerr-Newmanovo, a za $Q = 0$ Kerr-NUT rješenje. Jednadžbe horizonta i

ergoplohe su:

$$r_+ = M \pm \sqrt{M^2 + l^2 - Q^2 - a^2}, \quad (4.13)$$

$$r_+^E = M + \sqrt{M^2 + l^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.14)$$

Singularitet je ponovno prstenasti, pronalazi se iz uvjeta $\rho^2 = 0$, iz kojeg slijedi $r = 0$ i $\cos \theta = -l/a$. Zbog zanimljivih svojstava, ističe se jedan specijalni oblik ovakvog prostora vremena. Ako naboj Q izaberemo tako da vrijedi $Q^2 = l^2 - a^2$ (što nužno povlači $l \geq a$), horizont odgovara radijusu $r = 2M$ kao i u Schwarzschildovom rješenju, iako je crna rupa rotirajuća i posjeduje NUT i električni naboj. Za $l > a$ ne postoji singularitet jer tada jednadžba $\cos \theta = -l/a$ nema realno rješenje.

4.1.4 Tomimatsu-Sato rješenje

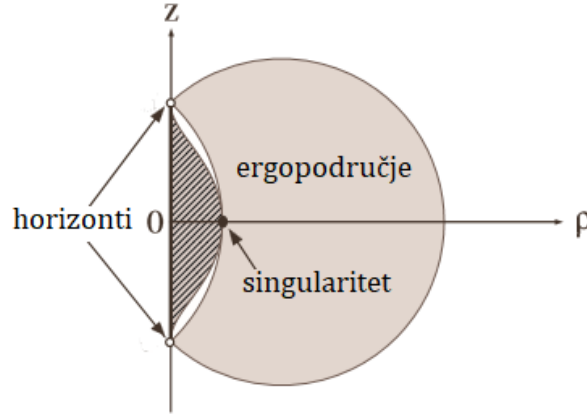
Kerrov rješenje nije jedino stacionarno, osnosimetrično i asimptotski ravno rješenje Einsteinove jednadžbe. Tomimatsu-Sato prostorvrijeme posjeduje sva navedena svojstva, ali za razliku od Kerrovog rješenja nije od astrofizikalnog značaja. Rješenje je oblika [13]:

$$ds^2 = Bp^{-4}(x^2 - y^2)^{-4}(dz^2 + d\rho^2) - AB^{-1}(dt - 2mqA^{-1}C(1 - y^2)d\phi)^2 + \rho^2 BA^{-1}d\phi^2, \quad (4.15)$$

gdje su A , B i C algebarski složeni polinomi u sferoidnim koordinatama x i y . Uvedene su i pokrate $\rho = m^2 p^2 (x^2 - 1)(1 - y^2)/4$, $z^2 = m^2 p^2 x^2 y^2/4$, a parametri p i q povezani su relacijom $p^2 + q^2 = 1$. Masa i angularni moment jednaki su m i $m^2 q^2$, respektivno. Kao i u Kerrovom prostorvremenu, singularitet je prstenasti, a definiran je jednadžbom $B(x, y = 0) = 0$. Budući da ne postoji horizont događaja, već samo dva odvojena Killingova horizonta, navedeni je singularitet goli [14]. Uz to, u dijelu prostora vremena narušena je kauzalnost. Kako bi prostorvrijeme bilo asimptotski ravno, ϕ moramo interpretirati kao angularnu koordinatu. Tada se u točkama gdje je $g_{\phi\phi} < 0$ pojavljuju zatvorene vremenske krivulje. Komponenta g_{tt} jednaka je nuli za $A = 0$, što za jednadžbu ergoplohe daje

$$x^2 = 1 + \lambda^2(1 - y^2), \quad (4.16)$$

gdje je λ rješenje jednadžbe $p^2\lambda^4 + q^2 - 4pq\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$. Singularitet dotiče ergoplohu. Na slici 4.2 prikazana je struktura Tomimatsu-Sato prostorvremena.



Slika 4.2: Tomimatsu-Sato prostorvrijeme; označeni su ergopodručje, Killingovi horizonti, singularitet i područje u kojem postoje zatvorene vremenske krivulje (iscrtano). Preuzeto iz [15].

4.1.5 BTZ crna rupa

Bañados, Teitelboim i Zanelli pronašli su (2+1)-dimenzionalno rješenje Einsteinove jednadžbe koje opsuje rotirajuće crne rupe [16]. Taj je rezultat iznenađujuć utoliko što se gravitacijska teorija u nižem broju dimenzija smatrala prejednostavnim modelom za generiranje rješenja analognih onima u više dimenzija. BTZ i Kerrove crne rupe dijele brojna zajednička svojstva, primjerice, i BTZ crna rupa ima horizont događaja, unutrašnji horizont i ergopodručje. Izražena u "Schwarzschildovim" koordinatama, metrika je:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (d\phi + N^\phi dt)^2, \quad (4.17)$$

gdje su funkcije N i N^ϕ dane s:

$$N = \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{1/2}, \quad (4.18)$$

$$N^\phi = -\frac{J}{2r^2}, \quad (4.19)$$

a J i M označavaju angularni moment i masu. Metrika zadovoljava vakuumsku Einsteinovu jednadžbu s negativnom kozmološkom konstantom $\Lambda = -1/l^2$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{l^2}g_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Funkcija N iščezava za dvije realne vrijednosti r :

$$r_{\pm} = l \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \right], \quad (4.21)$$

od kojih je r_+ horizont crne rupe, a r_- unutrašnji Cauchyjev horizont. Postojanje horizonta događaja uvjetovano je s $M > 0$ i $|J| \leq Ml$. U ekstremalnom se slučaju ($|J| = Ml$) oba horizonta poklapaju. Ergoploha je dana izrazom:

$$r_e = M^{1/2}l. \quad (4.22)$$

4.2 Nevakuumska rješenja

4.2.1 Rotirajuće zvijezde

Formiranje ergopodručja načelno je moguće i oko vrlo kompaktnih rotirajućih zvijezda [18]. Parametri koji se uzimaju u obzir su brzina rotacije te sastav zvijezde određen jednadžbom stanja materije. Brzina rotacije zvijezde ne smije prekoračiti vrijednost iznad koje centrifugalni efekti dominiraju nad gravitacijskim, budući da bi u tom slučaju zvijezda odbacivala materiju s ekvatora. Iz tog se razloga zadržavamo na aproksimaciji spore rotacije. Kako bi opisivala rotirajuću zvijezdu, metrika statične zvijezde:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.23)$$

mora biti korigirana za doprinose angularne brzine. U dijagonalnim komponentama metrike pojavit će se članovi proporcionalni kvadratu angularne brzine, a pojavit će se i novi nedijagonalni član $g_{t\phi}$ koji linearno ovisi o angularnoj brzini.

Zanima nas g_{tt} komponenta metrike koja, uključujući navedene korekcije, glasi:

$$g_{tt} = -e^{2\Phi(r)}(1 + h(r, \theta)) + \omega^2 r^2 \sin^2\theta. \quad (4.24)$$

Druga aproksimacija dodatno pojednostavljuje izraz. Za vrlo kompaktne zvijezde vrijedi $e^{2\Phi(r)} \ll 1$, a $h(r, \theta)$ istog je reda veličine kao i $\omega^2 r^2$. Zbog toga smijemo zanemariti funkciju $h(r, \theta)$ te se ergoploha dobiva za:

$$-e^{2\Phi(r)} + \omega^2 r^2 = 0. \quad (4.25)$$

Topološki, ergopodručje je torus čiji rubovi u ekvatorijalnoj ravnini zadovoljavaju jednadžbu $e^{\Phi(r)} = r\omega(r)$. Granice ergopodručja pronalaze se numerički nakon određivanja jednadžbe stanja materije. Najjednostavniji je model onaj u kojem je gustoća zvijezde jednolika. Realističniji, iako i dalje idealizirani model, dobiva se promatrajući neutrone kao idealni Fermijev plin. Kako bi imale ergopodručje, gustoće zvijezda opisanih ovim modelima morale bi biti veće od gustoća neutronske zvijezde. Ovi rezultati podupiru tezu da postojeće zvijezde u svemiru nemaju ergopodručje. No, najnovijim simulacijama u kojima je korištena složenija jednadžba stanja koja uz nuklearnu materiju uključuje i doprinose kvarkovske materije dobivena su stabilna ergopodručja. Također je pokazano da politropski model s $\Gamma = 3$ daje nestabilna rješenja [19].

4.2.2 Rotirajuće crvotočine

Primjer još jednog rješenja od teorijskog interesa su crvotočine – hipotetski prečaci koji bi omogućili putovanje između dviju vrlo udaljenih točaka prostorvremena. Suprotno uobičajenoj praksi, prilikom određivanja metrike crvotočine prvo se zadaju fizikalni uvjeti koje ona mora zadovoljavati, a potom se iz Einsteinove jednadžbe odredi pripadna materija. Promatrano prostorvrijeme mora biti stacionarno i osnosimetrično. Najopćenitiji oblik takvog prostorvremena u sfernim koordinatama je [21]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^\mu dr^2 + r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta (d\phi - \omega dt)^2), \quad (4.26)$$

gdje funkcije N , K , μ , ω ovise samo o r i θ te moraju biti zadane tako da prostorvrijeme nema horizont i nije singularno.

Veličina $\omega(r, \theta)$ angularna je brzina čestice koja iz beskonačnosti slobodno pada do točke određene koordinatama (r, θ) . Radijalna udaljenost R točke (r, θ) od ishodišta

određena je funkcijom $K(r, \theta)$ u kojoj je sadržana ovisnost o koordinati θ :

$$R(r, \theta) = rK(r, \theta), \quad \partial R / \partial r > 0. \quad (4.27)$$

Oblik crvotočine modelira se funkcijom μ :

$$\mu(t, \theta) = -\ln\left(1 - \frac{b(r, \theta)}{r}\right).$$

Dva identična, asimptotski ravna područja prostorvremena povezana su “grlom” crvotočine koje se u ovom slučaju nalazi na $r = b$. Kako ono ne bi bilo singularno, mora vrijediti $\partial b / \partial \theta = 0$ za $r = b$. Taj se zahtjev dobiva iz Riccijevog skalara jer se u njemu pojavljuje član proporcionalan $(\partial b / \partial \theta)(r - b)^{-2}$. Da bi ovako zadana geometrija odgovarala izgledu crvotočine, mora vrijediti i $\partial b / \partial r < 1$, što je uvjet dobiven uranjanjem plohe konstantnih t i θ u prostor više dimenzije. Oblik metrike pogodniji pri opisivanju izgleda crvotočine dobiva se redefiniranjem radijalne koordinate:

$$\frac{d\rho}{dr} = \pm\left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2}. \quad (4.28)$$

Uz tu zamjenu, metrika preko grla ($\rho = 0$) glatko povezuje dva asimptotska područja $\rho = \pm\infty$.

