

Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe sa sintetskim magnetskim poljem

Čelan, Ozana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:417678>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-26**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ozana Čelan

MODULACIJSKA NESTABILNOST
NELINEARNE SCHRÖDINGEROVE
JEDNADŽBE SA SINTETSKIM
MAGNETSKIM POLJEM

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: DIPL. ING. FIZIKE

Ozana Čelan

Diplomski rad

**Modulacijska nestabilnost
nelinearne Schrödingerove jednadžbe
sa sintetskim magnetskim poljem**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Karlo Lelas

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2019.

Posvećeno mami i tati.

Sažetak

Dinamika slabo međudjelujućih Bose Einsteinovih kondenzata i propagacija svjetlosti kroz nelinearan medij opisuju se nelinearnom Schrödingerovom jednađbom. Modulacijska nestabilnost je fenomen karakterističan za sustave opisane tom jednađbom i istraživan je u kontekstu Bose Einstein kondenzata i u kontekstu nelinearne optike. U novije vrijeme se razvijaju metode za kreiranje sintetskih magnetskih polja u tim sustavima u svrhu realizacije kvantnih emulatora. Mi smo u ovom radu teorijski istražili kako na modulacijsku nestabilnost utječe uvođenje homogenog sintetskog magnetskog polja u nelinearnu Schrödingerovu jednađbu. Razvili smo dvije numeričke metode za vremensku evoluciju jednađbe te pokazali da se modulacijska nestabilnost događa i u prisutnosti sintetskog magnetskog polja. Također, pokazali smo da će rezultati vremenske evolucije ovisiti o odabiru vektorskog potencijala s kojim opisujemo homogeno sintetsko magnetsko polje. Objasnili smo da do razlika u vremenskim evolucijama, za različite odabire vektorskog potencijala, dolazi zbog sintetskog električnog polja koje se javlja u trenutku uključivanja sintetskog magnetskog polja.

Ključne riječi: *modulacijska nestabilnost, nelinearna Schrödingerova jednađba, Bose Einsteinov kondenzat, nelinearna optika, sintetsko magnetsko polje, baždarenje*

Modulation instability in the nonlinear Schrödinger equation with a synthetic magnetic field

Abstract

Dynamics of weakly interacting Bose Einstein condensates, and propagation of light through nonlinear media, are both described with the nonlinear Schrödinger equation. Modulation instability is a phenomenon characteristic for systems described with this equation and it was explored in the context of Bose Einstein condensates and in the context of nonlinear optics. Recently, new methods are being developed for creating homogeneous synthetic magnetic fields in these systems in order to create quantum emulators. In this work we theoretically explored how the implementation of the homogeneous synthetic magnetic field in nonlinear Schrödinger equation influences the modulation instability. We developed two numerical methods for the time evolution of the equation, and we showed that the modulation instability also occurs in the presence of homogeneous synthetic magnetic field. We also showed that the results of time evolution will depend on the choice of the vector potential used to describe the homogeneous synthetic magnetic field. We explained that the differences in time evolutions, for different choices of vector potential, occur because of the synthetic electric field which appears in the moment of activation of the homogeneous synthetic magnetic field.

Keywords: *modulation instability, nonlinear Schrödinger equation, Bose Einstein condensate, nonlinear optics, synthetic magnetic field, gauge*

Sadržaj

1	Uvod.....	1
2	Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe.....	3
2.1	<i>Nelinearna Schrödingerova jednadžba</i>	3
2.1.1	Razrijeđeni bozonski plin na niskim temperaturama.....	3
2.1.2	Propagacija monokromatske svjetlosti kroz medij sa Kerrovom nelinearnosti.....	4
2.2	<i>Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe</i>	5
2.2.1	Modulacijska nestabilnost homogene jednodimenzionalne NLSE	5
2.2.2	Modulacijske nestabilnost 1D NLSE sa harmoničkim potencijalom.....	10
3	Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe sa sintetskim magnetskim poljem	14
3.1	<i>Nelinearna Schrödingerova jednadžba sa sintetskim magnetskim poljem</i>	14
3.2	<i>Modulacijska nestabilnost 2D NLSE sa sintetskim magnetskim poljem</i>	16
4	Numeričke metode za rješavanje NLSE sa sintetskim magnetskim poljem	18
4.1	<i>Metoda vlastitih vrijednosti</i>	18
4.2	<i>Split-step metoda</i>	20
5	Rezultati	23
5.1	<i>Diskusija rezultata</i>	32
6	Zaključak.....	35
	Dodatak.....	37
A.	<i>Izvod pojačanja g</i>	37
B.	<i>TF početno stanje</i>	37
C.	<i>Matrična reprezentacija linearnog člana hamiltonijana</i>	39
	Literatura	43

1 Uvod

Vremenski ovisna nelinearna Schrödingerova jednadžba (engl. *time dependent nonlinear Schrödinger equation*, kratica: NLSE) se koristi u mnogim područjima fizike, kao npr. za opis dinamike Bose-Einsteinovih kondenzata u ultrahladnim bozonskim plinovima, za opis propagacije svjetlosti kroz nelinearan medij, u fizici plazme, hidrodinamici [1,2] itd. Mi ćemo u ovom diplomskom radu razmatrati NLSE u kontekstu Bose-Einsteinovih kondenzata i u kontekstu propagacije svjetlosti kroz nelinearan medij.

Homogeni ravni val je samosuglasno svojstveno stanje NLSE kod kojeg je intenzitet ravnog vala povezan sa faznom brzinom zbog nelinearnosti. Međutim, to je svojstveno stanje nestabilno. Ukoliko dodamo infinitezimalno malu perturbaciju (modulaciju/šum) na svojstveno stanje NLSE, ta perturbacija može eksponencijalno rasti u vremenskoj evoluciji, ukoliko valni vektori perturbacije zadovoljavaju određeni uvjet [2]. Ukoliko na početni ravni val dodamo infinitezimalno mali bijeli šum (on sadrži sve moguće perturbacije u sebi), dio perturbacija će pokazivati nestabilnost. Tu pojavu nazivamo modulacijska nestabilnost (engl. *modulation instability*, kratica: MI) i karakteristična je za nelinearne sustave opisane sa NLSE.

U novije vrijeme postoji interes za kreiranjem sintetskih magnetskih polja za neutralne hladne atome u Bose Einstein kondenzatima [3] i za svjetlost u tzv. fotoničkim sustavima [3]. Taj interes dolazi od ideje kvantnih emulatora [4], tj. od ideje da se s tim sustavima oponašaju drugi kvantni sustavi koje je teško eksperimentalno kontrolirati ili realizirati, kao npr. elektroni u materijalu koji je izložen ekstremno jakom magnetskom polju. Pošto neutralni atomi i fotoni ne osjećaju djelovanje magnetskog polja, kao što ga osjećaju nabijene čestice, potrebno je na neki način ostvariti sintetsko magnetsko polje, tj. na neki način “natjerati“ neutralne čestice da se ponašaju kao nabijene čestice u magnetskom polju. U ovom diplomskom radu nećemo ulaziti u detalje eksperimentalnih metoda za postizanje sintetskih magnetskih polja za neutralne atome i fotone, zainteresirani čitatelj može pogledati npr. reference [3,5,6]. Mi ćemo u ovom radu, koristeći tzv. minimalnu supstituciju [10], uvesti u NLSE vektorski potencijal koji predstavlja djelovanje sintetskog magnetskog polja. Cilj nam je teorijski istražiti kako na fenomen modulacijske nestabilnosti utječe dodavanje sintetskog magnetskog polja u NLSE. Istražiti ćemo da li će dodavanje sintetskog magnetskog polja možda potisnuti MI, ili, ukoliko neće potisnuti, hoće li možda

MI na neki način ovisiti o baždarenju kojeg koristimo? Razviti ćemo numeričke metode za računanje vremenske evolucije NLSE sa dodanim homogenim sintetskim magnetskim poljem te razmotriti MI u dva baždarenja: simetričnom i Landauovom baždarenju.

U sljedećem poglavlju ćemo doći do bezdimenzionalne NLSE i objasniti modulacijsku nestabilnost pri evoluciji stanja sa perturbacijom (poglavlje 2). Uvesti ćemo homogeno sintetsko magnetsko polje u NLSE (poglavlje 3) i pokazati numeričke metode koje ćemo koristiti za vremensku evoluciju te jednadžbe (poglavlje 4). Prikazati ćemo dobivene rezultate i vidjeti da li smo detektirali modulacijsku nestabilnost za stanje sa dodanom perturbacijom te istražiti da li odabir baždarenja utječe na modulacijsku nestabilnost (poglavlje 5).

2 Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe

2.1 Nelinearna Schrödingerova jednadžba

Vremenski ovisna nelinearna Schrödingerova jednadžba (engl. *time dependent nonlinear Schrödinger equation*, kratica: NLSE) je jedan od modela koji koristimo za opisivanje nelinearne dinamike kompleksne valne funkcije. NLSE se koristi u raznim područjima fizike a u nastavku ćemo izdvojiti dva nama zanimljiva slučaja. Jedan je sustav dvodimenzionalnog Bose-Einsteinovog kondenzata a drugi je sustav gdje imamo propagaciju elektromagnetskog vala kroz nelinearni medij.

2.1.1 Razrijeđeni bozonski plin na niskim temperaturama

U slučaju Bose-Einsteinovog kondenzata (engl. *Bose-Einstein condensate*, kratica: BEC) promatramo dvodimenzionalni (2D) bozonski plin na temperaturi bliskoj apsolutnoj nuli, $T \approx 0K$, gdje su svi bozoni u jednočestičnom stanju stvarajući makroskopsko stanje koje zovemo kondenzat. Više-čestičnu valnu funkciju kondenzata možemo zapisati kao produkt $\psi_{\text{više-čestična}}(\{x_j\}, \{y_j\}) = \prod_{i=1}^N \psi(x_i, y_i)$, pri čemu je ψ jednočestično stanje koje opisuje kondenzat. Ovdje smo pretpostavili da imamo N bozona u sustavu, te da razmatramo slabo međudjelujući bozonski plin u kojem se međudjelovanje bozona može aproksimirati srednjim poljem [1]. Model koji koristimo za opisivanje dinamike dvodimenzionalnog bozonskog plina je dan vremenski ovisnom Gross-Pitaevskii jednadžbom (engl. *time dependent Gross-Pitaevskii equation*, kratica: GPE) [1]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y) + N \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s |\psi(x, y; t)|^2 \right) \psi(x, y; t) \quad (1)$$

gdje je ψ valna funkcija kondenzata, m je masa bozona, a_s je dužina raspršenja s -vala koja opisuje međudjelovanje. $V(x, y)$ odgovara nametnutom vanjskom potencijalu, a laplasiijan je dan kao $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Za $a_s > 0$ govorimo o odbojnoj interakciji a za $a_s < 0$ o privlačnoj interakciji. U današnjim eksperimentima sa ultrahladnim bozonskim sustavima atomi se mogu zatočiti u efektivne 2D potencijale. Homogeno sintetsko magnetsko polje je okomito na ravninu u kojoj se nalazi bozonski plin.

Supstitucijom $x = x_0 x'$, $y = x_0 y'$, $t = \frac{2m}{\hbar} x_0^2 t'$, $V = \frac{\hbar^2}{2m x_0^2} V'$, $\psi = \frac{1}{x_0} \psi'$ gdje su x', y', t', ψ', V' bezdimenzionalne veličine i supstitucijom $\eta = N 8\pi a_s$ jednadžbu (1) možemo svesti na bezdimenzionalnu GPE oblika

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = (-\nabla'^2 + V' + \eta |\psi'|^2) \psi'. \quad (2)$$

2.1.2 Propagacija monokromatske svjetlosti kroz medij sa Kerrovom nelinearnosti

U nelinearnoj optici ćemo promatrati propagaciju svjetlosti kroz nelinearan Kerrov medij u paraksijalnoj aproksimaciji [2,7]. U Kerrovoj nelinearnosti indeks loma je ovisan o intenzitetu $I = |\psi(x, y; z)|^2$ na način da je indeks loma dan kao $n(I) = n_0 + n_2 I$, pri čemu je n_0 homogeni dio indeksa loma a $n_2 I$ je Kerrova nelinearnost medija. Za slučaj monokromatskog vala frekvencije ω koji se propagira duž \hat{z} osi kroz nelinearni Kerrov medij koristimo NLSE danu kao [2]:

$$\nabla^2 \psi(x, y; z) + 2ik \frac{\partial \psi(x, y; z)}{\partial z} + 2k^2 \frac{n_2}{n_0} I \psi(x, y; z) = 0, \quad (3)$$

gdje je $\psi(x, y; z)$ kompleksno optičko polje za koje vrijedi da je intenzitet dan kao kvadrat apsolutne vrijednosti polja, odnosno $I = |\psi(x, y; z)|^2$. U ovom slučaju NLSE će z -os igrati ulogu osi vremena. Kompleksno optičko polje je povezano s kompleksnom amplitudom

električnog polja relacijom $\psi(x, y; z) = \sqrt{\frac{n}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}} E(x, y, z)$ [2] (pretpostavili smo da je val

linearno polariziran). U jednadžbi (3) je laplasijan dan kao $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, k je valni vektor dan kao $k = \frac{\omega n_0}{c}$. Indeks loma n_2 može biti pozitivan i negativan, za $n_2 > 0$ svojstvo medija je samofokusirajuće, dok je za $n_2 < 0$ samodefokusirajuće.

Supstitucijom $x = x_0 x'$, $y = x_0 y'$, $z = 2k x_0^2 t'$, $\psi = \sqrt{\frac{W}{m^2}} \psi'$ gdje su x', y', t', ψ' bezdimenzionalne varijable i supstitucijom $\eta = -2k^2 x_0^2 \frac{n_2}{n_0} \frac{W}{m^2}$ te odabranom jedinicom dužine x_0 jednadžbu (3) možemo svesti na bezdimenzionalni oblik

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = -\nabla'^2 \psi' + \eta |\psi'|^2 \psi'. \quad (4)$$

Ako promotrimo GPE koja se koristi u BEC-u (1) i NLSE koja se koristi u nelinearnoj optici (3) možemo uočiti da je nelinearnost u optici rezultat vanjskog medija dok je kod GPE nelinearnost uzrokovana međudjelovanjem čestica u sustavu. Iako se radi o različitim sustavima i različitim uzrocima nelinearnosti, dobili smo bezdimenzionalne jednadžbe (2) i

(4) koje su iste forme. U nastavku rada ćemo radi jednostavnosti apostrof (') koji označava bezdimenzionalne veličine maknuti prilikom pisanja istih, ali ćemo pri tom i dalje raditi isključivo sa bezdimenzionalnim veličinama i NLSE jednadžbom koja će biti oblika

$$i \frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} = [-\nabla^2 + V(x, y) + \eta |\psi(x, y; t)|^2] \psi(x, y; t). \quad (5)$$

Parametar η se naziva jakost nelinearnosti, a često se koristi i naziv konstanta vezanja (engl. *coupling constant*) ili član samodjelovanja te je odgovoran za postojanje modulacijske nestabilnosti i svijetlih solitona (za $\eta < 0$) te tamnih solitona (za $\eta > 0$) [1,2]. Za $\eta = 0$ jednadžba postaje poznata linearna Schrödingerova jednadžba. Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije $|\psi(x, y; t)|^2$ predstavlja gustoću vjerojatnosti u kontekstu BEC-a, odnosno intenzitet svjetlosti u kontekstu nelinearne optike, a mi ćemo ga zbog jednostavnosti u ostatku teksta kratko zvati intenzitet.

2.2 Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe

Jedno od svojstava NLSE jest da dodavanjem infinitezimalne perturbacije (šuma) φ na početno svojstveno stanje NLSE, vremenska evolucija tog perturbiranog početnog stanja postaje nestabilna tj. infinitezimalne modulacije početnog stanja eksponencijalno rastu u vremenskoj evoluciji. Tu pojavu zovemo modulacijska nestabilnost (engl. *modulation instability*, kratica: MI).

MI se pojavljuje u NLSE za negativnu konstantu vezanja ($\eta < 0$) što odgovara privlačnoj interakciji bozona u Bose-Einstein kondenzaciji odnosno odgovara samofokusirajućoj nelinearnosti (Kerrovog oblika) u nelinearnoj optici [1,2]. U nastavku ovog poglavlja orijentirati ćemo se na analizu pojave MI u slučaju homogene 1D NLSE i 1D NLSE sa harmoničkim potencijalom.

2.2.1 Modulacijska nestabilnost homogene jednodimenzionalne NLSE

Razmotriti ćemo MI homogenog svojstvenog stanja, koje je osnovno stanje homogene NLSE (pod homogenom NLSE mislimo na jednadžbu bez vanjskog potencijala). Dodavanjem infinitezimalne perturbacije (šuma) na početno homogeno svojstveno stanje pokazati ćemo da neke Fourierove komponente perturbacije eksponencijalno rastu.

Jednodimenzionalna NLSE, bez vanjskog potencijala tj. $V(x) = 0$, je dana kao

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x; t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta |\psi(x; t)|^2 \right] \psi(x; t). \quad (6)$$

Svojevrsna rješenja jednadžbe (6) su ravni valovi, oblika

$$\psi_k(x, t) = \sqrt{I_k} e^{i(kx + \beta t)}, \quad (7)$$

gdje je intenzitet dan kao $I_k = |\psi_k(x)|^2$. Uvrštavanjem rješenja (7) u NLSE (6) dobijemo $\beta(k) = -k^2 - \eta I_k$. Ta rješenja su stacionarna jer intenzitet I_k ne ovisi o t odnosno ne mijenja se prilikom evolucije. Vidimo da fazna brzina ovisi o intenzitetu što je posljedica nelinearnosti.

