Funkcije i njihov grafički prikaz u srednjoškolskoj nastavi matematike

Terzić, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Terzić

FUNKCIJE I NJIHOV GRAFIČKI PRIKAZ U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. **________________________, predsjednik**
2. **________________________, član**
3. **________________________, član**
4. **________________________, član**

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. **________________________**
2. **________________________**
3. **________________________**
4. **________________________**

Goethe je jednom prilikom izjavio: „Ako se prema pojedincu odnosiš kao da je ono što treba i što može biti, on će i postati što treba i što može biti.” Ono što sam ja danas, osim svojim roditeljima i sestrama, mogu zahvaliti i učiteljima i nastavnicima koji su me pratili kroz cijeli period moga školovanja. Hvala mojoj učiteljici razredne nastave Katici Pelivan koja mi je usadila temeljne moralne vrijednosti i zbog koje su mi prve školske godine ostale u nezaboravnom sjećanju. Hvala Olgi Hećimović, osnovnoškolskoj profesorici matematike zbog koje sam zavolio matematiku i sve vezano uz nju. Veliko hvala mojoj srednjoškolskoj razrednici i profesorici matematike Snježani Šišić. Entuzijazam kojim nam je predavala matematiku teško je riječima opisati. Zbog nje sam zavolio matematiku do te mjere da sam odlučio krenuti njezinim stopama i postati profesor matematike. Veliko hvala mojoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš koja je svojim trudom i pristupom učinila da dvije godine diplomskog studija postanu jedan od ljepših perioda moga života.

Na kraju, ovaj rad posvećujem doc.dr.sc. Stipi Vidaku i doc. dr. sc. Anti Mimici. Dvoje ljudi koji su tijekom mog fakultetskog obrazovanja ostavili najveći utjecaj na mene. Postali su mi inspiracija u privatnom, ali i poslovnom životu. Antina dobrota i spremnost na pomoć te Stipina brutalna iskrenost, kako bi rekao prof. Polonijo, i predavački entuzijazam se teško riječima mogu opisati. Počivajte u miru, ja Vas zaboraviti neću nikada.

SADRŽAJ

UVOD……1

1. Aktivna nastava i njezino praćenje……3
    1.1. Ishodi učenja……8
2. Svojstva funkcije……12
    2.1. Aktivnost „Funkcija ili ne?“……12
    2.2. Aktivnost „Jesam li ja graf funkcije ili ne?“……15
    2.3. Aktivnost „Injektivnost funkcije“……21
    2.4. Aktivnost „Rastem ili padam?“……26
3. Transformacije grafova elementarnih funkcija……32
    3.1. Aktivnost „Funkcijski Transformersi 1“……43
    3.2. Aktivnost „Funkcijski Transformersi 2“……58
    3.3. Aktivnost „Nacrtaj me!“……71
4. Crtanje grafa funkcije……80
    4.1. Zadatak „Padanje kamena“……81
    4.2. Zadatak „Tablica pretvorbe“……82
    4.3. Zadatak „Radio frekvencija i valna duljina“……83
    4.4. Zadatak „Mehanički sat“……84
    4.5. Zadatak „Pravilni poligoni“……86
    4.6. Zadatak „Dizajniranje spremnika za vodu“……88
    4.7. Zadatak „Točka bez povratka“……92
    4.8. Zadatak „Pomozi tvornici“……95
    4.9. Zadatak „Plima u luci“……98
    4.10. Zadatak „Bicikl i mrav“……101
5. Zadatci s mature……103

ZAKLJUČAK……112

LITERATURA……113

SAŽETAK……114

SUMMARY……115

ŽIVOTOPIS……116

UVOD

„Što će mi matematika u životu?“ pitanje koje je svaki nastavnik matematike čuo barem jednom u svome radnom vijeku. Stranica CareerCast svake godine objavljuje popis poslova u Americi koji su najbolje plaćeni te za koje je najveća potražnja. Na prvom mjestu 2017. godine bio je posao statističara. Među prvih 10 poslova našlo se još pet poslova koji su usko vezani za matematiku s time da se na sedmom mjestu našao upravo posao matematičara. U posljednjih nekoliko godina u Hrvatskoj se populariziralo pitanje važnosti matematike, ali i cijelog STEM područja. Novinske stupce pune članci koji govore o mnogim područjima primjene matematike. „Odjednom“ smo postali svjesni kako matematika igra važnu ulogu u stvarnome životu.

