

# Produkcija gluona u sudarima teških iona

---

**Perkov, Anton**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:691329>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Anton Perkov

PRODUKCIJA GLUONA U SUDARIMA TEŠKIH  
IONA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Anton Perkov**

Diplomski rad

**Produkcija gluona u sudarima teških  
iona**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2019.

Od srca se zahvaljujem obitelji, prijateljima i Tonki na svojoj ljubavi i podršci koju mi pružaju, te mentoru izv. prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na savjetima, vodstvu, i velikom strpljenju.

## Sažetak

Na sudarivačima RHIC i LHC se pri raspršenju teških iona postižu dovoljno visoke energije na kojima je moguće istraživati bogatu fenomenologiju kvantne kromodinamike. U ovom je radu razmotrena produkcija gluona korištenjem klasične Yang-Millsove teorije polja, te je rezultat uspoređen s računom u perturbativnom režimu kvantne kromodinamike. Povezano s time razmotrena je gluonska struktura protona korištenjem efektivne teorije staklastog kondenzata boje (Color-Glass Condensate), te numeričkim rješavanjem pridružene Balitsky-Kovchegov jednadžbe s korekcijom za kliznu konstantu vezanja.

Ključne riječi: Sudari teških iona, klasična Yang-Millsova teorija, kvantna kromodinamika, staklasti kondenzat boje, Balitsky-Kovchegov jednadžba.

# Production of gluons in heavy ion collisions

## **Abstract**

Modern particle accelerators like RHIC and LHC are powerful enough to probe QCD phenomenology in heavy ion collisions. In this thesis we will address gluon production in these events using classical Yang-Mills field theory, and compare the results with those from other methods derived from perturbative QCD. The gluon structure of the proton is analysed using the Color-Glass Condensate effective theory, and through the numerical solution of the running-coupling Balitsky-Kovchegov equation.

Keywords: Heavy ion collisions, classical Yang-Mills theory, quantum chromodynamics, Color-Glass Condensate, Balitsky-Kovchegov equation.

# Sadržaj

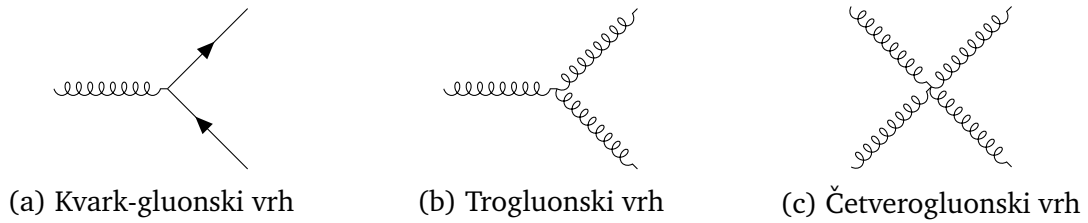
<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Opis raspršenja na hadronima i jezgrama</b>	<b>4</b>
2.1	Kinematička slika . . . . .	4
2.2	Duboko neelastično raspršenje . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Raspršenja u klasičnoj Yang-Millsovoj teoriji</b>	<b>10</b>
3.1	Postavke modela . . . . .	10
3.2	Jednadžbe baždarnog polja . . . . .	13
3.3	Produkcija gluona u granici slabog polja . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Efektivna teorija staklastog kondenzata boje (CGC)</b>	<b>18</b>
4.1	Evolucija partona pri visokim energijama . . . . .	18
4.2	Amplituda raspršenja u eikonolnoj aproksimaciji . . . . .	22
4.3	DIS u modelu bojnog dipola . . . . .	27
4.4	BK jednadžba s kliznim vezanjem . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Uvid u numeričke metode</b>	<b>33</b>
5.1	Modificirana Simpsonova integracija . . . . .	34
5.2	Runge-Kutta metoda 4. reda . . . . .	36
5.3	Modificirana bilinearna interpolacija . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Rezultati numeričkog računa</b>	<b>40</b>
6.1	Rješenja rcBK jednadžbe . . . . .	40
6.2	Protonska strukturna funkcija . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>47</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b><math>SU(N)</math> algebra</b>	<b>48</b>
<b>B</b>	<b>Fazni dijagram QCD materije</b>	<b>50</b>
B.1	Supersimetrični QCD . . . . .	51
B.2	AdS/CFT dualnost . . . . .	52

<b>C Julia kodovi</b>	<b>54</b>
C.1 Rješavanje rcBK jednađbe . . . . .	54
C.2 DIS račun . . . . .	62
<b>Literatura</b>	<b>67</b>



# 1 Uvod

Moderna kozmološka opažanja daju naslutiti da barionska tvar (materija sastavljena od čestica opisanih Standardnim modelom) čini oko 5% mase vidljivog Svemira. Očito je da većina te mase otpada na stabilne protone i relativno dugožive neutrone, odnosno na nuklearnu materiju koju tvore. Usporede li se mase konstituentnih kvarkova gore ( $m_u$ ) i dolje ( $m_d$ ), tj.  $m_u = (2,2 \pm 0,5)$  MeV,  $m_d = (4,7 \pm 0,5)$  MeV, te u nekim procesima i masa stranog kvarka  $m_s = (95 \pm 9)$  MeV, s masom protona  $m_p = (938,272081 \pm 0,0000006)$  MeV [1], vidljivo je da većina mase protona (> 99%), valentnog kvarkovskog sastava  $uud$ , zapravo izranja kao posljedica bogatih interakcija jake nuklearne sile, bile one između kvarkova i gluona ili samih gluona.



Slika 1.1: Elementarne interakcije u kvantnoj kromodinamici. Feynmanova pravila se mogu naći u [2].

Analogan zaključak vrijedi i za druge hadrone, što postavlja imperativ na razumijevanje kvantne kromodinamike (QCD). Standardna formulacija [3] ju opisuje kao baždarnu teoriju polja nad  $SU(N_c = 3)$  grupom naboja boje. Polazni lagranžijan sastavljen je od dva sektora: Yang-Millsovog lagranžijana, odnosno teorije baždarnog polja (čisto gluonska teorija), te kvarkovskog sektora, u koji je uključena interakcija s baždarnim poljem kroz kovarijantnu derivaciju, koja je na uobičajen način fiksirana zahtjevom baždarne invarijantnosti teorije:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_q = -\frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \sum_f \bar{\psi}_f (i\not{D} - m_f) \psi_f, \quad (1.1)$$

gdje suma u kvarkovskom sektoru ide po svim aktivnim okusima ( $f = u, d, s, \dots$ ). Treba pripaziti da se u kovarijantnoj derivaciji koristi fundamentalna reprezentacija baždarne grupe (zadana generatorima  $T^a$ ) kojoj pripadaju kvarkovi, a u tenzoru jakosti polja bilo adjungirana (zadana strukturnim konstantama  $f^{abc}$ ) ili fundamentalna, ovisno o zapisu, iako se standardno uzima da gluoni pripadaju adjungiranoj

reprezentaciji:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s T^a A_\mu^a \quad (1.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c; \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a. \quad (1.3)$$

Valja biti svjestan da se na ovaj lagranžijan u naprednijim teorijskim razmatranjima dodaju modifikacije, bile one kontračlanovi u kontekstu renormalizacijske perturbativne teorije polja [3], ili pak virtualne čestice, tj. Faddeev-Popov duhovi, dodani kako bi se izbjegli singulariteti u formulacijama teorije preko integrala po stazama [23]. U efektivnim modelima se koristi i reparametrizacija konstante vezanja:  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ .

Kako je teorija nelinearna (u lagranžijanu (1.1) se javljaju članovi  $\propto A^4, A^2\partial A$  itd.), neperturbativno rješavanje je kompleksno i/ili ograničeno, no upravo ta nelinearnost se može shvatiti kao uzrok pojave bogate fazne strukture (ukratko izložene u dodatku B) i već spomenute fenomenologije.

Potrebno je razmisliti o eksperimentalnoj provjeri ovakvog intuitivnog uvida. U raspršenjima je tipično riječ o probama koje mjere neki kvantni sustav, pa je u ovom slučaju sustav nuklid (hadron ili jezgra), dok je proba projektil (nuklid ili lepton). Prema hijerarhiji mikroskopskih skala, koju je među prvima naslutio R. Bošković<sup>1</sup>, te probe predstavljaju slabe perturbacije sustava, jer ga razbijaju na svim skalama na kojima su jake i mjere prvu koju ne mogu razbiti. U raspršenjima je riječ o prostornim i energetske skalama, gdje fizika visokih energija opisuje procese na malenim udaljenostima. Zbog toga je prostorne skale moguće procjenjivati iz energije procesa primjenom prirodnog sustava jedinica:  $1 \text{ GeV}^{-1} = 0,197 \text{ fm}$ . Za usporedbu, radijus protona<sup>2</sup> je  $r_p \simeq 0,877 \text{ fm}$ .

Takav pogled na perturbativni račun je općeniti razlog zašto je teorija linearnog odgovora uspješna u većini opisa, a tome se može pridodati i da ona sama zacrtava svoje granice jer nelinearan odgovor označava blizinu prijelaza u drugačiji fizikalni režim. U neku ruku je to filozofija iza dubokih neelastičnih raspršenja, opisanih u drugom poglavlju. Konkretno ćemo vidjeti da je u opisu gluonske strukture protona (4.52) nelinearan član zaslužan za opis prijelaza u režim saturacije potvrđenog u

<sup>1</sup>Zahvaljujem profesoru D.K.Sunku na razgovorima u kojima je prenio ova saznanja.

<sup>2</sup>Radijus protona je trenutno aktivno područje istraživanja: dvije skupine eksperimenata su, koristeći različite metode, dobile dvije vrijednosti koje se razlikuju za 5% [25]. Navedena je vrijednost koja je bila općeprihvaćena prije 2010. godine, kad su se pojavila prva eksperimentalna odstupanja. Još ne postoji koncenzus oko toga koja je ispravna te što je teorijski uzrok te anomalije.

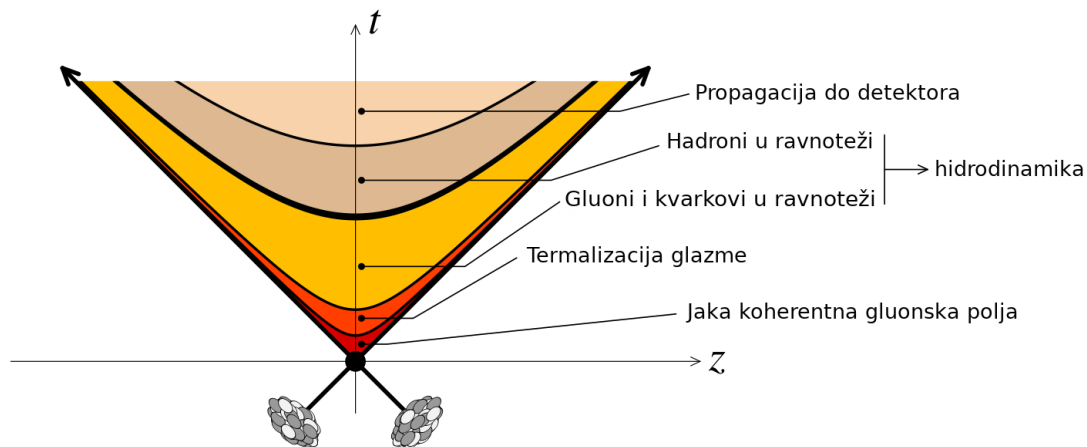
eksperimentima na modernim sudarivačima poput HERA i LHC [17] te RHICa [6]. Bitno je imati na umu da se produkcija gluona u nuklearnim sudarima odnosi na ekscitaciju gluonskog polja već prisutnog u protonu, odnosno na većoj skali u jezgrama, te njihovu emisiju u raspršenjima. Drugim riječima, ta su dva mehanizma neraskidivo vezana kroz samu mikroskopsku strukturu hadrona i pripadnih kompleksnijih kombinacija.

## 2 Opis raspršenja na hadronima i jezgrama

### 2.1 Kinematička slika

Raspršenja jezgara mogu se razdvojiti na četiri faze, od kojih su za izučavanje produkcije gluona bitne prve dvije <sup>3</sup>:

1. Početni uvjeti u  $\tau = 0$ , tj. trenutku sudara jezgri, dani su nuklearnim valnim funkcijama pri velikim brzinama i dinamikom partonskih sudara;
2. Postizanje termalne i kemijske ravnoteže u vremenu  $\tau \lesssim \tau_0$  ( $\tau_0$  je trenutak nakon kojeg je materija termalizirana), tj. dekoherencija nastale glazme (jako koreliranog gluonskog polja);
3. Pobuđena kvark-gluonska plazma postoji u vremenu  $\tau_0 \lesssim \tau \lesssim \tau_h$ , do trenutka  $\tau_h$  kad dolazi do hadronizacije, odnosno formiranja konačnih produkata raspršenja;
4. Nakon hadronizacije se čestice razvezuju i razilaze s mjesta raspršenja, te odlaze u detektore.



Slika 2.1: Prostornovremenska skica faza sudara jezgara s naznačenim domenama proučavanja na svjetlosnom stošcu, preuzeta iz [4]. Pod ravnotežom kvarkova, gluona i hadrona misli se na termičku ravnotežu nastale kvark-gluonske plazme, te hadrona nakon  $\tau_h$ .

Kako su takvi sudari uglavnom ultrarelativistički ( $\sqrt{s} \approx 200 GeV$ ), tako je, zbog Lorentzove kontrakcije jezgara duž pravca kretanja, sudare moguće analizirati u

<sup>3</sup>U ovom slučaju  $\tau$  predstavlja vlastito vrijeme konačnih produkata.

2D ravnini, što će imati reprekusije i na izbor baždarenja i modeliranje dinamike sustava, te nagovješta QCD na rešetci (IQCD) kao jednu od metoda numeričkog rješavanja problema [8]. U nastaloj glazmi (materiji koja se termalizira u kvark-gluonsku plazmu) postoje nelinearni članovi u poljima, tj. vezanje je jako, što indicira na veliku gustoću stanja u transverzalnemu prostoru. To je moguće koristiti kao argument za opis glazme primjenom klasične Yang-Millsove teorije polja [7], koja je baždarna teorija polja nad  $SU(N_c)$  grupom boja, čija je algebra dana u dodatku A.

Sudari su opisani u 4D prostorvremenu s metrikom Minkowskog, u West coast konvenciji:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , s time da je pogodno preći na koordinate svjetlosnog stošca (*light-cone* ili LC koordinate), koje su, uz konvenciju gibanja čestice duž  $z$  osi, definirane sa

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau e^{\pm Y}, \quad (2.1)$$

gdje su  $\tau$  i  $Y$  vlastito vrijeme i rapiditet, koji tvore još jednu prirodnu koordinatizaciju sustava. Veza rapiditeta i brzine čestice u laboratorijskom sustavu dana je s  $Y = \text{artanh}(v)$ , uz standardnu pokratu. Preostale dvije prostorne/impulsne koordinate, odnosno komponente polja standardno su označene latinskim indeksom:  $x^i, k^i, A^i$ , a ponegdje se podebljanim zapisom naglašava njihova transverzalnost u odnosu na LC koordinate  $\mathbf{x}_T, \mathbf{k}_T$ .

Iz ovih definicija se jednostavno izvedu identiteti korisni u daljnjim razmatranjima, napose u trećem i četvrtom poglavlju. Primjerice, za 4-vektore  $x, y$  i analogno definirane derivacije vrijedi:

$$x \cdot y = x^+ y^- + x^- y^+ - \mathbf{x}_T \cdot \mathbf{y}_T \quad (2.2)$$

$$d^4 x = dx^+ dx^- d^2 \mathbf{x}_T \quad (2.3)$$

$$\square = 2\partial^+ \partial^- - \nabla_T^2, \quad (2.4)$$

uz  $\partial^+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^-}$ ,  $\partial^- \equiv \frac{\partial}{\partial x^+}$ , te  $\nabla_T^2$  definiran kao Laplacijan po transverzalnim koordinatama, tj.  $\nabla_T^2 = -\partial_i \partial^i$ .

Takav izbor baze četverovektora ima dobra transformacijska svojstva na longitudinalne Lorentzove potiske brzine  $\beta$  (duž  $z$  smjera, odnosno po pravcu gibanja jezgri). Transverzalni impuls je invarijantan na potisak, dok se rapiditet transformira aditivno, tj.  $Y \rightarrow Y + \text{artanh} \beta$ , što znači da su izrazi oblika  $(Y_2 - Y_1)$ , a time i diferencijalni udarni presjeci  $d\sigma/dY$  invarijantni na potisak. Također, zbog ultra-

relativističke prirode sudara rapiditet za izlazne snopove čestica je približno jednak pseudorapiditetu  $Y \approx \eta = -\ln(\tan \frac{\theta}{2})$ , koji se izravno mjeri u detektoru [2].

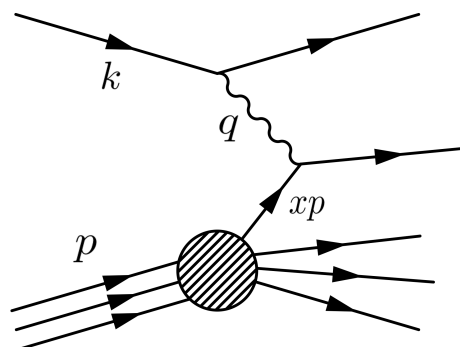
## 2.2 Duboko neelastično raspršenje

Najjednostavniji primjer raspršenja na hadronu je Deep Inelastic Scattering (DIS), gdje je meta hadron (obično proton), a projektil lepton (najčešće elektron) koji s metom interagira elektromagnetski, izmjenom fotona negativne virtualnosti  $q_\mu q^\mu = -Q^2 < 0$ . DIS je bitna klasa raspršenja jer, unatoč jednostavnosti spram drugih hadronskih/nuklearnih raspršenja, i dalje pruža uvid u partonsku strukturu hadrona. Osim virtualnosti fotona, relevantni parametri su i:

- Bjorkenov  $x$ , Lorentz invarijantan skalar koji u prvom redu računa smetnje opisuje frakciju impulsa protona koju posjeduje parton s kojim interagira virtualni foton ili kompliciranija struktura (opisano u poglavlju 4.3). Sama veličina je definirana s

$$x = \frac{Q^2}{2p_\mu q^\mu}, \quad (2.5)$$

- Mandelstahmova varijabla  $s$ , odnosno kvadrat ukupne energije u sustavu CM, i
- Neelastičnost  $y$ , također Lorentz invarijantan skalar, omjer energije fotona naspram ulazne energije elektrona u sustavu mirovanja hadrona. Kod notacije treba paziti da se ova veličina ne zamijeni s rapiditetom, označenim velikim  $Y$ .



Slika 2.2: Dijagram dubokog neelastičnog raspršenja u vodećem redu računa smetnje. Lepton služi kao izvor virtualnog fotona ( $q^2 < 0$ ), koji je proba za protonsku metu. Osjenčano područje na slici predstavlja doprinose viših redova prije interakcije s fotonom.

Korisno je iskazati relacije među DIS parametrima<sup>4</sup>. Impuls interagirajućeg partona je, uz aproksimaciju kolinearnog gibanja s protonom u ultrarelativističkoj granici (URL), tj. za  $E \gg m_p$ , dan s

$$p_{part.}^\mu = xp^\mu = xE(1, 0, 0, -1). \quad (2.6)$$

Promotrimo situaciju gdje se na partonu umjesto leptonske probe raspršuje neki drugi parton, npr. pri sudarima hadrona ili jezgara. Koristeći alternativnu definiciju rapiditeta, moguće je dati vezu zbroja njihovih rapiditeta i Bjorkenovih  $x$ :

$$Y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{E(x_1 + x_2 - x_1 + x_2)}{E(x_1 + x_2 + x_1 - x_2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_2}{x_1}, \quad (2.7)$$

što sugerira da se rapiditet pojedinog partona u odnosu na laboratorijski sustav može zapisati kao  $Y = \ln \frac{1}{x}$ .

Kako bi teorija bila fizikalna, mora biti u mogućnosti opisati eksperimentalno mjerive veličine, poput diferencijalnog udarnog presjeka. Općeniti Lorentz-invarijantan izraz za udarni presjek dubokog neelastičnog raspršenja  $ep \rightarrow eX$ , koji čuva paritet i događa se izmjenom virtualnog fotona, glasi

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ (1-y) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right], \quad (2.8)$$

gdje su  $F_1(x, Q^2)$  i  $F_2(x, Q^2)$  protonske strukturne funkcije, koje u osnovi sadržavaju neperturbativni doprinos kromodinamičkog vezanja protona, te se kao takve uglavnom mjere u eksperimentima. Ovdje se  $\alpha \approx 1/137$  odnosi na QED konstantu vezanja. U režimu Bjorkenovog skaliranja ( $x \approx 0.25$ ) su ove dvije strukturne funkcije proporcionalne jedna drugoj zbog iščezavajuće ovisnosti o impulsu, tj.  $F_{1,2}(x, Q) \rightarrow F_{1,2}(x)$ , odnosno vrijedi Callan-Gross relacija:

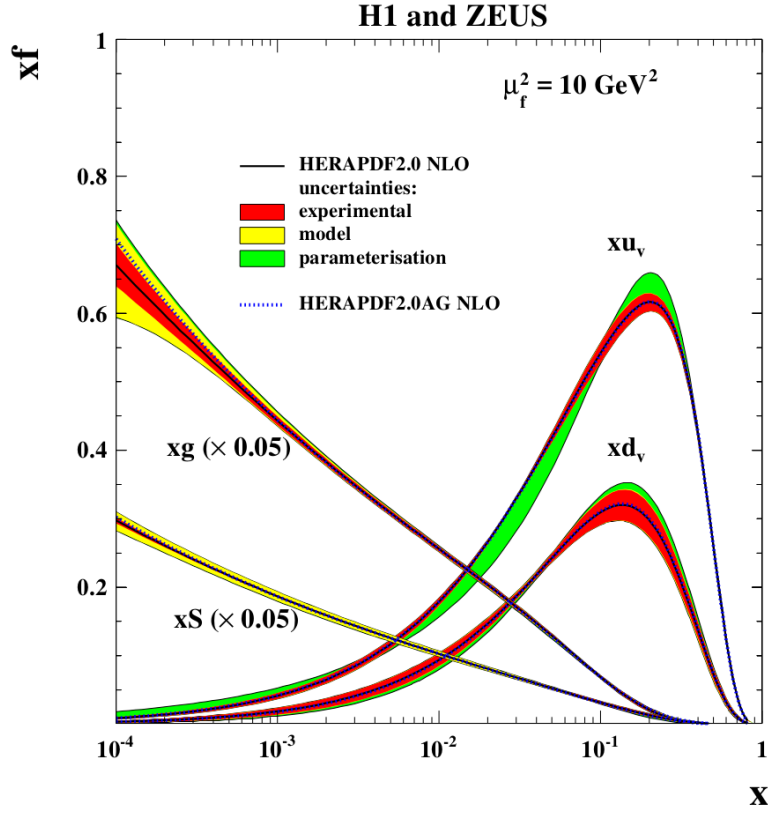
$$F_2(x) = 2xF_1(x). \quad (2.9)$$

Povijesno su ti izrazi bitni jer su na Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) eksperimentima šezdesetih godina prošlog stoljeća ukazali na mogućnost raspršenja

---

<sup>4</sup>Izvod je heurističke naravi, ali se isti slijed argumenata koristi pri objašnjenju kinematike Drell-Yan raspršenja [2]. Kasnije u radu, u analizi gluonskog zakočnog zračenja, veza rapiditeta i Bjorkenovog  $x$  definira se kroz druga razmatranja.

s točkastih izvora u protonu, što je poslužilo i kao glavna potvrda Gell-Mannovog kvarkovskog modela kao konkretne realizacije partonske strukture protona [2].