Za početno stanje uzimamo homogeno stanje, kada je $k = 0$ u jednadžbi (7). To je stanje kada je ravni val ψ_0 neovisan o x , odnosno

$$\psi_0 = \sqrt{I_0} e^{-i\eta I_0 t}. \quad (8)$$

Na to stanje dodajemo infinitezimalnu perturbaciju (šum) $\varphi = \varphi(x, t)$ na način da promatrani val bude oblika $\psi(x, t) = \psi_0(1 + \varphi(x, t))$, uz uvjet $\varphi \ll 1$, što možemo zapisati

$$\psi(x, t) = \sqrt{I_0} e^{-i\eta I_0 t} (1 + \varphi(x, t)) \quad (9)$$

Uvrštavanjem (9) u jednadžbu (6) dobije se

$$\eta I_0 (1 + \varphi) + i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \eta I_0 (1 + \varphi)^2 (1 + \varphi^*) \quad (10)$$

Budući da je $\varphi \ll 1$ radimo analizu linearne stabilnosti što znači da zanemarujemo sve članove od kvadratičnog reda na više, odnosno $\varphi^2, \varphi^{*2}, \varphi^* \varphi, \dots \approx 0$. Iz toga direktno slijedi jednadžba koju mora zadovoljavati šum

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \eta I_0 (\varphi + \varphi^*). \quad (11)$$

Nadalje, cilj nam je naći rješenja jednadžbe (11) koja eksponencijalno rastu u vremenu, odnosno koja su oblika

$$\varphi_k(x, t) \propto e^{g(k)t} e^{ikx}, \quad (12)$$

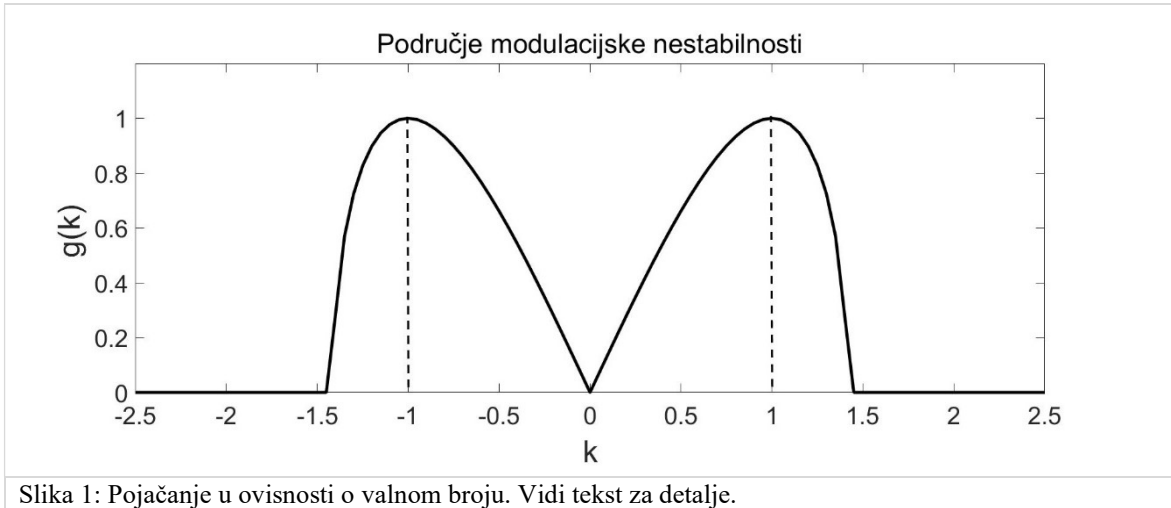
gdje je $g(k) > 0$. Rješavanje jednadžbe (11) nas vodi na uvjet

$$g(k) = \sqrt{k^2(-2\eta I_0 - k^2)} \quad (13)$$

koji nam govori koje Fourierove komponente perturbacije $\varphi(x, t)$ eksponencijalno rastu u vremenu, gdje se $g(k)$ naziva pojačanjem (engl. *gain*). Izvod za pojačanje (13) je dan u dodatku A.

Uočimo da za cijelo područje valnih vektora za koje je izraz ispod korijena (13) pozitivan imamo eksponencijalni rast perturbacije koju dodajemo na početno homogeno stanje (podsjetnik: radimo u području $\eta < 0$), tj. početno stanje je nestabilno na perturbacije koje sadrže Fourierove komponente sa valnim vektorima iz tog područja. Možemo reći da

izraz (13) definira područje nestabilnosti $|k| \in \langle 0, \sqrt{-2\eta I_0} \rangle$. Maksimum pojačanja je za vrijednost $k^2 = -\eta I_0$. Bez obzira koliko malu perturbaciju početnog stanja napravimo, ukoliko perturbacija ima u sebi Fourierove komponente sa valnim vektorom iz područja nestabilnosti, imat ćemo eksponencijalni rast perturbacije u vremenskoj evoluciji.

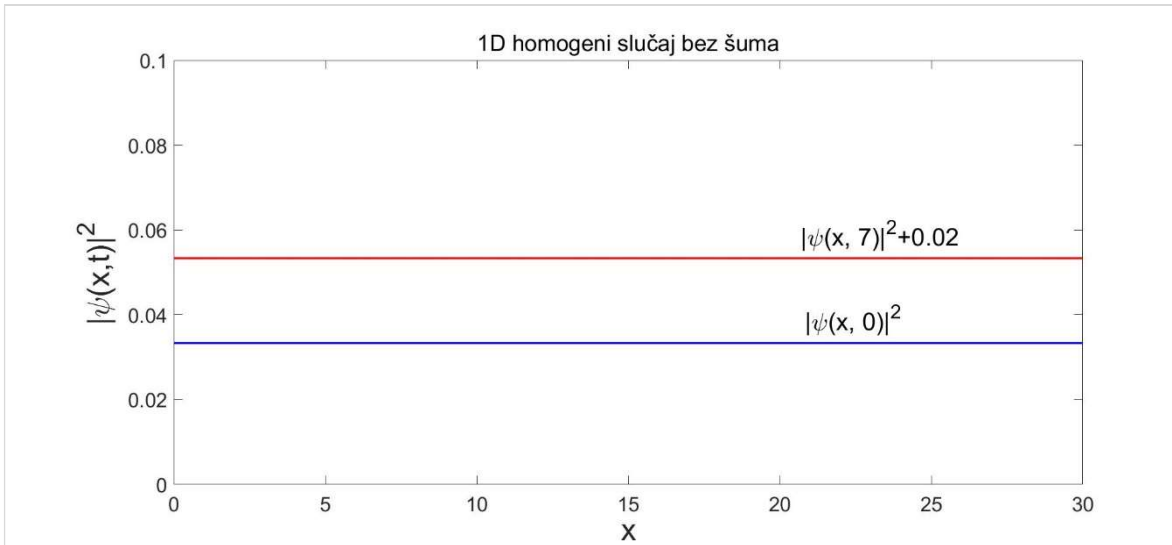


Slika 1: Pojačanje u ovisnosti o valnom broju. Vidi tekst za detalje.

Da bi demonstrirali modulacijsku nestabilnost, promotrit ćemo konkretnu vremensku evoluciju s konkretnim brojevima. Razmatramo 1D homogenu NLSE na području $x \in [0, L]$ uz periodične rubne uvjete. Uzimamo da je $L = 30$ i da je jakost nelinearnosti $\eta = -30$. Pojačanje za taj odabir parametara je prikazano na slici 1. Vidimo da je područje nestabilnosti $|k| \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$, dok je maksimum pojačanja za $k = \pm 1$. Razmatramo vremensku evoluciju jednadžbe (6) s tim da za početno stanje (u $t = 0$) uzimamo homogeno osnovno stanje

$$\psi_0(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{L}}. \quad (14)$$

Da bi pokazali da je to uistinu svojstveno stanje homogene NLSE, gledamo evoluciju tog početnog stanja bez dodane perturbacije. Vremensku evoluciju jednadžbe (6) radimo numerički koristeći tzv. split-step metodu koja će biti objašnjena u poglavlju 4. Na slici 2 plavom linijom je prikazan kvadrat apsolutne vrijednosti (intenzitet) početnog stanja u $t = 0$, a crvenom linijom kvadrat apsolutne vrijednosti tog stanja u trenutku $t = 7$. Vidimo da su intenziteti u $t = 0$ i $t = 7$ identični, crvenu "krivulju" smo morali pomaknuti za neku vrijednost (izabrali smo 0.02) duž vertikalne osi jer bi se inače potpuno poklapala sa plavom "krivuljom".

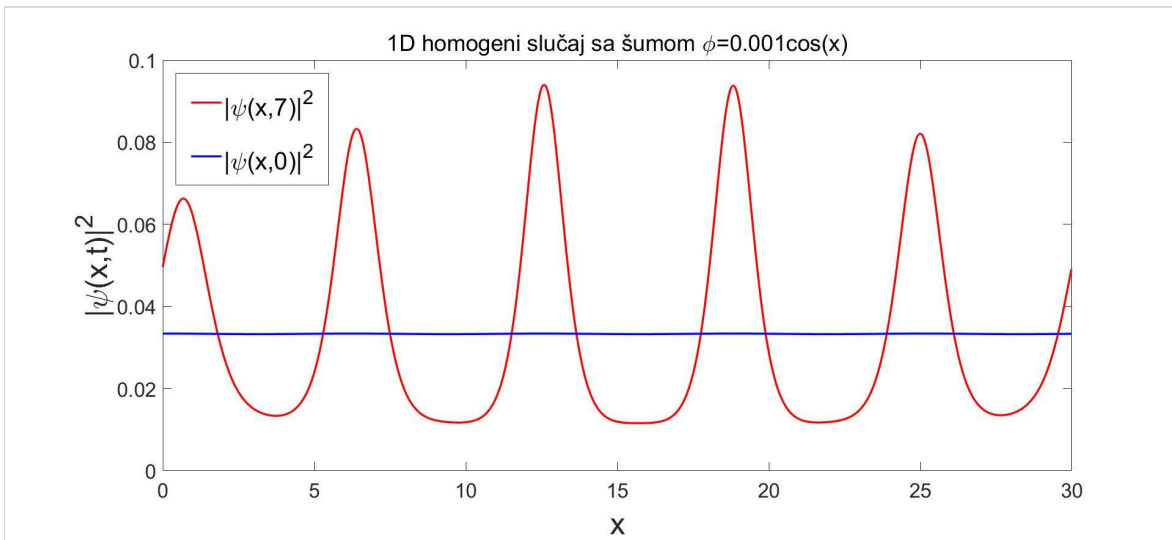


Slika 2: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet). Plavom linijom je prikazan intenzitet homogenog početnog stanja (14) u trenutku $t = 0$. Crvenom linijom je prikazan intenzitet kojeg dobijemo u vremenskoj evoluciji u trenutku $t = 7$, pomaknut je duž vertikalne osi za iznos 0.02 da se ne bi preklapao sa početnim intenzitetom. Vidimo da je homogeno početno stanje (14) svojstveno stanje NLSE jednadžbe (6), jer se intenzitet ne mijenja u vremenskoj evoluciji. Vidi tekst za detalje.

Zatim gledamo slučaj kad na početno stanje (14) dodajemo perturbaciju (šum) koja ima valne vektore $k = \pm 1$ za koje je pojačanje (13) maksimalno, tj. sad gledamo evoluciju početnog stanja

$$\psi(x, 0) = \alpha_1 \cdot \psi_0(x, 0)(1 + 0.001 \cos(x)), \quad (15)$$

gdje je $\alpha_1 = 1.000032$ konstanta normalizacije, jer želimo da stanje (15) bude normirano na jedinicu. Na slici 3 je plavom linijom prikazan intenzitet početnog stanja (15), a crvenom



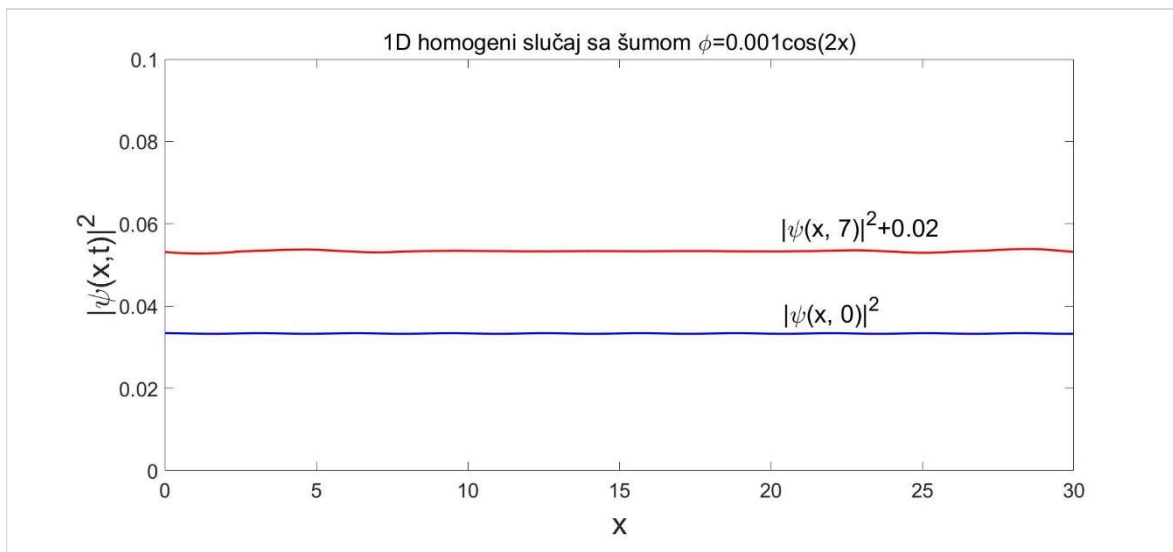
Slika 3: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet). Na početno stanje je dodana perturbacija tj. u $t = 0$ početno stanje je (15) te je pripadni intenzitet prikazan plavom linijom. Crvenom linijom je prikazan intenzitet kojeg dobijemo u vremenskoj evoluciji u trenutku $t = 7$. Vidimo da se za danu perturbaciju događa modulacijska nestabilnost. Vidi tekst za detalje.

linijom je prikazan intenzitet u trenutku $t = 7$. Vidimo da iako je početna perturbacija jako male amplitude, te je ne možemo ni vidjeti u početnom trenutku (plava linija na slici 3), u evoluciji se dogodi pojačanje perturbacije i modulacije intenziteta su izrazite u trenutku $t = 7$ (crvena linija na slici 3).

Ostaje nam još pokazati da za perturbaciju koja nema valne vektore unutar područja nestabilnosti neće doći do jakog pojačanja modulacija intenziteta u vremenskoj evoluciji. U tu svrhu, gledamo početno stanje s perturbacijom koja ima valne vektore $k = \pm 2$, izvan područja nestabilnosti. Dakle, sad krećemo u evoluciju sa stanjem

$$\psi(x, 0) = \alpha_2 \cdot \psi_0(x, 0)(1 + 0.001 \cos(2x)), \quad (16)$$

gdje je $\alpha_2 = 1.000004$ normalizacijska konstanta koja osigurava da stanje (16) bude normirano na jedinicu. Na slici 4 plavom linijom je prikazan intenzitet početnog stanja (16), dok je crvenom linijom prikazan intenzitet koji je rezultat evolucije do trenutka $t = 7$. Crvenu krivulju smo morali translirati da se ne bi poklapala sa plavom krivuljom, dakle za ovu perturbaciju (šum) ne događa se modulacijska nestabilnost. Vidimo da za perturbaciju koja ima valne vektore izvan područja nestabilnosti, rezultat evolucije se kvalitativno ne razlikuje od evolucije bez perturbacije, koja je prikazana na slici 2.



Slika 4: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet). Na početno stanje je dodana perturbacija tj. u $t = 0$ početno stanje je (16) te je pripadni intenzitet prikazan plavom linijom. Crvenom linijom je prikazan intenzitet kojeg dobijemo u vremenskoj evoluciji u trenutku $t = 7$, pomaknut je duž vertikalne osi za iznos 0.02 da se ne bi preklapao sa početnim intenzitetom. Vidimo da se za danu perturbaciju ne događa modulacijska nestabilnost, jer se intenzitet ne razlikuje bitno od intenziteta početnog stanja. Vidi tekst za detalje.

Na primjeru homogene 1D NLSE smo kvalitativno i kvantitativno objasnili fenomen modulacijske nestabilnosti. Dodavanjem sintetskog magnetskog polja u 2D NLSE pojaviti

će se u jednadžbi novi članovi, među kojima i harmonički potencijal, što ćemo detaljno razmotriti u poglavlju 3. Zbog prisutnosti harmoničkog potencijala, ravni valovi više neće biti svojstvena stanja i analizu modulationske nestabilnosti nije moguće raditi na homogenom početnom stanju. Da bi se upoznali s tim poteškoćama i vidjeli kako detektirati modulationsku nestabilnost u slučaju sa harmoničkim potencijalom, prije nego pređemo na 2D NLSE sa sintetskim magnetskim poljem, razmotrit ćemo jednostavniji slučaj modulationske nestabilnosti 1D NLSE sa harmoničkim potencijalom.

2.2.2 Modulationske nestabilnost 1D NLSE sa harmoničkim potencijalom

Sada razmatramo jednadžbu

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x; t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ax^2 + \eta |\psi(x; t)|^2 \right] \psi(x; t) \quad (17)$$

gdje je a konstanta harmoničkog oscilatora. Zbog harmoničkog potencijala u jednadžbi (17) svojstvena rješenja nisu ravni valovi kao u slučaju homogene NLSE (6), tako da jednadžba (17) nema homogeno osnovno stanje na kojem bi mogli provesti analizu modulationske nestabilnosti analogno poglavlju 2.2.1.