Sada kada smo napokon kao društvo postali svjesni važnosti matematike, postavlja se sljedeće logično pitanje: „Kako učiti i naučiti matematiku?“ Prema rezultatima PISA 2015 testova pokazuje se da hrvatski učenici i dalje ostvaruju ispodprosječne rezultate među onima iz drugih europskih zemalja koje sudjeluju u testiranju. Prema zaključku Nacionalnog centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, ne znači da naši učenici nemaju znanja, već da oni svoja znanja ne znaju primijeniti. Jednostavan primjer iz prakse je taj da učenici vrlo lako znaju izračunati nultočke polinoma drugog stupnja. Međutim, ako ih pitate za koje argumente vrijednost kvadratne funkcije je nula, vrlo vjerojatno neće znati što ih pitate. Uvrštavanje koeficijenata u formulu nije suština matematičkog rasuđivanja, ali razumijevanje što su to nultočke, jest. Drugim riječima automatizam rješavanja zadataka bez ikakvog razumijevanja nije cilj podučavanja matematike. Danas imamo aplikacije koje rješavaju zadatke i daju kompletni postupak kako se došlo do rješenja. Moguće je dobiti rješenje jednadžbe koja se prethodno uslika pametnim telefonom. Cilj podučavanja matematike je da učenici nakon svoga školovanja mogu primijeniti stečena znanja u stvarnome životu. Upravo na primjeni i znanja se temelji ovaj diplomski rad, a tema kojom ćemo se baviti u njemu su funkcije i njihov grafički prikaz.

Mnogi učenici su vrlo dobro upoznati s grafovima funkcija, tablicama i algebarskim zapisima funkcija. Isto tako mogu vrlo precizno crtati, nalaziti vrijednosti za koje funkcija postoji, izračunavati tj. određivati kompozicije dviju funkcija. Međutim popriličan broj učenika nije u mogućnosti interpretirati značajke i informacije koje se također nalaze u grafu. Upravo od takvih tipova zadataka se sastoji PISA test. U njemu se ne traži da se nacrta graf linearne funkcije, već da se situacija iz svakodnevnog života interpretira grafom ili da se iz grafa opiše situacija koja je skrivena u njemu. Nije ni čudno što naši učenici nisu u mogućnosti rješavati takve zadatke jer ih mi kao nastavnici vrlo rijetko stavimo u situaciju u kojoj bi oni dobili priliku tu situaciju opisati matematički. Kada učimo strani jezik, od učenika se zahtjeva da nauče određena gramatička pravila i riječi, međutim vrlo brzo nakon toga pruža im se prilika da se izraze koristeći naučena pravila i riječi. Kažu da se strani jezik najbolje uči kroz komunikaciju s drugim ljudima. Upravo taj model učenja bi bilo dobro iskoristiti u matematici, gdje će učenici moći opisati rješenje koje su dobili te na taj način pokazati da razumiju ono što su naučili. Da bi učenici znali tj. bili kvalitetno osposobljeni za rješavanje takvih zadataka od ključne je važnosti promijeniti dosadašnji način podučavanja matematike.

Oblik sata u kojemu nastavnik piše po ploči, a učenici samo prepisuju je zastario. Poučavanje matematike se mijenja i pozitivno je što nastavnički smjerovi na fakultetima prate taj trend. Buduće nastavnike se osposobljava da znaju stvoriti situaciju na satu u kojoj će učenik samostalno ili u grupnom radu kroz aktivnosti otkriti nova znanja, ali ih i primijeniti. Sve se više pažnje posvećuje grupnom radu jer upravo u takvom obliku rada učenik može obrazložiti svome partneru iz grupe dobiveno rješenje. Upravo takve aktivnosti koje potiču učenika na razmišljanje i povezivanje ćete pronaći u ovome radu. Aktivnosti i nastavni materijali vezani su uz funkcije u srednjoškolskoj nastavi matematike.

Diplomski rad sastoji se od pet poglavlja. U prvom poglavlju obrađuje temu važnosti aktivne nastave i konstantnog praćenja procesa aktivne nastave tzv. formativnog vrednovanja. U drugom, ciljeve koje želimo postići u procesu učenja tj. o ishodima učenja koji su u nastavnom planu i programu te u kurikulumu vezani uz temu funkcije i grafa funkcije. Transformacije grafova je tema trećeg poglavlja. U njemu su aktivnosti koje se mogu primijeniti u nastavi matematike pošto u srednjoškolskoj planu i programu se ta tema pojavljuje vrlo malo ili nimalo. Četvrto poglavlje sadrži u sebi primjere zadataka iz svakodnevnog života. Cilj je da učenici pokušaju te zadatke modelirati matematičkom formulom i uz pomoć grafa te na taj način doći do rješenja. Isto tako sadrži i zadatke u kojima je zadan graf pojedine funkcije te iz njega uočiti podatke koji su nam potrebni za rješavanje problema. U petom, ujedno i zadnjem poglavlju ovoga rada nalaze se zadatci s državne mature u kojima se traži znanje iz dijelova matematike koji su spomenuti u ovome radu.

1. Aktivna nastava i njezino praćenje

Kada biste mogli obući nevidljivi plašt i neprimjetno ući u bilo koji razred osnovne ili srednje škole u Hrvatskoj, velika je vjerojatnost da ćete prisustvovati frontalnom obliku nastave. To je predavački oblik nastave u kojem nastavnik neposredno poučava zajednički sve učenike. Ako bi nastavni sat mogli zamisliti kao kazališnu predstavu, sva pažnja i svi reflektori bili bi usmjereni prema nastavniku tj. nastavnik je u centru pažnje cijele priče. Učenici su publika koja sjedi u mraku te sluša i gleda što nam glavni glumac ima za reći. Mnogi stručnjaci iz područja odgoja i obrazovanja takav oblik nastave nazivaju i tradicionalnim. Razlog tome je taj što je on prisutan u našem obrazovnom sustavu jako dugo i na određeni način je zaista postao tradicija i običaj. Svi znamo da običaje treba čuvati i održavati, međutim u ovome slučaju ne.