Slika 2.3: Podaci sa HERA sudarivača o  $x$  evoluciji partonskih distribucijskih funkcija gluona ( $xg$ ), kvarkova mora ( $xS$ ) i valentnih kvarkova ( $xu_v$  i  $xd_v$ ) za  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ . Distribucije gluona i kvarkovskog mora skalirane su za faktor 0.05. Slika iz [5].

Kvarkovi unutar protona međusobno interagiraju izmjenom virtualnih gluona. Takva dinamika rezultira distribucijom kvarkovskih (ili gluonskih) impulsa unutar protona koji su opisani partonskim distribucijskim funkcijama (PDF)<sup>5</sup>. Kada ne bi bilo gluonskih interakcija, distribucije frakcija impulsa za tri valentna kvarka bile bi proporcionalne Diracovoj distribuciji:  $P(x) \propto \delta(x - 1/3)$ , no to nije slučaj, što se vidi na slici 2.3. Veza strukturne funkcije i PDFova kvarkova [5] dana je s

$$F_2(x, Q^2) = \sum_f e_{q_f}^2 (xq_f(x, Q^2) + x\bar{q}_f(x, Q^2)), \quad (2.10)$$

gdje suma ide po aktivnim okusima, a  $e_{q_f}$  je (frakcionalni) električni naboj promatranog kvarka.

<sup>5</sup>Valja imati na umu da među kvarkovima postoje i elektromagnetske interakcije, budući da isti nose i električni naboj. Međutim, te su interakcije u promatranom režimu potisnute u odnosu na kromodinamičke, što je očito iz usporedbi konstanti vezanja.



Iz grafa je vidljivo da na većim vrijednostima rapiditeta, odnosno manjem Bjorkenovom  $x$ , u strukturi protona uvelike dominiraju doprinosi gluona i kvarkovskog mora. Intuitivna slika je ta da pri većim energijama sudara partoni (kvarkovi i gluoni) proizvode gluone u vidu zakočnog zračenja, što funkcionira do granice označene saturacijskim impulsom  $Q_s$  gdje vjerojatnost rekombinacije gluona postane istog reda veličine kao vjerojatnost emisije, o čemu će više biti riječi u kasnijim poglavljima. Doprinos kvarkovskog mora je u odnosu na gluonski doprinos potisnut za faktor  $1/\alpha_s$  jer se isti u protonu uglavnom generiraju procesom  $g \rightarrow q\bar{q}$ .

Iz grafa je moguće zaključiti i da argumenti koji vrijede za raspršenja na protonu u većoj mjeri vrijede i u raspršenjima teških jezgara, upravo zato što se pri velikim rapiditetima povećava doprinos gluona i kvarkovskog mora spram valentnih kvarkova. Drugim riječima, za neku probu je nadolazeća jezgra u URL režimu, do razumne mjere, aproksimirana gluonskim zidom. To je opažanje nagovještaj teorije staklastog kondenzata boje, opisane u četvrtom poglavlju. Kvantitativno gledano, gluonska PDF je pojačana u konačnim jezgrama za faktor  $xG_A(x) \propto A^{1/3}xG(x)$ , pa je npr. broj gluona u jezgrama zlata otprilike šest puta veći nego u protonu. [9]

## 3 Raspršenja u klasičnoj Yang-Millsovoj teoriji

### 3.1 Postavke modela

Klasično gluonsko polje može se dobiti rješavanjem sustava jednačbi

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (3.1)$$

koje su zapravo kromodinamički ekvivalent Maxwellovih jednačbi iz klasične elektrodinamike.

Opravdanje klasičnog pristupa, osim u argumentu jakih polja i velike gustoće faznog prostora, leži *a posteriori* u slaganju s eksperimentalnim podacima i simulacijama na rešetci, vidljivo u [6] i [7]. U najmanju ruku je pristup koristan pri promatranju fenomenologije samih procesa te procjene vremenskih skala i drugih fizikalnih parametara sudara.

U [7] i [8] pokazano je da je koristan parametar za opis problema visokorapiditetna gustoća gluona  $\mu$ , dimenzije energije, te konstanta vezanja  $g$ , za koju je ovdje zbog jednostavnosti i ograničenog spektra proučavanja uzeto da je fiksna i iznosi  $g = 2$ . Iz hidrodinamičkog McLerran-Venugopalan modela [6] poznato je da je izvore polja u jezgri moguće tretirati kao nasumično raspoređene po Gaussovoj distribuciji, s korelacijskom funkcijom

$$\langle \rho^a(\mathbf{x}_T) \rho^b(\mathbf{y}_T) \rangle = g^2 \mu^2 \delta^{ab} \delta^2(\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T), \quad (3.2)$$

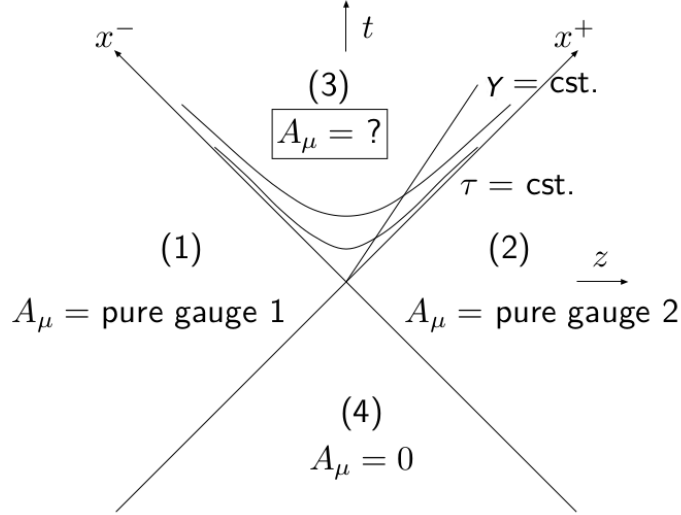
što direktno slijedi iz definicije uprosječenja operatora po distribucijama, dane funkcionalnim integralom preko gustoća [9]:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int [D\rho] W[\rho] \mathcal{O}[\rho], \quad (3.3)$$

uz distribuciju  $W[\rho]$  i funkcionalnu integraciju po  $[D\rho]$  definirane s

$$W[\rho] = \exp\left[-\frac{1}{2\mu^2} \int d^2\mathbf{x}_T \rho^2(\mathbf{x}_T)\right], \quad (3.4)$$

$$\int G[\rho][D\rho] = \int \dots \int G(\rho_1, \rho_2, \dots) \prod_n d\rho_n. \quad (3.5)$$



Slika 3.1: Svjetlosni stožac s označenim domenama i baždarnim poljima. Rubni uvjeti su postavljeni tako da je traženo polje  $A_\mu$  u budućem svjetlosnom konusu (zona 3) glatko povezano s čisto baždarnim poljima u zonama 1 i 2 (kauzalno nepovezana područja). Skica preuzeta iz [7].

Kako se proučavaju sudari teških jezgara u ultrarelativističkoj granici (URL) srednjeg rapiditeta (dakle, dovoljno visoke energije da opravda URL aproksimaciju i dovoljno niske energije da konstanta vezanja  $g$  ne prelazi u perturbativni režim), prirodno je definirati struju kao zbroj doprinosa dviju jezgri (izvora polja  $\rho_{(m)}$ ) koje su lokalizirane na svjetlosnom stošcu:

$$J^\mu = \delta^{\mu+} \rho_{(1)}(\mathbf{x}_T) \delta(x^-) + \delta^{\mu-} \rho_{(2)}(\mathbf{x}_T) \delta(x^+). \quad (3.6)$$

Takav izbor struje kao zbroj doprinosa delta funkcija kasnije će voditi na invarijantnost početnih uvjeta na Lorentzov potisak (boost). To će kao posljedicu nositi mogućnost razdvajanja gluonskog polja na nezavisno vektorsko polje s transverzalnim komponentama i pridruženo skalarno polje.

Imajući u vidu sliku (3.1), jednostavno je zaključiti da zona 4 ( $x^+ < 0, x^- < 0$ ) nije kauzalno povezana ni s jednom od jezgri, pa je ondje očito rješenje  $A_\mu = 0$ . Zone 1 ( $x^+ < 0, x^- > 0$ ) i 2 ( $x^+ > 0, x^- < 0$ ) su kauzalno povezane samo s jednom od jezgri, pa je ondje moguće kao rješenje uvesti ansatz čisto baždarnog transverzalnog polja, tj. polja koje je baždarnim transformacijama povezano s nulom [6]:

$$A_{(m)}^i = -\frac{i}{g} e^{i\Lambda(m)} \partial^i e^{-i\Lambda(m)}, \quad (3.7)$$

gdje je  $\Lambda_{(m)} = \Lambda_{(m)}^a T^a$  rješenje Poissonove jednadžbe u transverzalnoj ravnini:

$$\nabla_T^2 \Lambda_{(m)}(\mathbf{x}_T) = -g\rho_{(m)}(\mathbf{x}_T). \quad (3.8)$$

$\Lambda_{(m)}$  se može promotriti i kao parametrizacija kovarijantnog baždarnog polja jezgri; vrijedi  $gA^+ = \delta(x^-)\Lambda_{(1)}$ ,  $gA^- = \delta(x^+)\Lambda_{(2)}$  [7]. U impulsnom prostoru Poissonova jednadžba postaje  $\mathbf{k}_T^2 \Lambda(\mathbf{k}_T) = g\rho(\mathbf{k}_T)$ . Uočljiv je problem s nultim modom (IR divergencijom), koji se otklanja zahtjevom bojne neutralnosti sustava:

$$\int d^2\mathbf{x}_T \rho(\mathbf{x}_T) = 0, \quad (3.9)$$

odnosno u impulsnom prostoru  $\rho(\mathbf{k}_T = 0) = 0 = \Lambda(\mathbf{k}_T = 0)$ , što zbog konačnosti jezgre (radijusa  $R_A$ ) implicira da je prvi neiščezavajući doprinos na  $|\mathbf{k}_T| \propto 1/R_A$ .

Korelator (3.2) u impulsnom prostoru glasi

$$\langle \rho(\mathbf{k}_T) \rho(\mathbf{p}_T) \rangle \propto g^2 \mu^2 \delta^2(\mathbf{k}_T + \mathbf{p}_T), \quad (3.10)$$

što uz  $\delta^2(\mathbf{k}_T) \propto R_A^2$  daje ovisnost  $\Lambda$  o bezdimenzionalnom faktoru:  $\Lambda(\mathbf{x}_T) \propto \Lambda(\mathbf{k}_T)/R_A^2 \propto g^2 \mu R_A$ .

Takav izbor omogućuje definiranje početnih uvjeta za polje na granici ciljane zone (zone 3, tj.  $\tau = 0$  za  $x^\pm > 0$ ) kao zbroj čisto baždarnih polja iz kauzalno nepovezanih zona 1 i 2 [7]:

$$A^i|_{\tau=0} = A_{(1)}^i + A_{(2)}^i, \quad (3.11)$$

$$A^Y|_{\tau=0} = \frac{ig}{2} [A_{(1)}^i, A_{(2)}^i]. \quad (3.12)$$

Za fiksiranje preostale dvije komponente polja izabrano je temporalno Schwingerovo baždarenje [6]:  $A_\tau = (x^+ A^- + x^- A^+) \tau \equiv 0$ . Takav izbor povlači i raspis  $A^Y = x^+ A^- - x^- A^+$ .

Cilj izučavanja dinamike ovog sustava je pronaći izraze za korelacijske funkcije polja, koje se prirodno pojavljuju u računu opservabli.

### 3.2 Jednadžbe baždarnog polja

Kako je sustav (3.1) s početnim uvjetima (3.11) i (3.12) invarijantan na potisak u longitudinalnom smjeru, za očekivati je da je i rješenje invarijantno na potisak, odnosno da ne ovisi o rapiditetu  $Y$ . To znači da i baždarno transformirana polja ne smiju ovisiti o rapiditetu, što je moguće postići tretiranjem rapiditetne komponente baždarnog polja (tj.  $A_Y$ ) kao pridruženog skalarnog polja, odnosno definiranjem  $A_Y \equiv \phi$ . Efektivno, problemu se dimenzionalnost s (3+1) smanjuje na (2+1).

Yang-Millsova sekcija lagranžijana (1.1) se stoga unutar akcije može zapisati u obliku

$$S = \int dY d^2\mathbf{x}_T d\tau \tau \text{Tr} \left( \dot{A}_i \dot{A}_i - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{\tau^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{\tau^2} [D_i, \phi] [D_i, \phi] \right). \quad (3.13)$$

Vlastito vrijeme ispred traga i u faktorima uz polja pojavljuje se kao posljedica koordinatne transformacije, tj. Jacobijana i faktora koji dolaze iz spuštanja indeksa članova djelovanja  $S$  reparametriziranom metrikom, koja u koordinatnom sustavu vlastitog vremena i rapiditeta glasi  $ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 dY^2 - d\mathbf{x}_T^2$ . Uz primjenu iste moguće je u jednom potezu naći i vezu među poljima u različitim koordinatnim sustavima koristeći poznato lančano pravilo. S druge strane, takva direktna vremenska ovisnost lagranžijana ukazuje na temporalno širenje zone sudara jezgri, odnosno nastale glazme [7].

Definiranjem kanonski konjugiranih impulsa, tj. kromoelektričnih polja (koji su kromodinamički analogoni električnog polja iz klasične elektrodinamike)

$$E^{ia} \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{A}_i^a} = \tau \dot{A}_i^a = -\tau \dot{A}^{ai} \quad (3.14)$$

$$\pi^a \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}^a} = \frac{1}{\tau} \dot{\phi}^a \quad (3.15)$$

se Legendreovom transformacijom lagranžijana dobije hamiltonijan, odnosno njegova gustoća:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2 \text{Tr}(E^i \dot{A}_i + \pi \dot{\phi}) - \mathcal{L} \\ &= \text{Tr} \left( \frac{1}{\tau} E^i E^i + \frac{\tau}{2} F_{ij} F_{ij} + \tau \pi^2 + \frac{1}{\tau} [D_i, \phi] [D_i, \phi] \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Prvi i treći član predstavljaju kinetičke stupnjeve slobode polja, slično kao u klasičnoj

elektrodinamici, dok drugi i četvrti član predstavljaju energiju uskladištenu u analogonu magnetskog polja (kromomagnetsko polje), koje u ovom slučaju ima jednu okomitu komponentu.

Iz hamiltonijana je na uobičajen način moguće dobiti jednadžbe gibanja:

$$\dot{A}_i = \frac{1}{\tau} E^i \quad (3.17)$$

$$\dot{\phi} = \tau \pi \quad (3.18)$$

$$\dot{E}^i = \tau [D_k, F_{ki}] - \frac{ig}{\tau} [\phi, [D_i, \phi]] \quad (3.19)$$

$$\dot{\pi} = \frac{1}{\tau} [D_i, [D_i, \phi]]. \quad (3.20)$$

Početni se uvjeti jednostavno preslikaju iz poznatih informacija: kako je  $E^i = \tau \dot{A}^i$ , slijedi  $E^i(\tau = 0, \mathbf{x}_T) = 0$ . Nadalje, vrijedi  $\phi = A_Y = -\tau^2 A^Y$ , pa je  $\phi(\tau = 0, \mathbf{x}_T) = 0$ . Jednadžba (3.11) je direktan uvjet za  $A_i(\tau = 0)$ , a iz (3.12), kako je  $\pi = \dot{\phi}/\tau = -2A^Y - \tau \dot{A}^Y$ , slijedi  $\pi(\tau = 0, \mathbf{x}_T) = -ig [A_{(1)}^i, A_{(2)}^i]$ .

### 3.3 *Produkcija gluona u granici slabog polja*

Slučaj slabog vezanja gluona moguće je riješiti aproksimativno te dobiveni rezultat usporediti s numeričkim rješenjem. Za početak je, koristeći bezmasenu disperzijsku relaciju za gluone  $\omega(\mathbf{k}_T) = |\mathbf{k}_T|$ , moguće zapisati hamiltonijan kao integral preko impulsnih modova:

$$H = \int d^2 \mathbf{k}_T n(\mathbf{k}_T) |\mathbf{k}_T|, \quad (3.21)$$

gdje je definiran diferencijalni multiplicitet gluona  $n(\mathbf{k}_T)$  kao mjera raspodjele energije po modovima.

U slučaju slabog vezanja moguće je pretpostaviti ekvipartciju energije analognu onoj u klasičnoj mehanici, tj. ravnomjernu raspodjelu energije u impulsne i koordinatne stupnjeve slobode. To povlači da se, u smislu vremenskog usrednjenja (što je potencirano korištenjem  $\approx$  umjesto jednakosti), hamiltonijan (3.16) može zapisati kao

$$\begin{aligned} H &\approx 2 \int d^2 \mathbf{x}_T \text{Tr} \left[ \frac{1}{\tau} E^i E^i + \tau \pi^2 \right] \\ &= 2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_T}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[ \frac{1}{\tau} E^i(\mathbf{k}_T) E^i(-\mathbf{k}_T) + \tau \pi(\mathbf{k}_T) \pi(-\mathbf{k}_T) \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdje se suprotni predznaci u argumentima polja pojavljuju zbog svojstava Fourierove transformacije produkata. Usporedbom ta dva zapisa proizlazi izraz za multiplicitet:

$$n(\mathbf{k}_T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{|\mathbf{k}_T|} \left[ \frac{1}{\tau} E^i(\mathbf{k}_T) E^i(-\mathbf{k}_T) + \tau \pi(\mathbf{k}_T) \pi(-\mathbf{k}_T) \right]. \quad (3.23)$$

Za razliku od energije, ovakav multiplicitet nije baždarno invarijantna veličina, pa je potrebno fiksirati baždarenje u ravnini na Coulombovo, tj.  $\partial_i A_i = 0$ .

Razvojem početnih uvjeta do drugog reda po  $\Lambda_{(m)}$  koristeći (3.7) i Coulombovo baždarenje dobije se

$$A_i(0, \mathbf{x}_T) = \frac{i}{2g} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla_T^2} \right) \left( [\Lambda_{(1)}, \partial_j \Lambda_{(2)}] + [\Lambda_{(2)}, \partial_j \Lambda_{(1)}] \right), \quad (3.24)$$

$$\pi(0, \mathbf{x}_T) = \frac{i}{g} [\partial_i \Lambda_{(1)}, \partial_i \Lambda_{(2)}]. \quad (3.25)$$

Taj korak omogućuje kasnije korištenje korelatora (3.2) i vezanih zaključaka o dimenzionalnim faktorima u  $\Lambda$  u računu očekivane vrijednosti multipliciteta gluona.