Ovaj slučaj (17) je analiziran u znanstvenom radu [8]. Demonstrirati ćemo efekt modulationske nestabilnosti za 1D NLSE sa harmoničkim potencijalom po uzoru na taj rad. Za početno stanje uzet ćemo osnovno stanje stacionarne Gross-Pitaevskii (kratica: GP) jednadžbe u Thomas-Fermi aproksimaciji [8]. Stacionarna GP jednadžba je

$$\mu \psi(x) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ax^2 + \eta_1 |\psi(x)|^2 \right] \psi(x), \quad (18)$$

gdje je μ kemijski potencijal i jakost nelinearnosti je pozitivna $\eta_1 > 0$. Thomas-Fermi (kratica: TF) aproksimacija se primjenjuje kad je energija pridružena nelinearnom članu mnogo veća od kinetičke energije pa član s drugom derivacijom po x -u možemo zanemariti, tako da u toj aproksimaciji dobijemo

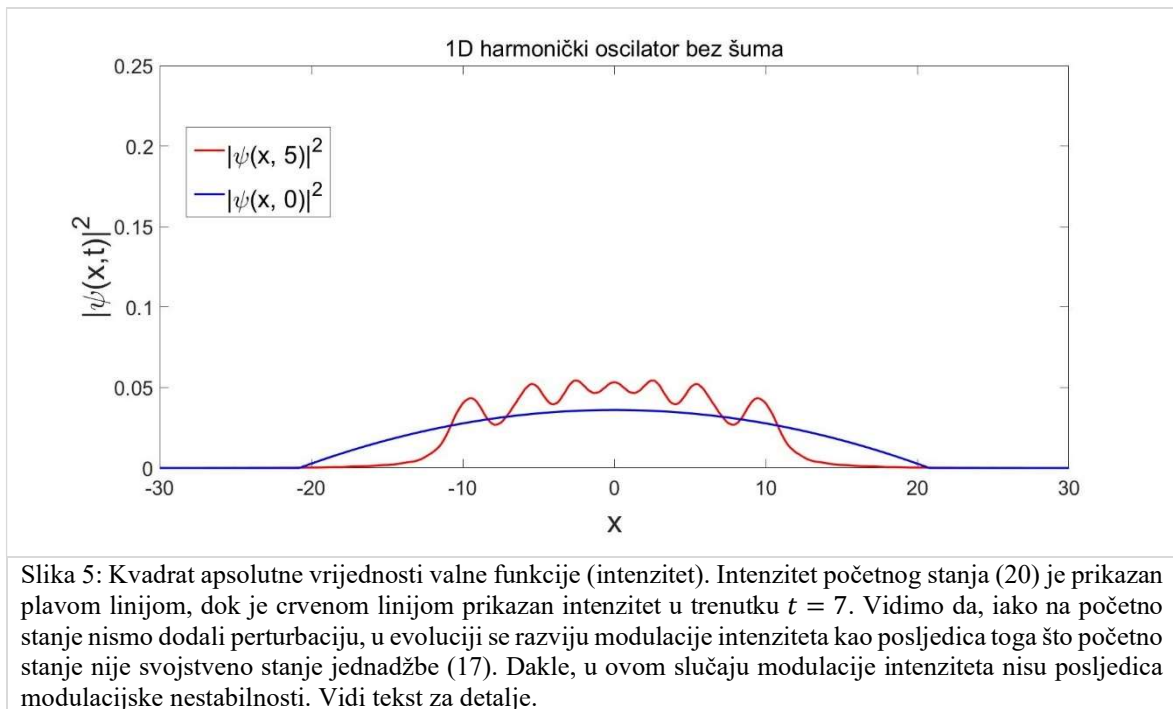
$$\mu \psi(x) = [ax^2 + \eta_1 |\psi(x)|^2] \psi(x). \quad (19)$$

Iz (19) slijedi izraz za valnu funkciju osnovnog stanja u TF aproksimaciji

$$\psi_{TF}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu - ax^2}{\eta_1}}, & -\sqrt{\frac{\mu}{a}} < x < \sqrt{\frac{\mu}{a}} \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases} \quad (20)$$

gdje je kemijski potencijal $\mu = \left(\frac{3\eta_1\sqrt{a}}{4}\right)^{2/3}$ određen iz uvjeta da TF stanje (20) bude normalizirano na jedinicu. Thomas-Fermi osnovno stanje (20) ćemo uzeti kao početno stanje za vremensku evoluciju jednadžbe (17), s tim da u evoluciji mijenjamo pozitivnu nelinearnost η_1 u negativnu $\eta = -\eta_1$, jer se modulacijska nestabilnost događa za negativnu nelinearnost. U kontekstu ultrahladnih bozonskih plinova takav scenarij se može postići tako da sustav pripremimo u osnovnom stanju sa jakom odbojnom nelinearnosti (odbojna interakcija), tako da vrijedi TF aproksimacija, da bi potom gledali vremensku evoluciju od trenutka kad promijenimo predznak nelinearnosti tj. odbojnu interakciju promijenimo u privlačnu, što se može eksperimentalno postići pomoću tzv. Feshbacovih rezonanci [9], i pustimo sustav da vremenski evoluiraju po jednadžbi (17). U kontekstu nelinearne optike, takav scenarij se može realizirati ako zraka, koja ulazi u nelinearni medij u smjeru z -osi, ima paraboličan profil intenziteta duž x -osi na položaju $z = 0$ (tj. na ulazu u nelinearni medij).

Dakle, sad istražujemo MI tako što perturbiramo početno stanje oblika (20). Numerički ćemo evoluirati jednadžbu (17) sa nelinearnosti $\eta = -30$ i konstantom oscilatora $a = 0.0025$. Prvo radimo evoluciju sa početnim TF stanjem bez perturbacije, tj. $\psi(x, 0) = \psi_{TF}(x)$. Intenzitet TF početnog stanja je prikazan plavom linijom na slici 5. Intenzitet nakon vremenske evolucije do trenutka $t = 5$ je prikazan crvenom linijom na slici 5. Pošto TF nije svojstveno stanje jednadžbe (17) u evoluciji nastaju modulacije intenziteta tipične za



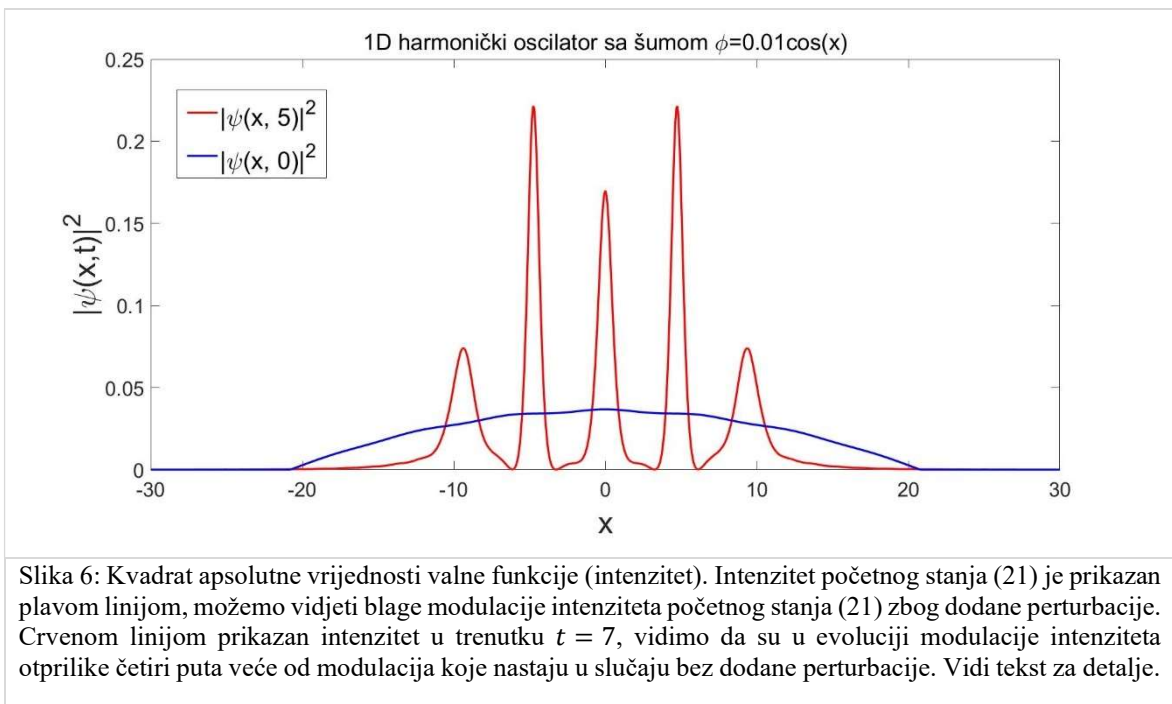
Slika 5: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet). Intenzitet početnog stanja (20) je prikazan plavom linijom, dok je crvenom linijom prikazan intenzitet u trenutku $t = 7$. Vidimo da, iako na početno stanje nismo dodali perturbaciju, u evoluciji se razvijaju modulacije intenziteta kao posljedica toga što početno stanje nije svojstveno stanje jednadžbe (17). Dakle, u ovom slučaju modulacije intenziteta nisu posljedica modulacijske nestabilnosti. Vidi tekst za detalje.

svojstvena stanja jednadžbi sa harmoničkim potencijalom, dakle modulacije u intenzitetu koje su prikazane crvenom linijom na slici 5 nisu posljedica MI.

U idućem koraku, na TF početno stanje dodajemo perturbaciju (šum) po uzoru na [8] tako da uzimamo za početno stanje

$$\psi(x, 0) = \alpha_1 \psi_{TF}(x) (1 + 0.01 \cos(x)), \quad (21)$$

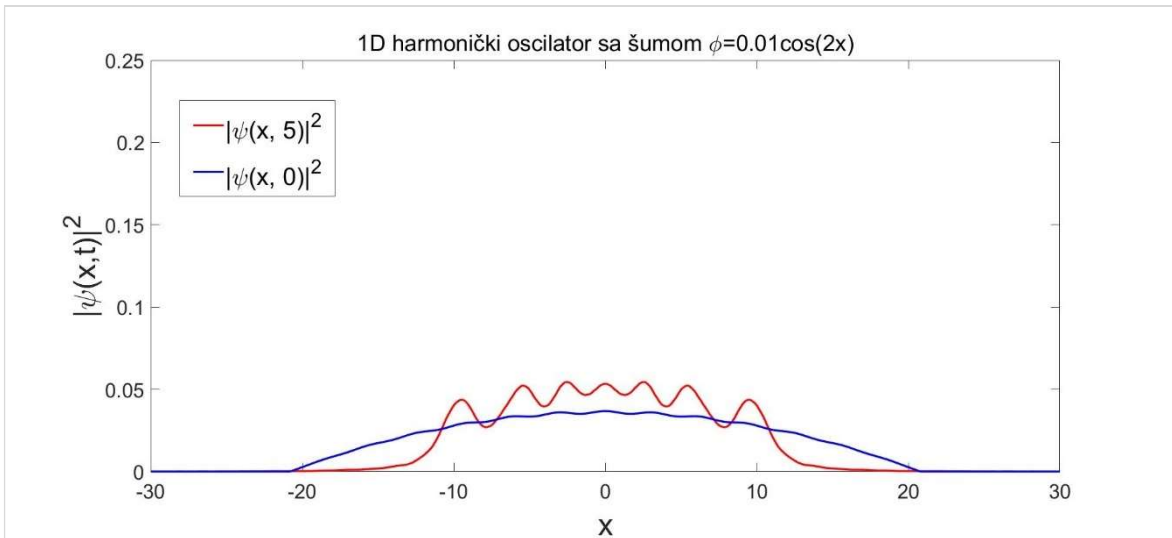
gdje je $\alpha_1 = 0.99996$ konstanta normalizacije koja osigurava da stanje (21) bude normirano na jedinicu. Na slici 6 je plavom linijom prikazan intenzitet stanja (21), a crvenom linijom je prikazan intenzitet u trenutku $t = 5$. Vidimo da su maksimumi intenziteta konačnog stanja na slici 6 otprilike četiri puta veći nego maksimumi intenziteta konačnog stanja na slici 5.



Zatim razmatramo vremensku evoluciju koja kreće iz početnog stanja

$$\psi(x, 0) = \alpha_2 \psi_{TF}(x) (1 + 0.01 \cos(2x)), \quad (22)$$

gdje je $\alpha_2 = 0.99995$ konstanta normalizacije potrebna da stanje (22) bude normirano na jedinicu. Na slici 7 je plavom linijom prikazan intenzitet stanja (22), a crvenom linijom je prikazan intenzitet u trenutku $t = 5$. Vidimo da je za početno stanje (22) intenzitet u evoluciji identičan intenzitetu kojeg dobijemo evolucijom iz početnog stanja (20) bez perturbacije. Tako da kao u slučaju s homogenom NLSE, zaključujemo da se za perturbaciju koja u sebi ima Fourierove komponente sa $k = \pm 1$, tj. u evoluciji koja polazi od stanja (21) se dogodi MI.



Slika 7: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet). Intenzitet početnog stanja (22) je prikazan plavom linijom, možemo vidjeti blage modulacije intenziteta početnog stanja (22) zbog dodane perturbacije. Crvenom linijom prikazan intenzitet u trenutku $t = 7$, vidimo da su u evoluciji modulacije intenziteta iste kao modulacija koje nastaju u slučaju bez dodane perturbacije na početno stanje (vidi sliku 5). Vidi tekst za detalje.

Uspjeli smo reproducirati rezultate koji nas interesiraju iz rada [8], tako da ćemo ih u narednim poglavljima primijeniti na slučaj 2D NLSE sa dodanim sintetskim magnetskim poljem.

3 Modulacijska nestabilnost nelinearne Schrödingerove jednadžbe sa sintetskim magnetskim poljem

3.1 Nelinearna Schrödingerova jednadžba sa sintetskim magnetskim poljem

Sintetsko magnetsko polje \vec{B} je vektorsko polje u kojem neutralne čestice pokazuju svojstva identična onima koje nabijene čestice naboja q pokazuju u prisustvu pravog magnetskog polja. Za sintetsko magnetsko polje vrijedi $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, gdje je \vec{A} sintetski vektorski potencijal [3, 5, 6].

U NLSE (5) sintetski vektorski potencijal uvodimo principom minimalne supstitucije [10]

$$-i\nabla \rightarrow -i\nabla - \vec{A}(x, y). \quad (23)$$

Tada NLSE sa sintetskim magnetskim poljem možemo zapisati kao

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[(-i\nabla - \vec{A})^2 + \eta |\psi|^2 \right] \psi. \quad (24)$$

U ovom radu proučavamo dinamiku sustava u homogenom sintetskom magnetskom polju koje je usmjereno u \hat{z} smjeru, odnosno $\vec{B} = B\hat{z}$. U tom slučaju možemo koristiti razna baždarenja, odnosno imamo slobodu izbora sintetskog vektorskog polja \vec{A} uz uvjet da je zadovoljena relacija da rotacija izabranog vektorskog polja daje zadano sintetsko magnetsko polje, odnosno

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (25)$$

U ovom radu smo se usredotočili na razmatranje dva najpoznatija izbora vektorskog polja tzv. simetrično i Landau baždarenje [5, 10].

Simetrično baždarenje je definirano kao $\vec{A}_S = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B} = -\frac{1}{2}By\hat{x} + \frac{1}{2}Bx\hat{y}$ što možemo zapisati kao

$$\vec{A}_S = \frac{1}{2}B(-y, x, 0), \quad (26)$$

gdje sa \vec{A}_S označavamo vektorski potencijal u simetričnom baždarenju. Prikaz vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (26) je dan na slici 8.a.

Vremenski zavisna NLSE sa sintetskim magnetskim poljem (24) u simetričnom baždarenju (26) je dana kao

$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y; t) = \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} B y \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} B x \right)^2 + \eta |\psi(x, y; t)|^2 \right] \psi(x, y; t)$ što možemo zapisati kao

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y; t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i B y \frac{\partial}{\partial x} + i B x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4} B^2 (x^2 + y^2) + \eta |\psi(x, y; t)|^2 \right] \psi(x, y; t). \quad (27)$$

Landau baždarenje možemo definirati na dva načina, kad je vektorski potencijal usmjeren u x - smjeru, odnosno $\vec{A}_{L_x} = -B y \hat{x}$ i kad je vektorski potencijal usmjeren u y – smjeru, odnosno $\vec{A}_{L_y} = B x \hat{y}$. Za Landau baždarenje u x – smjeru vektorski potencijal, označimo ga sa \vec{A}_{L_x} , možemo zapisati kao

$$\vec{A}_{L_x} = B(-y, 0, 0). \quad (28)$$

Vremenski zavisna NLSE sa sintetskim magnetskim poljem (24) u Landau baždarenju (28) je dana kao $i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y; t) = \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} + B y \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \eta |\psi(x, y; t)|^2 \right] \psi(x, y; t)$ što možemo zapisati kao

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y; t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i B y \frac{\partial}{\partial x} + B^2 y^2 + \eta |\psi(x, y; t)|^2 \right] \psi(x, y; t). \quad (29)$$

Prikaz vektorskog potencijala u x – smjeru u Landau baždarenju (28) je dan na slici 8.b.

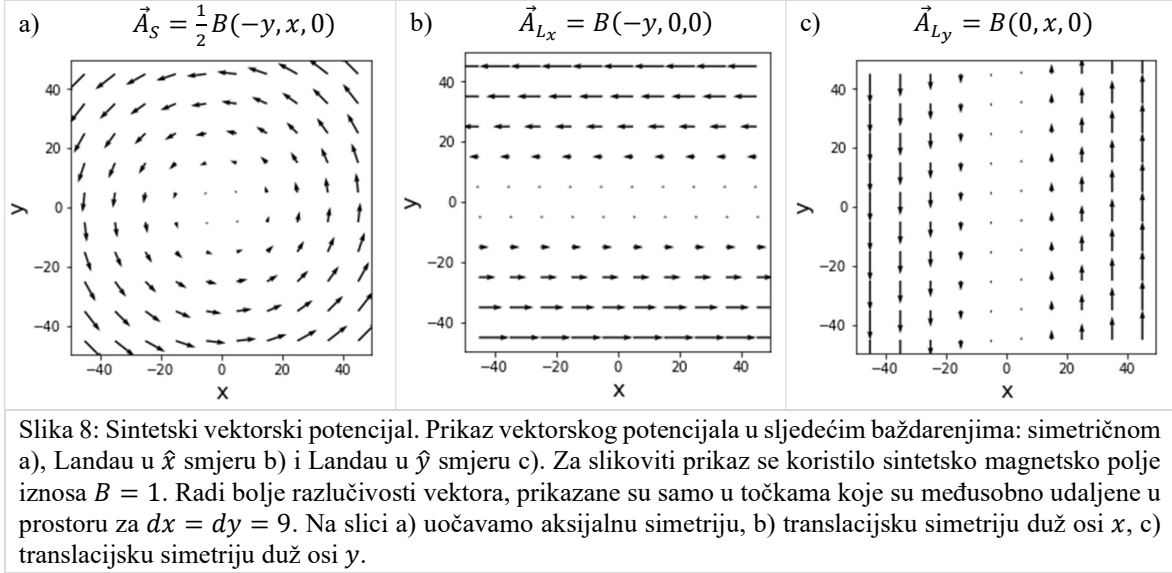
Analogno Landau baždarenju u x – smjeru, možemo gledati Landau baždarenje gdje je vektorski potencijal koji je usmjeren u y – smjeru, označimo ga sa \vec{A}_{L_y} , kojeg možemo zapisati na način

$$\vec{A}_{L_y} = B(0, x, 0). \quad (30)$$

U tom slučaju NLSE sa sintetskim magnetskim poljem (24) u Landau baždarenju (30) je dana kao $i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y; t) = \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} - B x \right)^2 + \eta |\psi(x, y; t)|^2 \right] \psi(x, y; t)$, odnosno

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y; t) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2iBx \frac{\partial}{\partial y} + B^2 x^2 + \eta |\psi(x, y; t)|^2 \right] \psi(x, y; t). \quad (31)$$

Prikaz vektorskog potencijala u y – smjeru u Landau baždarenju (30) je dan na slici 8.c.