Danas je sve manje argumenata koji sa stručne strane mogu opravdati frontalni tj. predavački oblik nastave. Jedan od njih je da upravo frontalnom nastavom možemo na brzi i ekonomičan način ispredavati određeno gradivo. Nastavnici frontalni oblik nastave pogotovo koriste kada kasne s gradivom i kada moraju u vrlo kratkom vremenu „objasniti“ veliku količinu gradiva. Rezultat svega toga je da većina učenika ne uspije razumjeti ono što je nastavnik pokušao objasniti jer svu svoju pažnju je usmjerio na brzo prepisivanje s ploče u bilježnicu. Struka je shvatila da takav način predavanja ne daje željene rezultate i da je krajnje vrijeme da frontalna nastava bude prisutna u podučavanju matematike, ali u manjem obujmu nego što je trenutno. Dakle ne izbaciti frontalnu nastavu nego ju smanjiti.

Često se može čuti pitanje: „Koja je alternativa frontalnoj nastavi?“ Za frontalnu nastavu ne treba postajati alternativa, treba samo što više koristiti oblike nastave u kojoj će učenik biti u centru pažnje i zbivanja, a nastavnik moderator cijelog procesa. Predavačka nastava ne osigurava dovoljno vremena za samostalne aktivnosti učenika. Istraživanja su pokazala da učenje otkrivanjem i kroz aktivnosti ostavlja dublji kognitivni trag na učenika. Drugim riječima, učenici će lakše razumjeti, ali i zapamtiti formulu za kvadrat binoma ako mu osigurate uvjete u kojima će si oni taj kvadrat binoma geometrijski interpretirati, a ne da im se samo napiše formula na ploču. Matematika je znanost koja nije nastala preko noći, već razvijanjem i otkrivanjem kroz povijesti. Upravo se na otkrivanju matematike temelji moderan oblik podučavanja matematike.

Obrazovanje bi trebalo pratiti aktualne trendove. Na žalost u Hrvatskoj to nije slučaj jer promjene koje su potrebne napraviti ne mogu se provesti zbog tromosti sustava, ali i uplitanja politike u obrazovanje. Međutim nije sve tako sivo. Ako ne možete ništa učiniti na makro razini, spustite se nekoliko stepenica niže i probajte isto to učiniti na mikro razini. Vrlo brzo će se vidjeti rezultati. Upravo takvom načinu su pristupili određeni fakulteti u Hrvatskoj, pa tako i Matematički odsjek PMF-a u Zagrebu. Zahvaljujući velikom trudu pojedinih profesora na fakultetu, studentima, budućim nastavnicima, počeli su se prikazivati i drugi, suvremeni oblici podučavanja matematike. Svakom generacijom imamo sve više mladih profesora koji ulaze u škole i na taj način mijenjaju zastarjeli i tradicionalni način poučavanja s novim, dinamičnijim.

Nove generacije nastavnika matematike su osposobljeni da aktivnom nastavom u razredu stvore uvjete u kojima će učenici postati **konstruktori vlastitog znanja**. To je put kojim moramo ići. Nekada je taj put težak i trnovit upravo zbog gore navedenog razloga gdje politika nema sluha za struku i gdje su uvjeti za ostvarivanje takve nastave vrlo teški, no ni jedna promjena se nije dogodila preko noći, treba biti ustrajan i entuzijastičan. Učenici bi trebali biti centar cijelog procesa podučavanja u kojem se ne pamte činjenice već se pred učenike postavi problem kojeg rješavaju i dolaze do rješenja uz smjernice nastavnika. Takav oblik nastave zovemo **aktivna nastava** i ona je uglavnom koncipirana u tri oblika rada: individualni rad, suradnički rad u paru i suradnički rad u skupinama. Svaki od ta tri oblika rada ima svoje prednosti, a glavni cilj svakog oblika je postići kod učenika „aha efekt".

Individualni rad je možda najveći izazov kako za učenika tako i za nastavnika. Za učenika jer mora samostalno doći do traženih i željenih zaključaka koristeći svoje trenutno znanje iz matematike, ali isto tako to je izazov i za nastavnika koji mora smisliti aktivnost sa kvalitetnim smjernicama koje će voditi učenika do cilja.