Koristeći navedene rezultate se linearizacijom sustava (3.17)-(3.20) dobiju jednadžbe gibanja za polja u impulsnom prostoru:

$$\dot{E}^i = \partial_\tau(\tau \dot{A}_i) = \tau \nabla_T^2 A_i \implies (\tau^2 \partial_\tau^2 + \tau \partial_\tau + \tau^2 \mathbf{k}_T^2) A_i(\tau, \mathbf{k}_T) = 0, \quad (3.26)$$

$$\dot{\pi} = \partial_\tau \left( \frac{1}{\tau} \dot{\phi} \right) = \frac{1}{\tau} \nabla_T^2 \phi \implies (\tau^2 \partial_\tau^2 - \tau \partial_\tau + \tau^2 \mathbf{k}_T^2) \phi(\tau, \mathbf{k}_T) = 0. \quad (3.27)$$

Rješenja tih jednadžbi su Besselove funkcije:

$$A_i(\tau, \mathbf{k}_T) = A_i(0, \mathbf{k}_T) J_0(|\mathbf{k}_T| \tau), \quad (3.28)$$

$$\phi(\tau, \mathbf{k}_T) = \frac{\tau}{|\mathbf{k}_T|} \pi(0, \mathbf{k}_T) J_1(|\mathbf{k}_T| \tau). \quad (3.29)$$

Uz asimptotski razvoj Besselovih funkcija i uvrštavanjem tih rješenja u (3.23) dobije se veza očekivane vrijednosti multipliciteta i korelacijskih funkcija polja u početnom trenutku:

$$\begin{aligned} \langle n(\tau, \mathbf{k}_T) \rangle = & \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{\pi \mathbf{k}_T^2} \left( \mathbf{k}_T^2 \sin^2(|\mathbf{k}_T| \tau - \pi/4) \langle A_i^a(0, \mathbf{k}_T) A_i^a(0, -\mathbf{k}_T) \rangle + \right. \\ & \left. + \sin^2(|\mathbf{k}_T| \tau - 3\pi/4) \langle \pi^a(0, \mathbf{k}_T) \pi^a(0, -\mathbf{k}_T) \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Oscilatorne funkcije koje se pojavljuju mogu se zamijeniti njihovim usrednjenjem

po vremenu, tj. s  $1/2$ , što je moguće usporediti s fizikalnim argumentom izmjene (3.16) u (3.22) kao efektivniju funkciju izvodnicu [7]. Pri eksplicitnom računu korelatora pojavljuju se i divergentni integrali čiji se doprinosi dijelom dokrate, što vodi na IR divergentan rezultat:

$$\langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{(2\pi)^2} \frac{N_c(N_c^2 - 1)g^6\mu^4}{\mathbf{k}_T^2} \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{p}_T}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2 (\mathbf{k}_T - \mathbf{p}_T)^2}. \quad (3.31)$$

Nad integralom se može provesti Pauli-Villars regularizacija (nakon Feynmanove parametrizacije) [3] uz masu  $m \propto g^2\mu$  koja označava granicu perturbativnog režima [7]. To ne uklanja divergenciju, ali daje zatvorenu formu <sup>6</sup>:

$$\langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\pi} \frac{N_c(N_c^2 - 1)g^6\mu^4}{\mathbf{k}_T^4} \ln \frac{\mathbf{k}_T^2}{m^2}, \quad (3.32)$$

što sugerira da se multiplicitet može zapisati u obliku

$$\langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{g^2} f(\mathbf{k}_T/g^2\mu). \quad (3.33)$$

U načelu se tom metodom može dobiti ukupni multiplicitet stanja (po jedinici rapiditeta):

$$\frac{dN}{dY} = \int d^2\mathbf{k}_T \langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{g^2} (g^2\mu)^2 f_N \quad (3.34)$$

uz

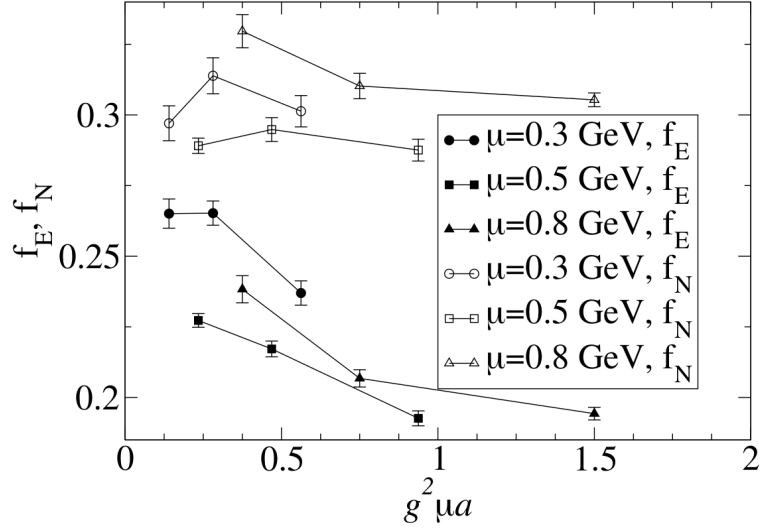
$$f_N \equiv \int d^2 \left( \frac{\mathbf{k}_T}{g^2\mu} \right) f \left( \frac{\mathbf{k}_T}{g^2\mu} \right), \quad (3.35)$$

što je konstanta za koju se sa slike 3.2 vidi da je konačna. Prijašnjom linearizacijom jednadžbi gibanja problem je zapravo riješen do drugog reda računa smetnje, odnosno do klasičnog ekvivalenta nivoa jedne petlje. Iz toga se može naslutiti da se divergentni doprinosi iz svih redova računa smetnje međusobno dokinu. Na sličan način se može provesti račun za energiju po jedinici rapiditeta:

$$\frac{dE_T}{dY} = \int d^2\mathbf{k}_T \langle n(\mathbf{k}_T) \rangle |\mathbf{k}_T| = \frac{\pi R_A^2}{g^2} (g^2\mu)^3 f_E. \quad (3.36)$$

<sup>6</sup>U (3.32) se IR divergencija  $1/\mathbf{k}_T^4$  može shvatiti kao artefakt rješavanja klasičnih jednadžbi polja, odnosno kromodinamička verzija Rayleigh-Jeans divergencije koja se u klasičnoj elektrodinamici javlja u UV dijelu spektra kao faktor  $\mathbf{k}_T^4$  u izrazu za gustoću energije. Takvi nefizikalni rezultati su indicacija da u tim područjima dominiraju drugačiji efekti: u elektrodinamici je riječ o granici primjenjivosti ekviparticijskog teorema za visokoenergetske modove koje sustav ne može pobuditi, a u kromodinamici pri nižim energijama na snagu stupaju saturacijski efekti: zatočenje kvarkova u hadrone i saturacija gluonskog spektra, o čemu će kasnije biti riječ.





Slika 3.2: Ovisnost  $f_E$  i  $f_N$  o veličini ćelije  $a$  u IQCD simulaciji. Kontinuirani slučaj  $a \rightarrow 0$  se dobije ekstrapolacijom grafova do osi ordinate. Slika iz [6].

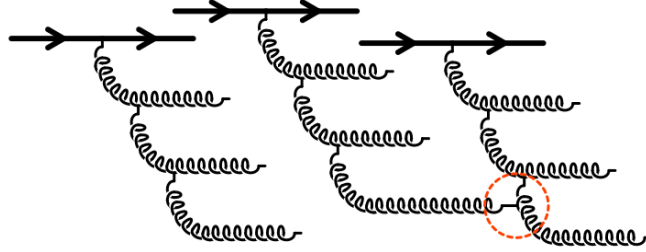
Jedan od glavnih nedostataka ovog klasičnog pristupa je fiksna vrijednost konstante vezanja, tj. potrebno je uključiti poznati renormalizacijski rezultat da je  $\alpha_s = \alpha_s(p^2)$ . To se može riješiti npr. unošenjem Jalilian-Iancu-McLerran-Weigert-Leonidov-Kovner (JIMWLK) renormalizacijskih jednadžbi u teoriju, što je opisano u [5] i [7].

Dodatan problem predstavlja Rayleigh-Jeans divergencija u IR dijelu spektra koja je posljedica klasičnosti teorije. Ista je ovdje tretirana primjedbom da je najniži neiščezavajući gluonski mod geometrijski određen radijusom jezgre, tj.  $k_T \propto 1/R_A$ , no u širem je smislu vezana na trenutno neriješen problem tzv. Yang-Millsovog masenog procjepa, jedan od sedam problema koji je Clay matematički institut postavio uz bok Riemannovoj hipotezi, P=NP problemu, egzistenciji i glatkoći rješenja Navier-Stokesove jednadžbe i drugim hipotezama čije bi rješavanje značajno unaprijedilo pripadna područja. Između ostalog, rješenje Yang-Millsovog problema za  $SU(3)$  grupu boja bila bi snažna indikacija da postoje vezana stanja dva gluona koja su bojni singlet velike mase, tzv. glueballs. [2]

## 4 Efektivna teorija staklastog kondenzata boje (CGC)

### 4.1 Evolucija partona pri visokim energijama

Kao što je već rečeno, struktura hadrona ovisi o energijskoj skali probe koja interagira sa sustavom. U režimu perturbativnog QCDa su emisija i apsorpcija gluonskog zakočnog zračenja (bilo iz valentnih kvarkova ili drugih gluona) dominantni procesi (slika 4.1).



Slika 4.1: Kaskada gluonskog *bremsstrahlung*a (zakočnog zračenja) iz valentnih kvarkova kao primjer dominantnog perturbativnog procesa u protonu. Zaokružen je primjer gluonske apsorpcije, odnosno rekombinacije.

Emitirani mekani gluoni gibaju se kolinearno s partonom emiterom [9] te je u vodećem redu po  $\alpha_s$  diferencijalna vjerojatnost njihove emisije pri malom  $x$  dana s

$$dP_{Br} = \frac{\alpha_s C_R}{\pi^2} \frac{d^2 k_T}{k_T^2} \frac{dx}{x}, \quad (4.1)$$

gdje je  $C_R$  vrijednost Casimirove invarijante u  $SU(N_c)$  za reprezentaciju emitera zračenja: jednaka je  $N_c$  za gluone i  $(N_c^2 - 1)/2N_c$  za kvarkove. Formula pokazuje kolinearni ( $k_T \rightarrow 0$ ) i mekani ( $x \rightarrow 0$ ) singularitet emisije gluona, koji se ispoljava u logaritamskom pojačanju emisije gluona za male vrijednosti  $k_T$  i  $x$ .

Iz ovog slijedi da je diferencijalni multiplicitet gluona u prvoj fazi kaskade dan sa

$$x \frac{dN_g}{dx}(Q^2) = \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \int_{\Lambda_{QCD}^2}^{Q^2} \frac{d^2 k_T}{k_T^2} = \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right), \quad (4.2)$$

gdje je kao gornja granica integracije uzet impuls vanjske probe koja interagira s gluonskim poljem, dok  $\Lambda_{QCD}$  predstavlja IR granicu perturbativnog režima, odnosno skalu ispod koje vlada fizika zatočenja.

U slučaju kaskadne emisije gluona, kao na slici 4.1, svaka iduća emisija potisnuta je za dodatan faktor  $\alpha_s$ , no izraz (4.1) nagovješta da za dovoljno mali  $x$  korekcije za

veliki broj emisija postaju velike. Drugim riječima, za kaskadu  $n$  gluona, poredanih po  $x$ , faktor uz posljednju emisiju je reda veličine

$$\alpha_s^n \int_x^1 \frac{dx_n}{x} \int_{x_n}^1 \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \dots \int_{x_2}^1 \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1}{n!} \left( \alpha_s \ln \frac{1}{x} \right)^n. \quad (4.3)$$

Kad je  $\alpha_s \ln 1/x \gtrsim 1$ , onda se kaskadne emisije gluona ne mogu interpretirati kao korekcije, već se moraju sumirati u eksponencijalnu funkciju kako bi se dobio potpuniji oblik izraza za diferencijalni multiplicitet:

$$\frac{d^2 N_g}{dY dk_T^2} \sim \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \frac{1}{k_T^2} e^{\omega \alpha_s Y}, \quad Y \equiv \ln \frac{1}{x}, \quad (4.4)$$

gdje je  $\omega$  broj reda veličine jedinice kojeg je potrebno odrediti drugim metodama. Ovdje se može primjetiti da je eksponencijalna ovisnost o  $Y$  zapravo potencijaska ovisnost o Bjorkenovom  $x$ :

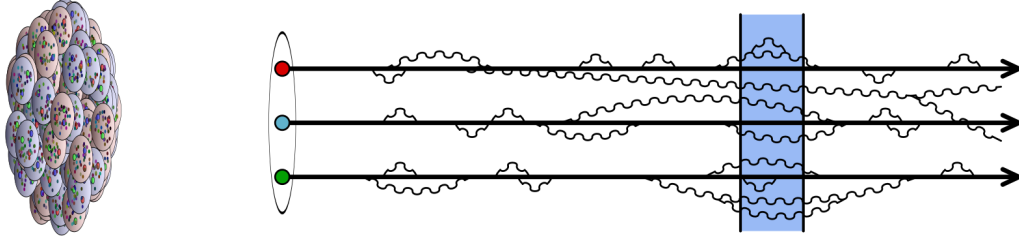
$$\frac{d^2 N_g}{dY dk_T^2} \propto e^{\omega \alpha_s Y} = \frac{1}{x^{\omega \alpha_s}}, \quad (4.5)$$

odnosno predviđa da broj gluona beskonačno raste za  $x \rightarrow 0$ , što je nefizikalna situacija, iako za srednji raspon vrijednosti  $x$  dobro opisuje ponašanje gluonskog PDFa na slici 2.3. Upravo nefizikalnost tog rezultata daje nagovještaj mehanizma gluonske saturacije.

Potpuniji tretman zahtjeva pažljivu analizu kinematike kaskadnih dijagrama, odnosno uključuje virtualne korekcije, između ostalog i kliznu konstantu vezanja. Rezultat takvog razmatranja je Balitski-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) jednadžba, koja opisuje evoluciju neintegrirane distribucije gluona po rapiditetu. Formulu je moguće izvesti na više načina, a jedan je prezentiran u [4]. Rješenje te jednadžbe, također kroz resumaciju  $(\alpha_s Y)^n$  doprinosa u svim redovima, potvrđuje dobivenu eksponencijalnu ovisnost, uz dodatak da eksponent također ovisi o transverzalnom impulsu  $k_T$ , te uz izmjenjen  $k_T^{-2}$  spektar emitiranih gluona [5].

Bitno svojstvo BFKL hijerarhije po Bjorkenovom  $x$  je koherencija u vremenu. Izraženo u LC koordinatama, prosječno vrijeme života partona je  $\Delta x^+ \sim k^+/k_T^2 \propto x$  pa su gluoni na kraju kaskade s manjim  $x$  kraćeg vijeka od njihovih progenitora, što ima i fizikalnog smisla: za očekivati je da se emitirani gluoni mogu reapsorbirati, pa je vremenska hijerarhija nužna. Drugim riječima, gluoni pri vrhu kaskade mogu se

promatrati kao *zamrznuti bojom nabijeni izvori* gluona s malim  $x$ , koji preuzimaju ulogu *dinamičkih polja boje*. JIMWLK jednačba, opisana u [5], zaslužna je za nezavisnu evoluciju tih dviju skupina gluonskih stupnjeva slobode, kao i za određivanje granice među njima i evolucije iste s kinematičkim parametrima.



Slika 4.2: Shematski prikaz interakcija u ultrarelativističkom protonu. Zbog vremenske dilatacije i posebnosti partonskih distribucijskih funkcija (slika 2.3) vanjska proba doživljava proton kao gluonski zid (osjenčana zona). Zbog jednostavnosti nisu prikazani procesi s virtualnim kvark-antikvark parovima, iako i oni doprinose PDFovima u 2.3.

Upravo je ta podjela gluonske skale obzirom na  $x$  jedna od osnovnih motivacija za efektivnu teoriju *Color-Glass kondenzata* (CGC). Glass u imenu odnosi se na svojstvo u analogiji s amorfnim staklom gdje je karakteristično vrijeme mijenjanja fundamentalne strukture sustava mnogo veće od vremena interakcije s probom [11]. Takav odnos je ilustriran i na slici 4.2, gdje je osjenčana zona interakcije probe s (većinski) gluonskom metom. Color dolazi od toga što su i gluoni kao takvi nositelji bojnog naboja, dok se kondenzat odnosi na svojstvo da su na razini jezgara gluoni, koji tvore i izvore i dinamička polja, zapravo izranjajući kolektivni fenomen na malom  $x$ . Shodno tim razmatranjima, pogodan prijevod za CGC stanje materije na hrvatski je *staklasti kondenzat boje*.

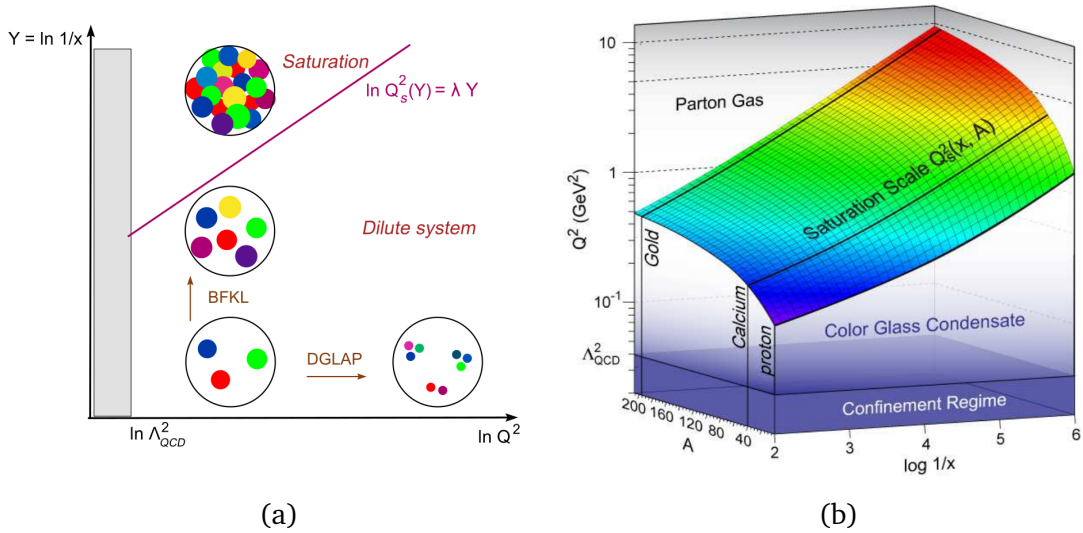
CGC formalizam uključuje i nelinearne efekte koji se pojavljuju kada gluonska gustoća postane prevelika, odnosno kada dođe do neke kritične granice. Veličina koja kontrolira interakcije je gluonski okupacijski broj: broj gluona određene boje po jedinici transverzalnog faznog prostora i rapiditeta:

$$n(Y, \mathbf{k}_T, \mathbf{b}_T) = \frac{(2\pi)^3}{2(N_c^2 - 1)} \frac{dN_g}{dY d^2\mathbf{k}_T d^2\mathbf{b}_T}, \quad (4.6)$$

gdje je  $\mathbf{b}_T$  ulazni parametar čestice, tj. udaljenost od centra snopa u raspršenju. Za  $n \ll 1$  sustav je razrijeđen i gluonske interakcije su zanemarive. Za  $n \sim \mathcal{O}(1)$  dolazi do preklopa gluonskih valnih funkcija, ali su interakcije potisnute s  $\alpha_s \ll 1$ . Snaga

interakcije postaje reda veličine jedinice kad je  $n \sim \mathcal{O}(1/\alpha_s)$ . Tada nelinearni efekti postaju bitni i dolazi do gluonske saturacije (slika 4.3).

Okupacija faznog prostora još je veća ako se umjesto protona radi o jezgri s atomskim brojem  $A \gg 1$  (jezgre teških elemenata). Transverzalna površina je proporcionalna  $A^{2/3}$ , a okupacijski broj se skalira s  $A^{1/3}$  (što je povezano sa skaliranjem gluonskog PDFa). Stoga za velike jezgre saturacijski efekti postaju bitni na većim vrijednostima  $x$  nego za proton. Formalniji tretman unutar CGC formalizma opisan je u [11], no već ovdje se može naslutiti da je riječ o sličnoj fizikalnoj situaciji, odnosno da je CGC univerzalni oblik QCD materije pri visokim rapiditetima, neovisno iz kojeg hadrona nastaje.



Slika 4.3: Skica strukture višečestičnog QCD sustava obzirom na evoluciju po (a) transverzalnom impulsu i rapiditetu, te dodatno u ovisnosti o (b) masenom broju. Svaka obojana točka u (a) predstavlja parton transverzalne površine  $\delta S_{ok} \propto 1/Q^2$  i longitudinalnim impulsom  $k^+ = xP^+$  ( $P^+$  je impuls protona). Preuzeto iz [4] i [10].

Pogodno je pretočiti ova razmatranja u jednostavan model evolucije okupacijskog broja u rapiditetu [9]. Promotrimo inkrement u rapiditetu  $Y \rightarrow Y + dY$ . Svaki postojeći gluon u hadronu ima mogućnost emitirati meki gluon s vjerojatnošću  $\alpha_s dY$ . To vodi na inkrement  $dn \propto \alpha_s n dY$ . Nadalje, ta emisija je nelokalna u  $k_T$  jer se transverzalni impuls primarnog gluona podijeli između dva rezultatna gluona. Ta se nelokalnost na visokim energijama može aproksimirati difuzijskim procesom u varijabli  $t = \ln(k_T^2)$ . Uz to, dva postojeća gluona mogu se spojiti u jedan koji ima rapiditet  $Y + dY$ . Taj je proces kvadratičan u  $\alpha_s n$  i negativnog predznaka (jer smanjuje broj gluona) te objašnjava kako je proces potisnut u odnosu na emisiju.

Zbrajanjem ta tri efekta dobije se jednađba evolucije u rapiditetu<sup>7</sup>:

$$\frac{dn}{dY} \cong \omega\alpha_s n + \chi\alpha_s \partial_t^2 n - \beta\alpha_s^2 n^2, \quad (4.7)$$

gdje su  $\omega$ ,  $\chi$  i  $\beta$  brojevi reda veličine jedinice koji, ovisno o konkretnijem modelu ili prilagodbi na podatke, opisuju gluonsku evoluciju i pojavu saturacije u QCD sustavu.

## 4.2 Amplituda raspršenja u eikonolnoj aproksimaciji

Iako je jednađba (4.7) izvedena heuristički, zahvaljujući nelinearnom članu uspijeva oponašati glavna svojstva fizike saturacije - ista sadrži fiksnu točku  $n = \omega/(\beta\alpha_s)$ , kod koje desna strana jednađbe iščezava, pa se zaustavlja eksponencijalni rast gluonske okupacije po rapiditetu. Zbog prisutnosti difuzijskog člana  $\partial_t^2 n$  prirodno se javlja skala saturacijskog impulsa  $Q_s(Y)$ , koja opisuje granicu saturirane domene, kao što je naznačeno na slici 4.3 . Za daljnju analizu je ipak potreban rigorozniji pristup; cilj ovog poglavlja je izvesti Balitsky-Kovchegov (BK) jednađbu, srodnu BFKL evolucijskoj jednađbi, kroz DIS perturbativni račun i doći do izraza koji će omogućiti numeričku analizu. Izvod se oslanja na pristup prezentiran u [4], gdje je ukupni udarni presjek interakcije  $q\bar{q}$  s bojom nabijenom metom izračunat koristeći optički teorem, koji udarni presjek povezuje s amplitudom raspršenja dobivenom u eikonolnoj aproksimaciji<sup>8</sup>, tj. pod pretpostavkom nezavisnog raspršenja pojedinih partona na meti. Dodatna tehnička pojašnjenja mogu se naći i u [12], gdje je puna JIMWLK jednađba izvedena koristeći formalizam valnih funkcija na svjetlosnom stošću.

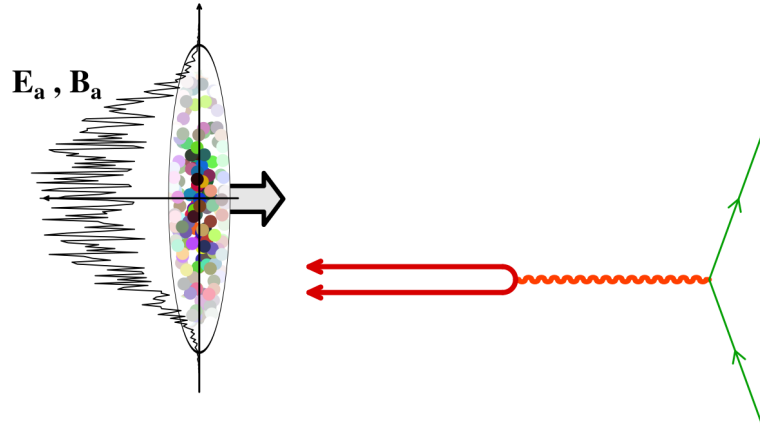
Neka je dan  $S$ -matrični element:

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle = \langle \beta_{in} | U(-\infty, \infty) | \alpha_{in} \rangle, \quad (4.8)$$

koji opisuje prijelaz između dva proizvoljna stanja  $\alpha$  i  $\beta$  s kvarkovima, antikvarkovima i gluonima.  $U(-\infty, \infty)$  je unitarni evolucijski operator iz početnog u konačno

<sup>7</sup>U kontekstu statističke fizike ova jednađba pripada klasi *Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov* (FKPP) jednađbi, koje opisuju reakcijsko-difuzijske procese. Primjer takve jednađbe za QCD sustave je Balitsky-Kovchegov jednađba (4.51).

<sup>8</sup>U nerelativističkoj kvantnoj fizici se pod eikonolnom aproksimacijom podrazumijeva ansatz gdje se valna funkcija aproksimira oscilatornom funkcijom pripadnog djelovanja  $S$ , tj.  $\Psi = e^{iS/\hbar}$ , što parcijalnu diferencijalnu Schrödingerovu jednađbu transformira u običnu diferencijalnu jednađbu sličnog oblika kao u WKB aproksimaciji. Detaljnija primjena eikonalnog pristupa u partonskom QCD formalizmu je opisana u referenci [14].