Koristeći izraz (25) vidimo da za izabrana baždarenja (simetrično i Landau) sintetsko magnetsko polje \vec{B} je usmjereno u z – smjeru.

3.2 Modulacijska nestabilnost 2D NLSE sa sintetskim magnetskim poljem

U poglavlju 2.2. smo razmatrali MI za slučaj 1D NLSE. U ovom poglavlju ćemo proširiti razmatranje na 2D slučaj sa sintetskim magnetskim poljem. Dodavanjem sintetskog vektorskog potencijala minimalnom supstitucijom (23) u 2D NLSE (5) smo dobili NLSE sa sintetskim magnetskim poljem. Kao posljedicu dodavanja potencijala dobili smo članove među kojima prepoznajemo član harmoničkog potencijala. Zbog člana harmoničkog potencijala ne možemo napraviti analizu modulacijske nestabilnosti na način kao u homogenom slučaju, kojeg smo reprezentirali u poglavlju 2.2.1. Razlog tomu jest da ravni valovi ne predstavljaju svojstvena rješenja naše jednačbe (24) zbog čega za početno stanje ne možemo uzeti homogeni val. Inspirirani radom [8] kojeg smo detaljno demonstrirali u poglavlju 2.2.2, uzeli smo TF stanje kao početno stanje našeg problema. U ovom slučaju

koristimo TF stanje koje je osnovno stanje stacionarne 2D GP jednadžbe sa izotropnim harmoničkim potencijalom pri čemu smo za konstantu harmoničkog oscilatora uzeli $\frac{1}{4}B^2$.

U nastavku ćemo provesti analognu konstrukciju TF stanja kao u poglavlju 2.2.2, jedino ćemo u ovom slučaju raditi sa 2D izotropnom harmoničkom potencijalu. To znači da ćemo za konstrukciju TF stanja razmotriti stacionarnu GP jednadžbu

$$\mu\psi(x, y) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2) + \eta_2|\psi(x, y)|^2 \right] \psi(x, y) \quad (32)$$

gdje je μ kemijski potencijal, a jakost nelinearnosti je pozitivna, $\eta_2 > 0$. Koristimo TF aproksimaciju koja vrijedi u slučaju kada je energija pridružena nelinearnom članu mnogo veća od kinetičke energije te možemo zanemariti članove druge derivacije po x -u i po y -u. U toj aproksimaciji promatramo jednadžbu

$$\mu\psi(x, y) = \left[\frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2) + \eta_2|\psi(x, y)|^2 \right] \psi(x, y) \quad (33)$$

Iz (33) slijedi izraz za valnu funkciju osnovnog stanja u TF aproksimaciji

$$\psi_{TF}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu - \frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2)}{\eta_2}}, & 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\frac{\sqrt{\mu}}{B} \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases} \quad (34)$$

gdje je kemijski potencijal $\mu = \sqrt{\frac{\eta_2 B^2}{2\pi}}$ određen iz uvjeta da TF stanje (34) bude normalizirano na jedinicu. U dodatku B se nalazi kratki izvod TF stanja.

Nadalje, analogno poglavlju 2.2.2, u vremenskoj evoluciji jednadžbe (24) za početno stanje ćemo uzeti Thomas-Fermi osnovno stanje ψ_{TF} (34) na koje ćemo dodati perturbaciju, pri čemu u evoluciji mijenjamo pozitivnu nelinearnost η_2 u negativnu $\eta = -\eta_2$, iz razloga što se MI događa u režimu negativne nelinearnosti.

Vremensku evoluciju (24) ćemo raditi numerički zbog čega ćemo u sljedećem poglavlju (poglavlje 4) objasniti dvije metode na kojima se temelje naši programi za evoluciju.

4 Numeričke metode za rješavanje NLSE sa sintetskim magnetskim poljem

U ovom poglavlju ćemo pobliže objasniti dvije metode koje smo implementirali u kod koristeći programski jezik „Python“. Prije objašnjavanja metoda, napisati ćemo NLSE sa sintetskim magnetskim poljem u obliku koji je pogodan za numeričku evoluciju početnog stanja.

Bezdimenzionalnu vremenski ovisnu NLSE jednadžbu sa sintetskim magnetskim poljem (24) ćemo zapisati kao

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (35)$$

pri čemu je operator hamiltonijana \hat{H} prikazan u koordinatnoj reprezentaciji kao

$$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - iaBy \frac{\partial}{\partial x} + ibBx \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4} B^2 (cx^2 + dy^2) + \eta |\psi|^2. \quad (36)$$

Za različite konfiguracije, koje će se proučavati u ovom radu, parametri a, b, c i d će imati sljedeće vrijednosti:

- harmonički potencijal: $a = b = 0; c = d = 1;$
- vektorski potencijal u simetričnom baždarenju: $a = b = c = d = 1;$
- vektorski potencijal u Landau baždarenje u x smjeru: $a = 2, d = 4, b = c = 0;$
- vektorski potencijal u Landau baždarenje u y smjeru: $b = 2, c = 4, a = d = 0.$

Zapis hamiltonijana na način (36) nam omogućuje da generaliziramo izvode i objašnjenja bez odabira određene konfiguracije. Konkretnim izborom vrijednosti parametara a, b, c i d možemo realizirati određeni sustav koji nas zanima.

Nadalje, evoluciju jednadžbe (35) možemo aproksimativno zapisati, uz uvjet infinitezimalnog koraka dt , kao

$$\psi(x, y; t + dt) = e^{-i\hat{H}dt} \psi(x, y; t) \quad (37)$$

Budući da hamiltonijan (36) sadrži nelinearni član tada moramo koristiti neku od metoda pomoću koje ćemo opisati djelovanje operatora evolucije $e^{-i\hat{H}dt}$ na stanje ψ . U nastavku ćemo pobliže objasniti metodu vlastitih vrijednosti i split-step metodu.

4.1 Metoda vlastitih vrijednosti

U metodi vlastitih vrijednosti glavna ideja je rastav valne funkcije po vlastitim stanjima operatora hamiltonijana te evolucija koeficijenata u rastavu [11].

Slijedom navedenog, kao prvi korak ćemo izraz (37) zapisati kao

$$\psi(x, y; t + dt) = e^{-i\hat{H}_0 dt} e^{-i\hat{N} dt} \psi(x, y; t) \quad (38)$$

što je omogućeno jer promatramo evoluciju za infinitezimalni korak dt koji opravdava upotrebu Baker–Campbell–Hausdorff leme [10]. Lemu smo koristili za rastav sume operatora u eksponentu. U zapisu (38) \hat{H}_0 sadrži sve linearne članove hamiltonijana \hat{H} , a \hat{N} sadrži nelinearni član $\eta|\psi|^2$. Zahvaljujući mogućnosti zapisa (38), nelinearni član u evoluciji može biti pridružen valnoj funkciji $\psi(x, y; t)$ gdje njihov produkt čini valnu funkciju koju ćemo označiti sa $\phi(x, y; t)$, odnosno

$$\phi(x, y; t) = \psi(x, y; t) e^{-i\eta|\psi(x, y; t)|^2 dt} \quad (39)$$

Nadalje, valnu funkciju (39) razvijemo po svojstvenim stanjima ψ_n linearnog hamiltonijana H_0 . Djelovanje linearnog operatora u evoluciji, odnosno $e^{-i\hat{H}_0 dt}$, na valnu funkciju (39) je zapravo djelovanje navedenog člana na svojstvena stanja ψ_n po kojima smo razvili funkciju (39) i to na način $e^{-i\hat{H}_0 dt} \psi_n = \left(1 - i\hat{H}_0 dt + \frac{1}{2!} (-i\hat{H}_0 dt)^2 + \dots\right) \psi_n = \{\hat{H}_0 \psi_n = E_n \psi_n\} = \left(1 - iE_n dt + \frac{1}{2!} (-iE_n dt)^2 + \dots\right) \psi_n = e^{-iE_n dt} \psi_n$ [10]. Takav postupak omogućuje implementaciju evolucije početnog stanja u kod.

U numeričkom pristupu metode svojstvenih vrijednosti u programskom jeziku „Python“ ćemo iz „scipy“ paketa „linalg“ koristiti funkciju „eigh“ (scipy.linalg.eigh) za pronalaženje vlastitih stanja ψ_n i vlastitih vrijednosti E_n hamiltonijana H_0 . U tom slučaju, za diskretni sustav dimenzije $n \times n$, potrebno je zapisati stanje $\psi(x, y; t)$ u vektorskoj formi (dimenzije $1 \times n^2$) a operator \hat{H}_0 reprezentirati matricom (dimenzije $n^2 \times n^2$). Budući da hamiltonijan \hat{H}_0 sadrži derivacije, potrebno je koristiti neku metodu kojom ćemo derivaciju prikazati u matričnom obliku. Jedna od metoda jest da derivacije prikažemo pomoću metode konačnih razlika. Detalji vezani za konstrukciju matrice hamiltonijana \hat{H}_0 i metode konačnih razlika su dani u dodatku C. Numerički dobivena vlastita stanja ψ_n i vlastite vrijednosti E_n koristimo u algoritmu gdje stanje $\psi(x, y; t)$ evoluiramo u infinitezimalnim koracima dt od početne $\psi(x, y; t = 0)$ do konačne $\psi(x, y; t = T)$ vrijednosti sljedećom iteracijom:

- 1) Označimo sa $\phi(x, y; t + dt)$ produkt nelinearnog člana u evoluciji i valne funkcije

$$\phi(x, y; t + dt) = e^{-i\eta|\psi(x, y; t)|^2 dt} \psi(x, y; t) \quad (40)$$

- 2) To stanje rastavimo po vlastitim stanjima linearnog hamiltonijana \hat{H}_0

$$\phi(x, y; t + dt) = \sum_{i=1}^{n^2} c_i(t + dt) \psi_i(x, y) \quad (41)$$

gdje su koeficijenti dani kao

$$c_i(t + dt) = \int \int \psi_i^*(x, y) \phi(x, y; t + dt) dx dy \quad (42)$$

3) Evoluirana valna funkcija za infinitezimalni korak dt je tada dana kao

$$\psi(x, y; t + dt) = \sum_{i=1}^{n^2} e^{-iE_i dt} c_i(t + dt) \psi_i(x, y) \quad (43)$$

4.2 Split-step metoda

U split-step metodi glavna ideja je da za svaki korak dt radimo dio koraka evolucije u prostornoj domeni a dio koraka u impulsnoj domeni [11].

U NLSE sa sintetskim magnetskim poljem (35) i prostorna i impulsna domena imaju dvije koordinate, odnosno (x, y) i (k_x, k_y) jer radimo u 2D prostoru. Varijable x i y su međusobno nezavisne, također su međusobno nezavisne varijable k_x i k_y . Iz toga slijedi da možemo nezavisno primijeniti Fourierov transformat (kratica: FT) u x i u y smjeru i isto tako nezavisno primijeniti inverzni Fourierov transformat (kratica: IFT) u k_x i u k_y smjeru.

Na primjer, za x i k_x domenu možemo definirati Fourierov transformat x domene u k_x domenu, na način

$$\psi(k_x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) e^{-ik_x x} dx \equiv FT_x[\psi(x, y)] \quad (44)$$

a inverzni Fourierov transformat k_x domene u x domenu kao

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k_x, y) e^{ik_x x} dk_x \equiv IFT_x[\psi(k_x, y)] \quad (45)$$

Na isti način za y i k_y domenu možemo definirati Fourierov transformat $\psi(x, k_y) \equiv FT_y[\psi(x, y)]$ i inverzni Fourierov transformat $\psi(x, y) \equiv IFT_y[\psi(x, k_y)]$.

Nadalje, da bi koristili split-step metodu izraz (37) rastavimo kao

$$\begin{aligned} & \psi(x, y; t + dt) \\ &= e^{-i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - iaBy\frac{\partial}{\partial x}\right)dt} e^{-i\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + iBx\frac{\partial}{\partial y}\right)dt} e^{-i\left(\frac{1}{4}B^2(cx^2 + dy^2) + \eta|\psi(x, y; t)|^2\right)dt} \psi(x, y; t) \end{aligned} \quad (46)$$

gdje koristimo Baker–Campbell–Hausdorff lemu [10]. To je opravdano jer je evolucija dana sa infinitezimalnim korakom dt .

Izraz (46) sadrži operatore $e^{\frac{\partial}{\partial x}}$, $e^{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$, $e^{\frac{\partial}{\partial y}}$ i $e^{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}$ koji djeluju na valnu funkciju $\psi(x, y)$. Koristeći relaciju (44) transformiramo $\psi(x, y)$ iz x u k_x domenu. Koristeći relaciju [10]

$$e^{\hat{A}}\psi = \left(1 + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}^2 + \dots\right)\psi = \left(1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \dots\right)\psi = e^a\psi \quad (47)$$

gdje je \hat{A} operator a a vlastita vrijednost operatora ($\hat{A}\psi = a\psi$) možemo prvo promotriti djelovanje operatora $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ na $\psi(x, y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\psi(k_x, y) e^{ik_x x}) dk_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ik_x \psi(k_x, y) e^{ik_x x} dk_x\end{aligned}\quad (48)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi(k_x, y) e^{ik_x x}) dk_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -k_x^2 \psi(k_x, y) e^{ik_x x} dk_x\end{aligned}\quad (49)$$

odnosno

$$e^{\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x, y) = IFT_x[e^{ik_x}\psi(k_x, y)] \quad (50)$$

$$e^{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\psi(x, y) = IFT_x[e^{-k_x^2}\psi(k_x, y)] \quad (51)$$

Analogno djelujemo sa operatorima $e^{\frac{\partial}{\partial y}}$ i $e^{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}$ na valnu funkciju $\psi(x, y)$ pri čemu dobijemo

$$e^{\frac{\partial}{\partial y}}\psi(x, y) = IFT_y[e^{ik_y}\psi(x, k_y)] \quad (52)$$

$$e^{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\psi(x, y) = IFT_y[e^{-k_y^2}\psi(x, k_y)] \quad (53)$$

Slijedom navedenog, možemo formulirati algoritam gdje stanje $\psi(x, y; t)$ koristeći (46) evoluiramo u infinitezimalnim koracima dt od početne $\psi(x, y; t = 0)$ do konačne $\psi(x, y; t = T)$ vrijednosti sljedećom iteracijom:

- 1) Sa $\xi(x, y; t + dt)$ označimo valnu funkciju koja je produkt stanja ψ i člana u evoluciji koji ne sadrži derivacije

$$\xi(x, y; t + dt) = e^{-i(\frac{1}{4}B^2(x^2c+y^2d)+\eta|\psi(x,y;t)|^2)dt} \psi(x, y; t) \quad (54)$$

- 2) Za transformaciju iz y u k_y domenu koristimo FT duž y osi nezavisno za svaki x u x domeni. Dobiti ćemo privremeno miješani prostor (x, k_y) . U tom prostoru možemo primijeniti djelovanje operatora $e^{\frac{\partial}{\partial y}}$ i $e^{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}$ gdje koristimo (52) i (53). Nakon toga se vraćamo u prostornu domenu koristeći IFT duž k_y osi

$$\xi(x, k_y; t + dt) = FT_y[\xi(x, y; t + dt)] \quad (55)$$

$$\zeta(x, k_y; t + dt) = e^{-i(k_y^2 - bBxk_y)dt} \xi(x, k_y; t + dt) \quad (56)$$

$$\zeta(x, y; t + dt) = IFT_y[\zeta(x, k_y; t + dt)] \quad (57)$$

- 3) Analogno koraku 2), za transformaciju iz x u k_x domenu koristimo FT duž x osi nezavisno za svaki y u y domeni. Dobiti ćemo privremeno miješani prostor (y, k_x) .

U tom prostoru možemo primijeniti djelovanje operatora $e^{\frac{\partial}{\partial x}}$ i $e^{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$ gdje koristimo (50) i (51). Nakon toga se vraćamo u prostornu domenu koristeći IFT duž k_x osi

$$\xi(k_x, y; t + dt) = FT_x[\zeta(x, y; t + dt)] \quad (58)$$

$$\zeta(k_x, y; t + dt) = e^{-i(k_x^2 + aByk_x)dt} \xi(k_x, y; t + dt) \quad (59)$$

$$\psi(x, y; t + dt) = IFT_x[\zeta(k_x, y; t + dt)] \quad (60)$$

U numeričkom rješavanju direktna i inverzna Fourierova transformacija su dobiveni u programskom jeziku „Python“ pozivajući odgovarajuću funkciju iz zajedničkog „numpy“ paketa „fft“: „fft“ (numpy.fft.fft) za FT i „ifft“ (numpy.fft.ifft) za IFT, pri čemu moramo definirati po kojoj varijabli radimo transformaciju.

Sa split-step metodom se može brže evoluirati početno stanje i jednostavnija je za implementiranje u programskom jeziku „Python“ od metode razvoja po vlastitim stanjima, ali u ovom radu smo razvili obje metode za evoluciju NLSE sa dodanim homogenim sintetskim magnetskim poljem, tako da nam i usporedba rezultata u dvije metode bude potvrda valjanosti numeričkih rezultata. Također, u slučaju istraživanja NLSE sa dodanim nehomogenim sintetskim magnetskim poljem, split-step metodu nije moguće generalno primijeniti (ovisno o obliku konkretnog nehomogenog $B(x, y)$), dok se metoda razvoja po vlastitim stanjima koju smo ovdje razvili može lako prilagoditi i za slučaj nehomogenog sintetskog magnetskog polja.