Rad u paru ili u skupinama ima mnogo prednosti. Grupni rad kod učenika potiče **kritičko razmišljanje**. Kada pred grupu stavite problem koji moraju riješiti, prva reakcija je komunikacija, organizacija, podjela uloga i „festival ideja". Dolazi do razmjene različitih znanja i mišljenja. Različita znanja u skupinama je prednost. Prvenstveno zbog toga što svaki član grupe mora znati argumentirati i objasniti svoje rješenje problema. Druga stvar je što ostali članovi moraju znati slušati onoga tko izlaže. Na taj način dolazi do kritičkog osvrta kako prema svojem, tako i prema drugim mišljenjima. Argumentiraju zašto je pojedina ideja bolja od druge i na taj način uče jedni od drugih. Međusobnom komunikacijom dolaze do najbolje ideje za rješavanje problema, ali i preuzimaju zajedničku odgovornost ako ih na kraju ta ideja ne dovede do cilja. Uloga nastavnika i u ovome obliku nastave je velika. Nastavnik mora biti kao redatelj koji će prije početka predstave postaviti i osigurati sve uvjete tako da kad predstava počne glavnu ulogu preuzimaju učenici, a on sa strane gleda i uživa u rezultatima svoga truda. Prvo na što nastavnik mora paziti je heterogenost skupine. Bilo bi dobro da se skupina sastoji od učenika sa različitim znanjem matematike. Na taj način će se postići da se i oni učenici sa malo slabijim znanjem mogu uključiti u proces otkrivanja i rješavanja problema jer ih neće biti sram pitati kolegu iz grupe koji zna da mu objasni ono što mu nije jasno, dok je pitanje bi li to isto pitao profesora. Homogenost grupe bi se trebala izbjegavati jer ona grupa koja se sastoji od boljih učenika vrlo brzo će doći do rješenja dok grupa u kojoj su učenici koji nemaju potrebno znanjem možda i ne dođe do cilja. U jednom i u drugom slučaju nema kognitivnog napretka što je ujedno i cilj grupnog rada. Jedan od načina kako uključiti da svi sudionici odrade kvalitetno posao je taj da nastavnik osmisli aktivnosti koje zahtijevaju zajednički angažman svih u grupi i da aktivnost bude koncipirana tako da do jednog zaključka se ne može doći ako svaki pojedinac nije riješio svoj dio zadatka. Zadatci mogu biti različite težine zbog heterogenosti grupe. Na taj način i onome učeniku kojemu ne ide matematika dati ćemo vjetar u leđa jer je i on svojim rješavanjem jednostavnijeg zadataka pridonio rješenju glavnog problema.

Dakle, cilj aktivne nastave je stavljanje učenika u situaciju koja će izgraditi njegova razmišljanja, znanja, stavove, vještine i tehnike koje će mu kasnije koristiti u svladavanju različitih problema iz svakodnevnog života. Isto tako osposobiti će ih da prepoznaju problem, matematički ga modeliraju, riješe ga uz pomoć matematičkih „alata“ te rješenje opet interpretiraju u duhu problema iz svakodnevnog života.

Vrlo važan faktor aktivne nastave je i praćenje njezinog procesa. Jedan od najvećeg minusa frontalne nastave je taj što nastavnik ne dobiva povratnu informaciju od učenika jesu li shvatili gradivo koje je on objašnjavao. Ako nastavnik obradi određeno gradivo, a većina učenika ga ne shvati već mora pomoć tražiti u nekim oblicima dodatne nastave pitamo se koja je poanta učenja i podučavanja. Nastavnicima bi povratna informacija trebala biti vrlo važan čimbenik u poučavanju jer na temelju toga mogu prilagođavati gradivo, način predavanja, ali i tempo. S druge strane učenici također mogu saznati kakvo je njihovo trenutno znanje i na kojim područjima ima još mjesta za napredak.

Kontinuirano praćenje učeničkog znanja kroz trajanje procesa učenja i aktivne nastave zove se formativno vrednovanje. Vrednovanje ne mora značiti ujedno i ocjena. Ocjena je samo krajnji rezultat. Cilj formativnog vrednovanja je ustvari povratna informacija učeniku koja bi ga trebala potaknuti da promišlja o njegovu znanju. Isto tako ta povratna informacija pomaže nastavniku i daje mu informaciju o kvaliteti njegovog rada, treba li možda ponoviti određeno gradivo i usporiti tempo ili može nastaviti raditi kao do sada jer njegov rad donosi dobre rezultate. Dakle, na temelju rezultata formativnog vrednovanja nastavnik može prilagoditi daljnje nastavne aktivnosti rezultatima formativnog vrednovanja. Postoji veliki broj strategija formativnog vrednovanja. Njihova glavna karakteristika je da ne uključuju ocjene. Ocjena može biti velika demotivacija i nelagoda za neke slabije učenike, ali isto tako i za vrlo dobre učenike jer će želja za dobrom ocjenom kod njih probuditi natjecateljski duh i tu dolazi do prestanka suradnje i gledanja svog kolege iz razreda kao konkurenciju. U hrvatskom obrazovnom sustavu ocjena je ispred znanja. Učenici uče zbog prosjeka, a ne zbog znanja stoga je vrlo važno da možemo dati povratnu informaciju učeniku bez korištenja ocjene. Upravo formativno vrednovanje i njegove strategije nam osiguravaju brzu povratnu informaciju bez uključivanja ocjena u cijelu priču. Postoje strategije iz kojih u vrlo kratkom vremenu možete vidjeti kako razred razmišlja. Jedna od takvih strategija je strategija četiri kuta ili strategija suglasnih krugova. Postavite pred razred neki matematički problem i ponudite četiri ideje ili rješenja tog problema. Ne moraju sve ideje i problemi biti točni. Zatim kažete razredu da onaj dio razreda koji se slaže s prvom idejom ode u jedan kut, onaj dio koji se slaže s drugom idejom u drugi kut i tako dalje. Vrlo brzo kao nastavnik dobijete uvid u način razmišljanja učenika iz razreda ili uvid u njihovo znanje. Još jedan plus ove strategije je taj što će učenici koji su odabrali isti kut početi međusobno komunicirati i kritički razmišljati zašto su svi baš odabrali tu ideju. U toj komunikaciji može doći do potvrde, ali i do promijene vlastitog mišljenja i samokritike samoga sebe i grupe. Na taj način je nastavnik bez gubljenja puno vremena i bez ocjena dobio uvid u trenutno znanje učenika te na temelju toga može odlučiti kako prilagoditi i oblikovati nastavak sata.