Angularni moment crvotočine a sadržan je u potencijalu ω :

$$\omega = \frac{2a}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

Metrika mora biti nesingularna na osi rotacije ($\theta = 0, \pi$), što znači da derivacije N , K , μ , ω po θ moraju iščezavati na osi. Također, prostorvrijeme mora biti asimptotski ravno pa za $r \rightarrow \infty$ zahtijevamo:

$$N \rightarrow 1, \quad b/r \rightarrow 0, \quad K \rightarrow 1, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (4.29)$$

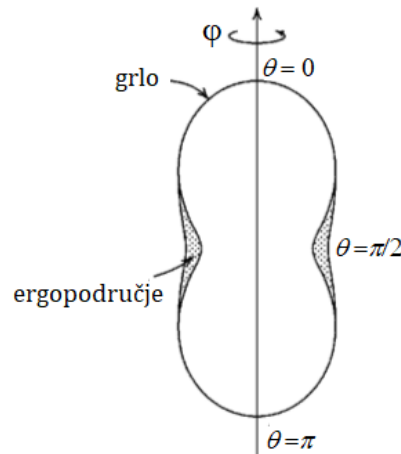
Uzevši u obzir sve uvjete, metrika stacionarne osnosimetrične crvotočine glasi:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2). \quad (4.30)$$

Odgovarajući tenzor energije i impulsa nužno narušava energijske uvjete u području grla jer ono po definiciji defokusira svjetlosne zrake. Može se pokazati kako u ovom slučaju za klasu vektora svjetlosnog tipa v^a ne vrijedi energijski uvjet $R_{ab}v^av^b \geq 0$ (dodatak C) [21]. Materija koja zadovoljava takvu nejednakost zbog svojih se neobičnih svojstava naziva *egzotičnom*. Konkretno, gustoća energije egzotične materije je negativna, što čini ovakva rješenja fizikalno nerealističnima. Da bismo dobili konkretan primjer crvotočine, biramo:

$$N = K = 1 + \frac{(4a\cos\theta)^2}{r}, \quad \omega = \frac{2a}{r^3}, \quad b = 1. \quad (4.31)$$

Ergopodručje se pojavljuje ako je rotacija dovoljno brza da komponenta g_{tt} postane pozitivna. U ovom se primjeru to događa za $r^2 = |2a\sin\theta| > 1$, tj. za $|a| > 1/2$. Ergopodručje ne okružuje grlo u potpunosti, već samo oko ekvatora, kao što je prikazano na slici 4.3.



Slika 4.3: Shematski prikaz poprečnog presjeka grla crvotočine, preuzeto iz [21].

5 Ekstrakcija energije

Unatoč činjenici da su crne rupe dijelovi prostorvremena iz kojih čak ni svjetlost ne može pobjeći, za rotirajuće crne rupe specifični su procesi ekstrakcije energije. Mogućnost ekstrakcije energije direktna je posljedica svojstava ergopodručja, čiji je naziv i motiviran činjenicom da omogućuju realizaciju takvih procesa (grč. *ergon* - rad). U nastavku su na primjeru Kerrove crne rupe opisana dva najvažnija procesa te je pokazano da su teorijski mogući ne samo kod crnih rupa, već i kod drugih tipova rotirajućih prostorvremena u kojima postoji ergopodručje.

5.1 Penroseov proces

Prema Noetherinom teoremu, simetrije prostorvremena povezane su sa zakonima očuvanja. U stacionarnom prostorvremenu s Killingovim vektorskim poljem k^μ vremenskog tipa, očuvana je veličina energija (teorem A.1.):

$$E = -p^\mu k_\mu, \quad (5.1)$$

gdje je p^μ 4-impuls čestice, buduće usmjeren vektor vremenskog ili svjetlosnog tipa. Unutar ergopodručja Killingov vektor k^μ prostornog je tipa. Posljedično, energija kao produkt ta dva vektora može biti negativna. Ideja Penroseovog procesa je sljedeća: čestica iz beskonačnosti upada u ergopodručje u kojem se raspada u par čestica tako da je energija jedne od nastalih čestica negativna. Po zakonu očuvanja energije, energija druge nastale čestice mora biti veća od energije raspadajuće čestice.

Kako bismo promotrili proces detaljnije, postavljamo laboratorijski sustav u asimptotsko područje, daleko od crne rupe. Neka je impuls čestice koja pada prema crnoj rupi jednak p_0^μ . Energija čestice mjerena u laboratorijskom sustavu dana je s:

$$E_0 = -p_0^\mu \xi_\mu, \quad (5.2)$$

te ostaje konstantna tijekom pada duž geodezika. Pretpostavimo i da se ulaskom u ergopodručje čestica raspada u dvije čestice impulsa p_1^μ i p_2^μ te pritom vrijedi zakon

očuvanja: $p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$. Ako energiju čestice 2 biramo tako da bude negativna

$$E_2 = -p_2^\mu k_\mu < 0, \quad (5.3)$$

tada čestica 1, slijedeći geodezik, u beskonačnost stiže s većom energijom nego što je to bila energija početne čestice

$$E_1 = -p_1^\mu k_\mu = E_0 - E_2 > E_0. \quad (5.4)$$

Čestica je dobila dodatnu energiju na račun energije crne rupe te može pobjeći u beskonačnost jer se ergopodručje nalazi izvan horizonta. Čestice negativne energije mogu pobjeći iz ergopodručja jedino tako da prođu horizont crne rupe. Na kraju procesa, ukupna energija u laboratorijskom sustavu povećana je za $|E_1|$, a masa crne rupe smanjena za isti iznos.

5.1.1 Efikasnost Penroseovog procesa

Penroseovim procesom može se dobiti ograničena količina energije zato što čestice negativne energije nose i negativan angularni moment, odnosno suprotan onome crne rupe. Naime, Killingovo vektorsko polje ξ_+^a (4.3) svjetlosnog je tipa i buduće usmjereno na horizontu pa za produkt s 4-impulsom čestice vrijedi:

$$0 \geq \xi_+^a p_a = -E + \Omega_H L, \quad (5.5)$$

odnosno,

$$L \leq E/\Omega_H, \quad (5.6)$$

čime je dokazana tvrdnja. Apsorpcija čestica negativnog angularnog momenta rezultirat će smanjivanjem angularnog momenta crne rupe sve dok ona ne postane statična. Statične crne rupe nemaju ergopodručje i ekstrakcija energije prestaje biti moguća.

Za kvantifikaciju efekta uvodi se nova veličina, ireducibilna masa M_{ir} [22]:

$$M_{\text{ir}}^2 = \frac{1}{2}(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}). \quad (5.7)$$

Masa crne rupe ne može postati manja od ireducibilne mase, što je vidljivo invertiranjem gornjeg izraza:

$$M^2 = M_{\text{ir}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{ir}}^2} \geq M_{\text{ir}}^2 \quad (5.8)$$

Neka su M_0 i J_0 početna masa i početni angularni moment crne rupe. Dobivenu energiju $\Delta E = \Delta M = M_0 - M_{\text{ir}}(M_0, J_0)$ možemo interpretirati kao rotacijsku energiju crne rupe. Najveća je za ekstremalnu crnu rupu ($J_0^2 = M_0^4$) te iznosi oko 29% njezine energije:

$$\Delta M_{\text{maks}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) M_0 \approx 0.29 M_0. \quad (5.9)$$

Ovaj je rezultat konzistentan s 2. zakonom termodinamike crnih rupa po kojem se površina horizonta ne smanjuje, $\delta A_H \geq 0$, ako vrijedi slabi energijski uvjet (dodatak C). Površina horizonta Kerrove crne rupe A dana je s:

$$A = \int_{r=r_+} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = \int (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (5.10)$$

te se od kvadrata ireducibilne mase razlikuje samo za numerički faktor: $A = 16\pi M_{\text{ir}}^2$. Nakon apsorpcije čestice, promjena mase crne rupe je $\delta M = E$, a angularnog momenta $\delta J = L$. Izraz (5.6) daje $\delta M \geq \Omega_H \delta J$, što se može zapisati i kao $\delta M_{\text{ir}} > 0$.

5.2 Superzračenje

Proces analogan Penroseovom procesu u kojem umjesto čestica sudjeluju valovi naziva se superzračenjem (eng. *superradiance*). Pod određenim uvjetima amplituda vala reflektiranog od horizonta veća je od amplitude upadnog vala, a dodatna energija vala i u ovom slučaju potječe od rotacijske energije crne rupe. Interakcija skalarnih, elektromagnetskih, gravitacijskih i spin-1/2 polja s crnom rupom opisana je Teukolskyjevom jednadžbom. Konkretno, u slučaju Kerrove crne rupe, problem se svodi na rješavanje radijalne jednadžbe. Uz uvođenje nove koordinate definirane na

sljedeći način:

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{d}{dr}, \quad (5.11)$$

i nove varijable:

$$\chi = (r^2 + a^2)^{1/2} \Delta^{s/2} R, \quad (5.12)$$

radijalna jednažba poprima oblik:

$$\frac{d^2 {}_s\chi_{lm}}{dr_*^2} + {}_sV_{lm} {}_s\chi_{lm} = 0. \quad (5.13)$$

Kompleksni efektivni potencijal ${}_sV_{lm}$ definiran je kao

$${}_sV_{lm} = \frac{K^2 - 2is(r - M)K}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{\Delta(4ir\omega s - \lambda)}{(r^2 + a^2)^2} - G^2 - \frac{dG}{dr_*}, \quad (5.14)$$

gdje su G , K i λ jednaki:

$$G = \frac{s(r - M)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2}, \quad (5.15)$$

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad (5.16)$$

$$\lambda = E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s + 1). \quad (5.17)$$

Separacijska konstanta E se za male vrijednosti produkta $a\omega$ može razviti u red čiji je vodeći član $l(l + 1)$. Kvantni brojevi s , l i m odnose se na spin, angularni moment i projekciju angularnog momenta upadnog vala. Iz asimptotskog ponašanja jednažbe (5.14), slijede rješenja oblika:

$$\chi \sim r^{\mp s} e^{\pm i\omega r_*} \text{ za } r \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

$$\chi \sim \Delta^{\pm s/2} e^{\pm i\bar{\omega} r_*} \text{ za } r \rightarrow r_+, \quad (5.19)$$

gdje je $\bar{\omega} = \omega - m\Omega_H$, a $\Omega_H = a/(2Mr_+)$ angularna brzina crne rupe. Postoje četiri nezavisna skupa rješenja koji se razlikuju po rubnim uvjetima [23].