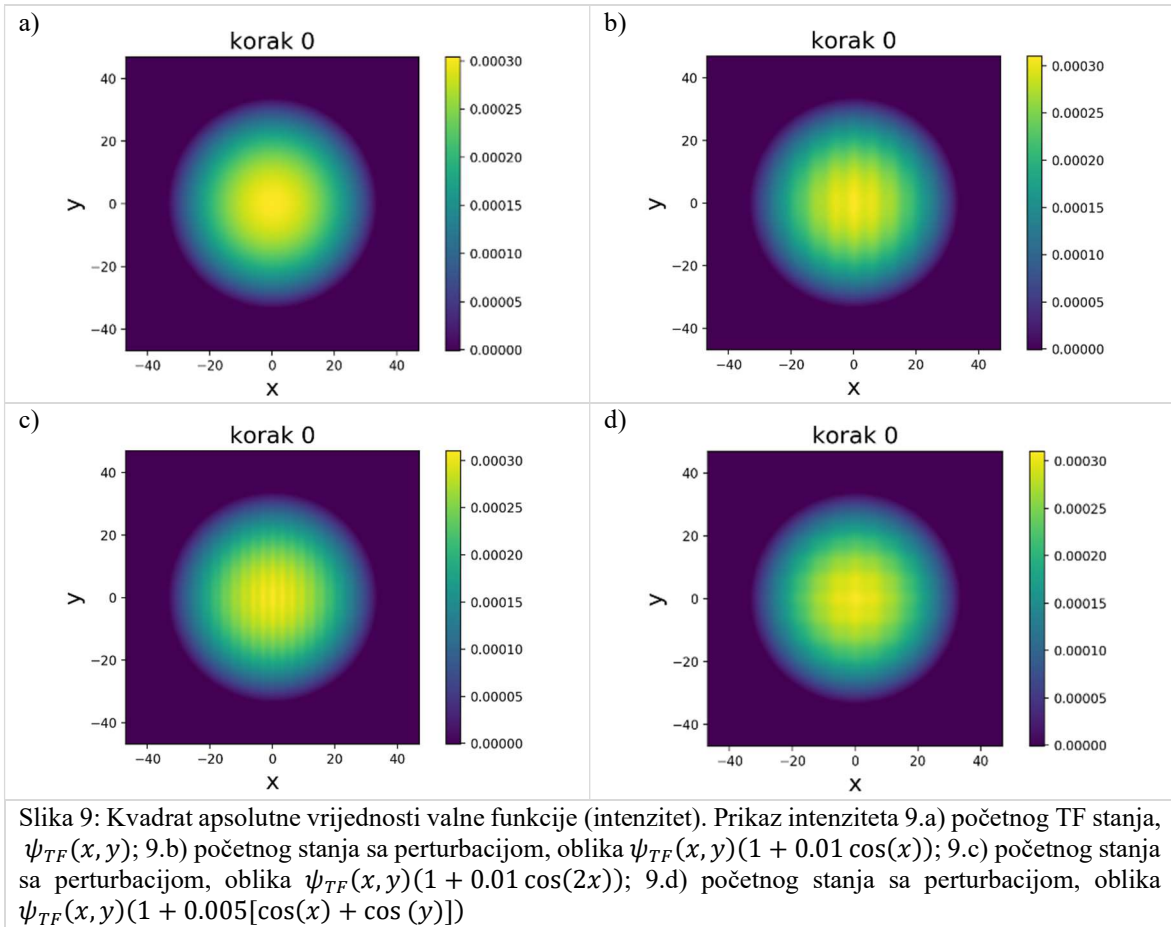
5 Rezultati

U ovom poglavlju slijede rezultati dobiveni numeričkim metodama objašnjenim u prethodnom poglavlju (poglavlje 4). Rezultati su dobiveni kodovima koji su napisani u programskom paketu „Python“.

U ovom radu cilj nam je bio ispitati modulacijsku nestabilnost za četiri konfiguracije sustava. Sve promatrane konfiguracije su nelinearni sustavi u kojima se dinamika može opisati pomoću NLSE gdje nelinearnost ulazi u hamiltonijan kroz član $\eta|\psi|^2$. Prva konfiguracija je NLSE (5) sa potencijalom izotropnog harmoničkog oscilatora, $V(x, y) = \frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2)$. Taj sustav je dvodimenzionalni slučaj već istraženog jednodimenzionalnog sustava sa harmoničkim potencijalom [8]. Za sustav smo mogli predvidjeti ponašanje perturbiranog stanja u evoluciji te nam je kao takav služi kao referentna konfiguracija. Sljedeće tri konfiguracije su nelinearni sustavi sa sintetskim magnetskim poljem \vec{B} (kratica: NLSE-B) istog iznosa i smjera (usmjeren u z smjeru, $\vec{B} = B\hat{z}$) koji su opisani jednadžbom (24), gdje je razlika u odabiru baždarenja. U jednom slučaju se radi o simetričnom baždarenju gdje je vektorski potencijal oblika (26), a u druga dva slučaja se radi o Landau baždarenju gdje je vektorski potencijal usmjeren duž jedne osi, x ili y , odnosno (28) ili (30). Radi preglednosti i lakšem praćenju rezultata, slijedi popis promatranih konfiguracija:

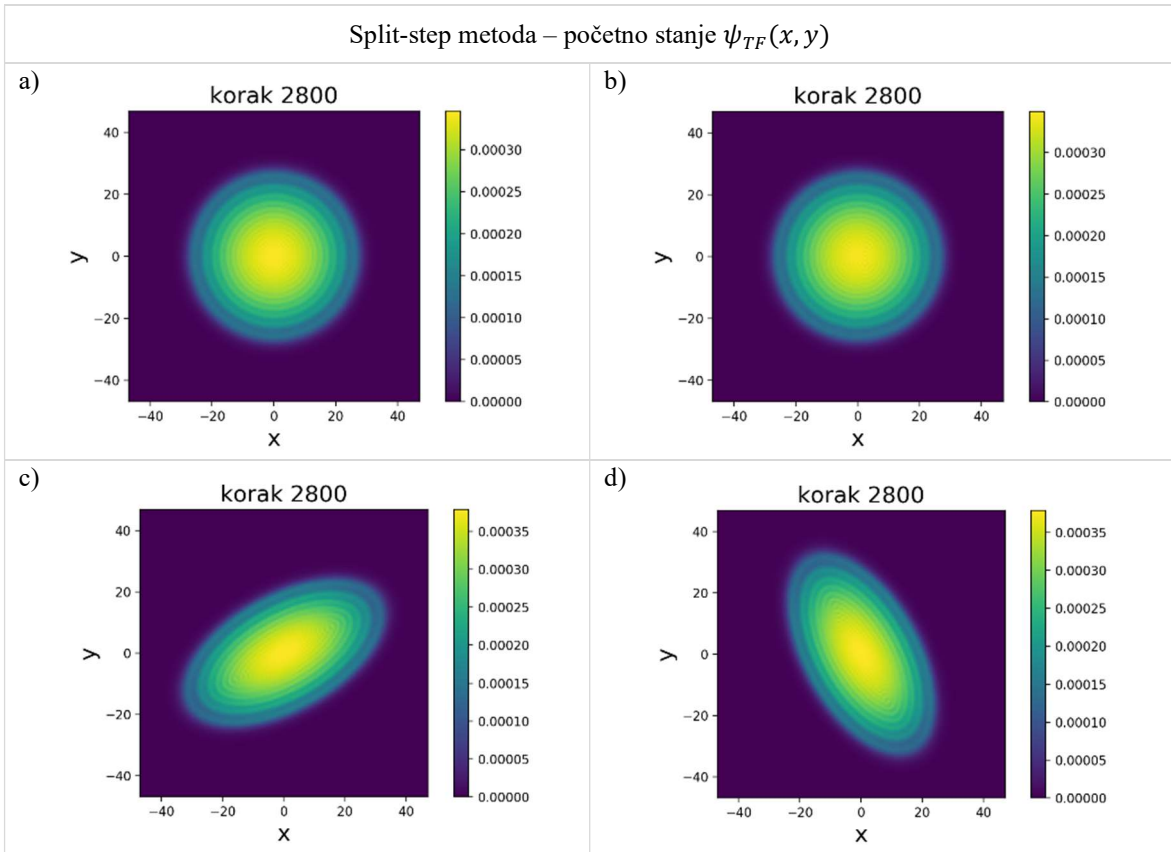
Hamiltonijan	
$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - iaBy\frac{\partial}{\partial x} + ibBx\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4}B^2(cx^2 + dy^2) + \eta \psi ^2$	(61)
NLSE sa nametnutim izotropnim harmoničkim potencijalom $V_{\text{HO}} = \frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2)$	
Parametri: $a = b = 0; c = d = 1$; Oznaka: $V_{\text{HO}} = \frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2); \vec{A} = 0$	(62)
NLSE sa sintetskim magnetskim poljem $\vec{B} = B\hat{z}$ u simetričnom baždarenju	
Parametri: $a = b = c = d = 1$; Oznaka: $\vec{A}_s = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$	(63)
NLSE sa sintetskim magnetskim poljem $\vec{B} = B\hat{z}$ u Landau baždarenju – x -smjer	
Parametri: $a = 2, d = 4, b = c = 0$; Oznaka: $\vec{A}_{L_x} = B(-y, 0, 0)$	(64)
NLSE sa sintetskim magnetskim poljem $\vec{B} = B\hat{z}$ u Landau baždarenju – y -smjer	
Parametri: $b = 2, c = 4, a = d = 0$; Oznaka: $\vec{A}_{L_y} = B(0, x, 0)$	(65)

Na slici 9 su prikazana početna stanja koja evoluiramo pomoću dvije numeričke metode (split-step metode i metode vlastitih vrijednosti) te ćemo u nastavku pokazati rezultate.



Numerički evoluiramo NLSE jednadžbu (61) sa sintetskim magnetskim poljem iznosa $B = 0.1$, gdje je početno stanje TF stanje $\psi(x, y, 0) = \psi_{TF}(x, y)$ (34). Intenzitet početnog stanja je prikazan na slici 9.a. Jakost nelinearnosti je $\eta = -5000$. Korak u evoluciji je $dt = 0.001$. Različite konfiguracije su postignute mijenjanjem parametara a, b, c i d . Na slici 10 je prikazana evolucija gdje se koristila split-step metoda u numeričkoj evoluciji početnog stanja $\psi(x, y, 0) = \psi_{TF}(x, y)$. Sve konfiguracije počinju sa istim stanjem (34) u trenutku $t = 0$. Ono što je vidljivo u svim konfiguracijama u trenutku $t = 2.8$ (slika 10.a, 10.b, 10.c i 10.d) jest razvoj modulacije stanja ψ ali bez značajne promjene u intenzitetu. Ta modulacija je zapravo posljedica toga što je za početno stanje uzeto TF stanje koje nije svojstveno stanje promatranih konfiguracija i takva modulacija je tipična za konfiguracije koje u sebi sadrže harmonički član. Nadalje, usporedba evolucije stanja za NLSE sa harmoničkim potencijalom (62) i NLSE-B sa simetričnim baždarenjem (63) ne pokazuje

vidljivu razliku među stanjima u trenutku $t = 2.8$ (slika 10.a i 10.b). Ono što se vidi u NLSE-B sa Landau baždarenjem duž x osi (64) i duž y osi (65) jest da u evoluciji stanja dolazi do izduživanja i zakretanja „oblaka“ intenziteta (slika 10.c i 10.d) što nije uočeno kod NLSE sa harmoničkim potencijalom (62) i NLSE-B u simetričnom baždarenju (63) (slika 10.a i 10.b).

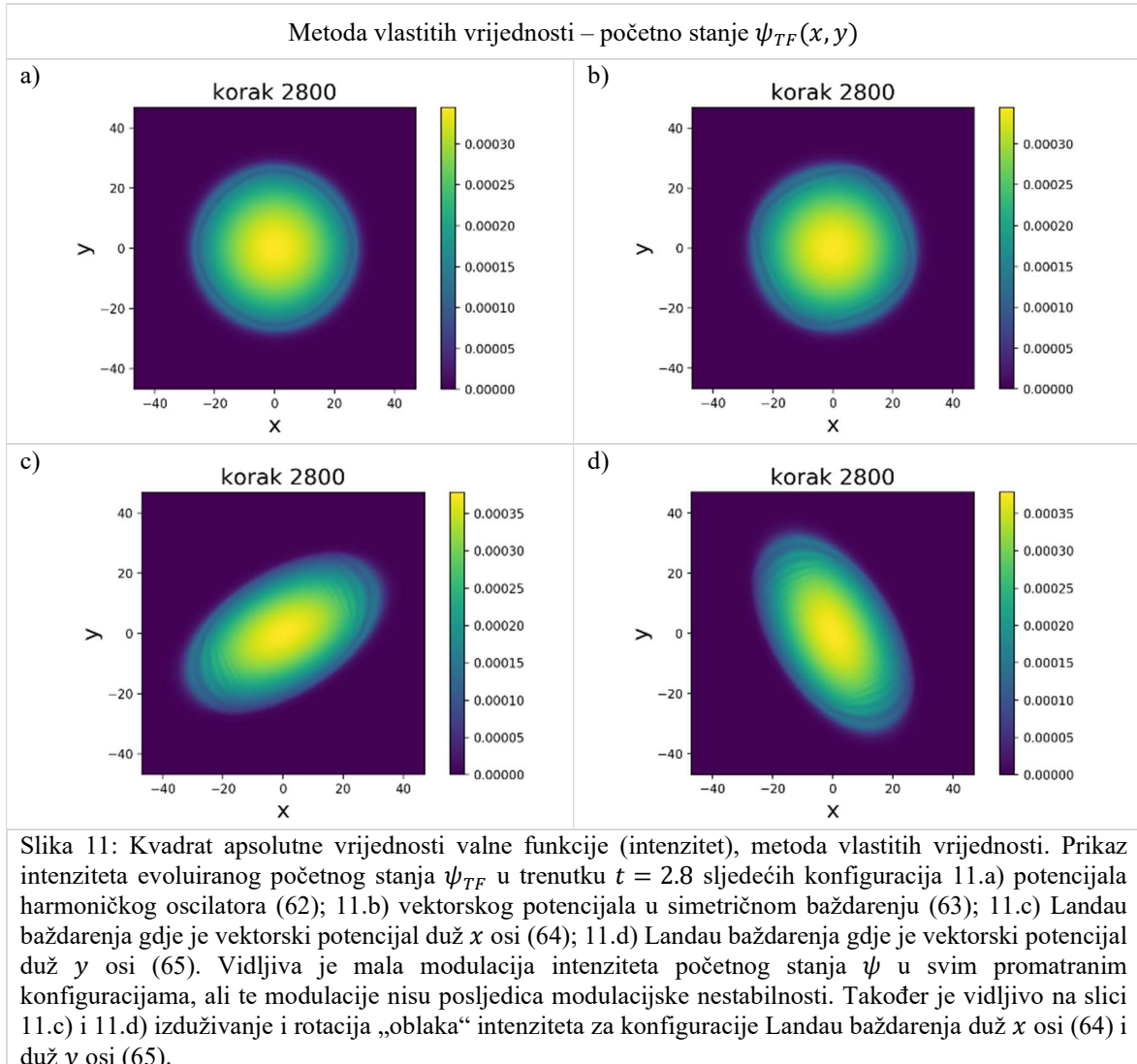


Slika 10: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), split-step metoda. Prikaz intenziteta evoluiranog početnog stanja ψ_{TF} u trenutku $t = 2.8$ sljedećih konfiguracija 10.a) potencijala harmoničkog oscilatora (62); 10.b) vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (63); 10.c) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž x osi (64); 10.d) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž y osi (65). Vidljiva je mala modulacija intenziteta početnog stanja ψ u svim promatranim konfiguracijama, ali te modulacije nisu posljedica modulacijske nestabilnosti. Također je vidljivo na slici 10.c) i 10.d) izduživanje i rotacija „oblaka“ intenziteta za konfiguracije Landau baždarenja duž x osi (64) i duž y osi (65).

Na slici 11 je prikazana evolucija početnog stanja $\psi(x, y, 0) = \psi_{TF}(x, y)$ (34) u trenutku $t = 2.8$ pri čemu se koristila metoda vlastitih vrijednosti. Korišteni su isti parametri kao pri evoluciji stanja u split-step metodi (slika 10).

Na slikama 10 i 11 vidimo da obje metode daju kvalitativno iste rezultate, ali se mogu primijetiti manje kvantitativne razlike u modulacijama intenziteta i formi „oblaka“ intenziteta. Do tih razlika dolazi zbog toga što smo u metodi vlastitih vrijednosti 2D valnu funkciju mogli predstaviti na diskretnoj 2D mreži sa maksimalno 128×128 točaka, za veće brojeve točaka dolazilo je do zastoja u izvršavanju našeg programa zbog nedostatka radne

memorije na računalu na kojem smo izvršavali program, i zbog toga su slike s metodom vlastitih vrijednosti lošije rezolucije od slika sa split-step metodom za koju smo koristili diskretnu 2D mrežu 256x256 točaka.