Slika 4.4: Skica DIS u prvom redu računa smetnje CGC formalizma. Promatramo referentni sustav gdje se virtualni foton cijepa na bojni dipol, tj. singletno  $\bar{q}q$  stanje koje interagira s distribucijom bojnih naboja u meti.

stanje, dan kao vremenski uređeni eksponent interakcijskog dijela lagranžijana:

$$U(-\infty, \infty) = T \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi_{int}(x)) \right], \quad (4.9)$$

gdje je  $\phi_{int}$  općenita oznaka za polja u interakcijskoj slici. U ovom slučaju  $\mathcal{L}_{int}$  sadrži samointerakciju gluonskog polja i interakciju (anti)kvarkova s poljem naboja boje. Zanima nas granični slučaj visokoenergetskih raspršenja opisan u prethodnim poglavljima, što se postiže Lorentzovim potiskom stanja  $\alpha$  i  $\beta$ :

$$S_{\beta\alpha}^{(\infty)} \equiv \lim_{\omega \rightarrow \infty} \langle \beta_{in} | e^{-i\omega K^3} U(-\infty, \infty) e^{+i\omega K^3} | \alpha_{in} \rangle, \quad (4.10)$$

gdje je  $K^3 = M^{03}$  generator potisaka u  $z$  smjeru, poznat iz Poincaréove algebre, a  $\omega$  energija ulaznog snopa. U LC koordinatama vrijedi  $K^- = M^{-+} = -K^3$ .

Općenito su amplitude raspršenja proporcionalne trajanju preklapanja valnih funkcija objekata koji se raspršuju. U ovom slučaju to se odnosi na vrijeme koje ulazno stanje provodi u području gdje djeluje gluonsko polje. To je vrijeme inverzno proporcionalno energiji ulaznog stanja i teži nuli u limesu  $\omega \rightarrow \infty$ . Da je interakcija projektila i polja opisana izmjenom skalarnog bozona (kao što je slučaj s  $\mathcal{L}_{SYM}$  u dodatku B), tada bi amplituda raspršenja iščezavala u režimu visokih energija, odnosno  $S_{\alpha\beta} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$ . Interakcije s poljem boja, međutim, idu izmjenom vektorskih bozona kroz član oblika  $-igT^a A_\mu^a J^\mu$ . Na visokim energijama longitudinalna se kom-

ponenta gluonskog polja povećava proporcionalno s energijom pa stoga kompenzira za iščezavajuće vrijeme interakcije. Za očekivati je stoga da je doprinos amplitudi raspršenja konačan i neiščezavajuć.

Kako bi se to pokazalo unutar eikonalne aproksimacije, potrebni su idući identiteti, koji se mogu jednostavno izvesti koristeći Poincaréovu algebru [3]:

$$e^{i\omega K^-} P^- e^{-i\omega K^-} = e^{-\omega} P^- \quad (4.11)$$

$$e^{i\omega K^-} P^+ e^{-i\omega K^-} = e^{+\omega} P^+ \quad (4.12)$$

$$e^{i\omega K^-} P^j e^{-i\omega K^-} = P^j. \quad (4.13)$$

Te relacije odražavaju činjenicu da se pod Lorentzovim potiscima  $P^\pm$  komponente impulsa skaliraju, dok transversalne komponente ostaju neizmjenjene.

Koristeći ta saznanja, moguće je zapisati transformacije stanja, operatora stvaranja i generičkih polja na potiske:

$$e^{-i\omega K^-} |\mathbf{p}, \dots_{in}\rangle = |(e^\omega p^+, \mathbf{p}_T), \dots_{in}\rangle, \quad (4.14)$$

$$e^{-i\omega K^-} a_{in}^\dagger(q) e^{i\omega K^-} = a_{in}^\dagger(e^\omega q^+, e^{-\omega} q^-, \mathbf{q}_T), \quad (4.15)$$

$$e^{i\omega K^-} \phi_{in}(x) e^{-i\omega K^-} = \phi_{in}(e^{-\omega} x^+, e^\omega x^-, \mathbf{x}_T), \quad (4.16)$$

s time da zadnja jednakost vrijedi samo za skalarna polja i transversalne komponente vektorskog polja. Uz to,  $\pm$  komponente vektorskog polja skaliraju se i za faktor  $e^{\pm\omega}$ .

Kako longitudinalni potisak ne mijenja vremensko uređenje operatora, vrijedi

$$e^{i\omega K^-} U(+\infty, -\infty) e^{-i\omega K^-} = T \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(e^{i\omega K^-} \phi_{in}(x) e^{-i\omega K^-}) \right], \quad (4.17)$$

pa se može zaključiti da se komponente vektorske struje koja se veže na baždarno polje transformiraju na analogan način:

$$e^{i\omega K^-} J^i(x) e^{-i\omega K^-} = J^i(e^{-\omega} x^+, e^\omega x^-, \mathbf{x}_T), \quad (4.18)$$

$$e^{i\omega K^-} J^-(x) e^{-i\omega K^-} = e^{-\omega} J^-(e^{-\omega} x^+, e^\omega x^-, \mathbf{x}_T), \quad (4.19)$$

$$e^{i\omega K^-} J^+(x) e^{-i\omega K^-} = e^\omega J^+(e^{-\omega} x^+, e^\omega x^-, \mathbf{x}_T). \quad (4.20)$$

Može se, jednostavnosti radi, pretpostaviti da je polje mete  $A_\mu$  ograničeno na



interval  $-L \leq x^+ \leq L$ . To služi i kao tehnička pretpostavka jer, u slučaju da promatramo sustav gdje je samo projektil pod potiskom, baždarno polje  $A_\mu$  ostaje neizmjenjeno. U tom slučaju operator evolucije možemo razdvojiti na tri faktora:

$$U(\infty, -\infty) = U(+\infty, +L)U(+L, -L)U(-L, -\infty). \quad (4.21)$$

Faktori  $U(+\infty, +L)$  i  $U(-L, -\infty)$  ne sadrže interakciju s baždarnim poljem pa se uz zamjenu varijabli  $e^{\mp\omega}x^\pm \rightarrow x^\pm$  može definirati

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^{i\omega K^-} U(+\infty, L) e^{-i\omega K^-} = U_0(+\infty, 0), \quad (4.22)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^{i\omega K^-} U(-L, -\infty) e^{-i\omega K^-} = U_0(0, -\infty), \quad (4.23)$$

gdje je  $U_0$  isti operator evolucije kao  $U$ , ali samo uz uključene samointerakcije, jer ta dva faktora odgovaraju evoluciji projektila van baždarnog polja. Faktor  $U(+L, -L)$  uz supstituciju  $e^{\omega}x^- \rightarrow x^-$  postaje

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^{i\omega K^-} U(+L, -L) e^{-i\omega K^-} = \exp \left[ ig \int d^2\mathbf{x}_T \chi(\mathbf{x}_T) \rho(\mathbf{x}_T) \right], \quad (4.24)$$

gdje su definirani

$$\chi(\mathbf{x}_T) \equiv \int dx^+ A^-(x^+, 0, \mathbf{x}_T), \quad (4.25)$$

$$\rho(\mathbf{x}_T) \equiv \int dx^- J^+(0, x^-, \mathbf{x}_T). \quad (4.26)$$

Konačno, izraz (4.10) se u granici beskonačne Lorentzove kontrakcije može zapisati kao

$$S_{\beta\alpha}^{(\infty)} = \langle \beta_{in} | U_0(+\infty, 0) \exp \left[ ig \int d^2\mathbf{x}_T \chi(\mathbf{x}_T) \rho(\mathbf{x}_T) \right] U_0(0, -\infty) | \alpha_{in} \rangle. \quad (4.27)$$

Činjenica da su samointerakcije i interakcije s vanjskim potencijalom faktorizirane u tri dijela nije slučajnost - to je općenito svojstvo raspršenja na visokim energijama. Valja također imati na umu da je u granici beskonačne energije ovo egzaktni rezultat.

Kako je ovo operatorska formula, za konkretne račune potrebno ju je raspisati

pomoću sume preko potpunog skupa stanja:

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha}^{(\infty)} &= \sum_{\gamma,\delta} \langle \beta_{in} | U_0(+\infty, 0) | \gamma_{in} \rangle \\
&\times \langle \gamma_{in} | \exp \left[ ig \int d^2 \mathbf{x}_T \chi(\mathbf{x}_T) \rho(\mathbf{x}_T) \right] | \delta_{in} \rangle \\
&\times \langle \delta_{in} | U_0(0, -\infty) | \alpha_{in} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Prvi i treći red su Fockova ekspanzija početnog i završnog stanja: riječ je o tome da stanja projektila netom prije i nakon interakcije ne moraju biti ista kao stanja daleko od interakcijske zone. Ti faktori odražavaju evoluciju koja se u međuvremenu događa te su konzistentni s principom dekompozicije nakupina [3]. Matrični elementi operatora  $U_0$  mogu se perturbativno izračunati do proizvoljnog reda.

Unutar faktora  $\langle \gamma_{in} | \exp \dots | \delta_{in} \rangle$ , u kojem je sadržana sva interakcija probe s gluonskim poljem, instruktivno je raspisati operator  $\rho$  preko operatora stvaranja i poništenja kvarkova i antikvarkova, označenih s  $b^\dagger$ ,  $b$ ,  $d^\dagger$  i  $d$ , te generatora fundamentalne reprezentacije  $SU(N_c)$ :

$$\begin{aligned}
\rho^a(\mathbf{x}_T) &= T_{ij}^a \int \frac{dp^+}{4\pi p^+} \frac{d^2 \mathbf{p}_T}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_T}{(2\pi)^2} \left[ b^\dagger(p^+, \mathbf{p}_T; i) b(p^+, \mathbf{q}_T; j) e^{i(\mathbf{p}_T - \mathbf{q}_T) \mathbf{x}_T} \right. \\
&\quad \left. - d^\dagger(p^+, \mathbf{p}_T; i) d(p^+, \mathbf{q}_T; j) e^{-i(\mathbf{p}_T - \mathbf{q}_T) \mathbf{x}_T} \right].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Gluonski doprinos u  $\rho$  može se raspisati zamjenom operatora stvaranja i poništenja (anti)kvarkova gluonskim ekvivalentom, te zamjenom generatora fundamentalne reprezentacije generatorima adjungirane reprezentacije.

Formula obuhvaća osnovna svojstva eikonalnog raspršenja: tijekom raspršenja se mogu mijenjati samo boja i transverzalni impuls partona, dok okus i broj partona ostaju isti (jer je prisutan jednak broj operatora stvaranja i poništenja).

U konačnici se ispostavlja da amplitude raspršenja poprimaju jednostavniji oblik ako se račun umjesto u transverzalnem impulsnom prostoru provodi u konfiguracijskom prostoru: za svako Fockovo stanje  $\langle \delta_{in} | \equiv \langle \{k_i^+, \mathbf{k}_{iT}\} |$  (i analogno za  $|\delta_{in}\rangle$ ) se Fourierovim transformatom definira valna funkcija na svjetlosnom stošcu:

$$\Psi_{\delta\alpha}(k_i^+, \mathbf{x}_{iT}) \equiv \prod_{i \in \delta} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{iT}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}_{iT} \mathbf{x}_{iT}} \langle \delta | U(0, -\infty) | \alpha \rangle, \tag{4.30}$$

gdje indeks  $i$  ide preko svih partona u stanju  $\delta$ . U tom opisu svaka nabijena čestica

koja se kreće kroz gluonsko polje dobiva fazu proporcionalnu svom naboju (antičestice dobiju fazu suprotnog predznaka):

$$\Psi_{\delta\alpha}(\{k_i^+, \mathbf{x}_{iT}\}) \rightarrow \Psi_{\delta\alpha}(\{k_i^+, \mathbf{x}_{iT}\}) \prod_i U_i(\mathbf{x}_T), \quad (4.31)$$

$$U_i(\mathbf{x}_T) \equiv T \exp \left[ ig \int dx^+ A_a^-(x^+, 0, \mathbf{x}_{iT}) T^a \right]. \quad (4.32)$$

Faktor  $U$  se naziva **Wilsonova linija** i ima ulogu nelokalnog baždarno invarijantnog operatora. Takav objekt je pogodan za opisivanje potencijala među kvarkovima, ali i općenitih čestica s nabojem boje [20]. Za antikvarkove se umjesto  $U$  koristi  $U^\dagger$ , a za gluone se umjesto  $T^a$  javlja adjungirani generator:

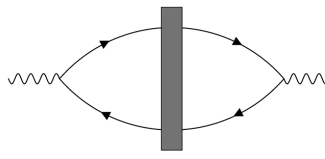
$$\tilde{U}_i^{ab}(\mathbf{x}_T) \equiv T \exp \left[ ig f^{abc} \int dx^+ A_a^-(x^+, 0, \mathbf{x}_{iT}) \right]. \quad (4.33)$$

Koristeći  $SU(N)$  algebru moguće je jednostavno izvesti vezu među Wilsonovim linijama u fundamentalnoj i adjungiranoj reprezentaciji:

$$T_a \tilde{U}^{ab}(\mathbf{x}_T) = U(\mathbf{x}_T) T^b U^\dagger(\mathbf{x}_T). \quad (4.34)$$

### 4.3 DIS u modelu bojnog dipola

Početno i konačno stanje projektila u dubokom neelastičnom raspršenju je virtualni foton. Najjednostavnije Fockovo stanje koje doprinosi valnoj funkciji u vodećem redu računa smetnje je singletno stanje boje, odnosno  $q\bar{q}$  par. Gola amplituda raspršenja, tj. amplituda u vodećem redu računa smetnje, je stoga

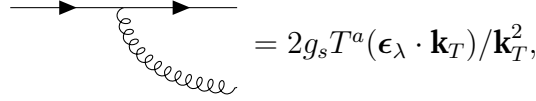


$$\begin{aligned} &\propto \Psi_{ij}^{(0)*}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) \Psi_{kl}^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) U_{ik}(\mathbf{x}_T) U_{lj}^\dagger(\mathbf{y}_T) \\ &= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T)]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Trag po bojama se javlja jer je valna funkcija fotona dijagonalna u prostoru boja, tj.  $\Psi_{ij}^{(0)} \propto \delta_{ij}$ . Analogan oblik članova javlja se i u idućem redu računa smetnje (*Next to Leading Order*, odnosno NLO). Sivi blok u ovom i narednim dijagramima predstavlja Lorentz kontrahiranu metu, odnosno zonu interakcije.

U NLO se uz  $q\bar{q}$  par javlja i virtualni gluon. Kao takav može igrati ulogu korekcije u kvark-antikvark projektilu (te doprinose nazivamo virtualnima), a može i

interagirati s metom (realni doprinosi). Valja imati na umu da su, unatoč zloupotrebi nomenklature, svi ovi doprinosi zapravo virtualni jer se ne javljaju kao konačno stanje projektila u detektoru. Kako bi se ti doprinosi izračunali, nužno je iskazati Feynmanovo pravilo za emisiju gluona iz kvarka. Uz LC baždarenje  $A^+ = 0$ , izraz u impulsnom prostoru glasi:



$$= 2g_s T^a (\epsilon_\lambda \cdot \mathbf{k}_T) / \mathbf{k}_T^2,$$

uz pretpostavku da je emitiran mekani gluon u odnosu na kvark, te je  $\epsilon_\lambda$  gluonski polarizacijski vektor. Amplituda procesa u koordinatnom prostoru je stoga:

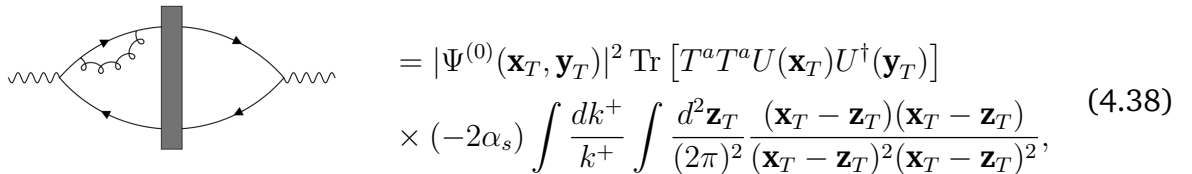
$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}_T}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_T(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)} 2g_s T^a \frac{\epsilon_\lambda \cdot \mathbf{k}_T}{\mathbf{k}_T^2} = \frac{2ig_s T^a}{2\pi} \frac{\epsilon_\lambda \cdot (\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2}, \quad (4.36)$$

gdje su  $\mathbf{x}_T$  i  $\mathbf{z}_T$  redom transverzalne koordinate kvarka i gluona (odnosno pozicije njihovih valnih paketa). Apsorpcijom emitiranog gluona formira se petlja pa je potrebno uvesti sumu po polarizacijama. Slično kao fotonska polarizacijska suma u QED, taj izraz je relacija ortogonalnosti, tj.

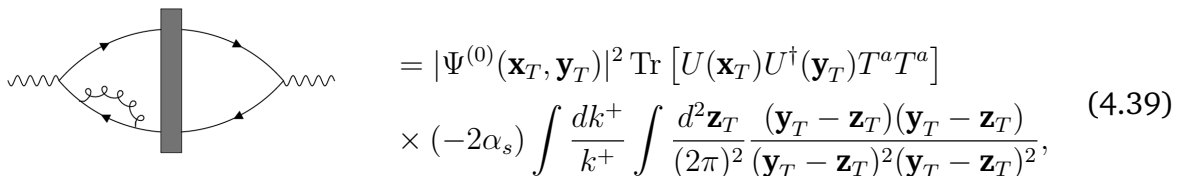
$$\sum_\lambda \epsilon_\lambda^i \epsilon_\lambda^j = \delta^{ij}. \quad (4.37)$$

Preostalo je izračunati amplitude procesa. Optimalna metoda je grupirano izračunati virtualne i realne doprinose, počevši s virtualnima koji su jednostavniji, te ih potom kombinirati u konačan izraz. U punim izrazima javlja se i integral po gluonskom LC impulsu oblika  $\int dk^+ / k^+$ , koji je posljedica izbora baždarenja. To će kasnije imati ulogu u uspostavljanju diferencijalne jednadžbe iz sume dijagrama.

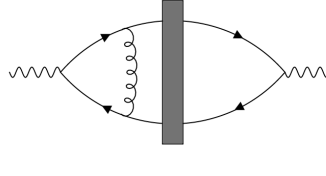
Virtualni doprinosi glase:



$$= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [T^a T^a U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T)] \times (-2\alpha_s) \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2}, \quad (4.38)$$

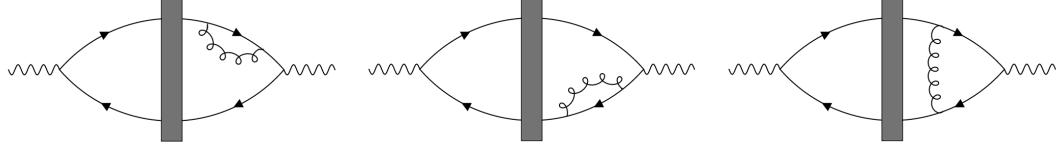


$$= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T) T^a T^a] \times (-2\alpha_s) \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2}, \quad (4.39)$$



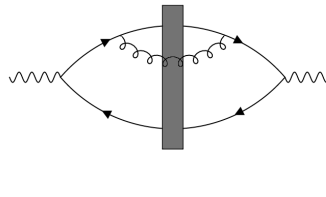
$$\begin{aligned}
&= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [T^a U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T) T^a] \\
&\times 4\alpha_s \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Uz ta tri dijagrama doprinose i njihovi hermitski konjugirani analogoni:

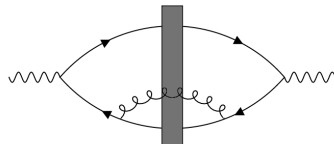


koji daju ekvivalentne izraze. U tragovima se javljaju i produkti generatora fundamentalne reprezentacije, koje je moguće izlučiti kao skalarnе faktore jer su Casimirove invarijante:  $T^a T^a = C_2(f, N_c) = (N_c^2 - 1)/2N$  (dodatak A). Indeksi boje kvark-gluon vrhova su isti jer su povezani gluonskim propagatorom koji ne prolazi kroz zonu interakcije.