Konkretno, promotrimo slučaj skalarnog polja, $s = 0$. Asimptotska rješenja radijalne

jednadžbe su:

$$\chi \sim \begin{cases} e^{-i\bar{\omega}r_*} \text{ za } r \rightarrow r_+, \\ A_{out}(\omega)e^{i\omega r_*} + A_{in}(\omega)e^{i\omega r_*} \text{ za } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.20)$$

Zbog simetrije potencijala (${}_s\bar{V}_{lm} = -{}_sV_{lm}$), drugo je rješenje kompleksno konjugirana funkcija. Budući da je Wronskijan dvaju linearno nezavisnih rješenja konstantan, dobiva se izraz koji povezuje koeficijente refleksije ($R = A_{out}/A_{in}$) i transmisije ($T = 1/A_{in}$):

$$\left(1 - \frac{m\Omega_H}{\omega}\right)|T|^2 = 1 - |R|^2. \quad (5.21)$$

Amplituda reflektiranog vala bit će veća od amplitude upadnog vala kada je $R > 1$, što se postiže za frekvencije u rasponu:

$$0 < \omega < m\Omega_H. \quad (5.22)$$

Za razliku od originalnog Penroseovog procesa, kod valova ne postoji sloboda u izboru angularnog momenta. Dinamika procesa u potpunosti je određena parametrima upadnog vala.

Do istog se rezultata može doći i pozivajući se na teorem o površini, $\delta A_H \geq 0$. Prvi zakon termodinamike crnih rupa povezuje promjene mase, površine i angularnog momenta crne rupe:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A_H + \Omega_H\delta J. \quad (5.23)$$

Frekvencija ω i azimutalni broj m skalarnog polja u stacionarnom osnosimetričnom prostorvremenu povezani su s tokom angularnog momenta \mathcal{L} i energije \mathcal{E} . Za tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$, pripadni vektori toka energije i angularnog momenta su:

$$\epsilon^\mu = -T^\mu_\nu k^\nu, \quad (5.24)$$

$$l^\mu = T^\mu_\nu m^\nu. \quad (5.25)$$

Omjer toka energije i impulsa po sfernoj hiperplohi $d\Sigma_\mu = n_\mu r^2 dt d\Omega$, gdje je n^μ normala plohe, dani su s:

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} = -\frac{T_\phi^r}{T_t^r}. \quad (5.26)$$

Poznat je oblik tenzora energije i impulsa skalarnog polja $\Phi(t, r, \theta, \phi) = f(r, \theta)e^{-i\omega t + im\phi}$.

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi), \quad (5.27)$$

iz čega slijedi tražena veza:

$$\mathcal{L}/\mathcal{E} = m/\omega. \quad (5.28)$$

Po zakonu očuvanja energije i angularnog momenta, omjer promjene angularnog momenta δJ i energije δM crne rupe je $\delta J/\delta M = m/\omega$. Uvrštavanjem u (5.23) dobiva se:

$$\delta M = \frac{\omega \kappa}{8\pi} \frac{\delta A_H}{\omega - \Omega_H m}, \quad (5.29)$$

pa se energija crne rupe smanjuje ($\delta M < 0$) ako vrijedi $\omega < \Omega_H m$.

Koliko će biti maksimalno povećanje amplitude ovisi o vrsti vala. Za skalarnu valove ono iznosi 0.3%, 4.4% za elektromagnetske i čak 138% za gravitacijske [23].

5.3 Waldova nejednakost

Ubrzo nakon teorijskog opisa Penroseovog procesa, predložena je i njegova astrofizikalna primjena. Opaženo je da supermasivne crne rupe u središtima aktivnih galaksija emitiraju visokoenergetske mlazove ionizirane materije, pa je kao potencijalni izvor njihove energije predložena rotacijska energija crne rupe. U ovom kontekstu, zvijezdu u blizini crne rupe promatramo kao upadnu česticu koja se raspada zbog plimnih sila. Ako bi rotacija crne rupe dovoljno povećala energiju i ubrzala jedan od nastalih fragmenata, Penroseov proces mogao bi objasniti nastanak ovakvih mlazova. Pomoću Waldove nejednakosti [24] moguće je procijeniti pod kojim uvjetima Penroseov proces postaje primjenjiv. Njome su određene granice na omjer energije i

mase fragmenta E'/M' emitiranog brzinom v mjenom u sustavu mirovanja početne čestice energije E i mase M .

Ako je jedan od nastalih fragmenata određen masom M' , brzinom v i Lorentzovim faktorom γ u sustavu raspadajuće čestice, tada je moguće izvesti izraz za Killingovu energiju E' (energiju mjerenu u beskonačnosti) fragmenta [29]. Četverobrzinu emitiranog fragmenta u možemo izraziti pomoću ortonormirane tetrade $e_{(i)}^\mu$ i jediničnog vektora vremenskog tipa U^μ zadanog kao $U^\mu = e_{(0)}^\mu$:

$$u^\mu = \gamma(U^\mu + v^{(i)}e_{(i)}^\mu), \quad (5.30)$$

gdje su $v^{(i)}$ komponente trodimenzionalnog vektora brzine fragmenta i $\gamma = 1/(1 - |v|^2)^{1/2}$, $|v|^2 = v^{(i)}v_{(i)}$.

Zbog simetrija prostovremena postoji Killingovo vektorsko polje vremenskog tipa ξ^μ . U navedenoj bazi može se zapisati kao:

$$\xi^\mu = \xi^{(0)}U^\mu + \xi^{(i)}e_{(i)}^\mu, \quad (5.31)$$

$$\xi_\mu = \xi_{(0)}U_\mu + \xi_{(i)}e_{(i)\mu}. \quad (5.32)$$

Tada Killingova energija E raspadajuće čestice mase M zadovoljava sljedeće relacije:

$$\frac{E}{M} = -\xi_\mu U^\mu = \xi_{(0)} = -\xi^\mu U_\mu = \xi^{(0)}, \quad (5.33)$$

$$g_{00} = \xi^\mu \xi_\mu = -\xi_{(0)}^2 + \xi_{(i)}\xi^{(i)} = -\frac{E^2}{M^2} + |\xi|^2. \quad (5.34)$$

Koristeći izraz za četverobrzinu fragmenta, za njegovu se energiju dobiva:

$$\frac{E'}{M'} = -\xi_\mu u^\mu = \gamma(\xi_{(0)} - v^{(i)}\xi_{(i)}) = \gamma\left(\frac{E}{M} - |v||\xi|\cos\theta\right), \quad (5.35)$$

a potom uvrštavajući izraz (5.34):

$$\frac{E'}{M'} = \gamma\frac{E}{M} - \gamma|v|\left(\frac{E^2}{M^2} + g_{00}\right)^{1/2}\cos\theta \quad (5.36)$$

Funkcija kosinus poprima vrijednosti unutar intervala $[-1, 1]$ pa se dobiva sljedeća nejednakost:

$$\frac{E}{M} - \gamma|v|\left(\frac{E^2}{M^2} + g_{00}\right)^{1/2} \leq \frac{E'}{M'} \leq \gamma\frac{E}{M} + \gamma|v|\left(\frac{E^2}{M^2} + g_{00}\right)^{1/2}. \quad (5.37)$$

U slučaju bezmasenih produkata raspada, fotona, nejednakost glasi:

$$\frac{E}{M} - \left(\frac{E^2}{M^2} + g_{00}\right)^{1/2} \leq \frac{\omega'}{\omega} \leq \frac{E}{M} + \left(\frac{E^2}{M^2} + g_{00}\right)^{1/2}. \quad (5.38)$$

Kod Kerrove metrike, maksimalna vrijednost komponente g_{00} postiže se na horizontu ($\theta = \pi/2$) ekstremalne crne rupe ($a = m$) te iznosi 1. Stoga se nejednakost može zapisati u obliku:

$$\frac{E}{M} - \left(\frac{E^2}{M^2} + 1\right)^{1/2} \leq \frac{E'}{M'} \leq \frac{E}{M} + \left(\frac{E^2}{M^2} + 1\right)^{1/2}. \quad (5.39)$$

Iz donje granice dobiva se uvjet koji mora zadovoljavati brzina nastalog fragmenta. Promatramo proces koji se odvija unutar ergopodručja i zahtijevamo $E' < 0$, u skladu s definicijom Penroseovog procesa. Omjer energije i mase čestice nije proizvoljan, već je određen kinematikom. Kako bi orbita čestice bila stabilna, maksimalna dozvoljena vrijednost tog omjera iznosi $E_{max}/M = 1/\sqrt{3}$. Uvrštavanjem navedenog rezultata u Waldovu nejednakost dobiva se $v > 1/2$, što znači da su za realizaciju procesa potrebne relativističke brzine.

Gornja granica daje odgovor na pitanje je li moguća astrofizička primjena Penroseovog procesa. Ako je moguće postići dovoljno veliku vrijednost E'/M' , a da pritom niti v ni E/M ne rastu, Penroseov proces mogao bi poslužiti kao izvor energije opaženih mlazova. No, uspoređivanjem procesa raspada čestice u ravnom prostoru i u prisustvu crne rupe može se zaključiti da faktor povećanja energije u potonjem slučaju nije značajan. Ako upadajuća čestica u početku miruje u beskonačnosti ($E/M = 1$), energija fragmenta bit će, u najboljem slučaju, veća za faktor $1 + v\sqrt{2}$. Kod raspada čestice u dva fotona gornja granica dana je s $E \leq E(1 + \sqrt{2})/2$, što odgovara efikasnosti od 121%. Ako upadajuća čestica ne miruje u beskonačnosti, već se kreće konačnom brzinom ($E/M > 1$), energija fragmenta bit će još manja. Dakle, rotacijska energija crne rupe ne može biti izvor energije opaženih mlazova.