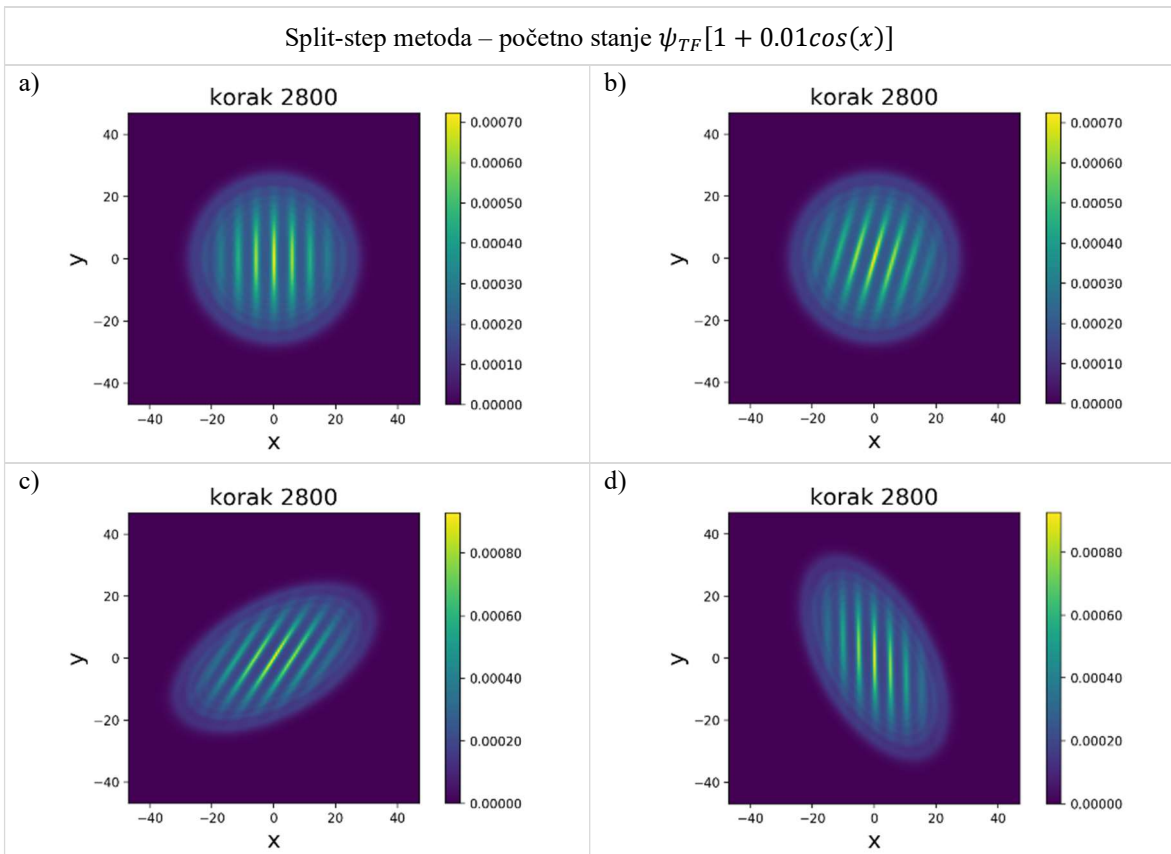


Ponovno numerički evoluiramo NLSE jednadžbu (61) sa sintetskim magnetskim poljem iznosa $B = 0.1$, jakost nelinearnosti je $\eta = -5000$ a za korak u evoluciji uzimamo $dt = 0.001$. Ali sada za početno stanje u evoluciji uzimamo TF stanje na koje dodajemo perturbaciju oblika $\cos(x)$ na način

$$\psi(x, y, 0) = \alpha_1 \psi_{TF}(x, y)(1 + 0.01 \cos(x)) \quad (66)$$

gdje je α_1 konstanta normalizacije potrebna da stanje (66) bude normirano na jedinicu. Prikaz intenziteta početnog stanja je dana na slici 9.b. Prvo ćemo razmotriti rezultate split-step metode. Na slici 12 je prikazano evoluirano stanje (66) u trenutku $t = 2.8$ u konfiguracijama, gdje je na slici 12.a dano evoluirano stanje NLSE sa potencijalom

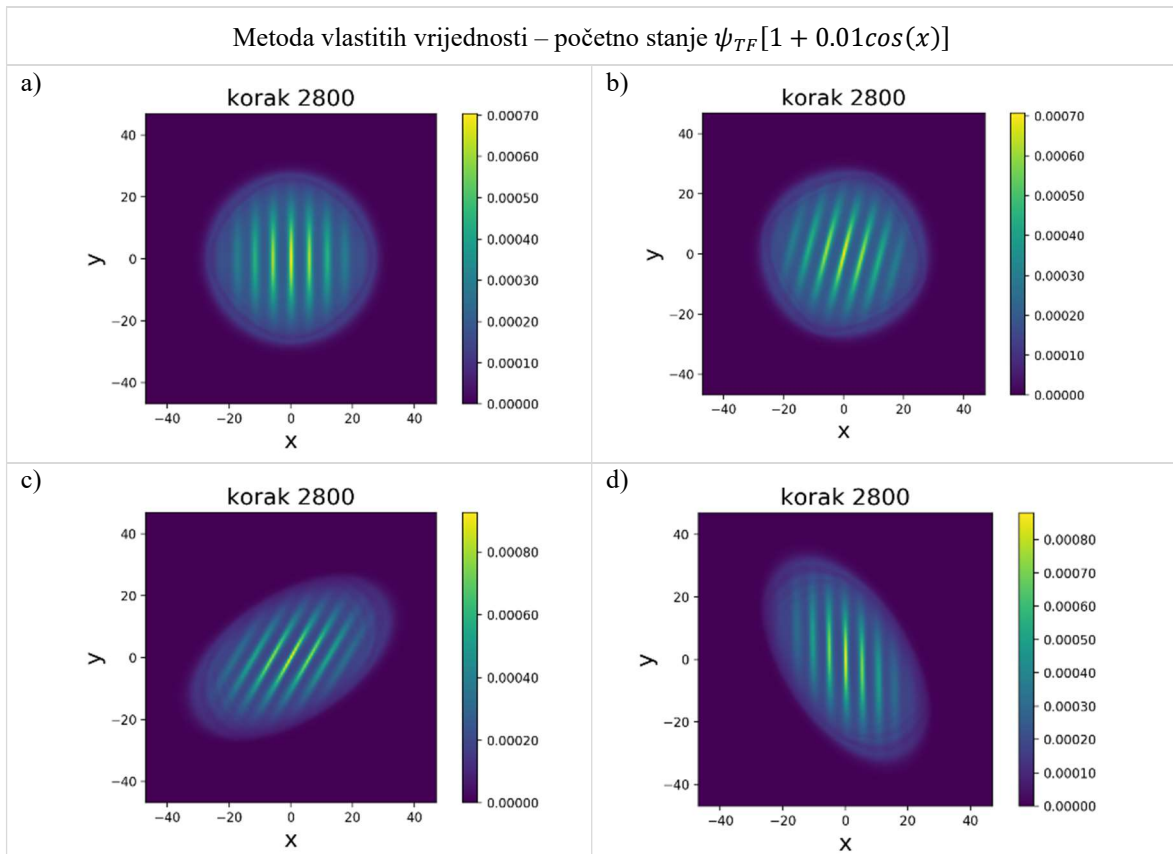
harmoničkog oscilatora (62); na slici 12.b je prikazano evoluirano stanje NLSE-B u simetričnom baždarenju (63); a evoluirano stanje NLSE-B u Landau baždarenju duž x osi (64) je prikazano na slici 12.c i u Landau baždarenju duž y osi (65) na slici 12.d. Ono što je vidljivo u svim konfiguracijama u trenutku $t = 2.8$ (slika 12.a, 12.b, 12.c i 12.d) jest razvoj modulacijske nestabilnosti stanja ψ (66). Nadalje, evolucija NLSE sa harmoničkim potencijalom (62) pokazuje (slika 12.a) modulacijske pruge koje su statične u vremenu. Evoluciju NLSE-B u simetričnom baždarenju (63) pokazuje (slika 12.b) modulacijsku nestabilnost istog intenziteta i istog oblika kao i za NLSE sa harmoničkim potencijalom (slika 12.a) ali u ovom slučaju (slika 12.b) dolazi i do rotacije „modulacijskih pruga“. Ono što se vidi na slici 12.c u NLSE sa Landau baždarenjem duž x osi (64) jest izduživanje i rotacija „oblaka“ intenziteta i „modulacijskih pruga“. Na slici 12.d je prikazano stanje



Slika 12: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), split-step metoda. Prikaz intenziteta evoluiranog početnog stanja $\psi_{TF}[1 + 0.01\cos(x)]$ u trenutku $t = 2.8$ sljedećih konfiguracija 12.a) potencijala harmoničkog oscilatora (62); 12.b) vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (63); 12.c) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž x osi (64) i 12.d) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž y osi (65). Vidljiva je modulacijska nestabilnost intenziteta početnog stanja u svim promatranim konfiguracijama. Također je na slici 12.b) vidljivo zakretanje „modulacijskih pruga“ u NLSE-B u simetričnom baždarenju, na slici 12.c) u NLSE-B u Landau smjeru duž x smjera je uz zakretanje i izduživanje „oblaka“ intenziteta vidljivo i zakretanje „modulacijskih pruga“, a na slici 12.d) gdje se radi o NLSE-B u Landau baždarenju u y smjeru dolazi do rotacije i izduživanja „oblaka“ intenziteta dok „modulacijske pruge“ ne rotiraju.

evoluirano u NLSE-B sa Landau baždarenjem duž y osi (65) gdje u evoluciji stanja dolazi do izduživanja i zakretanja „oblaka“ intenziteta dok se „modulacijske pruge“ ne rotiraju. Možemo zaključiti da u ovom slučaju, odnosno perturbaciji sa valnim vektorom $k = \pm 1$, sve konfiguracije pokazuju modulacijsku nestabilnost.

Sad ćemo za isto početno stanje (66) koje je prikazano na slici 9.b i sa istim konfiguracijama sustava prikazati evoluciju koristeći metodu vlastitih vrijednosti. Na slici 13 je prikazana evolucija početnog stanja u trenutku $t = 2.8$ pri čemu se koristila metoda vlastitih vrijednosti. Korišteni su isti parametri kao pri evoluciji stanja u split-step metodi (slika 12). Razlike u intenzitetu pri korištenju split-step metode (slika 12) i metode vlastitih vrijednosti (slika 13) nisu kvalitativno primijećene, u metodi vlastitih vrijednosti dolazi do istih pojava u konfiguracijama kao u split-step metodi. Primijećene su kvantitativne razlike uzrokovane manjim brojem točaka u metodi vlastitih vrijednosti.

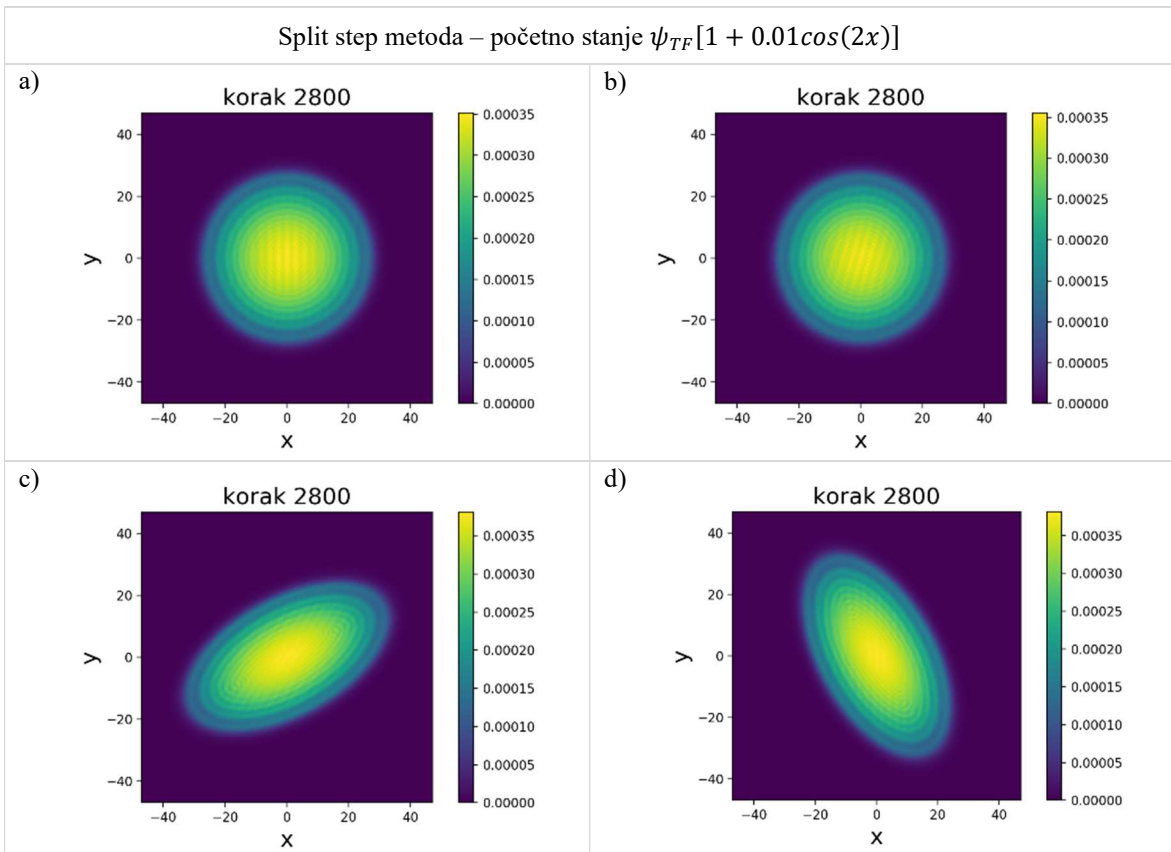


Slika 13: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), metoda vlastitih vrijednosti. Prikaz intenziteta evoluiranog početnog stanja $\psi_{TF}[1 + 0.01\cos(x)]$ u trenutku $t = 2.8$ sljedećih konfiguracija 13.a) potencijala harmoničkog oscilatora (62); 13.b) vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (63); 13.c) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž x osi (64) i 13.d) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž y osi (65). Vidljiva je modulacijska nestabilnost intenziteta početnog stanja u svim promatranim konfiguracijama. Također je na slici 13.b) vidljivo zakretanje „modulacijskih pruga“ za NLSE-B u simetričnom baždarenju, na slici 13.c) u NLSE-B u Landau smjeru duž x smjera je uz zakretanje i izduživanje „oblaka“ intenziteta vidljivo i zakretanje „modulacijskih pruga“, a na slici 13.d) gdje se radi o NLSE-B u Landau baždarenju u y smjeru dolazi do rotacije i izduživanja „oblaka“ intenziteta dok „modulacijske pruge“ ne rotiraju.

Ponovno numerički evoluiramo NLSE jednadžbu (61) sa sintetskim magnetskim poljem iznosa $B = 0.1$, jakost nelinearnosti je $\eta = -5000$ a za korak u evoluciji uzimamo $dt = 0.001$. Sada za početno stanje u evoluciji uzimamo TF stanje na koje dodajemo perturbaciju oblika $\cos(2x)$ na način

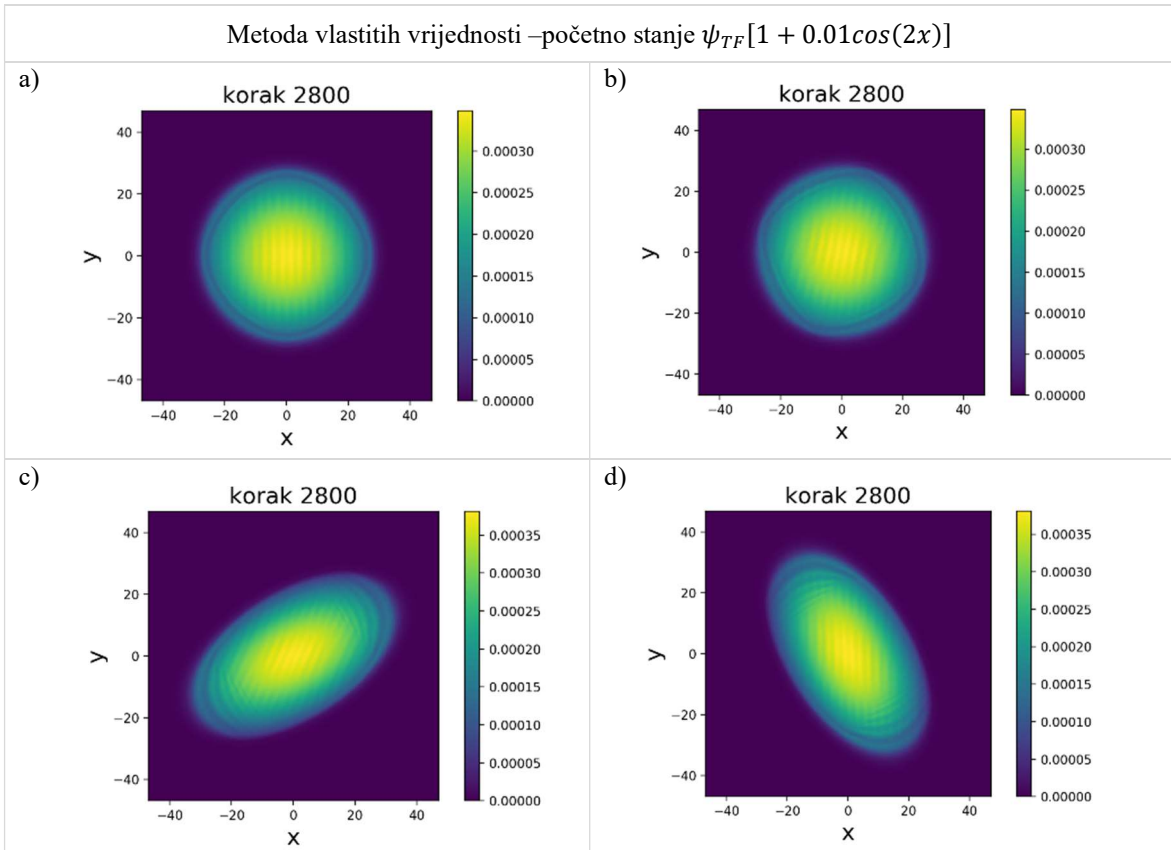
$$\psi(x, y, 0) = \alpha_2 \psi_{TF}(x, y)(1 + 0.01 \cos(2x)) \quad (67)$$

gdje je α_2 konstanta normalizacije potrebna da stanje (67) bude normirano na jedinicu. Intenzitet početnog stanja je prikazan na slici 9.c. Prvo ćemo razmotriti rezultate split-step metode. Na slici 14 je prikazano evoluirano stanje (67) u trenutku $t = 2.8$ u konfiguracijama, gdje je na slici 14.a NLSE sa potencijalom harmoničkog oscilatora (62); na slici 14.b NLSE-B u simetričnom baždarenju (63); a NLSE-B u Landau baždarenju duž x osi (64) je prikazano na slici 14.c i Landau baždarenju duž y osi (65) na slici 14.d. Usporedbom sa slikom 9.c vidimo da nema velike razlike u intenzitetu. Vidljive su kružne modulacije karakteristične za harmonički potencijal dok je modulacija uzrokovana perturbacijom ostala infinitesimalna, odnosno slika 14 sa perturbacijom $\cos 2x$ je gotovo identična slici 10 bez



Slika 14: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), split-step metoda. Prikaz intenziteta evoluiranog početnog stanja $\psi_{TF}[1 + 0.01\cos(2x)]$ u trenutku $t = 2.8$ sljedećih konfiguracija 14.a) potencijala harmoničkog oscilatora (62); 14.b) vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (63); 14.c) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž x osi (64); 14.d) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž y osi (65). Vidljiva je mala modulacija intenziteta početnog stanja ψ u svim promatranim konfiguracijama koja nije uzrokovana modulacijskom nestabilnošću.

perturbacije. Slijedi da prikazemo evoluciju za istu perturbaciju početnog stanja (67) i sa istim konfiguracijama sustava koristeći metodu vlastitih vrijednosti. Na slici 15 je prikazana evolucija početnog stanja u trenutku $t = 2.8$ pri čemu se koristila metoda vlastitih vrijednosti. Korišteni su isti parametri kao pri evoluciji stanja u split-step metodi (slika 14). Rezultati između split step metode (slika 14) i metode vlastitih vrijednosti (slika 15) su kvalitativno ostali isti dok kvantitativno uočavamo razliku koja je uzrokovana manjim brojem točaka u metodi vlastitih vrijednosti.