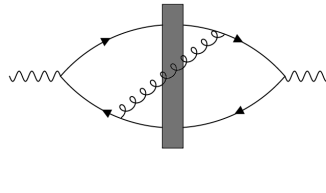
Realni doprinosi glase



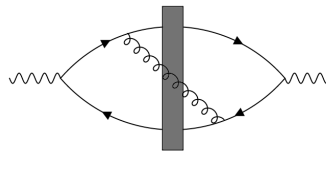
$$\begin{aligned}
&= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [T^a U(\mathbf{x}_T) T^b U^\dagger(\mathbf{y}_T)] \\
&\times 4\alpha_s \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \tilde{U}_{ab}(\mathbf{z}_T) \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2},
\end{aligned} \tag{4.41}$$



$$\begin{aligned}
&= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) T^a U^\dagger(\mathbf{y}_T) T^b] \\
&\times 4\alpha_s \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \tilde{U}_{ab}^*(\mathbf{z}_T) \frac{(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$



$$\begin{aligned}
&= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) T^a U^\dagger(\mathbf{y}_T) T^b] \\
&\times (-4\alpha_s) \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \tilde{U}_{ab}^*(\mathbf{z}_T) \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2},
\end{aligned} \tag{4.43}$$



$$\begin{aligned}
&= |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \text{Tr} [T^a U(\mathbf{x}_T) T^b U^\dagger(\mathbf{y}_T)] \\
&\times (-4\alpha_s) \int \frac{dk^+}{k^+} \int \frac{d^2 \mathbf{z}_T}{(2\pi)^2} \tilde{U}_{ab}(\mathbf{z}_T) \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)(\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{y}_T - \mathbf{z}_T)^2},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Svaki od tragova daje isti rezultat: korištenjem veze fundamentalne i adjungirane Wilsonove linije (4.34), kao i Fierzovog identiteta

$$T_{ij}^b T_{kl}^b = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N_c} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.45)$$

slijedi npr.

$$\begin{aligned} \text{Tr} [T^a U(\mathbf{x}_T) T^b U^\dagger(\mathbf{y}_T)] \tilde{U}_{ab}(\mathbf{z}_T) &= \frac{1}{2} \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{z}_T)] \text{Tr} [U(\mathbf{z}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T)] \\ &\quad - \frac{1}{2N_c} \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T)], \end{aligned} \quad (4.46)$$

i slično za drugi oblik traga. Drugi član ovog traga (uz  $1/2N_c$ ) se egzaktno poništi sa sličnim članom iz virtualnih doprinosa (koji taj faktor dobije zbog Casimirove invarijante). Valja primjetiti da se zbrajanjem realnih doprinosa dobije istovjetna integralna jezgra kao kod virtualnih doprinosa, tj.

$$\int d^2 \mathbf{z}_T \text{Ker}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) = \int d^2 \mathbf{z}_T \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T)^2}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{z}_T - \mathbf{y}_T)^2}. \quad (4.47)$$

Integral  $\int dk^+/k^+$  je u principu divergentan, no za gornju granicu se može postaviti cutoff u vidu kvarkovskog impulsa  $p^+$ , pa se rezultat može sukladno poglavlju 2.2 interpretirati kao rapiditet  $Y$ . Kao što je već rečeno, u odnosu na голу amplitudu raspršenja se doprinos reda  $\alpha_s Y$  pri velikim rapiditetima ne može tretirati kao perturbacija, ali se član uz taj faktor može tretirati kao derivacija po  $Y$ , tj. inkrement amplitude po jedinici rapiditeta. To omogućuje da se, tretiranjem NLO kao rapiditetnog inkrementa gole amplitude, postavi diferencijalna jednačba rapiditetne evolucije. U tom duhu, operator raspršenja može se definirati kao [4]:

$$S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) \equiv \frac{1}{N_c} \text{Tr} [U(\mathbf{x}_T) U^\dagger(\mathbf{y}_T)], \quad (4.48)$$

te se suma prethodnih NLO dijagrama može preko njega kompaktno izraziti s

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_s N_c^2 Y}{2\pi^2} |\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 \int d^2 \mathbf{z}_T \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T)^2}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{z}_T - \mathbf{y}_T)^2} \\ \times [S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) - S(\mathbf{x}_T, \mathbf{z}_T) S(\mathbf{z}_T, \mathbf{y}_T)]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Usporedbom s golom amplitudom raspršenja u obliku  $|\Psi^{(0)}(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)|^2 N_c S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)$

može se zaključiti da diferencijalna jednačba glasi

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)}{\partial Y} &= -\frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{z}_T \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T)^2}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{z}_T - \mathbf{y}_T)^2} \\ &\times [S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) - S(\mathbf{x}_T, \mathbf{z}_T)S(\mathbf{z}_T, \mathbf{y}_T)]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Prednost ovakvog postava je što iz definicije slijedi  $S(\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_T) = 1$ , pa je integral dobro definiran, odnosno konvergentan. Također, kako  $S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)$  ima svojstva S-matrice, može se u analogiji s istom definirati  $T(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) = 1 - S(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)$  u perturbativnom režimu. Nadalje, definiranjem očekivane vrijednosti ovog operatora  $N(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) = \langle T(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) \rangle$  te koristeći aproksimaciju srednjeg polja,  $\langle T^2 \rangle \approx \langle T \rangle^2$ , kao rezultat se dobije **Balitsky-Kovchegov jednačba**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T)}{\partial Y} &= \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{z}_T \frac{(\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T)^2}{(\mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T)^2 (\mathbf{z}_T - \mathbf{y}_T)^2} \\ &\times \left[ N(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) + N(\mathbf{z}_T, \mathbf{y}_T) - N(\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T) - N(\mathbf{x}_T, \mathbf{z}_T)N(\mathbf{z}_T, \mathbf{y}_T) \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Valja primjetiti da je jednačba (4.51) sličnog oblika kao (4.7), s nestabilnom fiksnom točkom u  $N = 0$  i stabilnom u  $N = 1$ <sup>9</sup>, što indicira da obuhvaća fiziku gluonske saturacije.

Može se pokazati da isti izraz izranja iz JIMWLK jednačbe, kao evolucija amplitude u granici velikog  $N_c$  [5]. Ova metoda dolaska do jednačbe je pak odjek izvoda Callan-Symanzikove jednačbe u teoriji renormalizacijske grupe [23].

#### 4.4 BK jednačba s kliznim vezanjem

Varijanta jednačbe (4.51) korištena za numeričku analizu, *running coupling* Balitsky-Kovchegov (rcBK) jednačba, glasi [15]:

$$\frac{\partial N(r, Y)}{\partial Y} = \int d^2 \mathbf{r}_1 K(\vec{r}, \vec{r}_1) \left( N(r_1, Y) + N(r_2, Y) - N(r, Y) - N(r_1, Y)N(r_2, Y) \right), \quad (4.52)$$

gdje je  $r = |\vec{r}|$  i sl., uz pomoćnu varijablu  $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_1$ . Ovo nije ništa drugo nego reparametrizacija koordinata u izvornoj BK jednačbi:  $\vec{r} = \mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T$  je vektor dipolnog pomaka od antikvarka prema kvarku, a  $\vec{r}_1 = \mathbf{z}_T - \mathbf{y}_T$  i  $\vec{r}_2 = \mathbf{x}_T - \mathbf{z}_T$  vektori od antikvarka prema gluonu i od gluona prema kvarku.

<sup>9</sup>Ovo su fiksne točke u smislu da za te vrijednosti integral s desne strane iščezava, pa je  $\partial_Y N = 0$ .

Primarna razlika jednadžbi (4.51) i (4.52) je što potonja sadrži korekciju konstante vezanja na nivou jedne petlje, tj. uključuje renormalizacijske efekte. To je postignuto integralnom jezgrom, koja glasi

$$K(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{N_c \alpha_s(r^2)}{2\pi^2} \left( \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} \left( \frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r_2^2)} - 1 \right) + \frac{1}{r_2^2} \left( \frac{\alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(r_1^2)} - 1 \right) \right), \quad (4.53)$$

dok je klizna konstanta vezanja dana s

$$\alpha_s(r^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \ln \left( \frac{4C^2}{r^2 \Lambda_{QCD}^2} + \hat{a} \right)}, \quad (4.54)$$

uz fiksirani  $N_c = 3$  broj boja i  $N_f = 3$  broj aktivnih okusa kvarkova u relevantnom spektru, te  $\Lambda_{QCD} = 241$  MeV kao vrijednost parametra skale QCD-a, odnosno praga ispod kojeg vlada fizika kvarkovskog zatočenja, dok je  $C = 2,52$  numerička konstanta koja je posljedica Fourierove transformacije konstante vezanja iz impulsnog u koordinatni prostor. Numeričke vrijednosti ovih parametara fiksirane su u [17] prilagodbom na eksperimentalne podatke. Unutar kliznog vezanja,  $\hat{a}$  ima ulogu IR regulatora, dakle to je metoda kontrole divergencije izabrana na način da ista u  $r \rightarrow \infty$  ima vrijednost  $\alpha_{fr} = 0,7$  [16]:

$$\hat{a} = \exp \left( \frac{12\pi}{\alpha_{fr}(11N_c - 2N_f)} \right) \approx 7,35. \quad (4.55)$$

Početni uvjet je dan McLerran-Venugopalan ansatzom:

$$N^{MV}(r, Y = 0) = 1 - \exp \left( -\frac{(r^2 Q_{s0}^2)^\gamma}{4} \ln \left( \frac{1}{r \Lambda_{QCD}} + e \right) \right), \quad (4.56)$$

uz virtualnost fotona  $Q_{s0}^2 = 0,165$  GeV<sup>2</sup> i anomalni eksponent  $\gamma = 1,135$ , koji su također dobiveni prilagodbom na eksperimentalne podatke.

Kao kvantitativno mjerilo nelinearnog doprinosa integrala s desne strane (4.52) na evoluciju u rapiditetu može se koristiti kvocijent nelinearnosti:

$$R_{NL2L}(r, Y) = \frac{I_{NL}(r, Y)}{I_L(r, Y)} = \frac{\int d^2 r_1 K(\vec{r}, \vec{r}_1) N(r_1, Y) N(r_2, Y)}{\int d^2 r_1 K(\vec{r}, \vec{r}_1) (N(r_1, Y) + N(r_2, Y) - N(r, Y))}. \quad (4.57)$$

Također, kod analize je potrebno imati na umu da je za  $r > r_0$  sustav u neperturbativnom režimu, pri čemu je  $\alpha_s(r_0) = 1$  (bez regulatora), odnosno  $r_0 \approx 10,4$  GeV<sup>-1</sup>.



## 5 Uvid u numeričke metode

U ovom su poglavlju opisane numeričke metode korištene pri rješavanju integro-diferencijalne rcBK jednadžbe (4.52), što je nužno jer jednadžba nema analitičko rješenje [15]. Algoritam je slijedeći:

- Rješavanje integrala s desne strane jednadžbe kao preduvjet zahtjeva stvaranje logaritamski ekvidistantne mreže u varijabli  $r$  i linearno ekvidistantne u kutu  $\theta$  između  $\vec{r}$  i  $\vec{r}_1$ .
- Dvodimenzionalni integral se rješava prvo po kutu  $\theta$  pomoću Simpsonove "1/3 formule": ukoliko se interval integracije  $[0, \pi]$  razdjeli na  $n$  ekvidistantnih particija  $\Delta\theta = \frac{\pi}{n}$ ,  $\theta_k = \theta_0 + k\Delta\theta$ , integral je do na grešku reda veličine  $\mathcal{O}(1/n^4)$  aproksimiran s

$$\int_0^\pi f(\theta) d\theta \approx \frac{\Delta\theta}{3} (f(\theta_0) + 4f(\theta_1) + 2f(\theta_2) + 4f(\theta_3) + \dots + 4f(\theta_{n-1}) + f(\theta_n)) \quad (5.1)$$

U ovoj je implementaciji  $n = 10$ . Integracija po varijabli  $r$  opisana je u odjeljku 5.1.

- Za rješavanje diferencijalne jednadžbe korištena je Runge-Kutta metoda 4. reda nad ekvidistantnom particijom  $Y \in [0, 100]$  uz inkrement  $h = 0.05$ . Detalji metode opisani su u odjeljku 5.2.
- Za konačni rezultat, kao i u nekim međukoracima, potrebno je dobiti vrijednosti funkcije za proizvoljne točke, ne samo na čvorištima  $(r_i, Y_j)$ . Za to je korištena (bi)linearna interpolacija, uz eventualnu modifikaciju kod logaritamske particije, što je opisano u odjeljku 5.3.

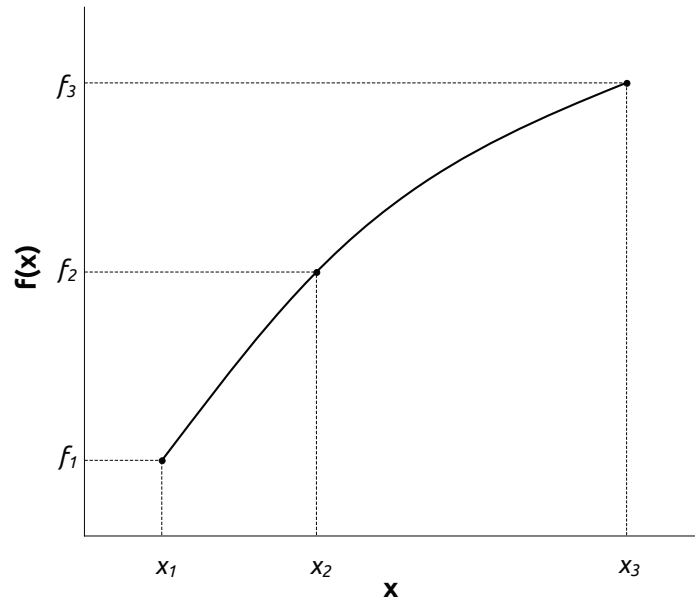
Konkretan izbor particija i numeričkih metoda u ovoj implementaciji oslanja se na analizu u [16], gdje se raspravlja o optimalnim parametrima za balans između vremena izvršavanja i preciznosti rezultata.

Kao pogodan izbor za programiranje se pokazala Julia, jezik napredne sintakse koji se po brzini izvršavanja može mjeriti s jezicima C i FORTRAN [19], što je bitno jer je kod numerički zahtjevan. Sam sadržaj koda iznesen je u dodatku C.

## 5.1 Modificirana Simpsonova integracija

Kako je dipolni razmak  $r$  definiran na logaritamskoj rešetci, u rasponu od nekoliko redova veličine (u ovdje korištenoj implementaciji poprima vrijednosti od  $10^{-6}$  GeV $^{-1}$  do  $10^2$  GeV $^{-1}$ ), u svrhu numeričke optimizacije je dobro modificirati Simpsonovu metodu za slučaj logaritamski ekvidistantne particije.

Temelj Simpsonove metode je činjenica da tri točke u koordinatnoj ravnini (nazovimo ih  $(x_1, f_1)$ ,  $(x_2, f_2)$  i  $(x_3, f_3)$ , uz  $x_1 < x_2 < x_3$ ) definiraju točno jednu parabolu, što je prikazano na slici 5.1. Integral preko cijelog područja tada možemo prikazati kao zbroj doprinosa svih pojedinih integrala nad svim tripletima točaka, tj.  $I = \sum_l I_l$ .



Slika 5.1: Skica uz izvod Simpsonove metode. Cilj je pronaći integral ispod funkcije zadane točkama  $f(x_i) \equiv f_i$ , koja je u Simpsonovoj metodi aproksimirana parabolom.

Ideja prilagodbe je da se iskoristi pravilnost logaritamske rešetke na idući način: umjesto da se (kao u Simpsonovoj 1/3 formuli) razmatraju točke ekvidistantne na osi  $x$ , odnosno koje tvore aritmetički niz s korakom  $\Delta x$ , ovdje u slučaju logaritamskog grida koristimo činjenicu da točke koje su ekvidistantne u  $\log x$ , čine geometrijski niz:  $x_3 = qx_2 = q^2x_1 \equiv q^2x$ , gdje uvodimo  $q$  kao faktor proporcionalnosti među susjednim vrijednostima te s  $x$  označavamo najmanji od triju argumenata, odnosno  $x_1$ .

Razlog prelaska na takav zapis je izbjegavanje gomilanja numeričke greške prilikom dijeljenja s malim brojevima, što se neminovno događa kad se u nazivnicima izraza javljaju strukture poput  $x_2 - x_1$  i slično, koje se ovim putem mogu zapisati kao  $x(q-1)$ . Očita prednost su i jednostavnije algebarske manipulacije u izrazima. Za vri-

jednost  $q$  unutar programa numerički je preciznije uzeti  $q = \frac{r_{nr}}{r_{nr-1}}$  umjesto  $q = e^{\Delta \ln r}$ .  
 Primjetimo i da je  $\lim_{nr \rightarrow \infty} q = 1$ .

S time na umu, zadane točke označavamo kao  $(x, f_1)$ ,  $(qx, f_2)$  i  $(q^2x, f_3)$ , iako treba biti svjestan da je to u konačnom računu zapravo  $l$ -ti triplet točaka unutar integrala  $I \ni I_l$ , odnosno da je  $x \hat{=} x_{2l-1}$ ,  $qx \hat{=} x_{2l}$  i  $q^2x \hat{=} x_{2l+1}$ . Tako podintegralnu funkciju na  $l$ -tom segmentu definiramo s  $f_l(x) = a_l x^2 + b_l x + c_l$ . Kako je riječ o paraboli, direktnom integracijom se dobije

$$I_l = \int_x^{q^2x} f_l(x') dx' = \frac{1}{3} a_l (q^6 - 1) x^3 + \frac{1}{2} b_l (q^4 - 1) x^2 + c_l (q^2 - 1) x. \quad (5.2)$$

Kako bi dobili koristan oblik rješenja, potrebno je pronaći izraze za koeficijente i uvrstiti ih u formulu. To se može dobiti fiksiranjem parabole zadanim točkama, tj. rješavanjem sustava:

$$f_1 = a_l x_1^2 + b_l x_1 + c_l, \quad (5.3)$$

$$f_2 = a_l x_2^2 + b_l x_2 + c_l, \quad (5.4)$$

$$f_3 = a_l x_3^2 + b_l x_3 + c_l, \quad (5.5)$$

što u matricnom zapisu i korištenjem  $qx$  notacije postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & qx & q^2 x^2 \\ 1 & q^2 x & q^4 x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_l \\ b_l \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Matrica  $M$  koja se pojavljuje uz koeficijente poznata je kao Vandermondeova matrica te ima dobro svojstvo da joj se determinanta može zapisati u faktoriziranom obliku:

$$\det M = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = x^3 q (q + 1) (q - 1)^3. \quad (5.7)$$

Ovdje je već moguće naslutiti zašto je poželjno raspisati Simpsonovu metodu za slučaj logaritamske rešetke: gornja determinanta se pri računu koeficijenata parabole javlja u nazivniku, što za veliki broj particija znači da  $(q - 1)^3$  postaje pol trećeg reda. Pokazat će se da nije moguće potpuno eliminirati taj pol, no krajnji rezultat kroz drugi mehanizam ostaje konačan.

Inverz matrice  $M$  glasi

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{adj}(M) \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{x^2 q(q+1)(q-1)^2} \begin{bmatrix} q^4 x^2 & -q^2(q+1)x^2 & qx^2 \\ -q^2(q+1)x & (q^2+1)(q+1)x & -(q+1)x \\ q & -(q+1) & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

iz čega se primjenom

$$\begin{bmatrix} c_l \\ b_l \\ a_l \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

uz pokratu  $D = x^2 q(q+1)(q-1)^2$  dobije

$$c_l = \frac{1}{D} q x^2 (q^2 (q f_1 - f_2) - (q f_2 - f_3)) \quad (5.11)$$

$$b_l = \frac{1}{D} (q+1)x (q^2 (f_2 - f_1) - (f_3 - f_2)) \quad (5.12)$$

$$a_l = \frac{1}{D} (q(f_1 - f_2) + (f_3 - f_2)). \quad (5.13)$$

Konačno, uvrštavanjem ovih koeficijenata u (5.2) dobije se

$$I_l = \frac{x}{6q(q-1)} \left[ 2(q^4 + q^2 + 1)(q(f_1 - f_2) + (f_3 - f_2)) \right. \\ \left. + 3(q^2 + 1)(q+1)(q^2(f_2 - f_1) - (f_3 - f_2)) \right. \\ \left. + 6q(q^2(q f_1 - f_2) - (q f_2 - f_3)) \right]. \quad (5.14)$$

Vidimo da je algebarskim manipulacijama "pol"  $(q-1)$  sveden s trećeg na prvi red, a kako se u zagradama javljaju izrazi oblika  $f_i - f_{i-1}$ , njih možemo u limesu  $n_r \rightarrow \infty$  promatrati kao diferencijale funkcije, odnosno infinitezimalne veličine koje se dokidaju s diferencijalom  $(q-1)$ , što heuristički ukazuje na konačnost rezultatnog integrala.

## 5.2 Runge-Kutta metoda 4. reda

Neka je zadana diferencijalna jednadžba  $\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, f(x))$  s početnim uvjetom  $f(x = x_0) = f_0$ . Postavlja se pitanje kako tu jednadžbu riješiti numerički uz neku ekvipartitiju domene  $h = \Delta x = \frac{x_{max} - x_0}{n_x}$ .

Klasična Runge-Kutta metoda četvrtog reda (RK4) je numerička metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednačini koja se zasniva na računanju nagiba funkcije u  $x$  i  $x + h$ , kao i u srednjoj međutočki  $x + h/2$ , što ju čini stabilnijom i preciznijom od jednostavnijih metoda (npr. Eulerova), ali i procesorski zahtjevnijom.

Algoritam, kao i kod sličnih metoda, počiva na iterativnom rješavanju jednačine nad domenom od početne do završne točke. Pretpostavimo da znamo vrijednost  $f(x_i)$ , odnosno da smo jednačinu riješili do točke  $x_i$ . Formula za vrijednost funkcije u idućoj točki glasi

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.15)$$

gdje su  $k_i$  nagibi funkcije u različitim točkama, dani s

$$k_1 = g(x_i, f(x_i)), \quad (5.16)$$

$$k_2 = g(x_i + h/2, f(x_i) + hk_1/2), \quad (5.17)$$

$$k_3 = g(x_i + h/2, f(x_i) + hk_2/2), \quad (5.18)$$

$$k_4 = g(x_i + h, f(x_i) + hk_3). \quad (5.19)$$

Kako u integralu u rBK jednačini (4.52) nema eksplicitne ovisnosti o rapiditetu, već samo kroz multiplicitete u podintegralnoj funkciji, raspis RK4 metode može se provesti uz pokrate [16]

$$I_0 = \int d^2r_1 K(\vec{r}, \vec{r}_1), \quad (5.20)$$

$$I_1 = \int d^2r_1 K(\vec{r}, \vec{r}_1)(N(r_1, Y) + N(r_2, Y)), \quad (5.21)$$

$$I_2 = \int d^2r_1 K(\vec{r}, \vec{r}_1)N(r_1, Y)N(r_2, Y), \quad (5.22)$$

čime su zapravo definirane funkcije (odnosno diskretna polja)  $I_0(r)$ ,  $I_1(r, Y)$  i  $I_2(r, Y)$ . Preko njih se (4.57) može direktno zapisati kao

$$R_{NL2L}(r, Y) = \frac{I_2(r, Y)}{I_1(r, Y) - I_0(r)N(r, Y)}. \quad (5.23)$$

Konačno, RK4 jednadžbe uz ove definicije glase

$$N(r, Y + h) = N(r, Y) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.24)$$

$$k_1 = I_1(r, Y) - I_2(r, Y) - I_0(r)N(r, Y), \quad (5.25)$$

$$k_2 = k_1 + \frac{h}{2}k_1(I_0 - I_1 - \frac{h}{2}I_0k_1), \quad (5.26)$$

$$k_3 = k_1 + \frac{h}{2}k_2(I_0 - I_1 - \frac{h}{2}I_0k_2), \quad (5.27)$$

$$k_4 = k_1 + hk_3(I_0 - I_1 - hI_0k_3). \quad (5.28)$$

Tijekom implementacije je bitno voditi računa o tome da nezavisna varijabla  $r$  ima istu vrijednost u svakom koraku RK4 algoritma.

### 5.3 Modificirana bilinearna interpolacija

Rezultat numeričkog rješavanja rcBK jednadžbe su vrijednosti funkcije  $N(r, Y)$  na rešetci  $[r_i, Y_j]$ . Kako bi dobili vrijednosti funkcije za točke koje nisu na rešetci, potrebno je provesti dvodimenzionalnu interpolaciju.

Računalno najmanje zahtjevan netrivialni 2D algoritam je bilinearna interpolacija. Kao što ime sugerira, riječ je o nezavisnim linearnim interpolacijama u obje varijable. Interpoland je kvadratična funkcija jer je rezultatni polinom umnožak dvije linearne funkcije.