5.4 Sudari u Kerrovom prostoru

Efikasnost Penroseovog procesa može se povećati ako umjesto raspada jedne čestice promatramo sudare i raspršenja. Uključivanjem većeg broja čestica raste fazni prostor pa se time ujedno povećava i raspon vrijednosti ukupne energije. Posebno je zanimljiv slučaj u kojem se čestice sudaraju u blizini horizonta ekstremalne crne rupe i energija u sustavu centra mase divergira [27]. No, kada dvije čestice padaju prema horizontu u čijoj se blizini potom sudare, njihov ukupni radijalni moment poprima veliku negativnu vrijednost. Zbog toga će se većina nastalih čestica nastaviti gibati prema crnoj rupi te će naposljetku biti apsorbirane. Samo mali udio nastalih čestica uspjeh će pobjeći iz potencijala crne rupe, a do beskonačnosti će doći noseći relativno malu energiju.

5.4.1 Energija u CM sustavu

Kada se dvije čestice koje početno miruju u beskonačnosti sudare u blizini horizonta ekstremalne crne rupe, energija u sustavu centra mase može doseći proizvoljno visoku vrijednost. Energija u sustavu centra mase dana je s:

$$E_{cm} = m_0 \sqrt{2} \sqrt{1 - g_{\mu\nu} u_1^\mu u_2^\nu}, \quad (5.40)$$

gdje su u_1^μ i u_2^ν četverobrzine čestica, a m_0 njihova masa. Za Kerrovu se crnu rupu dobiva [27]:

$$E_{cm}^2 = \frac{2m_0^2}{r(r^2 - 2r + a^2)} \left(2a^2(1+r) - 2a(L_1 + L_2) - L_1 L_2(r-2) + \right. \\ \left. + 2(r-1)r^2 - \sqrt{2(a-L_1)^2 - L_1^2} + 2r^2 \sqrt{2(a-L_2)^2 - L_2^2} + 2r^2 \right). \quad (5.41)$$

Na prvi pogled čini se da E_{cm} uvijek divergira na horizontu ($r_+ = 1 + \sqrt{1-a^2}$), ali to nije tako jer tada i brojnik iščezava. Dvostrukom primjenom l'Hospitalovog pravila, za $a = 1$ u limesu $r \rightarrow 1$ dobiva se:

$$E_{cm}^2 = 2m_0^2 \left(\frac{L_2 - 2}{L_1 - 2} + \frac{L_1 - 2}{L_2 - 2} \right). \quad (5.42)$$

Ako je angularni moment samo jedne od čestica kritičan ($L = 2$), energija u sustavu centra mase divergira.

Neograničen porast energije u sustavu centra mase nužan je, ali ne i dovoljan uvjet za postizanje neograničene energije nastalih čestica [30]. Ako dvije sudarajuće čestice promatramo kao jednu složenu čija je masa M i energija $E = E_1 + E_2$, a produkti sudara dvije su čestice masa m , tada primjenom zakona očuvanja energije slijedi $E_{cm} = M = 2\gamma m$. Uvrštavanjem u Waldovu nejednakost dobiva se:

$$E - |v|\sqrt{E^2 + g_{00}M^2} \leq 2E' \leq E + |v|\sqrt{E^2 + g_{00}M^2}. \quad (5.43)$$

U limesu $M \rightarrow \infty$, maksimalna energija nastale čestice iznosi:

$$E'_{max} \approx |v|\sqrt{g_{00}}\frac{M}{2}. \quad (5.44)$$

Identičan se izraz dobiva ako su produkti sudara dva fotona emitirana u suprotnim smjerovima.

Iako je divergirajuća energija matematički moguća, u praksi nije ostvariva. Postoji više primjedbi utemeljenih na fizikalnim i astrofizikalnim argumentima, od kojih su najvažnije opisane u nastavku [25].

Neograničen porast energije dobiven je pretpostavljajući maksimalni mogući angularni moment crne rupe, ali kao maksimalna vrijednost angularnog momenta realističnih crnih rupa prihvaćena je Thorneova granica koja iznosi $a = 0.998$. Uzimajući tu vrijednost, omjer energije u sustavu centra mase i mase mirovanja čestica drastično pada te iznosi najviše 6.95. Čak i kada bi crna rupa početno bila ekstremalna, apsorpcija čestica negativne energije i angularnog momenta nastalih samo jednim sudarom smanjila bi angularni moment crne rupe ispod razine potrebne za visokoenergijske sudare. Drugi komentar odnosi se na energiju čestice koja odlazi u beskonačnost. Energija dobivena sudaranjem blizu horizonta bit će izgubljena tijekom bijega iz potencijala crne rupe zbog gravitacijskog pomaka prema crvenom.

5.4.2 Efektivni potencijal Kerrove crne rupe

Zanima nas oblik efektivnog potencijala te veza položaja radijalnih točaka obrata i angularnog momenta čestice [28]. U izvodu se ograničavamo na radijalno gibanje u

ekvatorijalnoj ravnini. Iz integrala gibanja, energije i angularnog momenta:

$$E = -p_t = -(g_{tt}p^t + g_{t\phi}p^\phi), \quad (5.45)$$

$$L = p_\phi = g_{\phi\phi}p^\phi + g_{t\phi}p^t, \quad (5.46)$$

pronalaze se p^t i p^ϕ komponente impulsa čestice:

$$p^t = \frac{1}{\Delta} \left(\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) E - \frac{2Ma}{r} L \right), \quad (5.47)$$

$$p^\phi = \frac{1}{\Delta} \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right) L + \frac{2Ma}{r} E \right). \quad (5.48)$$

Uvjet normalizacije zapisujemo kao $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2$, gdje je m masa čestice. Raspisivanjem uvjeta normalizacije dobiva se:

$$-m^2 = g_{tt}(p^t)^2 + 2g_{t\phi}p^t p^\phi + g_{\phi\phi}(p^\phi)^2 + g_{rr}(p^r)^2, \quad (5.49)$$

$$(p^r)^2 = g^{rr}(-m^2 - g_{tt}(p^t)^2 - 2g_{t\phi}p^t p^\phi - g_{\phi\phi}(p^\phi)^2). \quad (5.50)$$

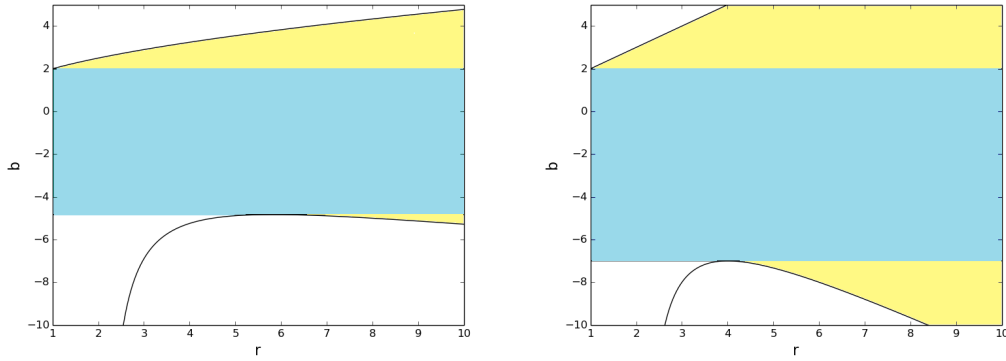
Ako gornju jednadžbu napišemo u obliku

$$\frac{1}{2}(p^r)^2 + U_{\text{ef}} = 0, \quad (5.51)$$

može se iščitati efektivni potencijal U_{ef} :

$$U_{\text{ef}} = -m^2 \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{1}{2}(m^2 - E^2) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{M}{r^3} (L - aE)^2. \quad (5.52)$$

Radijalne točke obrata određene su s $U_{\text{ef}}(r) = 0$. Na slici 5.1 prikazane su kao funkcija udarnog parametra čestice, $b = L/E$. Bez gubitka općenitosti, za potrebe računa točaka obrata masu crne rupe smijemo izabrati kao $M = 1$. Isto možemo učiniti i za masu čestice m budući da nigdje ne uspoređujemo te dvije mase. Nadalje pretpostavljamo da čestica u početnom trenutku miruje u beskonačnosti pa je njezina energija $E = 1$. Za spin crne rupe izabrana je ekstremalna vrijednost $a = 1$, jer ona odgovara situaciji u kojoj efikasnost procesa postiže svoje maksimalne vrijednosti.



Slika 5.1: Radijalne točke obrata u efektivnom potencijalu ekstremalne Kerrove crne rupe za masivne (lijevo) i bezmasene (desno) čestice. Sve čestice koje pripadaju području označenom žutom bojom mogu pobjeći iz potencijala crne rupe i doći do beskonačnosti, dok čestice iz plavog područja to mogu samo ako im je radijalna brzina usmjerena suprotno od crne rupe. Horizont se nalazi na $r = 1$, a ergoploha na $r = 2$.

Ako se udarni parametar b masivne čestice nalazi u rasponu $b < -2(1 + \sqrt{2})$ ili $b > 2$, tada će ona na svom putu do horizonta naići na točku obrata, reflektirati se od potencijalne barijere te vratiti u beskonačnost. U drugom slučaju, kada je udarni parametar između $-2(1 + \sqrt{2}) < b < 2$, crna rupa će apsorbirati česticu ako je njezina radijalna brzina usmjerena prema horizontu. Bezmasene čestice početno emitirane prema horizontu mogu doći do točke obrata i pobjeći u beskonačnost ako se njihov udarni parametar nalazi u intervalima $b \geq 2$ ili $b \leq -7$.