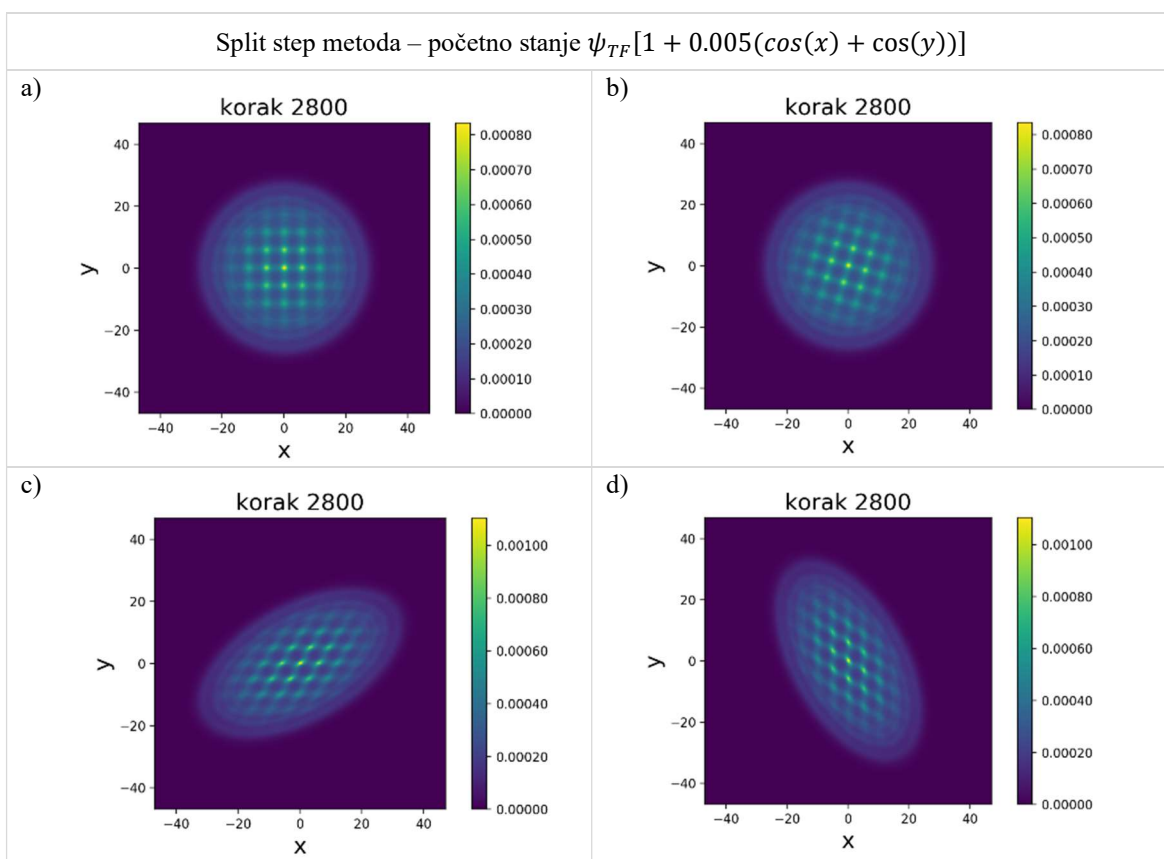


Slika 15: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), metoda vlastitih vrijednosti. Prikaz intenziteta evoluiranog početnog stanja $\psi_{TF}[1 + 0.01\cos(2x)]$ u trenutku $t = 2.8$ sljedećih konfiguracija 15.a) potencijala harmoničkog oscilatora (62); 15.b) vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (63); 15.c) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž x osi (64); 15.d) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž y osi (65). Vidljiva je mala modulacija intenziteta početnog stanja ψ u svim promatranim konfiguracijama koja nije uzrokovana modulacijskom nestabilnošću.

Prije nego što krenemo na diskusiju, pokazat ćemo još jednu sliku, sliku 16. I u ovom slučaju numerički evoluiramo NLSE jednadžbu (61) sa sintetskim magnetskim poljem iznosa $B = 0.1$, jakost nelinearnosti je $\eta = -5000$ a za korak u evoluciji uzimamo $dt = 0.001$. Ali sada ćemo za početno stanje u evoluciji uzeti TF stanje na koje dodajemo perturbaciju oblika $\cos(x) + \cos(y)$, odnosno stanje je dano kao

$$\psi(x, y, 0) = \alpha_3 \psi_{TF}(x, y)(1 + 0.005[\cos(x) + \cos(y)]) \quad (68)$$

gdje je α_3 konstanta normalizacije potrebna da stanje (68) bude normirano na jedinicu. Intenzitet početnog stanja je prikazan na slici 9.d. Ovdje ćemo razmotriti rezultate samo split-step metode. Na slici 16 je prikazano evoluirano stanje (68) u trenutku $t = 2.8$ u konfiguracijama, gdje je na slici 16.a NLSE sa potencijalom harmoničkog oscilatora (62); na slici 16.b NLSE-B u simetričnom baždarenju (63); NLSE-B u Landau baždarenju duž x osi (64) je dana na slici 16.c i Landau baždarenju duž y osi (65) na slici 16.d. Vidimo da se MI događa i kad perturbacija ima komponente u obje varijable. U ovom slučaju obje komponente imaju valni vektor za koji se događa MI. Iz tog razloga ne nastaju modulacijske pruge nego uzorak koji podsjeća na rešetku.



Slika 16: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), split-step metoda. Prikaz intenziteta evoluiranog početnog stanja $\psi_{TF}[1 + 0.005(\cos(x) + \cos(y))]$ u trenutku $t = 2.8$ sljedećih konfiguracija 16.a) potencijala harmoničkog oscilatora (62); 16.b) vektorskog potencijala u simetričnom baždarenju (63); 16.c) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž x osi (64); 16.d) Landau baždarenja gdje je vektorski potencijal duž y osi (65). Vidljiva je modulacijska nestabilnost intenziteta početnog stanja u svim promatranim konfiguracijama. Također je na slici 16.b) vidljivo zakretanje „modulacijske rešetke“ za NLSE-B u simetričnom baždarenju, na slici 16.c) i 16.d) u NLSE-B u Landau baždarenju je vidljivo zakretanje i izduživanje „oblaka“ intenziteta, a vidljivo je i zakretanje „modulacijskih pruga“

5.1 Diskusija rezultata

Na slikama 10-16 vidimo da se i u prisustvu sintetskog magnetskog polja događa MI, odnosno ako na početno TF stanje dodamo perturbacije sa valnim vektorima $k = \pm 1$ u vremenskoj evoluciji dolazi do porasta amplitude modulacija intenziteta (slika 12 i slika 13), dok se za perturbacije sa valnim vektorima $k = \pm 2$ intenzitet nakon vremenske evolucije (slika 14 i slika 15) ne razlikuje od slučaja bez dodane perturbacije (slika 10 i slika 11). Neovisno o tome kakva je perturbacija dodana na početno TF stanje, na slikama 10-16 je vidljivo da rezultat vremenske evolucije ovisi o odabiru baždarenja s kojim opisujemo homogeno sintetsko magnetsko polje, odnosno intenzitet u krajnjem trenutku izgleda drukčije u različitim baždarenjima. Da bi to razumjeli moramo uzeti u obzir da mi krećemo od početnog stanja koje je pripremljeno u odsutnosti polja, a homogeno sintetsko magnetsko polje naglo uključujemo u vremenskoj evoluciji, dakle u našem slučaju vrijedi:

$$B(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ B, & t > 0 \end{cases} \quad (69)$$

Takvo paljenje sintetskog magnetskog polja po Faradayevom zakonu [12] stvara sintetsko električno polje koje djeluje u $t = 0$ i koje će ovisiti o obliku vektorskog potencijala kojeg koristimo za opis sintetskog magnetskog polja. Za simetrično baždarenje $\vec{A}_S(t) = B(t)(-y/2, x/2, 0)$ dobijemo sintetsko električno polje

$$\vec{E}_S(x, y, t) = -\frac{\partial \vec{A}_S}{\partial t} = -B\delta(t)(-y/2, x/2, 0), \quad (70)$$

gdje je $\delta(t)$ Diracova delta funkcija [12]. Za Landau baždarenje $\vec{A}_{Lx}(t) = B(t)(-y, 0, 0)$ dobijemo sintetsko električno polje

$$\vec{E}_{Lx}(x, y, t) = -\frac{\partial \vec{A}_{Lx}}{\partial t} = -B\delta(t)(-y, 0, 0). \quad (71)$$

Za Landau baždarenje $\vec{A}_{Ly}(t) = B(t)(0, x, 0)$ dobijemo sintetsko električno polje

$$\vec{E}_{Ly}(x, y, t) = -\frac{\partial \vec{A}_{Ly}}{\partial t} = -B\delta(t)(0, x, 0). \quad (72)$$

Sintetska električna polja (70), (71) i (72) djeluju na valnu funkciju u početnom trenutku vremenske evolucije i svako od njih daje drukčiji impuls početnoj valnoj funkciji, zbog toga se vremenske evolucije u različitim baždarenjima razlikuju. Na slici 8 možemo vidjeti skicu baždarnih vektorskih potencijala, skica vektora sintetičkih električnih polja (70), (71) i (72) bi odgovarala slici 8 uz promjenu orijentacije prikazanih vektora. To kvalitativno objašnjava smjer rotacije i promjene oblika intenziteta ovisno o izboru

baždarenja na slikama 10-16. Ovaj rezultat naizgled govori da je narušena baždarna invarijantnost, jer dobivamo različite opservable (intenzitete) ovisno da li radimo vremensku evoluciju sa simetričnim ili Landau vektorskim potencijalom, ali takav zaključak bi bio pogrešan. Simetrični \vec{A}_S i Landau \vec{A}_{L_y} vektorski potencijal su povezani baždarnom transformacijom

$$\vec{A}_{L_y} = \vec{A}_S + \nabla\lambda \quad (73)$$

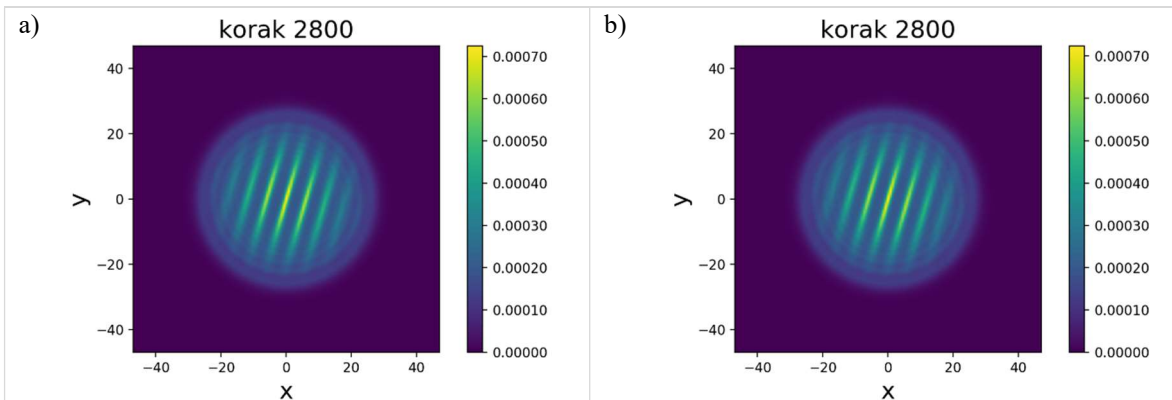
gdje je $\lambda = Bxy/2$ tzv. skalarna baždarna funkcija [10], a da bi NLSE ostala invarijantna na baždarnu transformaciju, treba još napraviti i transformaciju valne funkcije

$$\psi_{L_y}(x, y; t) = e^{i\lambda}\psi_S(x, y; t) \quad (74)$$

Podsjetimo se, radimo sa bezdimenzionalnim veličinama i uzimamo da nam je sintetski naboj $q = 1$, utoliko se naš izraz (74) razlikuje od izraza u referenci [10]. Ukoliko razmatramo evoluciju u Landau baždarenju \vec{A}_{L_y} prikazanu na slikama 12.d i 13.d. Ako bi za tu evoluciju uzeli početno stanje transformirano po relaciji (74), odnosno ako bi za početni uvjet uzeli

$$\psi(x, y) = e^{i\lambda}\psi_{TF}[1 + 0.01\cos(x)] \quad (75)$$

tada bi intenzitet u evoluciji bio isti kao na slikama 12.b i 13.b tj. isti kao za evoluciju u simetričnom baždarenju \vec{A}_S (slika 17). Kao primjer smo uzeli evolucije sa \vec{A}_S i \vec{A}_{L_y} , ali isto vrijedi i za sve druge kombinacije vektorskih potencijala, koristeći relaciju (74) sa prikladno odabranom baždarnom funkcijom. Dakle, vremenske evolucije sa različitim vektorskim potencijalima se mogu usuglasiti koristeći baždarne transformacije i u tom smislu je



Slika 17: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet), split-step metoda. Na slici 17.a je prikazan intenzitet evoluiranog početnog stanja $\psi(x, y, 0) = \psi_{TF}[1 + 0.01\cos(x)]$ u trenutku $t = 2.8$ za simetrično baždarenje \vec{A}_S (63). Na slici 17.b je prikazan intenzitet evoluiranog početnog stanja $\psi(x, y, 0) = e^{iBxy/2}\psi_{TF}[1 + 0.01\cos(x)]$ u trenutku $t = 2.8$ za Landau baždarenje \vec{A}_{L_y} (65). Vidljivo je da u trenutku $t = 2.8$ evolucijom baždarno transformiranog početnog stanja po pravilu (74) u Landau baždarenju (slika 17.b) dobijemo ekvivalentnu sliku intenziteta kao u evoluciji početnog stanja u simetričnom baždarenju (slika 17.a). Vidi tekst za detalje.

baždarna invarijantnost i u ovom slučaju potvrđena, ali interesantno je primijetiti da bi samo za jedan odabir vektorskog potencijala evolucija početnog stanja odgovarala konkretnom eksperimentu, dok bi za druge odabire vektorskog potencijala početno stanje trebalo transformirati da bi dobili dobri rezultati u evoluciji. Tijekom izrade ovog diplomskog rada, našli smo znanstveni rad [13] u kojem autori proučavaju formiranje vrtloga u Bose Einstein kondenzatima u sintetskom magnetskom polju i dolaze do sličnih zaključaka.

6 Zaključak

U prvom dijelu ovog diplomskog rada smo se upoznali sa nelinearnom Schrödingerovom jednačbom (NLSE) i fenomenom modulacijske nestabilnosti (MI). Na primjeru homogene 1D NLSE smo analitički obradili MI i odredili područje nestabilnosti i pojačanje, te koristeći split-step metodu numerički evoluirali homogenu 1D NLSE i numerički demonstrirali MI. Potom smo numerički pokazali kako se MI događa i u slučaju nehomogene 1D NLSE sa potencijalom harmoničkog oscilatora. Zatim smo uveli homogenu sintetsko magnetsko polje u 2D NLSE te razvili dvije numeričke metode za vremensku evoluciju te jednačbe: metodu koja kombinira razvoj po svojstvenim stanjima linearnog dijela hamiltonijana i djelovanjem nelinearnog operatora na valu funkciju, prilagođenu split-step metodu koja kombinira 1D Fourierove transformate i 1D inverzne Fourierove transformate po x i y varijabli. Pomoću tih metoda, istražili smo numerički modulacijsku nestabilnost 2D NLSE sa sintetskim magnetskim poljem polazeći od početnog Thomas-Fermi stanja.

Pokazali smo da ukoliko krećemo iz početnog stanja pripremljenog u odsutnosti sintetskog magnetskog polja te zatim u $t = 0$ uključimo sintetsko magnetsko polje u 2D NLSE, rezultat vremenske evolucije ovisi o odabiru baždarenja tj. ovisi o tome da li radimo sa simetričnim ili Landau vektorskim potencijalom. U oba baždarenja se događa MI, u smislu pojačanja modulacija u vremenskoj evoluciji, odnosno dodavanje sintetskog magnetskog polja nije potisnulo MI. Ono što je zanimljivo je da se dinamika razlikuje u ta dva baždarenja, kvadrati apsolutnih vrijednosti valnih funkcija (intenziteti) nisu isti, tj. rotacija modulacija i rotacija oblaka gustoće (intenziteta) ovise o baždarenju. Do razlika u dva baždarenja dolazi zbog toga što se u trenutku uključivanja sintetskog magnetskog polja stvara sintetsko električno polje (po Faraday-evom zakonu). Dakle, različiti vektorski potencijali u dva baždarenja, stvaraju različita sintetska električna polja, koja u našem slučaju djeluju samo u $t = 0$ (trenutno uključivanje), ali daju različite impulse početnom stanju, što vodi na razlike u vremenskoj evoluciji. Za vrijeme izrade ovog diplomskog rada, našli smo znanstveni rad [13] u kojem autori dolaze do sličnih zaključaka u kontekstu istraživanja vrtloga u Bose Einstein kondenzatima u sintetskom magnetskom polju. Razlike u vremenskim evolucijama sa različitim baždarenjima je moguće izbjeći tako da u jednom baždarenju evoluiramo početno stanje onakvo kakvo je pripremljeno (bez “intervencija“ na

početnom stanju), a u drugom baždarenju prvo napravimo baždarnu transformaciju na početnom stanju pa ga evoluiramo, u tom će slučaju rezultati vremenskih evolucija biti isti.