Na kraju ovog dijela poglavlja treba naglasiti da je nužno u nastavu matematike sve više uvoditi aktivnu nastavu. Vidjeli smo mnoge njezine prednosti naspram frontalne nastave koja je i dalje bitan faktor procesa učenja i mora biti, samo u smanjenom obujmu. Nastavnički smjerovi na PMF-u prate taj trend uvođenja aktivne nastave u proces obrazovanja i to je pozitivna stvar. Takav oblik nastave potiče učenika na razmišljanje, u grupnom radu uključuje sve učenike u nastavu, ohrabruje ih da postavljaju pitanja, promišljaju o svome znanju i stavovima, slušaju tuđa mišljenja i kritički se odnose prema tome. Isto tako brane i izražavaju, ali i objašnjavaju svoja mišljenja. Na taj način razvijaju jedan vrlo važan misaoni proces, a to je matematičko izražavanje. Konstantnim praćenjem aktivne nastave svi sudionici tog procesa, dakle i učenici i nastavnici dobivaju povratnu informaciju. Problem matematike je u tome što se gradivo konstantno nadograđuje. Nekada učenici dio gradiva, koji će im trebati za gradivo koje dolazi, ne nauče dobro ili ga nauče napamet bez ikakvoga razumijevanja. Vrlo brzo takav pristup dođe na naplatu. Gradivo matematike se u srednjim školama obrađuje vrlo brzo te nema mjesta u programu vraćati se na pojedino gradivo koje učenici nisu dobro razumjeli. Nastavnici većinom striktno prate korak s planom i programom i zbog svega toga dolazi da učenici gube korak s gradivom.

Svaki obrazovni sustav treba kontinuirano, u malim koracima usavršavati i oplemenjivati. Kakvo je stanje hrvatskog obrazovnog sustava između ostalog možemo vidjeti po rezultatima PISA testova u kojima su zadatci koncipirani na način da se problem iz svakodnevnog života modelira matematički, riješi, a rješenje interpretira opet u kontekstu tog početnog problema. Rezultati nam daju jasnu poruku kako naše obrazovanje ima mjesta za napredak. Dovoljno je da se krenu pratiti aktualni trendovi i potrebe gospodarstva i taj napredak bi vrlo brzo trebao biti vidljiv. Na vodećim svjetskim sveučilištima nastava se bazira na aktivnoj nastavi ili tzv. „case study“ problemu. Studente se podijeli u grupe, da im se aktualni problem uglavnom iz ekonomskog područja gdje će morati koristiti znanja iz više predmeta. Na taj način razmjenjuju znanja, uče raditi u timu i što je najbitnije, uče i napreduju. Upravo zbog toga je velika važnost uvođenja aktivne nastave u nastavu matematike i formativnog vrednovanja tj. konstantnog praćenja. No prije nego krenemo s provedbom tog procesa treba na samome početku postaviti ciljeve tj. što želimo postići. Sljedeće poglavlje govori upravo o tome, unaprijed postavljenim obrazovnim ciljevima koji su vrlo važni za praćenje i vrednovanje cijeloga procesa učenja.

1.1. Ishodi učenja

Prema definiciji, ishodi učenja su jasno i precizno napisane izjave o tome što bi učenik trebao znati, razumjeti, moći napraviti i vrednovati kao proces učenja. Važno je da ti unaprijed određeni ishodi učenja budu mjerljivi kako bi svi sudionici procesa učenja (učenik, nastavnik, roditelj) mogli odrediti u kojoj mjeri je ishod učenja ostvaren. Ishodi učenja iskazuju se aktivnim glagolima koji izražavaju učeničku aktivnost.