5.4.3 Početni uvjeti

Ove rezultate primjenjujemo na sudare dviju čestica (u nastavku označavane indeksima 1,2) čiji su produkti dvije čestice (3, 4). Pritom, kao i ranije, pretpostavljamo da je $E_3 > E_1 + E_2$ i čestica 3 odlazi u beskonačnost, a $E_4 < 0$ te čestica 4 upada u crnu rupu. Po zakonima očuvanja mora vrijediti:

$$E_{uk} = E_1 + E_2 = E_3 + E_4, \quad (5.53)$$

$$L_{uk} = b_1 E_1 + b_2 E_2 = b_3 E_3 + b_4 E_4, \quad (5.54)$$

$$p_{tot}^r = \epsilon_1 p_1^r + \epsilon_2 p_2^r = \epsilon_3 p_3^r + \epsilon_4 p_4^r. \quad (5.55)$$

Radijalni impuls određuje se iz uvjeta normalizacije $p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = -m^2$:

$$p_r = \pm(g_{rr}(-m^2 - g^{tt}E^2 + 2g^{t\phi}LE - g^{\phi\phi}L^2))^{1/2}. \quad (5.56)$$

Predznak radijalnog impulsa pojedine čestice nije proizvoljan, već je određen fizikalnim zahtjevima. Vrijednost udarnog parametra čestice 1 je kritična ($b_1 = 2$) jer taj izbor maksimizira energiju u sustavu centra mase, te njezin radijalni impuls može biti i pozitivnog i negativnog predznaka. Pozitivan predznak znači da čestica početno usmjerena prema crnoj rupi dolazi do točke obrata prije sudara, a negativan odgovara situaciji u kojoj se čestica iz beskonačnosti nastavlja gibati prema horizontu. Čestica pozitivnog radijalnog momenta učinit će ukupni radijalni moment u sustavu centra mase manje negativnim, što će povećati efikasnost. No, pozitivni doprinos nije značajan budući da se takva čestica mora nalaziti blizu točke obrata koja je definirana s $p^r = 0$. Kako bi se sudar mogao odvijati oko horizonta, udarni parametar čestice 2 mora biti subkritičan, $b_2 < 2$. Predznak radijalnog impulsa te čestice tada je negativan. Budući da unutar ergopodručja ne postoje točke obrata kada je $b < 2$, ta se čestica ne može reflektirati od potencijalne barijere crne rupe i promijeniti smjer gibanja. Česticu 4 apsorbira crna rupa pa ona mora biti ulazeća. Efikasnost procesa maksimizirana je ako je radijalni impuls čestice 3 neposredno nakon sudara negativan. Udarni parametar te čestice mora biti natkritičan, $b_3 \geq 2$ (jednakost vrijedi za sudar na horizontu), kako bi mogla doći do točke obrata te pobjeći u beskonačnost. Uzevši ova razmatranja u obzir, predznaci impulsa čestica zadani su kao $\epsilon_1 = \pm 1$ i $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = -1$.

5.4.4 Specijalni slučajevi

Izračunate su efikasnosti za nekoliko izdvojenih fizikalnih procesa koji uključuju anihilaciju, elastično raspršenje masivnih čestica te Comptonovo raspršenje [26]. Zbog preglednosti, pri opisivanju procesa korištena je skraćena notacija u kojoj tri slova opisuju vrstu čestica 1, 2 i 3, a znak + ili – predznak radijalnog impulsa čestice 1. Slovo P označava foton, a slovo M masivnu česticu. Masivne čestice definirane su s $m = E = 1$, a fotoni s $m = 0$ i općenitom energijom E . Za čestice 1 i 2 pretpostavlja se da dolaze iz beskonačnosti, gdje su mirovale u početnom trenutku, a sudaraju se blizu horizonta ekstremalne Kerrove crne rupe.

Anihilacija čestica

Promatramo anihilaciju dviju masivnih čestica čiji su radijalni impulsi usmjereni prema horizontu crne rupe (MMP–) te nas zanima koja je maksimalna efikasnost ovakvog procesa. Kao i ranije, za česticu 1 vrijedi $L_1 = b_1 E_1 = 2$, za česticu 2 $b_2 < 2$, a za česticu 3 $b_3 = 2$. Efikasnost postiže svoj maksimum u limesima $L_2 \rightarrow 2$ i $r \rightarrow 1$. Kako bi se dobila točna vrijednost, oba se limesa moraju računati istovremeno. U izraz za efikasnost uvrste se $L_2 = 2 - \xi$ i $r_{max} = 1 + \delta\xi$. U limesu $\xi \rightarrow 0$, dobiva se konstantni član koji ovisi samo o δ . Iz derivacije

$$\partial\eta(L_2 = 2 - \xi, r)/\partial r = 0 \Big|_{r=1+\delta\xi}, \quad (5.57)$$

zadržavajući samo vodeći član u ξ , dobiva se $\delta = 1/\sqrt{12}$ što daje maksimalnu efikasnost $\eta \approx 1.295$. Efikasnost ovakvog procesa može se dodatno poboljšati ako umjesto $b_1 = 2$ zadamo $b_1 = 2 + \delta(r - 1)$. Tada se za $r \rightarrow 1$ i $\delta = 2 - \sqrt{2}$ dobiva efikasnost $\eta \approx 2.63$.

U dosad opisanim slučajevima gibanje čestica bilo je ograničeno samo na ekvatorijalnu ravninu. Analiza procesa može se proširiti tako da se česticama dozvoli gibanje u θ smjeru. No, efikasnost je svejedno maksimalna ako se sam sudar odvija na horizontu. Smjer radijalnog momenta određuje koji će tip sudara biti energijski povoljniji, potpuno ekvatorijalni ili s neiščekavajućim momentima u θ smjeru. Općenito, kada je predznak radijalnog momenta čestice 1 negativan, efikasnost je optimizirana za maksimalnu moguću vrijednost p_1^θ , a ako je predznak pozitivan, proces mora biti u potpunosti ekvatorijalan ($p_1^\theta = 0$) kako bi se postigla maksimalna efikasnost. Za ranije opisan MMP– proces, uz ove se uvjete dobiva $\eta \approx 3.73$, a za MMP+ je $\eta \approx 6.37$.

Raspršenja

Elastično raspršenje masivnih čestica zadano je s $m_1 = E_1 = m_2 = E_2 = m_3 = m_4 = 1$. Masu čestice 3 parametriziramo s $\alpha_3 = m_3/E_3$ i odgovarajućim izborom α_3 dobivamo maksimalnu efikasnost. Razlikujemo dva slučaja ovisno o predznaku radijalnog impulsa čestice 1, pa se za pozitivan dobiva $\eta \approx 6.32$, a za negativan $\eta \approx 3.66$.

Najveća efikasnost dobiva se za Comptonovo raspršenje u kojem sudjeluju foton

pozitivnog radijalnog impulsa čiji je udarni parametar $b_1 = 2$ i masivna čestica za koju je $b_2 = -2(1 + \sqrt{2})$. Raspršenje rezultira fotonom negativnog radijalnog impulsa i kritičnog udarnog parametra $b_3 = 2$ te masivnom česticom negativne energije i angularnog momenta. Za sudar na horizontu ($r \rightarrow 1$) i u granici $E_1 \gg E_2$, efikasnost dostiže vrijednost od čak $\eta \approx 13.92$. Isti se rezultat dobiva ako se zamjene čestice 3 i 4.

U navedenim slučajevima, energija nastale čestice i do nekoliko je puta veća od početne energije. Takve vrijednosti efikasnosti dobivene su za idealizirane situacije u kojima pretpostavljamo maksimalni spin crne rupe, horizont kao mjesto sudara te točno podešene angularne momente čestica 1 i 2. Osim toga, ako bi čestica i uspjela pobjeći u beskonačnost, tijekom tog bi puta izgubila veći dio energije. Zbog toga se ne očekuje da opisani sudari imaju važniju ulogu pri akceleraciji i stvaranju novih čestica ili ekstrakciji energije pri astrofizikalnim procesima.

U tablicama 5.1 i 5.2 popisane su efikasnosti procesa u kojima u beskonačnost odlazi ili foton ili masivna čestica. Procesi u kojima je efikasnost maksimizirana za $E_1 \rightarrow \infty$ označeni su s *, a s ** označeni su oni u kojima je maksimizirana za $E_2 \rightarrow 0$.

	Maksimalna efikasnost
MMP−	$2 + \sqrt{2} \approx 3.73$
MMP+	$(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})/2 \approx 6.37$
PMP−	$2(2 + \sqrt{3}) \approx 7.46$ *
PMP+	$(2 + \sqrt{3})^2 \approx 13.92$ *
MPP−	$2(2 + \sqrt{3}) \approx 7.46$ **
MPP+	$(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2}) \approx 12.74$ **

Tablica 5.1: Maksimalna efikasnost procesa u kojima foton odlazi u beskonačnost, preuzeto iz [26].

	Maksimalna efikasnost
MMM−	$(4 + \sqrt{11})/2 \approx 3.66$
MMM+	$(7 + 4\sqrt{2})/2 \approx 6.32$
PMM−	$2(2 + \sqrt{3}) \approx 7.46$ *
PMM+	$(2 + \sqrt{3})^2 \approx 13.92$ *
MPM−	$4 + \sqrt{11} \approx 7.32$ **
MPM+	$7 + 4\sqrt{2} \approx 12.66$ **

Tablica 5.2: Maksimalna efikasnost procesa u kojima masivna čestica odlazi u beskonačnost, preuzeto iz [26].

5.5 Penroseov proces kod crvotočina

Osim u limesu divergirajuće energije u sustavu centra mase, neograničena energija čestica nastalih sudarom može se postići ako metrički koeficijent g_{tt} divergira (5.44). Takva situacija odgovara brzorotirajućem prostorvremenu kakvo bi mogle predstavljati crvotočine [31]. Kako promatrano prostorvrijeme ne bi bilo singularno, limes u kojem brzina rotacije divergira treba shvatiti samo formalno. U skladu s tim, parametre prostorvremena treba izabrati tako da energija u sustavu centra mase postiče velike vrijednosti, ali skalari tenzora zakrivljenosti ostaju konačni. Kao model rotirajuće crvotočine uzimamo jednostavan stacionaran i osnosimetričan primjer opisan u poglavlju 4.2.2., ali koristimo modificirani oblik metrike u kojem je radijalna koordinata ρ definirana s:

$$\frac{d\rho}{dr} = \pm \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.58)$$

Ograničavamo se na radijalno gibanje u ekvatorijalnoj ravnini ($\theta = \pi/2$) pa linijski element glasi:

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)(d\phi - \omega(\rho)dt)^2. \quad (5.59)$$

Računamo efektivni potencijal na identičan način kao i ranije za Kerrovu crnu rupu. Impulse u p^t i p^ϕ izražavamo preko očuvanih veličina, energije i angularnog momenta:

$$p^t = E - \omega(\rho)L, \quad (5.60)$$

$$p^\phi = \omega(\rho)(E - \omega(\rho)L) + \frac{L}{r^2(\rho)}. \quad (5.61)$$

Iz uvjeta normalizacije $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2$ dobiva se jednadžba oblika

$$\frac{1}{2}(p^r)^2 + U_{\text{ef}} = 0, \quad (5.62)$$

iz koje se pročita efektivni potencijal:

$$U_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \left(m^2 - (E - \omega(\rho)L)^2 + \frac{L^2}{r^2(\rho)} \right). \quad (5.63)$$