Promotrimo neku funkciju  $f(x, y)$  u pravokutnoj domeni  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ . Pretpostavimo da su nam poznate vrijednosti funkcije u vrhovima tog pravokutnika te ih označimo s

$$f(x_1, y_1) \equiv f_{11}, \quad (5.29)$$

$$f(x_1, y_2) \equiv f_{12}, \quad (5.30)$$

$$f(x_2, y_1) \equiv f_{21}, \quad (5.31)$$

$$f(x_2, y_2) \equiv f_{22}. \quad (5.32)$$

Cilj je izračunati vrijednost  $f(x, y)$  za neki  $(x, y) \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ . Prvo provodimo

linearnu interpolaciju u  $x$  smjeru:

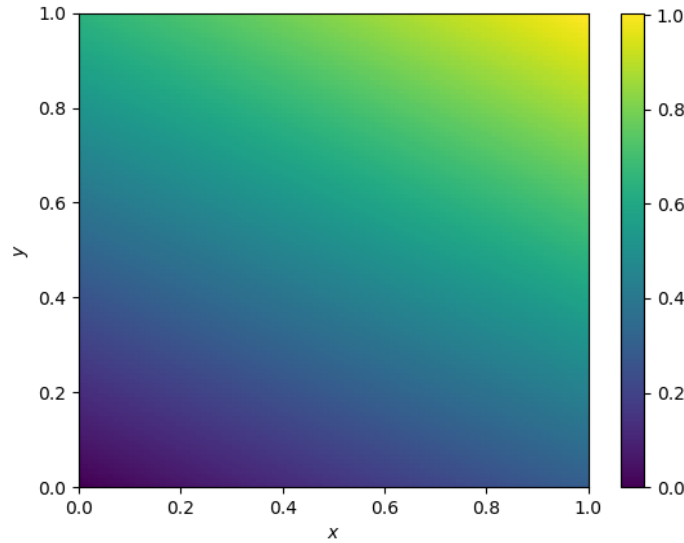
$$f(x, y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_{11} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_{21}, \quad (5.33)$$

$$f(x, y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_{12} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_{22}. \quad (5.34)$$

Idući korak je interpolacija u  $y$  smjeru, čime se dobije

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} [f_{11}(x_2 - x)(y_2 - y) + f_{21}(x - x_1)(y_2 - y) \\ &\quad + f_{12}(x_2 - x)(y - y_1) + f_{22}(x - x_1)(y - y_1)]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Isti rezultat slijedi i ako se interpolacije uvedu obrnutim redoslijedom, tj. prvo po  $y$  pa onda po  $x$ .



Slika 5.2: Prikaz bilinearne interpolacije u pravokutnoj domeni  $[0, 1] \times [0, 1]$  s vrijednostima  $f_{11} = 0$ ,  $f_{12} = 0.65$ ,  $f_{21} = 0.3$  i  $f_{22} = 1$  u kutevima.

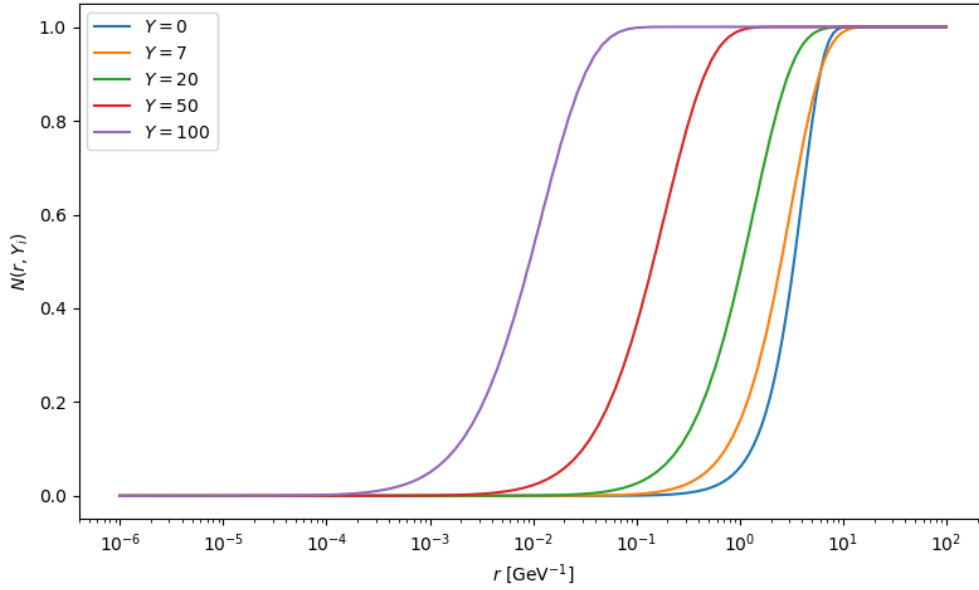
U implementaciji je, iz istog razloga kao kod računanje integrala Simpsonovom metodom, poželjno iskoristiti činjenicu da je rešetka ekvidistantna u  $\log r$ , te je stoga korištena modificirana bilinearna interpolacija, dana s

$$\begin{aligned} N(r, Y) &= \frac{1}{h\Delta \log r} [N_{11}(Y_2 - Y) \log r_2/r + N_{21}(Y_2 - Y) \log r/r_1 \\ &\quad + N_{12}(Y - Y_1) \log r_2/r + N_{22}(Y - Y_1) \log r/r_1]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

## 6 Rezultati numeričkog računa

### 6.1 Rješenja rcBK jednadžbe

Primarni rezultat numeričkog rješavanja jednadžbe (4.52) je funkcija  $N(r, Y)$ . Grafovi 6.1 i 6.2 redom prikazuju ovisnost te amplitude o rapiditetu odnosno dipolnom razmaku, uz fiksiranu vrijednost druge varijable. Grafovi uspješno reproduciraju

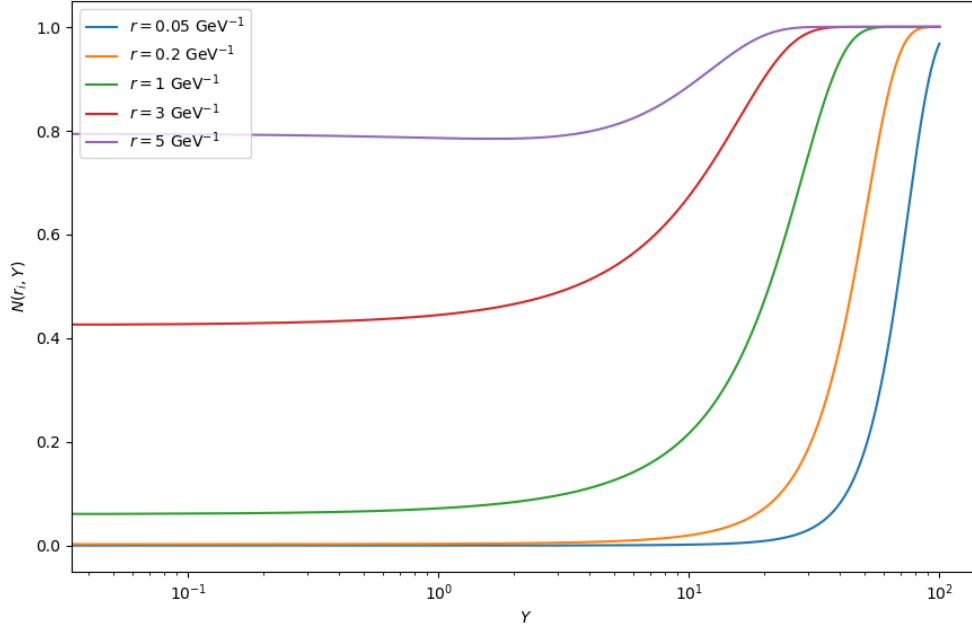


Slika 6.1: Ovisnost  $N(r, Y)$  o dipolnom razmaku za različite vrijednosti rapiditeta.

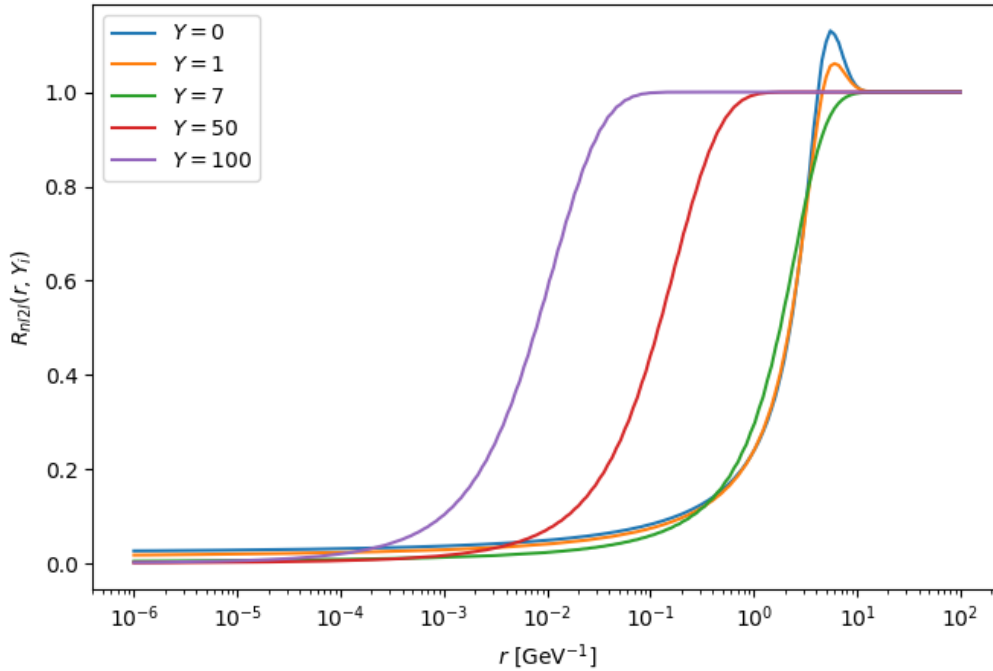
rezultate iz [15], uz neznatne numeričke razlike koje su posljedica drugačije regularizacije (ondje je klizna konstanta vezanja regulirana oštrim *cut-off*-om za vrijednosti iznad  $\alpha_s(r_0) > \alpha_{fr} = 0,7$ , dok je ovdje korišten IR regulator srodan onom u Pauli-Villars metodi).

Amplituda dipolnog raspršenja na slici 6.1 pokazuje sličnu ovisnost o dipolnom razmaku za različite vrijednosti rapiditeta. Pri malim razmacima amplituda je konstantna i iščezavajuće mala te nakon brzog rasta na karakterističnoj skali dostiže konstantnu (saturiranu) vrijednost. Rapiditet  $Y = 7$  odgovara  $x \approx 10^{-5}$ , što je minimalna vrijednost Bjorkenovog  $x$  na kojoj je HERA mjerio raspršenja. Predviđanje je da amplituda dostiže plato (koji odgovara zoni gluonske saturacije) pri još manjim vrijednostima dipolnog razmaka za veće vrijednosti rapiditeta, tj. manjem Bjorkenovom  $x$ , što se vidi i na slici 6.2, no istraživanje te domene je van kinematičkog dosega modernih sudarivača. Osim same amplitude, korisno je promotriti i pripadne grafove





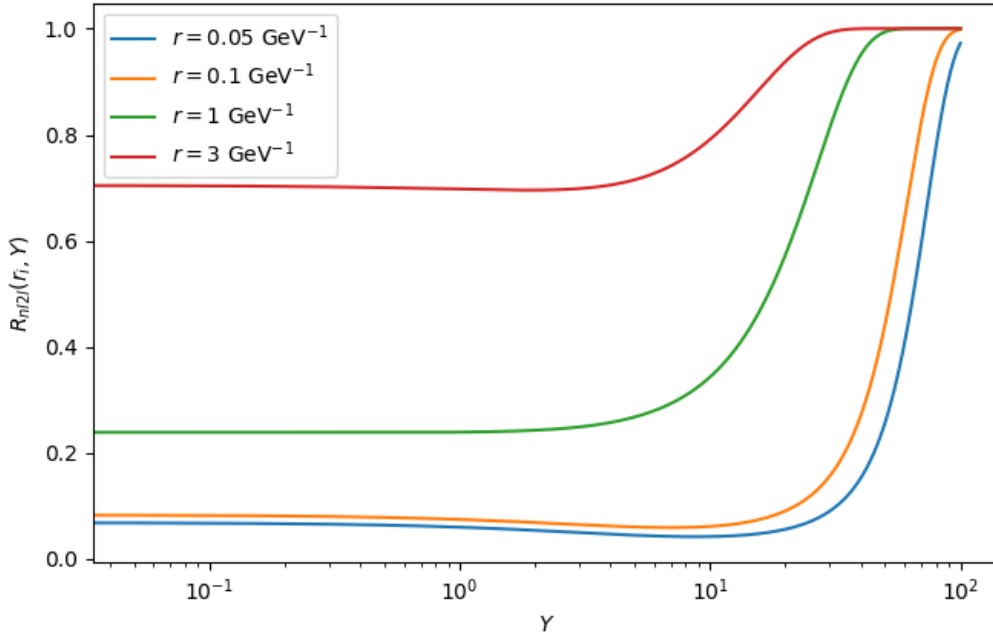
Slika 6.2: Evolucija amplitude  $N(r, Y)$  po rapiditetu na različitim vrijednostima dipolnog razmaka.



Slika 6.3: Ovisnost kvocijenta nelinearnosti  $R_{NL2L}(r, Y)$  o dipolnom razmaku za različite vrijednosti rapiditeta.

kvocijentne funkcije  $R_{NL2L}(r, Y)$ , definirane s (4.57), dane na slikama 6.3 i 6.4. U svakom od slučajeva na slici 6.3 je vidljivo da taj omjer raste s  $r$  za fiksne vrijednosti

rapiditeta, slično kao kod  $N(r, Y)$ . Oko vrijednosti  $r_{an} = 5$  vidljivo je da se za male vrijednosti rapiditeta javlja svojevrsna anomalija u vidu omjera većeg od 1, odnosno pojavom lokalnog ekstrema. Isti se fenomen javlja i u [15], te je moguće posljedica konačne domene integracije i načina reguliranja kliznog vezanja.



Slika 6.4: Evolucija kvocijenta nelinearnosti  $R_{NL2L}(r, Y)$  po rapiditetu za različite vrijednosti dipolnog razmaka.

Graf 6.4 pokazuje sličnu evoluciju kvocijenta  $R_{NL2L}$  s rapiditetom za fiksne dipolne udaljenosti kao i amplituda na slici 6.2. Iz obje slike je vidljivo kako s porastom rapiditeta funkcija dostiže plato za velike vrijednosti  $r$ , odnosno male vrijednosti  $Q$ , sukladno saturacijskoj slici.

Saturacija amplitude na konstantnu vrijednost pri velikom  $r$  (odnosno malim vrijednostima impulsa, u skladu s intuitivnom slikom QCD interakcije) može se kvantificirati u vidu saturacijskog impulsa  $Q_s(Y)$ . Standardno se ta skala definira s

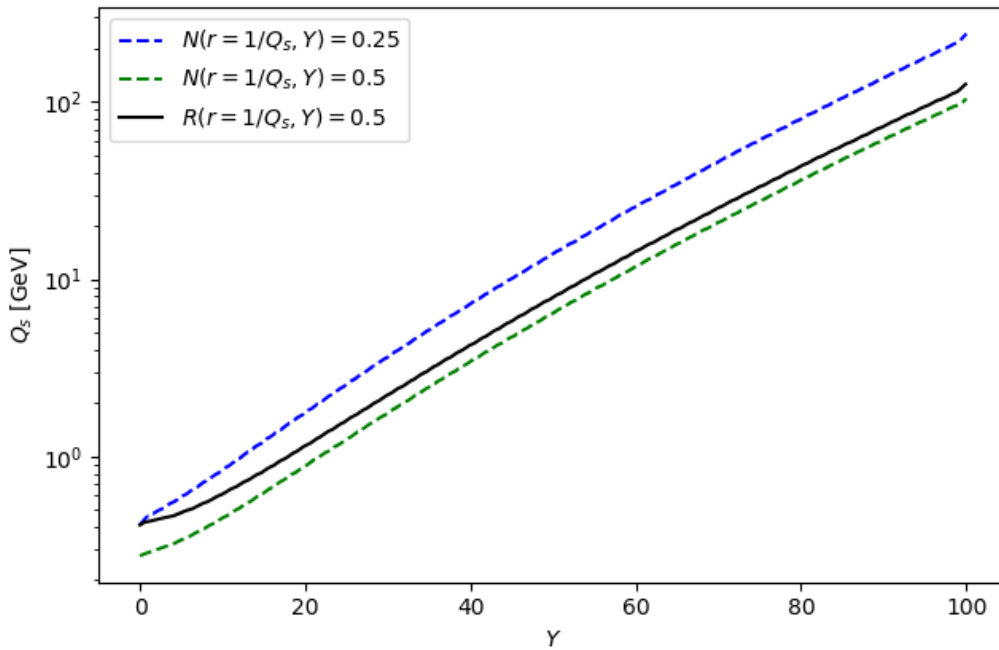
$$N(r = 1/Q_s, Y) = \kappa, \quad (6.1)$$

gdje je  $\kappa_1 = 0, 25$ ,  $\kappa_2 = 0, 5$ , ovisno o promatranoj situaciji. Pojava saturacije je u ranijim poglavljima argumentirana kao posljedica nelinearnog doprinosa u jednadžbama evolucije amplitude, što je u rcBK jednadžbi opisano kvocijentom  $R_{NL2L}$ . Kako obje funkcije pokazuju slično ponašanje, moguće je analogno definirati vrijednost satura-

cijskog impulsa specifično skrojenu po rcBK jednadžbi:

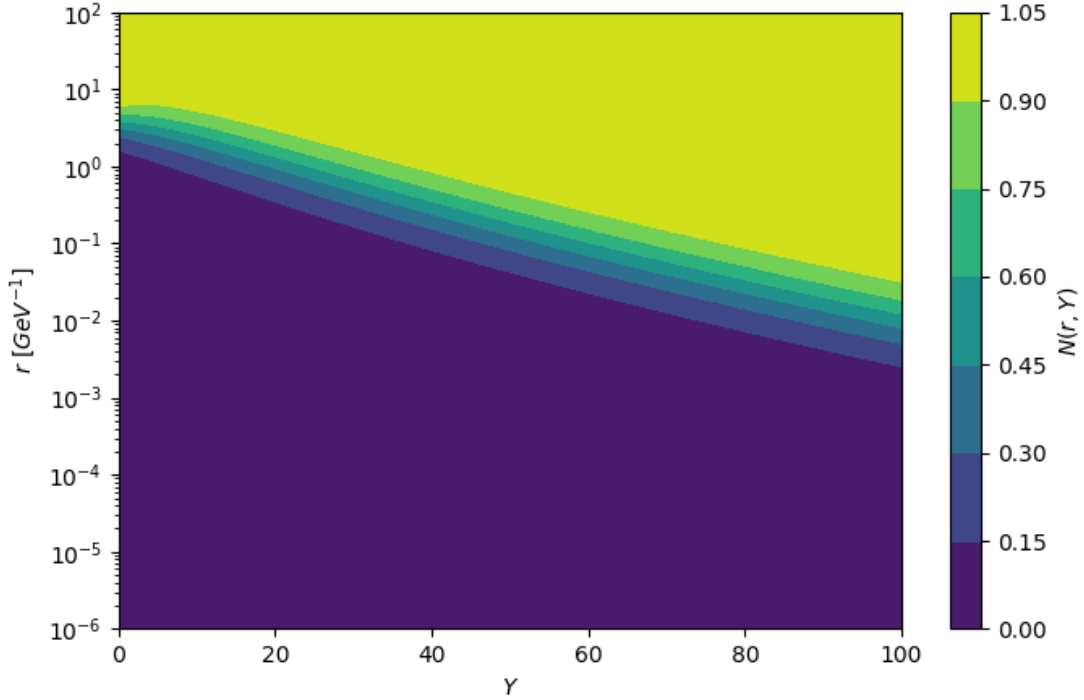
$$R_{NL2L}(r = 1/Q_s, Y) = 0,5. \quad (6.2)$$

Usporedba tih definicija vidljiva je na grafu 6.5. Pri malim rapiditetima saturacijski je impuls dobiven iz kvocijenta nelinearnosti blizak  $N = 0,25$  definiciji, dok se pri većim rapiditetima približava  $N = 0,5$  definiciji. Kod svih triju definicija vidljiva je približna potencijnska ovisnost o  $Y$ .



Slika 6.5: Usporedba ovisnosti gluonskog saturacijskog impulsa  $Q_s$  o rapiditetu za tri definicije iz teksta.

Konačno, saznanja o gluonskoj saturaciji i ovisnosti amplitude o kinematičkim parametrima mogu se sažeti u 2D grafu na slici 6.6. Usporedbom tog grafa sa slikom 4.3 (a) vidljivo je da ista vjerno reproducira rezultate, imajući na umu da je ondašnji transverzalni impuls  $Q$  Fourier inverzna varijabla ovdje prikazanom dipolnom pomaku, tj. gluonska saturacija i režim zatočenja koji nastupaju pri malim impulsima ovdje su prisutni na velikim vrijednostima  $r$ , ovisno o promatranom rapiditetu.



Slika 6.6: 2D graf rješenja rcBK jednadžbe. Žuta zona u kojoj je  $N(r, Y) = 1$  odgovara području saturacije sa slike 4.3 (a), dok oštre konture predstavljaju različite izbore granice saturacijske zone. Neperturbativni režim se dostiže za  $r > 10,4 \text{ GeV}^{-1}$ .

## 6.2 Protonska strukturna funkcija

Rezultati rješavanja rcBK jednadžbe mogu se iskoristiti i u računu eksperimentalno mjerivih veličina te usporediti s podacima [18].

Veza inkluzivne protonske strukturne funkcije (opisana u poglavlju 2.2) s udarnim presjekom transverzalno/longitudinalno polariziranog fotona  $\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(x, Q^2)$  unutar DIS dana je s:

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} (\sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2)). \quad (6.3)$$

Pri proučavanju raspršenja jedna od relevantnih veličina je ulazni parametar  $\mathbf{b}_T$ , koji opisuje udaljenost projektila od središta snopa (parametar je prisutan i u definiciji (4.6) kao potprostor kinematičkog faznog prostora). Ta ovisnost je neperturbativna, odnosno za dobar opis je potrebno detaljno poznavati fiziku zatočenja u slučaju pojedinog snopa, pa je praksa da se usrednjenje po tom parametru zamijeni sa  $\sigma_0$ , koji se interpretira kao polovica površine kvarkovske distribucije u transverzalnoj ravnini. U praksi služi kao jedan od slobodnih parametara za prilagodbu na podatke (u ovom

slučaju je  $\sigma_0 = 32.895 \text{ mb}$  [17]). Udarni presjeci se stoga mogu zapisati kao

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(x, Q^2) = \sigma_0 \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(z, r, Q^2)|^2 N(r, \tilde{x}), \quad (6.4)$$

gdje je

$$\tilde{x} = x \left(1 + \frac{4m_f^2}{Q^2}\right) \quad (6.5)$$

pomak u Bjorkenovom  $x$  koji omogućuje razmatranje u fotoprodukcijском režimu. Integracijska varijabla  $z$  predstavlja udio impulsa fotona koji odnosi kvarkovski dio para.