Pojam funkcije počinje se otkrivati već u osnovnoj školi i to u sedmom razredu, međutim gradivo koje obuhvaća funkcije obrađuje se u srednjoj školi. Drugim riječima, funkcije zauzimaju velik dio srednjoškolske nastave matematike. U ovome poglavlju prikazati ćemo ishode vezane uz funkcije, a koji su određeni Nacionalnim okvirnim kurikulumom za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje (NOK). NOK je temeljni kurikulumski dokument u Republici Hrvatskoj. Određuje bitne sastavnice odgojno – obrazovnog sustava, a veliki dio dokumenta je posvećen matematičkom području. U dokumentu imamo četiri odgojno – obrazovna ciklusa. Za stjecanje temeljnih kompetencija. Prvi ciklus obuhvaća prva četiri razreda osnovne škole tj. razrednu nastavu. Peti i šesti razred spadaju pod drugi, dok sedmi i osmi razred spadaju pod treći ciklus. Četvrti ciklus obuhvaća tri razreda srednjih strukovnih i umjetničkih škola, dok kod gimnazija obuhvaća sva četiri razreda. U dokumentu imamo istaknute dvije dimenzije matematičkog obrazovanja, a to su: matematički procesi i matematički koncepti. Procesi se odnose na opće matematičke kompetencije, a koncepti na znanje i vještine vezane uz konkretni matematički sadržaja. Procesi su: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje i primjena tehnologije dok su koncepti: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje, podatci i infinitezimalni račun. Ishodi učenja napisani su za svaki ciklus i dimenziju matematičkog obrazovanja posebno.

U nastavku slijede ishodi učenja iz NOK-a usko vezani uz pojam funkcije, grafa funkcije te modeliranje problema iz svakodnevnog života funkcijom i njezinim grafom i obrnuto, ali i vezani uz aktivnu nastavu, grupni rad, te matematičku komunikaciju. Ishodi su iz četvrtog ciklusa i to za gimnazije pošto ovaj rad obrađuje pojam funkcije i njezin graf u srednjoškolskoj matematici.

Matematički procesi:

1. Prikazivanje i komunikacija

   Učenici će:

   - organizirano prikazati matematičke objekte, ideje, postupke i rješenja riječima, slikama, crtežima, maketama, dijagramima, grafovima, listama, tablicama, brojevima, simbolima i misaono
   - odabrati i primijeniti prikladan prikaz u skladu sa situacijom i namjerom, povezati različite prikaze i prelaziti s jednih na druge

2. Povezivanje

   Učenici će:

   - uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikovati cjeline njihovim nadovezivanjem
   - povezati matematiku s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom u kući i zajednici te na radnomu mjestu i drugim odgojno-obrazovnim područjima

3. Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje

   Učenici će:

   - obrazložiti odabir matematičkih postupaka i utvrditi smislenost dobivenoga rezultata
   - kreativno, kritički i fleksibilno misliti
   - prepoznati utjecaj ljudskih čimbenika i vlastitih uvjerenja na zaključivanje

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

   Učenici će:

   - postaviti i analizirati problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, riješiti ga, te protumačiti i vrjednovati rješenje i postupak
   - modelirati situacije i procese iz drugih odgojno-obrazovnih područja te svakodnevnoga osobnoga, profesionalnoga i društvenoga života

MATEMATIČKI KONCEPTI

1. Algebra i funkcije

   Učenici će:

   - uvrstiti konkretne vrijednosti u formulu (osobito u funkciju zadanu formulom), izračunati vrijednost preostale veličine te u formuli izraziti jednu veličinu pomoću ostalih
   - opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti s jednoga od navedena četiri oblika na drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)
   - prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva
   - računski, grafički i uz pomoć računala, u skupu realnih brojeva riješiti linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe i sustave jednadžba
   - primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu

2. Oblik i prostor

   Učenici će:

   - rabiti koordinatne zapise točke, pravca i kružnice te primijeniti koordinatnu geometriju za prikazivanje i istraživanje svojstava geometrijskih oblika
   - prepoznati ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnomu okružju i umjetnosti te ih upotrijebiti za opis i analizu svijeta oko sebe

3. Podatci

   Učenici će:

   - prepoznati približnu linearnu vezu dviju varijabli, odrediti njezine koeficijente te ju rabiti pri modeliranju

4. Infinitezimalni račun

   Učenici će:

   - izračunati prirast i prosječni prirast tablično zadanih funkcija te jednostavnih formulom zadanih funkcija
   - pomoću derivacije ispitati tok i nacrtati graf polinoma, ponajprije kvadratnoga i kubnoga

Ovime završavamo uvodni dio rada u kojem se kroz različite primjere iz odgojno – obrazovnog procesa pokušalo objasniti važnost aktivne nastave, njezinog vrednovanja i praćenja, ali i mjerljivih ciljeva postavljenih na početku cijelog procesa. U sljedećem poglavlju počinje glavni dio ovoga rada, a to su aktivnosti kroz koje bi nastavnici uspjeli stvoriti atmosferu u razredu u kojoj bi učenici samostalno ili u grupi uspjeli otkriti i ostvariti postavljene ishode. Cilj ovog diplomskog rada je i da bude na određeni način priručnik srednjoškolskim nastavnicima na način da većinu aktivnosti iz ovoga rada slobodno primjene u nastavi.