Prema jednadžbi (5.62), radijalni impuls jednak je

$$p^\rho(\rho) = \pm\sqrt{-2U_{\text{ef}}(\rho)}, \quad (5.64)$$

pa je čestica ograničena na gibanje u području u kojem je $U_{\text{ef}} \leq 0$. Pretpostavljamo da je $E_1 = E_2 \geq m_1 = m_2$, kao i $L_1 = L_2$ te da se čestice sudaraju na grlu crvotočine ($\rho = 0$). Posljedica prve pretpostavke je ta da se čestice 1 i 2 mogu nalaziti u beskonačnosti budući da je tada $U_{\text{ef}}(\pm\infty) = (m^2 - E^2)/2 \leq 0$. Zbog jednakosti masa, energija i angularnih momenata čestica, i efektivni potencijali jednaki su za obje čestice. Za produkte sudara vrijedi $E_3 \geq m_3 = m_4$ i $E_4 \leq 0$. Nadalje pretpostavljamo da čestica 1 dolazi do grla crvotočine iz područja u kojem je $\rho > 0$, a čestica 2 iz onog u kojem je $\rho < 0$. Naime, kod crvotočina razlikujemo dva asimptotski ravna područja, što omogućuje povoljniju konfiguraciju sudara nego u slučaju crnih rupa. Čestice koje dolaze do grla iz dva različita asimptotska područja sudaraju se čeonno te je u trenutku sudara njihov ukupni radijalni impuls jednak nuli. Kod crnih rupa negativna vrijednost ukupnog radijalnog moment otežava bijeg iz potencijala. Energija u sustavu centra mase na području grla dana je s:

$$E_{CM}^2(0) = 4(E_1 - \omega(0)L_1)^2 - \frac{4L_1^2}{b^2}. \quad (5.65)$$

Zakon očuvanja energije postavlja granicu na masu nastale čestice:

$$m_3 + m_4 = 2m_3 \leq E_{CM}(0), \quad (5.66)$$

$$m_3^2 \leq (E_1 - \omega(0)L_1)^2 - \frac{L_1^2}{b^2}. \quad (5.67)$$

Iz zakona očuvanja radijalnog impulsa slijedi:

$$0 = \sqrt{-2U_{\text{ef}(3)}(0)} - \sqrt{-2U_{\text{ef}(4)}(0)}, \quad (5.68)$$

gdje su predznaci impulsa izabrani tako da čestica 3 odlazi u beskonačnost ($\rho \rightarrow \infty$), a čestica 4 ostaje zarobljena u ergopodručju. U nastavku pretpostavljamo $U_{\text{ef}(3)}(0) = U_{\text{ef}(4)}(0) \leq 0$, što je u skladu s gornjim izrazom. Zakoni očuvanja energije i angular-

nog momenta daju:

$$E_4 = 2E_1 - E_3 \leq 0, \quad (5.69)$$

$$L_4 = 2L_1 - L_3. \quad (5.70)$$

Razmatramo efikasnost procesa za dva različita oblika potencijala. U prvom su slučaju angularni momenti čestica 1 i 2 jednaki nuli pa je efektivni potencijal konstantan:

$$U_{\text{ef}(1)} = U_{\text{ef}(2)} = \frac{1}{2}(m_1^2 - E_1^2). \quad (5.71)$$

Energija u sustavu centra mase u području grla i energija čestice 1 povezane su jednostavnim izrazom:

$$E_{CM}(0) = 2E_1. \quad (5.72)$$

Iz jednakosti efektivnih potencijala za česticu 3 i 4, koristeći zakone očuvanja (5.69) i (5.70) dobiva se:

$$L_3 = \frac{b^3}{2a}(E_3 - E_1), \quad (5.73)$$

a nejednakost $U_{\text{ef}(3)}(0) \leq 0$ vrijedi ako je $E_- \leq E_3 \leq E_+$:

$$E_{\pm} = E_1 \pm \frac{2a}{b^2} \sqrt{E_1^2 - m_3^2}, \quad (5.74)$$

gdje su E_{\pm} rješenja pripadne nejednadžbe. Time je dobivena gornja granica na efikasnost procesa:

$$\eta = \frac{E_3}{E_1 + E_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{b^2} \sqrt{1 - \frac{m_3^2}{E_1^2}}, \quad (5.75)$$

a iz nejednakosti (5.69) slijedi gornja granica na masu nastale čestice:

$$m_3 \leq \sqrt{1 - \frac{b^4}{4a^2}} E_1. \quad (5.76)$$

Sudarom visokoenergetskih čestica nastaje čestica veće mase i obrnuto.

Ako su energije početnih čestica male, energija u sustavu centra mase također je

skromna (5.72). Za brzorotirajuću crvotočinu ($a/b^2 \gg 1$), energija nastalih čestica i efikasnost procesa dosežu visoke vrijednosti, neovisno o energijama početnih čestica. Kao drugi tip efektivnog potencijala čestica 1 i 2 biramo duboki potencijal zadan s $L_1 = L_2 < 0$. Nejednakost $U_{\text{ef}(3)}(0) \leq 0$ određuje raspon mogućih energija čestice 3 tako da je $E_- \leq E_3 \leq E_+$, gdje su E_{\pm} definirani s:

$$E_{\pm} = E_1 \pm \sqrt{B} \left(\frac{2aE_1}{b^2} + \frac{L_1}{b} \left(1 - \frac{4a^2}{b^4} \right) \right), \quad (5.77)$$

a uvedena pokrata B jednaka je:

$$B = 1 - \frac{m_3^2}{\left(E_1 - \frac{2a}{b^3}L_1\right)^2 - \frac{L_1^2}{b^2}}. \quad (5.78)$$

Prilikom računanja energije čestice 3, korišten je izraz dobiven iz zakona očuvanja energije i angularnog momenta te jednakosti efektivnih potencijala čestica 3 i 4:

$$L_3 = \frac{\left(E_1 - \frac{2a}{b^3}L_1\right)\left(E_3 - E_1 + \frac{2a}{b^3}L_1\right) + \frac{L_1^2}{b^2}}{\frac{2aE_1}{b^3} + \frac{L_1}{b^2}\left(1 - \frac{4a^2}{b^4}\right)}. \quad (5.79)$$

Maksimalna efikasnost dana je s:

$$\eta_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{B}}{2} \left(\frac{2a}{b^2} + \frac{L_1}{bE_1} \left(1 - \frac{4a^2}{b^4} \right) \right). \quad (5.80)$$

U tablici 3 navedene su maksimalne vrijednosti efikasnosti procesa za pojedine izbore parametara b , E_1 i L_1 . Fiksirani su $B = 1/2$, $m_1 = 1$ i $a = 1$. Vidljivo je da povoljnim izborom parametara efikasnost može doseći vrlo velike vrijednosti te kao i kod ravnog potencijala, za to nisu nužne visoke energije početnih čestica.

b	E_1	L_1	Maksimalna efikasnost
$2^{1/4}$	1.1	-1	1.3
0.1	1.1	-1	1.3×10^5
0.001	1.1	-1	1.3×10^{15}
$2^{1/4}$	1.4	-4	1.8
1	1.1	-2	3.1

Tablica 5.3: Maksimalna efikasnost procesa u ovisnosti o parametrima ulazne čestice i crvotočine. Preuzeto iz [31].

Ova dva slučaja pokazuju da kod crvotočina energija u sustavu centra mase određuje dozvoljenu masu nastalih čestica, ali slabo utječe na efikasnost procesa. U odnosu na crne rupe, postoji dodatna sloboda pri izboru parametara koji opisuju prostor-vrijeme. Crvotočine nemaju horizont pa s te strane ne postoji ograničenje na iznos angularnog momenta, a drugi slobodni parametar je funkcija b . Odabirom dovoljno velikog omjera a/b^2 postizanje velike efikasnosti ne zahtijeva i visoke energije početnih čestica.

6 Zaključak

Korekcije opće teorije relativnosti unose nove članove u jednadžbe gibanja tijela. U nestatičnom prostorvremenu pojavljuje se dodatna sila koja uzrokuje efekt poznat kao Lense-Thirringova precesija. Teorijski predviđena vrijednost Lense-Thirringove precesije nastale zbog Zemljine rotacije iznosi 39.2 tisućinki lučnih sekundi po godini za žiroskop u niskoj orbiti. Ova vrijednost je, unutar eksperimentalne pogreške, potvrđena, što je još jedna u nizu potvrda Einsteinove teorije gravitacije. Nadovezujući se na Lense-Thirringovu precesiju, ergopodručja su definirana kao dijelovi prostorvremena u kojima je efekt povlačenja inercijalnih sustava zbog rotacije masivnog objekta toliko jak da brzina svih fizikalnih promatrača posjeduje angularnu komponentu različitu od nule. Ovakva definicija odraz je činjenice da asimptotski vremensko Killingovo vektorsko polje postaje svjetlosnog tipa unutar ergopodručja. U prostorvremenu s ergopodručjem nužno postoji statička granica, ergoploha, na kojoj norma Killingovog vektorskog polja iščezava. Pozivajući se na teoreme vezane uz kauzalnu strukturu prostorvremena, dokazano je da ergoplohe slabo omeđenih ergopodručja, kakva su primjerice ona u Kerrovom prostorvremenu, dodiruju ili horizont crne rupe ili singularitet. Kako opisati ergopodručja koja ne pripadaju klasi slabo omeđenih te što se može zaključiti o njihovim svojstvima ostaje otvoreno pitanje. Osim različitih vrsta rotirajućih crnih rupa, ergopodručja bi u teoriji mogla okruživati i crvotočine i rotirajuće zvijezde. Drugo neodgovoreno pitanje je može li postojati ergopodručje u vakuamskom prostorvremenu u kojem nisu prisutni niti horizont niti singularitet.