U najnižem redu po  $\alpha_{em}$  su valne funkcije koje opisuju cijepanje fotona na bojni dipol dane s

$$|\Psi_T^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(z, r, Q^2)|^2 = \frac{3\alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_f e_f^2 ((z^2 + (1-z)^2)\epsilon^2 K_1^2(\epsilon r) + m_f^2 K_0^2(\epsilon r)), \quad (6.6)$$

$$|\Psi_L^{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(z, r, Q^2)|^2 = \frac{3\alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_f e_f^2 (4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r)), \quad (6.7)$$

gdje su  $K_{0,1}$  modificirane Besselove funkcije druge vrste, uz pokratu

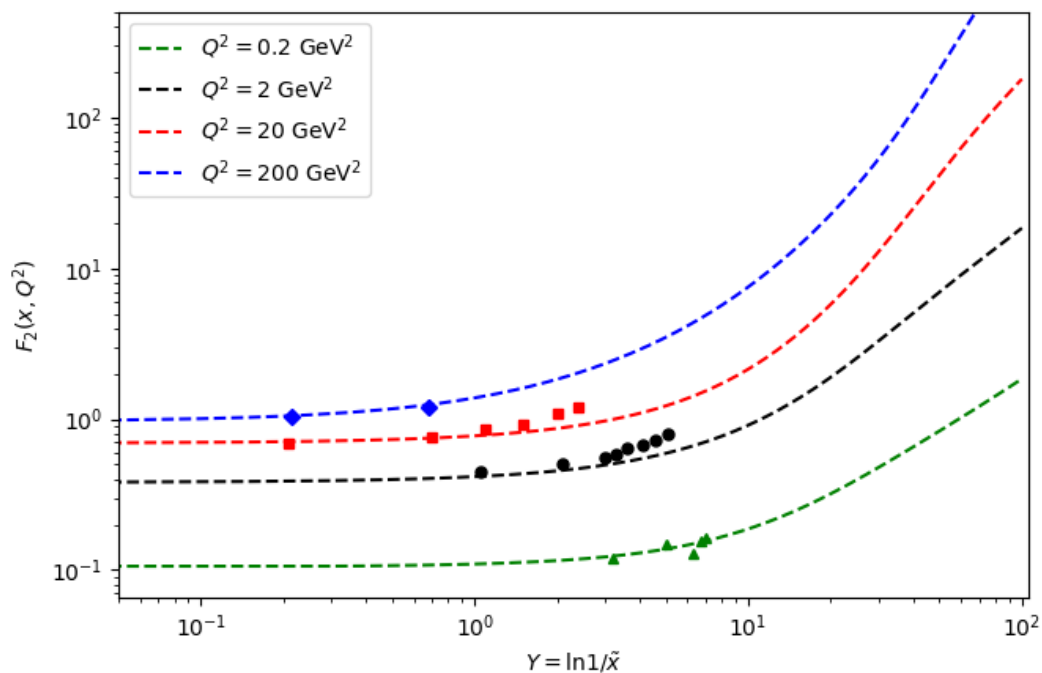
$$\epsilon^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2. \quad (6.8)$$

Iz prilagodbe slijedi da je parametar kvarkovske mase  $m_f = 140 \text{ MeV}$ , a njihovi električni naboji (u jedinicama elementarnog naboja) su označeni s  $e_f$ .

Algoritam integracije je sličan kao pri rješavanju rcBK jednadžbe, s time da postoji i dodatna integracija po ekvidistantnoj particiji varijable  $z$ . U ovom je slučaju kod jednostavniji jer je moguće umjesto 2D polja amplitude koristiti interpolate funkcija dobivenih u prethodnoj fazi rješavanja. Rezultat je graf 6.7 koji prikazuje strukturnu funkciju  $F_2(x, Q^2)$  dobivenu gornjim računom te usporedbu s onom dobivenom iz HERA podataka.

iz grafa se vidi da formalizam zadovoljavajuće dobro opisuje eksperimentalne podatke obzirom na jednostavnost modela i algoritma. Odstupanja koja se pojavljuju dijelom su posljedica toga što se strukturne funkcije eksperimentalno mjere na više različitih impulsa od prikazanih pa tijekom usrednjavanja ne doprinose svi podaci u jednakoj mjeri.

Valja imati na umu da za manje vrijednosti,  $0,045 \leq Q^2 \leq 50 \text{ GeV}^2$  ne moraju



Slika 6.7: Usporedba protonskih strukturalnih funkcija dobivenih formalizmom bojnog dipola s rezultatima iz HERA mjerenja [18].

nužno biti opisane perturbativnim modelom pa je moguće da doprinos istih u prilagodbenim parametrima kviri rezultate. Za to je potrebno ponnije proučiti odnos početnih uvjeta spram inherentne dinamike rcBK jednadžbe na rezultate, što je nagoviješteno i rezultatima u [15].

## 7 Zaključak

Velika diskrepancija između mase hadrona/jezgara i zbroja masa valentnih kvarkova je jedna od motivacija za proučavanje strukture materije u kojoj je jaka nuklearna sila glavni konstituent mase i izvor stabilnosti, tzv. QCD materija. Kako je teorija jake sile nelinearna i u principu analitički nerješiva, za specifične slučajeve su razvijene efektivne teorije i pojednostavljenja koja istovremeno obuhvaćaju kolektivna svojstva takve materije, opisuju fizikalno intuitivne scenarije te daju konkretna eksperimentalna predviđanja. Dva takva pristupa su klasična kromodinamika, korištena pri opisu vremenske evolucije produkata sudara (uglavnom gluona), te model staklastog kondenzata boje kojim je analizirana struktura hadronskih, odnosno nuklearnih meta u raspršenju, te samo raspršenje u perturbativnom režimu.

Pristup preko klasične kromodinamike pogodan je za opis jako koreliranih gluonskih polja (tzv. glazme) koja se javljaju netom nakon raspršenja jezgara. Zbog dobro poznatog aparata klasične teorije polja jednostavnije je koristiti alate hidrodinamike za predviđanje statističkih svojstava produkata sudara, ali i za uspostavljanje početnih uvjeta, tj. korelacija među gustoćama naboja boje u jezgrama, što je detaljno analizirano u McLerran-Venugopalan modelu. Ispostavlja se da su takvi rezultati plauzibilna aproksimacija i u perturbativnom QCD računu, gdje je MV ansatz iskorišten kao početni uvjet za evoluciju jednadžbe (4.52), koja čini okosnicu kasnijeg numeričkog rješavanja.

Postoje indikacije da je CGC univerzalno stanje QCD materije pri visokim rapiditetima, što omogućuje povezivanje rezultata dobivenih u DIS raspršenjima s leptonском probom te onih iz sudara teških jezgara. To je bitno jer je lakše koristiti arsenal perturbativnih metoda razvijenih za DIS od onih za  $A+A$  sudare, te se, s druge strane, lQCD simulacije mogu zamijeniti jednostavnijim metodama numeričkog rješavanja. Ovdje je to realizirano kroz rcBK jednadžbu, čija su rješenja iskorištena za opis udarnih presjeka i protonske strukturne funkcije. Poseban naglasak stavljen je na fenomen gluonske saturacije, koja predstavlja prijelazni režim iz perturbativnog QCDa u fiziku zatočenja, što je bitno i za izučavanje fazne strukture QCD materije.

# Dodaci

## Dodatak A $SU(N)$ algebra

Struktura algebre  $SU(N)$  grupe određena je komutacijskom relacijom među generatorima grupe  $T^a$  u fundamentalnoj reprezentaciji [23]:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (\text{A.1})$$

gdje je uobičajeno izabrati antisimetrične strukturne konstante  $f^{abc}$  tako da budu realne i poštuju normalizaciju Killingove forme

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G, N)\delta^{ab}. \quad (\text{A.2})$$

Gornji faktor  $C_2(G, N) = N$  je svojstvena vrijednost Casimirove invarijante za adjungiranu reprezentaciju, definiranu antihermitskim matricama

$$(t^a)_{bc} = -if^{abc}. \quad (\text{A.3})$$

Svojstvena vrijednost invarijante za fundamentalnu reprezentaciju je dana s

$$T^a T^a = C_2(f, N) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (\text{A.4})$$

Za tragove generatora vrijede iduće relacije:

$$\text{Tr}(T^a) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b) = C(f)\delta^{ab}, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Tr}([T^a, T^b] T^c) = iC(f)f^{abc}, \quad (\text{A.7})$$

gdje je  $C(f) = \frac{1}{2}$  Dykinov indeks za fundamentalnu reprezentaciju. Strukturne konstante zadovoljavaju Jacobijev identitet:

$$f^{abe}f^{cde} + f^{ace}f^{dbe} + f^{ade}f^{bce} = 0. \quad (\text{A.8})$$



U izvodu BK jednadžbe korišten je Fierzov identitet, koji u  $SU(N)$  glasi:

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (\text{A.9})$$

Za slučaj  $SU(3)$  se fundamentalna reprezentacija standardno prikazuje preko Gell-Mannovih matrica:

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (\text{A.10})$$

Te matrice su hermitske i glase

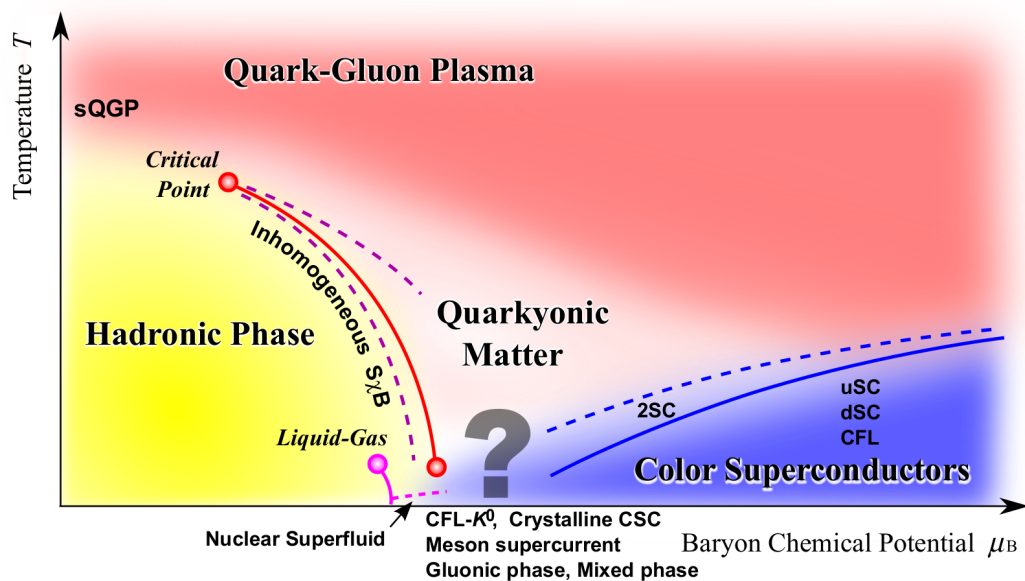
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

## Dodatak B Fazni dijagram QCD materije

Kao što je već naglašeno, zbog iznimne nelinearnosti teorije je za očekivati da QCD materija ima bogatu faznu strukturu. Moderna eksperimentalna i teorijska saznanja o faznom dijagramu ograničena su bilo nemogućnošću postizanja eksperimentalnih uvjeta (dovoljno visoke temperature i gustoće nuklearne materije), bilo kompleksnošću teorije, odnosno ograničenim mogućnostima neperturbativnih metoda. Trenutna saznanja sažeta su na slici B.1, no valja imati na umu da ta slika nije potpuna jer još nisu detaljno istraženi rubovi raznih domena te egzistencija drugih faza.



Slika B.1: Skica faznog dijagrama QCD materije. Os apscisa predstavlja barionski kemijski potencijal, koji je povezan s gustoćom QCD materije preko  $\mu_B \propto \rho^{2/3}$ , a os ordinata je temperatura materije. Preuzeto iz [21].

Na malim gustoćama i temperaturama, dakle u uvjetima koji vladaju u većem dijelu Svemira, QCD materija se nalazi u hadronskoj fazi, koja je često karakterizirana i kao faza slomljene kiralne simetrije ( $\chi$ SB). Simulacije na rešetci [21] pokazuju da fazni prijelaz na višim temperaturama pri iščezavajućem  $\mu_B$  (označen na slici sa sQGP) nije oštar, nego da se radi o glatkom prijelazu iz jedno u drugo stanje materije. U toj zoni operiraju sudarivači čestica kao što su RHIC i LHC.

S druge strane dijagrama, pri velikim gustoćama i malim temperaturama nalazi se stanje materije za koje se pretpostavlja da vlada u jezgrama neutronske zvijezde i u ekstremnim uvjetima, tzv. supravodljivost naboja boje i color-flavor locking mehanizmi, koji su i danas predmet intenzivnih istraživanja.

Konačno, na temperaturama iznad kritične ( $T_c \approx 150 - 200 \text{ MeV} = 2 \cdot 10^{12} \text{ K}$ ) te velikim gustoćama, dominira kvark-gluonska plazma (QGP). To je stanje materije za koje se pretpostavlja da je vladalo u veoma ranom Svemiru, odmah nakon Velikog Praska. Kako je riječ o visokim energijama, ovdje su kvarkovi i gluoni razvezani, odnosno u režimu asimptotske slobode. U nekim područjima, npr. unutar eksperimentalno dostupne granice, vezanje je jako (jer  $g_s^2 \propto 1/\ln E$ ), što ima za posljedicu da se QGP ponaša kao idealni fluid, odnosno tekućina iščezavajuće viskoznosti, jer zbog jakog vezanja nema prenošenja longitudinalnog impulsa između susjednih slojeva plazme.

Termodinamička svojstva osnovnih faza u dijagramu još nisu do kraja poznata, no postoje obećavajući teorijski alati van fizike standardnog modela koji mogu pridonijeti razumijevanju strukture dijagrama i teorije kao takve. Dva uobičajena primjera su supersimetrija i AdS/CFT dualnost, predstavljeni u nastavku.

## B.1 Supersimetrični QCD

1975. godine objavljen je Haag–Łopuszański–Sohnius teorem koji tvrdi da grupa simetrija konzistentne kvantne teorije polja u 4 dimenzije može sadržavati jedino Poincaréovu simetriju, internu (npr. baždarnu) simetriju, te supersimetrije. Taj rezultat je bitan jer daje ograničenje na moguća proširenja algebre Standardnog modela sužavanjem izbora na supersimetrije.

Iako (još) nije eksperimentalno potvrđena, elegancija teorije i rješenja koja nudi za neka neodgovorena pitanja u fizici (npr. problem kozmološke konstante, kandidate za tamnu materiju, ujedinjenje konstanti vezanja itd.) čine ju plauzibilnim hipotetskim aparatom za račune. Jedno od glavnih predviđanja supersimetrija je da svaka čestica u Standardnom modelu ima svog superpartnera jednake mase, ali suprotne statistike - svakom baždarnom (i Higgsovom) bozonu je pridružen fermion, a svakom tipu fermiona je pridružen skalarni bozon (sfermion).

Minimalno  $\mathcal{N} = 1$  supersimetrično proširenje QCDa (tzv. SQCD) opisano je lagranžijanom:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQCD} = & |D^\mu \tilde{q}_L|^2 + |D^\mu \tilde{q}_R|^2 + \bar{q} i \gamma^\mu D_\mu q \\ & - \sqrt{2} g_s \left( \bar{q} P_R \tilde{g} \tilde{q}_L - \bar{q} P_L \tilde{g} \tilde{q}_R + \tilde{q}_L^\dagger \tilde{g} P_L q - \tilde{q}_R^\dagger \tilde{g} P_R q \right) \\ & + \sum_a \left[ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2} \tilde{g}_a i \gamma^\mu D_\mu \tilde{g}_a - \frac{g_s^2}{2} (\tilde{q}_L^\dagger T^a \tilde{q}_L - \tilde{q}_R^\dagger T^a \tilde{q}_R)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

gdje je, uz osnovno kvarkovsko polje  $q$  i gluonski tenzor  $F_{\mu\nu}^a$ , prisutno i lijevo/desno skvarkovsko polje  $\tilde{q}_{L,R}$  te gluino  $\tilde{g}$ . Jednostavnosti radi, teorija sadrži samo jedan kvarkovski okus. Prvi red sadrži kinetičke članove za kvark i skvarkove, drugi red opisuje kvark-skvark-gluino interakcije, dok treći red sadrži gluonski tenzor, kinetički član za gluine, te kvartičnu interakciju skvarkova.

Kako je u lagranžijanu uz standardnu baždarnu simetriju prisutna i supersimetrija (nema članova mekog SUSY loma kao u nekim realističnijim modelima [23]), moguće je na jednostavniji način računati procese u teoriji polja na konačnim temperaturama [22]. Mana ovog pristupa, uz očitu činjenicu da do sad nije otkrivena niti jedna čestica superpartner, je što su bez slamanja supersimetrije čestice same po sebi bezmasene, no u procesima s jakim vezanjem i dominirajućim gluonskim poljima se masa kvarkova ionako može tretirati kao perturbacija izvorne teorije.

## B.2 AdS/CFT dualnost

Još jedan način proučavanja faznog dijagrama je kroz AdS/CFT pristup. Ovdje nema potrebe ni mjesta ulaziti u detalje teorije (dobar uvid u tematiku dan je u [20]), no osnovna ideja je da se prepozna ekvivalencija između particijskih funkcija konformalnih teorija polja (teorija invarijantnih na promjenu skale) u 4D i gravitacijske teorije u 5D anti-de Sitterovom prostoru, tj. Maldacena hipoteza glasi  $\mathcal{Z}_{AdS} = \mathcal{Z}_{CFT}$ . Koristeći tu ekvivalenciju moguće je dobiti tražene veličine u konformalnoj teoriji polja računajući vezane konfiguracije u AdS prostoru pomoću teorije struna ili neke druge unificirajuće teorije. To je moguće jer je fizikalna slika hipoteze da 4D baždarna teorija zapravo postoji kao rubna teorija na 5D AdS prostoru.

Za konformalnu teoriju se može izabrati  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrična Yang-Millsova (SYM) teorija, što je teorija srodna QCDu koja posjeduje najviši mogući stupanj supersimetrije. Lagranžijan sadrži baždarno polje  $A_\mu$ , šest skalarnih polja  $\phi_i$  i četiri Weylova fermiona  $\lambda_l$ :

$$\mathcal{L}_{SYM} = \frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} \left[ -\frac{1}{2} (F_{\mu\nu})^2 - \sum_i (D_\mu \phi_i)^2 - i \sum_l \bar{\lambda}_l \not{D} \lambda_l + \mathcal{O}(\phi^4) + \mathcal{O}(\lambda\lambda\phi) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Kao i u SQCD slučaju, teorija nije realistična iz nekoliko razloga [11]:

- Nema masene skale te je teorija konformalno invarijantna ( $g_{YM}$  je bezdimenzi-

onalna veličina),

- Nema zatočenja ni klizne konstante vezanja ( $\beta = 0$  kad se uračunaju svi baždarni, fermionski i skalarni stupnjevi slobode),
- Posjeduje supersimetriju i nema loma kiralne simetrije ni generiranja masa,
- Teorija ne sadrži kvarkove.

Zbog toga još ne postoji koncenzus oko toga reflektira li ovakva teorija vjerno svojstva QCDA u domeni jakog vezanja, pa je dualnost najbolje tretirati kao alat za indicaciju nove fenomenologije umjesto stvarnog računskog aparata.