2. Svojstva funkcije

Ovo poglavlje sadrži aktivnosti za motivaciju na početku sata. Svaka aktivnost ne traje duže od 10 minuta, a zamišljene kao ponavljanje pojma funkcije, pojma grafa funkcije te injektivnosti i monotonosti funkcije kroz grafički prikaz. Svaka aktivnost sadrži nastavni listić u kojeg učenik samostalno popunjava i na kraju rješenja provjerava sa kolegom iz klupe. Drugim riječima, isprepliće se samostalan i grupni rad učenika . Samostalno rješavanje listića također potiče učenika na razmišljanje jer ne može odmah tražiti pomoć kolege.. Diferencirana nastava u obliku samostalnog rada preporučljiva je u trenutcima otkrivanja osnovnih pojmova ili ponavljanja do sada naučenih bitnijih pojmova. Upravo na tome se temelje sljedeće aktivnosti u kojima će učenici kroz samostalno rješavanje nastavnih listića otkriti ili ponoviti osnovne pojmove i svojstva funkcije.

2.1. Aktivnost „Funkcija ili ne?“

Cilj aktivnosti: učenici će, samostalnim rješavanjem nastavnog listića, riječima interpretirati pojam funkcije na zadanim slikovnim karticama

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku samostalnog rada

Potreban materijal: nastavni listić za svakoga učenika

Tijek aktivnosti:

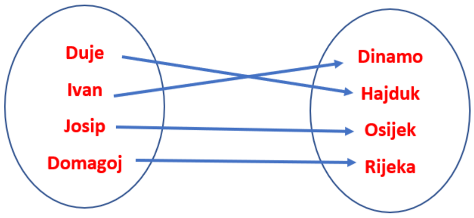
Nastavnik na početku sata, zajedno u diskusiji s učenicima, definira pojam funkcije, domenu i kodomenu. Na ploči zapisuje definiciju i naglašava važnost da se svakom elementu domene pridružuje jedan i samo jedan element iz kodomene. Dva su bitna dijela definicije:

- **svakom** elementu iz domene pridružuje se
- **točno** jedan element iz kodemene

Nakon uvodnog definiranja pojma funkcije te prikazivanja definicije funkcije u vizualnom kontekstu uz pomoć dijagrama, nastavnik dijeli svakom učeniku nastavni listić kojeg učenik samostalno rješava. Na kraju aktivnosti učenik uspoređuje svoja rješenja s rješenjima kolege iz klupe.

Slijedi primjer nastavnog listića te njegovo rješenje.

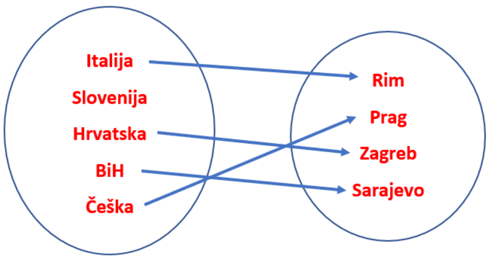
Kartica 1



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

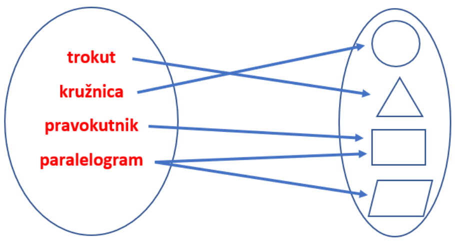
Kartica 2



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

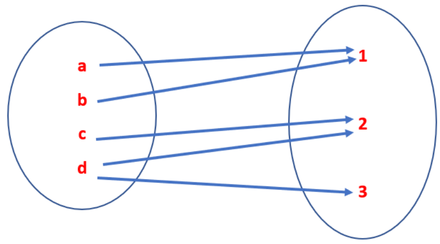
Kartica 3



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

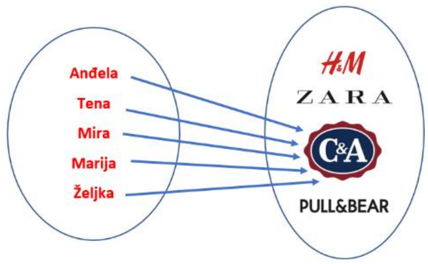
Kartica 4



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

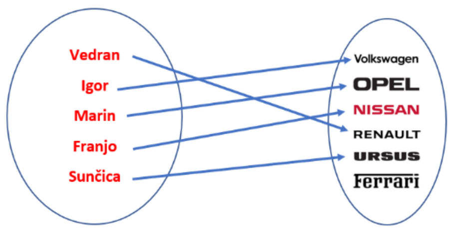
Kartica 5



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

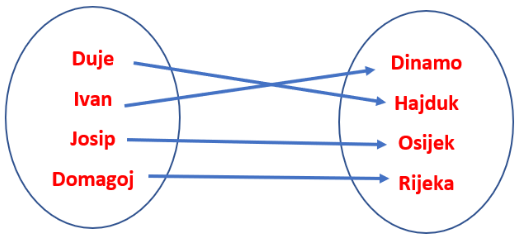
Kartica 6



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 1

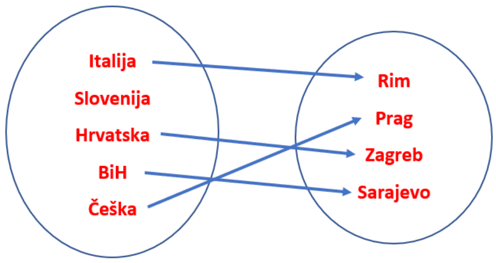


Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Svakom elementu iz domene pridružen je točno jedan element iz kodomene.