Zbog promjene tipa Killingovog vektorskog polja iz vremenskog u prostorni, očuvana energija nije nužno pozitivna unutar ergopodručja. Na toj se činjenici baziraju mehanizmi ekstrakcije energije iz ergopodručja, kao što su Penroseov proces i njegov valni analogon, superzračenje. Gornja granica na efikasnost najosnovnijeg oblika Penroseovog procesa u kojem se čestica raspada u dva ili više produkta određena je Waldovom nejednakošću. Pokazano je da je povećanje energije takvom vrstom procesa premalo da bi poslužilo kao izvor energije mlazova koje emitiraju crne rupe. Umjesto raspada jedne čestice, kao druga mogućnost promotrena je verzija Penroseovog procesa u kojoj se dvije čestice sudaraju. Najveća je efikasnost zabilježena kod Comptonovog raspršenja u blizini horizonta Kerrove crne rupe te iznosi $\eta \approx 13.92$.

No, takav sudar zahtijeva i točno određene vrijednosti angularnih momenata čestica te ekstremalnu vrijednost spina crne rupe. Osim toga, u obzir treba uzeti faktore koji dodatno umanjuju vjerojatnost realizacije procesa. Naime, čestica mora moći pobjeći iz potencijala crne rupe, a pritom gubi značajan dio energije. Iz tih se razloga smatra da ovakvi sudari ne mogu poslužiti kao ubrzivači čestica ili mehanizmi stvaranja novih vrsta čestica. S teorijske strane zanimljivi su sudari u blizini grla crvotočine kod kojih efikasnost može drastično narasti uz odgovarajući izbor angularnog momenta i funkcije koja određuje oblik grla crvotočine.

Dodaci

Dodatak A Prostorvrijeme s Killingovim vektorskim poljem

Definicija A.1. (Killingovo vektorsko polje)

Vektorsko polje K^a nazivamo Killingovim vektorskim poljem ako zadovoljava Killingovu jednadžbu:

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0. \quad (\text{A.1})$$

Teorem A.1. (Očuvane veličine)

Neka je K^a Killingovo vektorsko polje i γ geodezik s tangentskim vektorom u^a . Tada je veličina $u^a K_a$ konstantna duž geodezika.

Dokaz: $u^b \nabla_b (K_a u^a) = u^b u^a \nabla_b K_a + K_a u^b \nabla_b u^a = 0$

Prvi član iščezava zato što je simetrični tenzor $u^a u^b$ kontrahiran s antisimetričnim tenzorom $\nabla_a K_b$, a drugi zbog geodetske jednadžbe $u^a \nabla_a u^b = 0$.

Killingova vektorska polja infinitezimalni su generatori izometrija prostorvremena. U stacionarnom prostorvremenu definiran je Killingov vektor $k = \partial/\partial t$ koji predstavlja vremenske translacije. Pripadna očuvana veličina je $e = -u_a k^a$, koja se za masivne čestice interpretira kao energija po jedinici mase, a za bezmasene je ukupna energija produkt $E = \hbar e$. U osnosimetričnom prostorvremenu definiran je aksijalni Killingov vektor $m = \partial/\partial \phi$. Očuvanu veličinu $l = u_a m^a$ interpretiramo kao angularni moment po jedinici mase, dok je u slučaju bezmasenih čestica angularni moment jednak $L = \hbar l$.

Teorem A.2. Neka je (M, g_{ab}) mnogostrukost Lorentzovog tipa s Killingovim vektorskim poljem K^a . Tada njegova norma N i 1-forma $\omega = - * (K \wedge dK)$ zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$a) dN = -i_K dK$$

$$b) (dN|K) = 0$$

$$c) (K|\omega) = 0$$

$$d) NdK = -K \wedge dN + *(K \wedge \omega)$$

$$e) (\omega|\omega) = (dN|dN) - N(dK|dK)$$

$$f) * \left(K \wedge \frac{\omega}{N^2} \right) = d \left(\frac{K}{N} \right)$$

$$g) N\delta\omega = 2(\omega|dN)$$

$$h) d\omega = -2*(K \wedge R(K))$$

Dokaz:

$$a) dN = di_K K = \mathcal{L}_K K - i_K dK = -i_K dK$$

$$b) (dN|K) = -(i_K dK|K) = -i_K^2 dK = 0$$

$$c) (K|\omega) = -(K|*(K \wedge dK)) = -(K|i_K * dK) = -i_K^2 * dK = 0$$

$$d) *(K \wedge \omega) = -* (K \wedge *(K \wedge dK)) = i_K (K \wedge dK) = i_K K \wedge dK - K \wedge i_K dK = NdK + K \wedge dN$$

$$e) (\omega|\omega) = *(K \wedge dK)|*(K \wedge dK) = -(K \wedge dK|K \wedge dK) = -(dK|i_K (K \wedge dK)) = - (dK|i_K K \wedge dK) + (dK|K \wedge i_K dK) = -N(dK|dK) + (i_K dK|i_K dK) = -N(dK|dK) + (dN|dN)$$

$$f) -* \left(K \wedge \frac{*(K \wedge dK)}{N^2} \right) = \frac{1}{N^2} i_K (K \wedge dK) = \frac{1}{N^2} (NdK - K \wedge i_K dK) = \frac{1}{N^2} (NdK + K \wedge dN) = d \left(\frac{K}{N} \right)$$

$$g) (dN|\omega) = -* (dN \wedge *\omega) = *(dN \wedge K \wedge dK)$$

$$dN \wedge K \wedge dK = -dK \wedge K \wedge dN = dK \wedge K \wedge i_K dK = dK \wedge (-i_K (K \wedge dK) + i_K K \wedge dK) = dK \wedge (-*(K \wedge \omega) + NdK)$$

$$(dK|K \wedge \omega) = (\omega|i_K dK) = -(\omega|dN)$$

$$\delta\omega = -\delta*(K \wedge dK) = *d(K \wedge dK) = *(dK \wedge dK)$$

$$*(dN \wedge K \wedge dK) = N*(dK \wedge dK) - *(dK \wedge *(K \wedge \omega)) = N\delta\omega + (dK|K \wedge \omega) = N\delta\omega - (\omega|dN)$$

$$h) \Delta K = 2\nabla^b (\nabla_b K_a) = -2R(K)$$

$$\delta(K \wedge dK) = \mathcal{L}_K dK - K \wedge \delta dK = -K \wedge \delta dK = -K \wedge \Delta K = 2K \wedge R(K)$$

$$d\omega = -d*(K \wedge dK) - *\delta(K \wedge dK) = -* (K \wedge \Delta K) = -2*(K \wedge R(K))$$

Dodatak B Kauzalna struktura prostorvremena

Definicija B.1. Neka je M glatka mnogostrukost i T_pM prostor tangenlnih vektora u točki $p \in M$. Tangentni vektori $v \in T_pM$ mogu biti:

- a) vremenskog tipa ako je $g(v, v) < 0$
- b) svjetlosnog tipa ako je $g(v, v) = 0$
- c) prostornog tipa ako je $g(v, v) > 0$

Vektore vremenskog ili svjetlosnog tipa zajednički nazivamo kauzalnim vektorima.

Ako na mnogostrukosti M postoji neprekidno polje tangenlnih vektora t^a vremenskog tipa, kažemo da je M orijentabilna. Tada kauzalne vektore $v \in T_pM$ možemo podijeliti u dvije klase:

- a) buduće usmjerene $g(t(p), v) < 0$
- b) prošlo usmjerene $g(t(p), v) > 0$

Definicija B.2. Neka je γ krivulja na mnogostrukosti M . Ako je tangenlni vektor krivulje γ u svakoj njezinoj točki vremenskog tipa, tada je i krivulja γ vremenskog tipa. Jednako se definiraju krivulje svjetlosnog i prostornog tipa.

Definicija B.3. Za točku $p \in M$ definiramo:

- a) kronološku budućnost $I^+(p)$: skup svih točaka $q \in M$ takvih da postoji buduće usmjerena vremenska krivulja od p prema q
- b) kronološku prošlost $I^-(p)$: skup svih točaka $q \in M$ takvih da postoji buduće usmjerena vremenska krivulja od q prema p
- c) kauzalnu budućnost $J^+(p)$: skup svih točaka $q \in M$ takvih da postoji buduće usmjerena kauzalna krivulja od p prema q
- d) kauzalnu prošlost $J^-(p)$: skup svih točaka $q \in M$ takvih da postoji buduće usmjerena kauzalna krivulja od q prema p .

Napomena: Kauzalna budućnost obuhvaća i samu točku p . Točka p nije dio svoje kronološke budućnosti ako ne postoji zatvorena vremenska krivulja.

Teorem B.1. Neka su p i q točke na mnogostrukosti M . Svaka točka $p \in \partial I^+$ nalazi se na geodeziku svjetlosnog tipa γ koji je u potpunosti sadržan u ∂I^+ te je ili beskrajn ili ima krajnju točku u q .

Napomena: teorem vrijedi i ako točku q zamijenimo sa zatvorenim podskupom $C \subset M$ te pritom pretpostavljamo da točka p nije dio tog skupa.

Definicija B.4. Prostorvrijeme (M, g_{ab}) je jako kauzalno ako za svaku točku $p \in M$ i za svaku okolinu O točke p postoji okolina V točke p sadržana u O takva da niti jedna kauzalna krivulja ne siječe V više od jednom. Ako prostorvrijeme narušava jako kauzalnost u p , tada blizu p postoje kauzalne krivulje koje se skoro presijecaju.

Definicija B.5. Prostorvrijeme (M, g_{ab}) je stabilno kauzalno ako postoji neprekidno vektorsko polje vremenskog tipa t^a takvo da prostorvrijeme (M, \bar{g}_{ab}) , gdje je $\bar{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b$, nema zatvorenih vremenskih krivulja.

Svaki vektor koji je u g_{ab} kauzalnog tipa, u \bar{g}_{ab} je vremenskog tipa. Ako se u prostorvremenu krivulje skoro presijecaju, ovakvim povećanjem svjetlosnog stošca mogu nastati zatvorene vremenske krivulje.

Teorem B.2. Prostorvrijeme je stabilno kauzalno ako i samo ako postoji diferencijabilna funkcija f na M takva da je $\nabla^a f$ prošlo usmjereno vektorsko polje vremenskog tipa.

Korolar: Stabilna kauzalnost povlači jako kauzalnost.