## Dodatak C Julia kodovi

### C.1 Rješavanje rcBK jednadžbe

```
1 using PyPlot
2 using JLD
3
4 #Parametri teorije
5 nf=3 #broj okusa
6 Nc=3 #broj boja
7
8 Lambda=0.241 #parametar skale
9 C=2.52
10 gamma=1.135 #kriticni eksponent
11 Q2=0.165 #virtualnost fotona
12 alphafr=0.7 #vrijednost alpha u r->inf
13
14
15 #rapiditet
16 nh=2000 #optimalan korak od hy=0.01
17 Y0=0
18 Yf=100
19 hy=(Yf-Y0)/nh
20 Yfield=range(Y0, stop=Yf, length=nh)
21
22 #dipolni razmak
23 r0=10^(-6)
24 rfin=100
25 nr=198 #djeljivo s 3 zbog simpsona
26 #blisko Int64(25*log10(rfin/r0))
27 #optimum: 25 koraka po jednom redu velicine razlike medju granicama,
    npr. nr=100 za r0=10^(-2), rfin=10^2
28 rlog=range(log10(r0), stop=log10(rfin), length=nr)
29 rfield=exp10.(rlog)
30 q=rfield[nr]/rfield[nr-1]
31
32 neph=10
33 th=range(0.01, stop=pi, length=neph+1)
34 hphi=th[2]-th[1]
35
```

```

36 #Simpson tezine za integraciju po phi
37 wphi=Float64[hphi/3]
38 for i in 1:nph
39     if i==nph
40         push!(wphi,hphi/3.0)
41     elseif mod(i,2)==0
42         push!(wphi,2.0*hphi/3.0)
43     else
44         push!(wphi,4.0*hphi/3.0)
45     end
46 end
47
48 #Sustav
49 Rnltol=ones(nr,nh)
50 ampl=ones(nr,nh)
51
52 # -----
53 #funkcije
54
55 #klizna konstanta vezanja uz dodan IR regulator
56 function alpha(r)
57     return 12*pi/(((11*Nc-2*nf)*log(4*C^2/(r^2*Lambda^2)+exp(12*pi/(
58         alphafr*(11*Nc-2*nf))))))
59 end
60
61 #Pomocna varijabla u integraciji
62 function er2(r,phi,r1)
63     return sqrt(r^2+r1^2-2*r*r1*cos(phi))
64 end
65
66 #Simpson – input vrijednosti i najmanji x od tri cvora, output integral
67     medju njima
68 function simps(x1,f1,f2,f3)
69     return x1*(2*(q^4+q^2+1)*(q*(f1-f2)-f2+f3)+3*(q^2+1)*(q+1)*(q^2*(f2
70         -f1)+f2-f3)+6*q*(q^2*(q*f1-f2)-q*f2+f3))/(6*q*(q-1))
71 end
72
73 #integralna jezgra – ukljucen jacobijan
74 function ker(ro,phi,r1)
75     r2=er2(ro,phi,r1)

```

```

73     return Nc*alpha(ro)*r1/(2*pi^2)*(ro^2/(r1^2*r2^2)+1/(r1^2))*(alpha(
74     r1)/alpha(r2)-1)+1/(r2^2)*(alpha(r2)/alpha(r1)-1))
75 end
76 #N0=N(r,Y0)
77 function N0(ro)
78     return 1-exp(-0.25*(ro^2*Q2)^gamma*log(1/(Lambda*ro)+exp(1)))
79 end
80
81 # -----
82 #linearna interpolacija
83
84 #lin grid / konst. r
85 function linintr(knots, rapid)
86     for a in 2:nh
87         if (rapid<=Yfield[a]) & (rapid>=Yfield[a-1])
88             return (rapid*(knots[a]-knots[a-1])+(knots[a-1]*Yfield[a]-
89             knots[a]*Yfield[a-1]))/hy
90         elseif rapid<=Y0
91             return knots[1]
92         elseif rapid>=Yf
93             return knots[nh]
94         end
95     end
96 end
97 #log grid / konst. Y
98 function logintr(knots, dipol)
99     for a in 2:nr
100         if (dipol<=rfield[a]) & (dipol>=rfield[a-1])
101             return (log10(dipol)*(knots[a]-knots[a-1])+knots[a-1]*rlog[a
102             ]-knots[a]*rlog[a-1])/(rlog[a]-rlog[a-1]))
103         elseif dipol<=r0
104             return knots[1]*dipol/r0
105         elseif dipol>=rfin
106             return knots[nr]
107         end
108     end
109 end

```



```

110 function Nkonsty(r1, i)
111     return logintr(ampl[:, i], r1)
112 end
113
114 #2D interpolacija nad gridom s rubovima (r0, Y0) i (rfin, Yfin)
115 function gridint(array, ro, Y)
116     for l in 2:nh
117         for m in 2:nr
118             if (ro>=rfield[m-1]) & (ro<=rfield[m]) & (Y>=Yfield[l-1]) & (
119                 Y<=Yfield[l])
120                 r=log10(ro)
121                 r2=rlog[m]
122                 r1=rlog[m-1]
123                 Y2=Yfield[l]
124                 Y1=Yfield[l-1]
125                 return (array[m-1, l-1]*(r2-r)*(Y2-Y)+array[m, l-1]*(r-r1)
126                     *(Y2-Y)+array[m-1, l]*(r2-r)*(Y-Y1)+array[m, l]*(r-r1)*(Y-Y1))/((r2-r1)
127                     *hy)
128             end
129         end
130     end
131 end
132
133 #Rnltol i ampl (rezultati rjesavanja rcBK jednadzbe), kao i I1 i I2, su
134     2D arrayevi strukture
135
136 #\      Y0  Y1      ...      Yf
137 #r0 | f(r0, Y0)  f(r0, Y1)  ...  f(r0, Yf)
138 #r1 | f(r1, Y0)  f(r1, Y1)  ...  f(r1, Yf)
139 #.. |   ...      ...      ...  ...
140 #rf | f(rf, Y0)  f(rf, Y1)  ...  f(rf, Yf)
141
142 #Plan je nakon racuna na gridu interpolirati rezultate u oblik f(r, Y)
143     uz gridint()
144
145 # -----
146
147 #Integral I0
148 I0=zeros(nr)

```

```

145 I1=zeros(nr,nh)
146 I2=zeros(nr,nh)
147
148 for m in 1:nr
149     r=rfield[m]
150     for j in 2:2:nr-1
151         x1=rfield[j-1]
152         x2=rfield[j]
153         x3=rfield[j+1]
154         for k in 1:nph+1
155             phi=th[k]
156             y1=ker(r,phi,x1)
157             y2=ker(r,phi,x2)
158             y3=ker(r,phi,x3)
159             I0[m]+=simps(x1,y1,y2,y3)*wphi[k]
160         end
161     end
162 end
163
164
165 #Pocetni uvjet
166 ampl[:,1]=N0.(rfield)
167 QsN1=[]
168 QsN2=[]
169 QsR=[]
170
171 #glavna procedura
172 @time begin
173
174 for i in 1:nh
175     Y=Yfield[i]
176     for m in 1:nr
177         r=rfield[m]
178         N=ampl[m,i]
179         for j in 2:2:nr-1
180             x1=rfield[j-1]
181             x2=rfield[j]
182             x3=rfield[j+1]
183             for k in 1:nph+1
184                 phi=th[k]

```

```

185         y1=ker ( r , phi , x1 ) *( ampl [ j - 1 , i ] + Nkonsty ( er2 ( r , phi , x1 ) , i ) )
186         y2=ker ( r , phi , x2 ) *( ampl [ j , i ] + Nkonsty ( er2 ( r , phi , x2 ) , i ) )
187         y3=ker ( r , phi , x3 ) *( ampl [ j + 1 , i ] + Nkonsty ( er2 ( r , phi , x3 ) , i ) )
188         z1=ker ( r , phi , x1 ) * ampl [ j - 1 , i ] * Nkonsty ( er2 ( r , phi , x1 ) , i )
189         z2=ker ( r , phi , x2 ) * ampl [ j , i ] * Nkonsty ( er2 ( r , phi , x2 ) , i )
190         z3=ker ( r , phi , x3 ) * ampl [ j + 1 , i ] * Nkonsty ( er2 ( r , phi , x3 ) , i )
191         I1 [ m , i ] += simps ( x1 , y1 , y2 , y3 ) * wphi [ k ]
192         I2 [ m , i ] += simps ( x1 , z1 , z2 , z3 ) * wphi [ k ]
193     end
194 end
195 #kvocijent nelinearnosti
196 Rnltol [ m , i ] = I2 [ m , i ] / ( I1 [ m , i ] - I0 [ m ] * N )
197 #RK4
198 if i < nh
199     k1 = I1 [ m , i ] - I2 [ m , i ] - I0 [ m ] * N
200     k2 = k1 + 0.5 * k1 * hy * ( I0 [ m ] - I1 [ m , i ] - 0.5 * hy * I0 [ m ] * k1 )
201     k3 = k1 + 0.5 * k2 * hy * ( I0 [ m ] - I1 [ m , i ] - 0.5 * hy * I0 [ m ] * k2 )
202     k4 = k1 + k3 * hy * ( I0 [ m ] - I1 [ m , i ] - hy * I0 [ m ] * k3 )
203     ampl [ m , i + 1 ] = N + hy * ( k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4 ) / 6.0
204 end
205 #Q_s
206 if m > 1
207     if ( ampl [ m - 1 , i ] <= 0.25 ) & ( ampl [ m , i ] > 0.25 )
208         push ! ( QsN1 , 1 / ( rfield [ m - 1 ] * 10 ^ ( - log1p ( q - 1 ) * ( ( 0.25 - ampl [
209 m - 1 , i ] ) / ( ampl [ m , i ] - ampl [ m - 1 , i ] ) ) ) )
210     elseif ( ampl [ m - 1 , i ] <= 0.5 ) & ( ampl [ m , i ] > 0.5 )
211         push ! ( QsN2 , 1 / ( rfield [ m - 1 ] * 10 ^ ( - log1p ( q - 1 ) * ( ( 0.5 - ampl [ m
212 - 1 , i ] ) / ( ampl [ m , i ] - ampl [ m - 1 , i ] ) ) ) )
213     elseif ( Rnltol [ m - 1 , i ] <= 0.5 ) & ( Rnltol [ m , i ] > 0.5 )
214         push ! ( QsR , 1 / ( rfield [ m - 1 ] * 10 ^ ( - log1p ( q - 1 ) * ( ( 0.5 - Rnltol [
215 m - 1 , i ] ) / ( Rnltol [ m , i ] - Rnltol [ m - 1 , i ] ) ) ) )
216     end
217 end
218 end
219
220 #Interpolacija rezultata
221 N ( r , Y ) = gridint ( ampl , r , Y )

```

```

222 Rnl2l(r,Y)=gridint(Rnltol,r,Y)
223
224 #Interpolacija integrala
225 Int1(r,Y)=gridint(I1,r,Y)
226 Int2(r,Y)=gridint(I2,r,Y)
227
228 #Spremanje rezultata za kasniju uporabu
229 save("ampl.jld","data",ampl)
230 save("kvoc.jld","data",Rnltol)
231 save("QsN1.jld","data",QsN1)
232 save("QsN2.jld","data",QsN2)
233 save("QsR.jld","data",QsR)
234 save("I1.jld","data",I1)
235 save("I2.jld","data",I2)
236
237 # -----
238 #sekcija plottanja
239
240 #N-r graf
241 fig1=figure("N(r,{Y_i})")
242 p1=semilogx(rfield,[N(r,Y0) for r in rfield],label=L"$Y=0$")
243 p2=semilogx(rfield,[N(r,7) for r in rfield],label=L"$Y=7$")
244 p3=semilogx(rfield,[N(r,20) for r in rfield],label=L"$Y=20$")
245 p4=semilogx(rfield,[N(r,50) for r in rfield],label=L"$Y=50$")
246 p5=semilogx(rfield,[N(r,100) for r in rfield],label=L"$Y=100$")
247 xlabel(L"$r$ [ $\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$]")
248 ylabel(L"$N(r, Y_i)$")
249 legend(loc="upper left",fancybox="true")
250 fig1.canvas.draw
251
252 #N-Y graf
253 fig2=figure("N({r_i},Y)")
254 p1=semilogx(Yfield,[N(0.05,Y) for Y in Yfield],label=L"$r=0.05$ $ \mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
255 p2=semilogx(Yfield,[N(0.2,Y) for Y in Yfield],label=L"$r=0.2$ $ \mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
256 p3=semilogx(Yfield,[N(1,Y) for Y in Yfield],label=L"$r=1$ $ \mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
257 p4=semilogx(Yfield,[N(3,Y) for Y in Yfield],label=L"$r=3$ $ \mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")

```

```

258 p5=semilogx(Yfield , [N(5,Y) for Y in Yfield], label=L"$r=5$ $\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
259 xlabel(L"$Y$")
260 ylabel(L"$N(r_i, Y)$")
261 legend(loc="upper left", fancybox="true")
262 fig2.canvas.draw
263
264 #R-r graf
265 fig3=figure("R(r, { Y_i })")
266 p1=semilogx(rfield , [Rn121(r,Y0) for r in rfield], label=L"$Y=0$")
267 p2=semilogx(rfield , [Rn121(r,1) for r in rfield], label=L"$Y=1$")
268 p3=semilogx(rfield , [Rn121(r,7) for r in rfield], label=L"$Y=7$")
269 p4=semilogx(rfield , [Rn121(r,50) for r in rfield], label=L"$Y=50$")
270 p5=semilogx(rfield , [Rn121(r,100) for r in rfield], label=L"$Y=100$")
271 xlabel(L"$r$ [$\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$]")
272 ylabel(L"$R_{\{n121\}}(r, Y_i)$")
273 legend(loc="upper left", fancybox="true")
274 fig3.canvas.draw
275
276 #R-Y graf
277 fig4=figure("R({ r_i }, Y)")
278 p1=semilogx(Yfield , [Rn121(0.05,Y) for Y in Yfield], label=L"$r=0.05$ $\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
279 p2=semilogx(Yfield , [Rn121(0.1,Y) for Y in Yfield], label=L"$r=0.1$ $\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
280 p3=semilogx(Yfield , [Rn121(1,Y) for Y in Yfield], label=L"$r=1$ $\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
281 p4=semilogx(Yfield , [Rn121(3,Y) for Y in Yfield], label=L"$r=3$ $\mathrm{GeV}^{\{-1\}}$")
282 xlabel(L"$Y$")
283 ylabel(L"$R_{\{n121\}}(r_i, Y)$")
284 legend(loc="upper left", fancybox="true")
285 fig4.canvas.draw
286
287 #ovisnost Qs o Y preko N(r=1/Qs,Y)=kappa
288 fig=figure("Qs")
289
290 p1=semilogy(Yfield [1:length(QsN1)], [linintr(QsN1,Y) for Y in Yfield [1:length(QsN1)]], color="blue", linestyle="--", label=L"$N(r=1/Q_s, Y)=0.5$")

```

```

291     p2=semilogy(Yfield [1:length(QsN2)], [linintr(QsN2,Y) for Y in Yfield
[1:length(QsN2)]], color="green", linestyle="--", label=L"$N(r=1/Q_s,Y
)=0.25$")
292
293     #ovisnost Qs o Y preko Rnl2l(r=1/Qs,Y)=kappa
294     p3=semilogy(Yfield [1:length(QsR)], [linintr(QsR,Y) for Y in Yfield [1:
length(QsR)]], color="black", label=L"$R(r=1/Q_s,Y)=0.5$")
295
296     xlabel(L"$Y$")
297     ylabel(L"$Q_s$ [GeV]$")
298     legend(loc="upper left", fancybox="true")
299     fig.canvas.draw
300
301     #colormap dijagram
302
303     figC=figure("amplituda")
304     p1=contourf(Yfield, rfield, ampl)
305     colorbar()
306     colorbar_title=L"N(r,Y)"
307     xlabel(L"Y")
308     ylabel(L"r [GeV-1]")
309     plot(p1)
310     figC.canvas.draw
311

```

## C.2 DIS račun

```

1     using PyPlot
2     using JLD
3     using SpecialFunctions
4
5     #dio iz glavnog koda
6
7     #rapiditet
8     nh=2000 #optimalan korak od hy=0.01
9     Y0=0
10    Yf=100
11    hy=(Yf-Y0)/nh
12    Yfield=range(Y0, stop=Yf, length=nh)
13

```

```

14 #dipolni razmak
15 r0=10(-6)
16 rfin=100
17 nr=198
18 rlog=range(log10(r0), stop=log10(rfin), length=nr)
19 rfield=exp10.(rlog)
20 q=rfield[nr]/rfield[nr-1]
21
22 #Simpson tezine za integraciju po log r
23 rint=range(log10(r0), stop=log10(rfin), length=nr+1)
24 hr=rint[2]-rint[1]
25 wr=Float64[hr/3]
26 for i in 1:nr
27     if i==nr
28         push!(wr,hr/3.0)
29     elseif mod(i,2)==0
30         push!(wr,2.0*hr/3.0)
31     else
32         push!(wr,4.0*hr/3.0)
33     end
34 end
35
36 # -----
37 #linearna interpolacija
38
39 #lin grid / konst. r
40 function linintr(knots, rapid)
41     for a in 2:nh
42         if (rapid<=Yfield[a]) & (rapid>=Yfield[a-1])
43             return (rapid*(knots[a]-knots[a-1])+(knots[a-1]*Yfield[a]-
44 knots[a]*Yfield[a-1]))/hy
45         elseif rapid<=Y0
46             return knots[1]
47         elseif rapid>=Yf
48             return knots[nh]
49         end
50     end
51 end
52 #2D interpolacija nad gridom s rubovima (r0,Y0) i (rfin,Yfin)

```

```

53 function gridint(array, ro, Y)
54     for l in 2:nh
55         for m in 2:nr
56             if (ro>=rfield[m-1]) & (ro<=rfield[m]) & (Y>=Yfield[l-1]) &
(Y<=Yfield[l])
57                 r=log10(ro)
58                 r2=rlog[m]
59                 r1=rlog[m-1]
60                 Y2=Yfield[l]
61                 Y1=Yfield[l-1]
62                 return (array[m-1,l-1]*(r2-r)*(Y2-Y)+array[m,l-1]*(r-r1)
)* (Y2-Y)+array[m-1,l]*(r2-r)*(Y-Y1)+array[m,l]*(r-r1)*(Y-Y1))/((r2-r1)
*hy)
63             end
64         end
65     end
66 end
67
68
69 #input podataka
70 ampl=load("ampl.jld")["data"]
71 Rnltol=load("kvoc.jld")["data"]
72 I1=load("I1.jld")["data"]
73 I2=load("I2.jld")["data"]
74 QsN1=sort(load("QsN1.jld")["data"])
75 QsN2=sort(load("QsN2.jld")["data"])
76 QsR=sort(load("QsR.jld")["data"])
77
78 #Interpolacija rezultata
79 N(r,Y)=gridint(ampl,r,Y)
80 Rnl2l(r,Y)=gridint(Rnltol,r,Y)
81
82
83 # -----
84 #Dio za DIS
85 alphaem=1/137
86 mf=0.14 #u GeV
87 sig0=32.895*2.56819 #iz mb u GeV^{-2}
88 Q2s=[0.2,2,20,200] #u GeV^2
89

```



```

90  nz=10
91  zfield=range(0, stop=1, length=nz+1)
92  hz=zfield[2]-zfield[1]
93
94  #Simpson tezine za integraciju po z
95  wz=Float64[hz/3]
96  for i in 1:nz
97      if i==nz
98          push!(wz,hz/3.0)
99      elseif mod(i,2)==0
100         push!(wz,2.0*hz/3.0)
101      else
102         push!(wz,4.0*hz/3.0)
103      end
104  end
105
106
107  function epsil(z,Q2)
108      return sqrt(z*(1-z)*Q2+mf^2)
109  end
110
111  function psit2(z,r,Q2)
112      return 2*alphaem/pi^2*((z^2+(1-z)^2)*(epsil(z,Q2))^2*(besselk(1,
113         epsil(z,Q2)*r))^2+mf^2*(besselk(0,epsil(z,Q2)*r))^2)
114  end
115
116  function psil2(z,r,Q2)
117      return 8*alphaem/pi^2*Q2*z^2*(1-z)^2*(besselk(0,epsil(z,Q2)*r))^2
118  end
119
120  function psi2(r,Q2)
121      INT=0
122      for k in 1:nz+1
123         z=zfield[k]
124         INT+=(psit2(z,r,Q2)+psil2(z,r,Q2))*wz[k]
125      end
126      return INT
127  end
128  function Yt(Y,Q2)

```

```

129     if Y-log(1+4*mf^2/Q2)>0
130         return Y-log(1+4*mf^2/Q2)
131     else
132         return 0
133     end
134 end
135
136 F2=zeros(nh,4)
137
138 @time begin
139
140 for i in 1:nh
141     Y=Yfield[i]
142     for j in 1:4
143         Q2=Q2s[j]
144         for m in 1:nr+1
145             r1=rint[m]
146             F2[i,j]+=Q2*sig0/(2*pi*alphaem)*10^(2*r1)*psi2(10^(r1),Q2)*
N(10^(r1),Yt(Y,Q2))*wr[m]
147         end
148     end
149 end
150
151 end
152
153 figF=figure("F2")
154 p1=semilogy(Yfield,F2[:,1],color="green",linestyle="--",label=L"$Q
^2=0.2$ $\mathrm{GeV}^2$")
155 p2=semilogy(Yfield,F2[:,2],color="black",linestyle="--",label=L"$Q^2=2
$ $\mathrm{GeV}^2$")
156 p3=semilogy(Yfield,F2[:,3],color="red",linestyle="--",label=L"$Q^2=20$
$\mathrm{GeV}^2$")
157 p4=semilogy(Yfield,F2[:,4],color="blue",linestyle="--",label=L"$Q
^2=200$ $\mathrm{GeV}^2$")
158
159 xlabel(L"$Y=\ln 1/x$")
160 ylabel(L"$F_2(x,Q^2)$")
161 legend(loc="upper left",fancybox="true")
162 figF.canvas.draw
163

```

## Literatura

- [1] Particle Data Group (Tanabashi M. *et al*): "Review of Particle Physics", Phys.Rev. D98 (2018) no.3, 030001
- [2] Thomson, M.: "Modern Particle Physics" (2013), Cambridge University Press
- [3] Peskin, M.E., Schroeder, D.: "An Introduction to Quantum Field Theory" (1995), Addison-Wesley Publishing Company
- [4] Gelis, F.: "Color Glass Condensate and Glasma" (2012), <https://arxiv.org/pdf/1211.3327v2.pdf>, (27.7.2019.)
- [5] Taels, P.: "Quantum Chromodynamics at small Bjorken- $x$ ", doktorski rad, Antwerpen: Odsjek za fiziku (2017)
- [6] Lappi, T.: "Production of gluons in the classical field model for heavy ion collisions." Physical Review C 67.5 (2003): 054903.
- [7] Lappi, T.: "Classical chromodynamics and heavy-ion collisions" (2005), arXiv:hep-ph/0409087, (2.8.2019.)
- [8] Krasnitz, A.: Venugopalan R.: "Non-perturbative computation of gluon mini-jet production in nuclear collisions at very high energies", Nuclear Physics B 557.1-2 (1999): str. 237-270.
- [9] Iancu, E. *et al.*: "The Color Glass Condensate", Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.60: (2010), str. 463-489
- [10] Venugopalan, R.: "From Glasma to Quark Gluon Plasma in heavy ion collisions", J.Phys.G35:104003, (2008)
- [11] McLerran, L.: "The Color-Glass Condensate and the Glasma: Two Lectures" (2008), arXiv: 0804.1736v1 (2.8.2019.)
- [12] Popov, A.: "Wave function derivation of the JIMWLK equation" (2008), arXiv[hep-ph]:0806.3170v2 (3.8.2019.)
- [13] Kovchegov, Y., Levin, E.: "Quantum Chromodynamics at High Energy" (2012), 1st ed. Cambridge University Press

- [14] Altinoluk, T., *et al.*: "Eikonal but not: a complementary view of high energy evolution" (2008), Phys.Lett.B659: str. 144-148
- [15] Cepila, J., Contreras, J.G.: "Rapidity dependence of saturation in inclusive HERA data with the rcBK equation" (2016), arXiv:hep-ph/1501.06687v3
- [16] Matas M., Cepila J., Contreras J.G.: "Numerical precision of the solution to the running-coupling Balitsky-Kovchegov equation", EPJ Web of Conferences 112, 02008 (2016)
- [17] Albacete, J.L., *et al.*: "AAMQS: A non-linear QCD analysis of new HERA data at small-x including heavy quarks", Eur.Phys.J. C71 (2011) 1705
- [18] The H1, ZEUS Collaborations: "Combined Measurement and QCD Analysis of the Inclusive ep Scattering Cross Sections at HERA", JHEP 1001:109, (2010)
- [19] Kamiński B., Szufel P.: "Julia 1.0 Programming Cookbook" (2018), 1st ed. Birmingham: Packt Publishing
- [20] Natsuume, M.: "AdS/CFT duality user guide" (2015), 1st ed., Springer Japan
- [21] Fukushima K., Hatsuda T.: "The phase diagram of dense QCD", Rept.Prog.Phys.74:014001 (2011)
- [22] Stöckinger, D.: "Gleichungen und Herleitungen zur Supersymmetrie", <https://iktp.tu-dresden.de/IKTP/Phaenomenologie/SUSYSkript2010.pdf>, (23.7.2019.)
- [23] Mađor-Božinović, M.: "Renormalizacijska grupa", Diplomski rad, Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet (2016)
- [24] Ellis, J.: "TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ" (2016), arXiv:1601.05437 (22.7.2019.)
- [25] Nottale L., "Scale relativity of the proton radius: solving the puzzle" (2019), arXiv:1904.05772 (23.8.2019.)