Dodatak

A. Izvod pojačanja g

Opće rješenje za perturbaciju $\varphi(x, t)$ možemo napisati kao

$$\varphi(x, t) = f(t)e^{ikx} + h(t)e^{-ikx} \quad (76)$$

gdje ćemo funkcije $f(t)$ i $h(t)$ dobiti uvrštavanjem rješenja (76) u jednadžbu (11).

Separiranjem članova koji su uz e^{ikx} i e^{-ikx} dobije se

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial f(t)}{\partial t} - k^2 f(t) - \eta I_0 (f(t) + h^*(t)) \right] e^{ikx} \\ & + \left[i \frac{\partial h(t)}{\partial t} - k^2 h(t) - \eta I_0 (h(t) + f^*(t)) \right] e^{-ikx} = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

Budući da dani izraz (77) mora biti jednak nuli, izrazi u uglatim zagradama [...] moraju iščekavati odnosno

$$i \frac{\partial f(t)}{\partial t} - k^2 f(t) - \eta I_0 (f(t) + h^*(t)) = 0 \quad (78)$$

$$i \frac{\partial h(t)}{\partial t} - k^2 h(t) - \eta I_0 (h(t) + f^*(t)) = 0 \quad (79)$$

Deriviranje jednadžbe (78) dobijemo

$$i \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial f(t)}{\partial t} - \eta I_0 \left(\frac{\partial f(t)}{\partial t} + \frac{\partial h^*(t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (80)$$

Uvrštavanjem (78) i (79) u (80) dobijemo jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = k^2 (-2\eta I_0 - k^2) f(t) \quad (81)$$

Budući da tražimo uvjet za koji dolazi do eksponencijalnog rasta u t smjeru ($e^{g(k)t}$) uvrštavamo $f(t) = e^{g(k)t}$ u jednadžbu (81) i dobijemo $g^2 = k^2 (-2\eta I_0 - k^2)$ odnosno

$$g = \pm \sqrt{k^2 (-2\eta I_0 - k^2)} \quad (82)$$

B. TF početno stanje

U ovom djelu ćemo izvesti TF stanje za stacionarnu GP jednadžbu (33) sa pozitivnom jakosti nelinearnosti. Koristimo TF aproksimaciju gdje zanemarujemo članove sa drugom derivacijom jer su puno manji od nelinearnog člana. Iz (33) slijedi da je kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije $\psi(x, y)$ dana kao

$$|\psi(x, y)|^2 = \frac{1}{\eta_2} \left[\mu - \frac{1}{4} B^2 (x^2 + y^2) \right]. \quad (83)$$

Za naše početno stanje uzeti ćemo pozitivnu valnu funkciju, $\psi(x, y) > 0$, odnosno

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{\eta_2} \left[\mu - \frac{1}{4} B^2 (x^2 + y^2) \right]}. \quad (84)$$

Radi lakšeg računanja preći ćemo u polarne koordinate gdje je $r^2 = x^2 + y^2$. Kružnica radijusa r_0 , za koju je funkcija (84) nula, je dana za $\mu - \frac{1}{4} B^2 r_0^2 = 0$ odnosno $r_0 = 2 \frac{\sqrt{\mu}}{B}$.

Normaliziramo (84) na način da je $\iint_0^{r_0} \int_0^{2\pi} |\psi(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi$ na krugu radijusa r_0 jednaka jedinici, odnosno

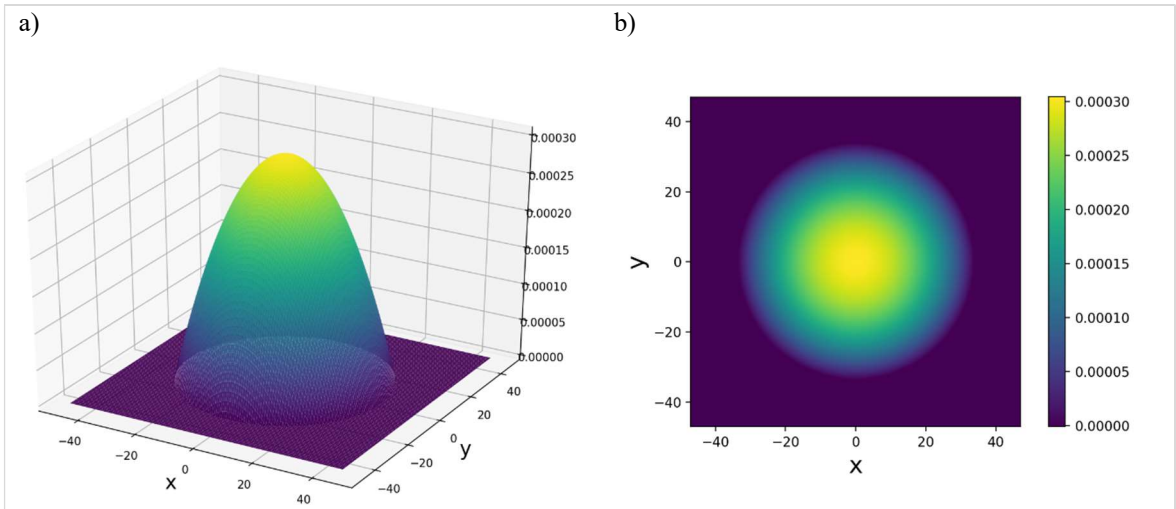
$$\iint_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\eta_2} \left[\mu - \frac{1}{4} B^2 r^2 \right] r dr d\varphi = 1 \quad (85)$$

Integriranjem i sređivanjem izraza (85) dobijemo vrijednost za kemijski potencijal $\mu =$

$\sqrt{\frac{\eta_2 B^2}{2\pi}}$ i TF osnovno stanje

$$\psi_{TF2D}(r, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu - \frac{1}{4} B^2 r^2}{\eta_2}}, & 0 < r < 2 \frac{\sqrt{\mu}}{B} \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases} \quad (86)$$

Na slici 18. je prikazan intenzitet TF stanja (86).



Slika 18: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (intenzitet). Intenzitet osnovnog stanja stacionarne GP jednadžbe sa izotropnim harmoničkim potencijalom, uz TF aproksimaciju (86). Na slici a) je 3D prikaz TF stanja gdje su x i y osi mreže a z os pokazuje intenzitet, b) je 2D prikaz TF stanja gdje je intenzitet prikazan skalom u boji. U daljnjem radu ćemo za stanje koristiti prikaz b).

C. Matrična reprezentacija linearnog člana hamiltonijana

U metodi svojstvenih vrijednosti linearan član u (38) djeluje na funkciju produkta valne funkcije i nelinearnog člana u evoluciji. Da bi to riješili potrebno je numerički naći svojstvene vrijednosti i svojstvena stanja linearnog hamiltonijana H_0 . To znači da za linearnu Shrödingerovu jednadžbu $H_0\psi = E\psi$, gdje je hamiltonijan H_0 dan kao

$$\hat{H}_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - iaBy \frac{\partial}{\partial x} + ibBx \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4}B^2(cx^2 + dy^2) \quad (87)$$

trebamo naći svojstvena stanja ψ_n i svojstvene vrijednosti E_n .

Da bi koristili funkciju `scipy.linalg.eigh` za dobivanje svojstvenih stanja ψ_n i vrijednosti E_n prostor moramo diskretizirati na mrežu, operator hamiltonijana H_0 trebamo reprezentirati preko matrica a valnu funkciju ψ preko vektora.

Kao prvo, diskretiziramo kontinuirani prostor dimenzije L^2 oko ishodišta na prostor mreže $(n+1) \times (n+1)$. Koordinate u diskretnom prostoru možemo zapisati kao $(x_i, y_j) = dl \cdot \left(\left(i - \frac{n}{2} \right), \left(j - \frac{n}{2} \right) \right)$, pri čemu je $i, j = 0, 1, \dots, n$. Udaljenost između dvije susjedne točke je dana kao $dl = L/n$. U radu ćemo koristiti periodične rubne uvjete, odnosno $(x_0, y_j) = (x_n, y_j)$ i $(x_i, y_0) = (x_i, y_n)$, zbog čega će prostor mreže biti $n \times n$.

Zbog diskretnog prostora valna funkcija $\psi(x, y)$ se također diskretizira gdje ćemo vrijednosti valne funkcije u točkama mreže označavati kao $\psi(x_i, y_j) = \psi_{ij}$, a ψ će tada biti prikazana u matričnom obliku

$$[\psi]_{n \times n} \equiv \begin{bmatrix} \psi_{00} & \psi_{10} & \psi_{20} & \cdots & \psi_{(n-2)0} & \psi_{(n-1)0} \\ \psi_{01} & \psi_{11} & \psi_{21} & \cdots & \psi_{(n-2)1} & \psi_{(n-1)1} \\ \psi_{02} & \psi_{12} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{(n-2)2} & \psi_{(n-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi_{0(n-2)} & \psi_{1(n-2)} & \psi_{2(n-2)} & \cdots & \psi_{(n-2)(n-2)} & \psi_{(n-1)(n-2)} \\ \psi_{0(n-1)} & \psi_{1(n-1)} & \psi_{2(n-1)} & \cdots & \psi_{(n-2)(n-1)} & \psi_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (88)$$

gdje je $\psi(x_i, y_j) = \psi_{ij}$ vrijednost funkcije u točki (x_i, y_j) mreže.

Prilikom rješavanja hamiltonijana valnu funkciju moramo prikazati preko vektora stupca ($n^2 \times 1$). To znači da imamo izbora da vektor slažemo po stupcima ili recima matrice (88). Odabir kako slažemo vektor stupac od elemenata matrice (88) će utjecati na daljnju konstrukciju matrica hamiltonijana. Također se mora pripaziti da se prije prikaza vrijednosti valne funkcije točkama mreže (tj. 2D prikaz) po istom pravilu rastavi vektor stupac u matrični oblik. Znači, za mrežu $(n \times n)$ imati ćemo vektor stupac valne funkcije koji ima n^2 elemenata, oblika

$$[\psi]_{n^2 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{10} \\ \vdots \\ \psi_{(n-1)0} \\ \psi_{01} \\ \psi_{11} \\ \vdots \\ \psi_{(n-1)1} \\ \vdots \\ \psi_{0(n-1)} \\ \psi_{1(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (89)$$

gdje smo se u (89) odlučili da slažemo vektor nizajući retke matrice (88) u stupac.

Sljedeće moramo dobiti matricu hamiltonijana H_0 (87). Da bi hamiltonijan prikazali u matričnom obliku, moramo iskoristiti neku od metoda za matrični prikaz derivacije. U metodi konačnih razlika [11] cilj nam je aproksimirati derivacije kao konačne razlike funkcije u susjednim točkama, pri čemu ćemo koristiti centralnu derivaciju definiranu kao

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{\psi\left(x + \frac{dl}{2}\right) - \psi\left(x - \frac{dl}{2}\right)}{dl} \quad (90)$$

Druga derivacija slijedi iz (90)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi\left(x + \frac{dl}{2}\right) - \psi\left(x - \frac{dl}{2}\right)}{dl} \right) \\ &= \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{\psi(x + dl) - 2\psi(x) + \psi(x - dl)}{dl^2} \end{aligned} \quad (91)$$

Koristeći (90) i (91) možemo zapisati matrice za članove u hamiltonijanu H_0 (87). Matrice će biti dimenzije $(n^2 \times n^2)$. Budući da derivacije u metodi najmanjih razlika maksimalno uzimaju vrijednosti valne funkcije susjednih točaka mreže radit ćemo sa „sparse“ matricama. Radi preglednosti izdvojiti ćemo blokove dimenzije $(n \times n)$ koji se ponavljaju:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$D_{xy} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & (n-2) & \\ & & & & & (n-1) \end{bmatrix} \quad (95)$$

Raspis laplasijana $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ u točki (x_i, y_j) preko metode konačnih razlika je dana kao

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi|_{x_i y_j} \\ &= \frac{1}{(dl)^2} (\psi(x_{i+1}, y_j) + \psi(x_{i-1}, y_j) + \psi(x_i, y_{j+1}) \\ &+ \psi(x_i, y_{j-1}) - 4\psi(x_i, y_j)) \end{aligned} \quad (96)$$

Matrica $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_{n^2 \times n^2}$ za (96), pri čemu su korišteni blokovi (92) i (93)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_{n^2 \times n^2} = \frac{1}{dl^2} \begin{bmatrix} D_{xy} & I_n & 0 & \dots & 0 & I_n \\ I_n & D_{xy} & I_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & D_{xy} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{xy} & I_n \\ I_n & 0 & 0 & \dots & I_n & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (97)$$

Raspis derivacije $\frac{\partial}{\partial x}$ u točki (x_i, y_j) preko metode konačnih razlika je dana kao

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y)|_{x_i y_j} = \frac{\psi(x_{i+1}, y_j) - \psi(x_{i-1}, y_j)}{2dl} \quad (98)$$

Matrica $\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_{n^2 \times n^2}$ za (98), pri čemu je korišten blok (94)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_{n^2 \times n^2} = \frac{1}{2dl} \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_x \end{bmatrix} \quad (99)$$

Raspis derivacije $\frac{\partial}{\partial y}$ u točki (x_i, y_j) preko metode konačnih razlika je dana kao

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y)|_{x_i y_j} = \frac{\psi(x_i, y_{j+1}) - \psi(x_i, y_{j-1})}{2dl} \quad (100)$$

Matrica $\left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_{n^2 \times n^2}$ za (100), pri čemu je korišten blok (92)

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_{n^2 \times n^2} = \frac{1}{2dl} \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 & -I_n \\ -I_n & 0 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_n \\ I_n & 0 & 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

x_i je dan kao

$$x_i \psi(x, y)|_{x_i, y_j} = dl \left(i - \frac{n}{2} \right) \psi(x_i, y_j) \quad (102)$$

Matrica $[x]_{n^2 \times n^2}$ za (102), pri čemu su korišteni blokovi (92) i (95)

$$[x]_{n^2 \times n^2} = dl \begin{bmatrix} M_x - \frac{n}{2} I_n & & & & & \\ & M_x - \frac{n}{2} I_n & & & & 0 \\ & & M_x - \frac{n}{2} I_n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & M_x - \frac{n}{2} I_n & \\ & 0 & & & & M_x - \frac{n}{2} I_n \\ & & & & & & M_x - \frac{n}{2} I_n \end{bmatrix} \quad (103)$$

y_j je dan kao

$$y_j \psi(x, y)|_{x_i, y_j} = dl \left(j - \frac{n}{2} \right) \psi(x_i, y_j) \quad (104)$$

Matrica $[y]_{n^2 \times n^2}$ za (104), pri čemu je korišten blok (92)

$$[y]_{n^2 \times n^2} = dl \begin{bmatrix} -\frac{n}{2} I_n & & & & & \\ & \left(-\frac{n}{2} + 1\right) I_n & & & & 0 \\ & & \left(-\frac{n}{2} + 2\right) I_n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \left(\frac{n}{2} - 2\right) I_n & \\ & 0 & & & & \left(\frac{n}{2} - 1\right) I_n \end{bmatrix} \quad (105)$$

Matrična reprezentacija hamiltonijana H_0 u (87), koristeći matrice (97), (99), (103) i (105) će tada biti

$$[H_0]_{n^2 \times n^2} = - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_{n^2 \times n^2} - iaB[y]_{n^2 \times n^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]_{n^2 \times n^2} + ibB[x]_{n^2 \times n^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]_{n^2 \times n^2} + \frac{1}{4} B^2 (c([x]_{n^2 \times n^2})^2 + d([y]_{n^2 \times n^2})^2) \quad (106)$$

Koristeći funkciju `scipy.linalg.eigh` za (106) dobijemo svojstvena stanja ψ_n i vrijednosti E_n .

Literatura

- [1] Pethick, C. J.; Smith, H. Bose-Einstein condensation in dilute gases. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
- [2] Folli, V. Nonlinear Optics and Laser Emission Through Random Media. New York : Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Dubček, T. Synthetic magnetism in quantum gases and photonic lattices. Doktorski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2017.
- [4] R. Feynman, R. Simulating physics with computers // International journal of theoretical physics 21, 467–488 (1982).
- [5] Dalibard, J. Introduction to the physics of artificial gauge fields. arXiv e-prints. arXiv:1504.05520 (2015).
- [6] Dalibard, J.; Gerbier, F.; Juzeliūnas, G.; Öhberg, P. Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms. // Rev. Mod. Phys. 83, 1523 (2011), str. 1523-1543.
- [7] Jablan, M. Nekoherentna modulacijska nestabilnost u nelinearnoj periodičkoj rešetci. Diplomski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2006.
- [8] Theocharis, G.; Rapti, Z.; Kevrekidis, P.G.; Frantzeskakis, D.J.; Konotop, V.V. On the modulational stability of Gross-Pitaevskii type equations in 1+1 dimensions. // Phys. Rev. A 67, 063610 (2003).
- [9] Dalfovo, F.; Giorgini, S.; Pitaevskii, L. P.; Stringari, S. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. // Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999), str. 463-512.
- [10] Sakurai, J. J. Modern Quantum Mechanics. Rev.ed. Reading, Massachusetts [etc.] : Addison-Wesley, 1994.
- [11] Bao, W. The Nonlinear Schrödinger Equation and Applications in Bose-Einstein Condensation and Plasma Physics. // Dynamics in Models of Coarsening, Coagulation, Condensation and Quantization / edited by Bao and Liu. New Jersey [etc.] : World Scientific, 2007. Str. 141-239.
- [12] Griffiths, D. J. Introduction to Electrodynamics. 4th ed. Cambridge, New York : Cambridge University Press, 2017.
- [13] LeBlanc, L. J.; Jiménez-García, K.; Williams, R. A.; Beeler, M. C.; Phillips, W. D.; Spielman I. B. Gauge matters: observing the vortex-nucleation transition in a Bose condensate. // New J. Phys. 17, 065016 (2015).