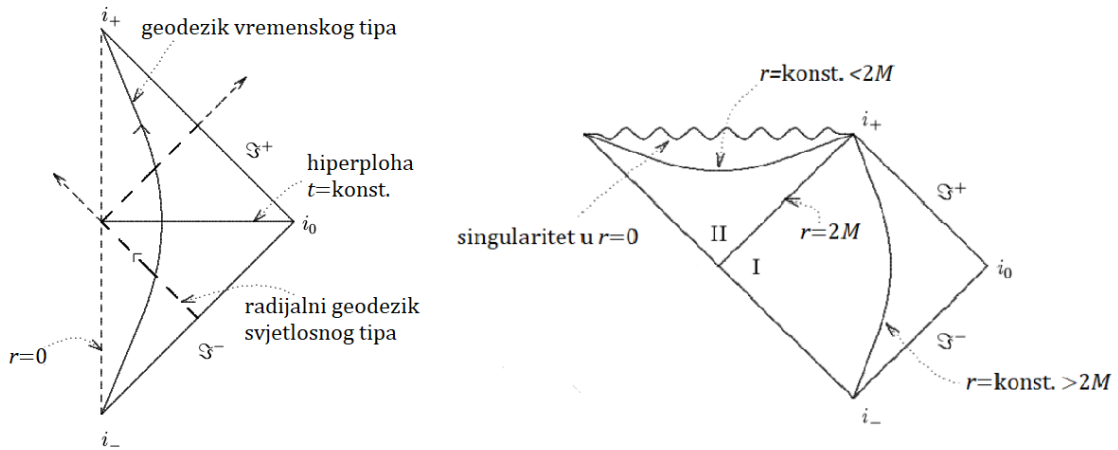
Kauzalna struktura prostorvremena praktično se može prikazati pomoću Penroseovih dijagrama. Penroseov dijagram dobiva se reskaliranjem metrike $g_{ab} \rightarrow \Omega^2 g_{ab}$, gdje se faktor Ω bira tako da čitavo prostorvrijeme zajedno s beskonačnostima bude prikazano na dijagramu. Ovakvom transformacijom smjer svjetlosnih krivulja ostaje pod kutem od 45° u odnosu na vremensku i prostornu os. Penroseovi dijagrami crtaju se u dvije dimenzije pa svaka točka u dijagramu predstavlja 2-sferu. Prostorvrijeme mora biti asimptotski ravno kako bi bilo moguće konstruirati Penroseov dijagram. Razlikujemo nekoliko asimptotskih područja:

- a) buduća svjetlosna beskonačnost \mathcal{I}^+ : sadrži krajnje točke svih buduće usmjerenih svjetlosnih geodezika duž kojih prostorna koordinata raste
- b) prošla svjetlosna beskonačnost \mathcal{I}^- : sadrži krajnje točke svih prošlo usmjerenih svjetlosnih geodezika duž kojih se prostorna koordinata smanjuje
- c) prostorna beskonačnost i^0 : sadrži krajnje točke svih prostornih geodezika

d) buduća vremenska beskonačnost i^+ : sadrži krajnje točke svih buduće usmjerenih vremenskih geodezika

e) prošla vremenska beskonačnost i^- : sadrži krajnje točke svih prošlo usmjerenih vremenskih geodezika

Na slici B.1 prikazani su Penroseovi dijagrami za prostorvrijeme Minkowskog i statičnu Schwarzschildovu crnu rupu.



Slika B.1: Lijevo: Penroseov dijagram za prostorvrijeme Minkowskog; desno: Penroseov dijagram za Schwarzschildovu crnu rupu, područje II označava unutrašnjost crne rupe (dio unutar horizonta događaja $r = 2M$). Preuzeto iz [11].

Definicija B.6. Dio prostorvremena $B = M - J^-(\mathcal{I}^+)$ naziva se crnom rupom. Horizont događaja H definiran je s $H = \partial J^-(\mathcal{I}^+) \cap M$. Skup B je zatvoren pa je H sadržan u njemu.

Dodatak C Energijski uvjeti

Kriterije koje tenzor energije i impulsa T_{ab} mora zadovoljiti kako bi opisivao fizikalno realističnu materiju nazivamo energijskim uvjetima.

Prema **slabom energijskom uvjetu**, gustoća energije $T_{ab}v^av^b$ koju mjeri bilo koji promatrač čiji je četverovektor brzine v^a mora biti nenegativna:

$$T_{ab}v^av^b \geq 0, \tag{C.2}$$

za svaki vremenski vektor v^a . Privlačnost gravitacije manifestira se kroz **jaki energijski uvjet**:

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^av^b \geq 0, \quad (\text{C.3})$$

za svaki vektor v^a vremenskog tipa. Korisniji oblik ovog teorema dobiva se iz Einsteinove jednadžbe (uz kozmološku konstantu Λ jednaku nuli) te postaje očita veza s Riccijevim tenzorom. Einsteinova se jednadžba kontrahira s v^av^b te potom iskoristi veza Riccijevog skalara i traga tenzora T_{ab} dobivena računanjem traga Einsteinove jednadžbe:

$$8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^av^b = 8\pi(T_{ab}v^av^b + \frac{1}{2}T) = R_{ab}v^av^b \geq 0. \quad (\text{C.4})$$

Jaki energijski uvjet ne implicira slabi ukoliko nije riječ o vektorima svjetlosnog tipa. Za vektore svjetlosnog tipa ta su dva uvjeta ekvivalentna. Postoji i treći uvjet, **dominantni energijski uvjet**, koji ograničava brzinu toka energije na manju ili jednaku brzini svjetlosti. Za svaki buduće usmjereni vektor vremenskog tipa v^a , vektorsko polje $-T^a_bv^b$ mora biti vremenskog ili svjetlosnog tipa i buduće usmjereno. Energijski uvjeti vrijede za klasičnu materiju, no kvantni efekti mogu dovesti do njihovog narušenja. Jedno od predloženih rješenja tog problema korištenje je uprosječenih verzija navedenih uvjeta. Neka novija istraživanja ekspanzije svemira i modeli inflacije ukazuju na moguće narušenje jakog energijskog uvjeta čak i nakon usrednjavanja.

Literatura

- [1] Pfister, H. On the history of the so-called Lense-Thirring effect, *Gen. Rel. Grav.* Vol. 39, 11 (2007), str. 1735–1748.
- [2] Poisson, E. *A relativist's Toolkit*, Cambridge University Press, (2004)
- [3] Will, C. M. Finally, Results from Gravity Probe B, *Physics* Vol. 4, 43 (2011)
- [4] Everitt C. W. F. et al. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to test General Relativity, *Phys. Rev. Lett.* Vol.106, (2011)
- [5] Hajiček, P. General Theory of Vacuum Ergospheres, *Phys. Rev. D* Vol. 7, 8 (1973)
- [6] Boyer, R. H. Geodesic Killing Orbits and Bifurcate Killing Horizons, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 311 (1969), str. 245–252
- [7] Vishveshwara, C. V. Generalization of the “Schwarzschild Surface” to Arbitrary Stationary Metrics, *J. Math. Phys.* Vol. 9, (1968), str. 1319-1322
- [8] Carter, B. Killing horizons and orthogonally transitive groups in space-time, *J. Math. Phys.* Vol. 10, (1969), str. 70–81
- [9] Kerr, R. P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 11, 5 (1963), str. 237–238
- [10] Pelavas N.; Neary N.; Lake K. Properties of the instantaneous Ergo Surface of a Kerr Black Hole, *Class. Quantum Grav.* Vol. 18, 7 (2001), str. 1319–1331
- [11] Townsend, P. K. *Black Holes*, arXiv:gr-qc/9707012v1 (1997)
- [12] Mukherjee, S.; Chakraborty, S.; Dadhich, N. On Some Novel Features of the Kerr-Newman-NUT Spacetime, *Eur. Phys. J. C* 79, (2019), str.161
- [13] Tomimatsu A.; Sato, H. New Exact Solution for the Gravitational Field of a Spinning Mass, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 29, (1972), str. 1344–1345
- [14] Gibbons, G. W.; Russell-Clark, R.A. Note on the Sato-Tomimatsu Solution of Einstein's Equations, *Phys. Rev. Lett.* Vol.30, 9 (1973), str. 398–399
- [15] Kodama, H.; Hikida, W. Global Structure of the Zipoy-Vorhees-Weyl Space-time, *Class. Quantum Grav.* Vol. 20, (2003), str. 5121–5140

- [16] Banados, M.; Teitelboim C.; Zanelli, J. The Black hole in three-dimensional space-time, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 69, 13 (1992), str. 1849--1851
- [17] Kamata, M.; Koikawa T. The Electrically charged BTZ black hole with self (anti-self) dual Maxwell field, *Phys. Lett. B* Vol. 353 (1995), str. 196–200
- [18] Schutz, B. F.; Comins, N. On the Existence of Ergoregions in Rotating Stars, *Mon. Not. R. astr. Soc.* Vol. 182, (1978), str. 69–76
- [19] Tsokaros A.; Ruiz M.; Sun, L; Shapiro, S. L.; Uryu, K. Dynamically stable ergostars exist! arXiv:1907.03765 [gr-qc] (2019)
- [20] Misner, C. W.; Thorne K. S.; Wheeler J. A. Gravitation, San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [21] Teo, E Rotating Traversable Wormholes, *Phys. Rev. D* Vol. 58, 024014 (1998)
- [22] Wald, R. M. General Relativity, The University of Chicago Press, (1984)
- [23] Frolov, V. P.; Novikov, I. D. Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments, (1997)
- [24] Wald, R. M. Energy Limits on the Penrose Process, *The Astrophysical Journal* Vol. 191, (1974), str. 231–233
- [25] Schnittman, J. D. The Collisional Penrose Process, *Gen. Rel. Grav.* Vol. 50, 6 (2018)
- [26] Leiderschneider, E.; Piran T. On the Maximal Efficiency of the Collisional Penrose Process, *Phys. Rev. D* Vol. 93, 043015 (2016)
- [27] Banados, M.; Silk, J.; West, S. M. Kerr Black Holes as Particle Accelerators to Arbitrarily High Energy, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 103, 111102 (2009)
- [28] J. D, Schnittman, A Revised Upper Limit to Energy Extraction from a Kerr Black Hole, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 113, 261102 (2014)
- [29] Chandrasekhar, S. The Mathematical Theory of Black Holes. New York: Oxford University Press, (1983)

- [30] Tanatarov, I. V.; Zaslavskii, O. B. Collisional Super-Penrose Process and Wald Inequalities, *Gen. Rel. Grav.* Vol. 49, 9 (2016)
- [31] Tsukamoto, N.; Bambi, C. Collisional Penrose Process in Rotating Wormhole Spacetime, *Phys. Rev. D* Vol. 91, 104040 (2015)