Kartica 2

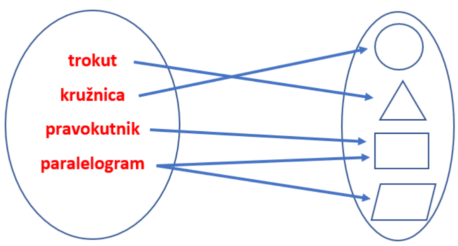


Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Svakom elementu domene mora biti pridružen element iz kodomene, a Sloveniji nije pridružen ni jedan element.

Kartica 3

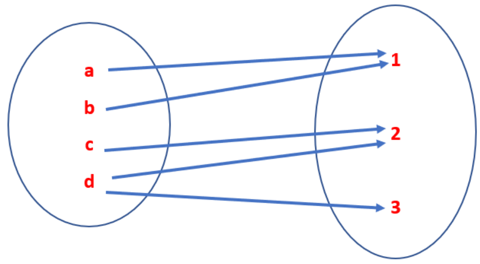


Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Elementu iz domene pridružena su **dva elementa** iz kodomene, a to ne zadovoljava definiciju funkcije.

Kartica 4

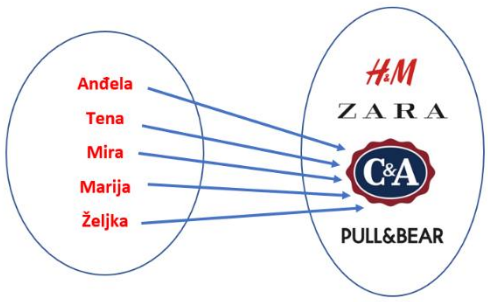


Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Slovu d su pridružena **dva elementa** iz kodomene, a to ne zadovoljava definiciju funkcije.

Kartica 5

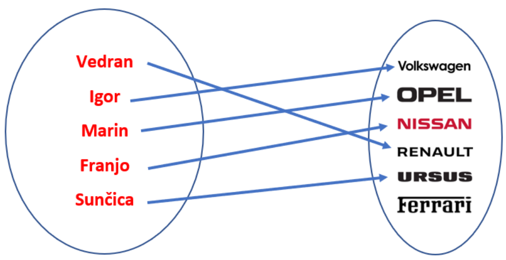


Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Učenici će uočiti da je svakom elementu iz domene pridružen isti element iz kodomene što zadovoljava definiciju f-je.

Kartica 6



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazana funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

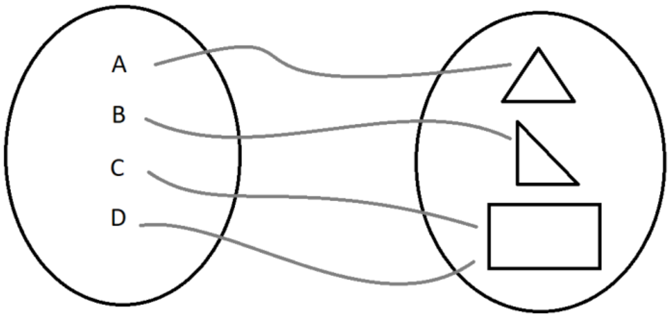
Svakom elementu domene je pridružen točno jedan element iz kodomene što zadovoljava definiciju funkcije.

2.2. Aktivnost „Jesam li ja graf funkcije?“

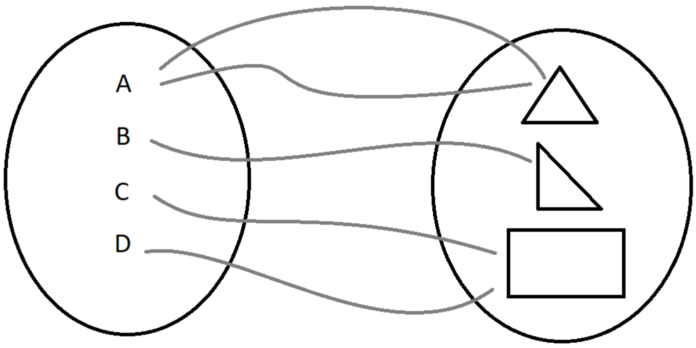
Cilj aktivnosti: učenici će, samostalnim rješavanjem nastavnog listića, formulirati kako proučiti je li zadani graf u koordinatnom sustavu zapravo graf funkcije (vertikalni test)

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku samostalnog rada

Potreban materijal: nastavni listić za svakoga učenika



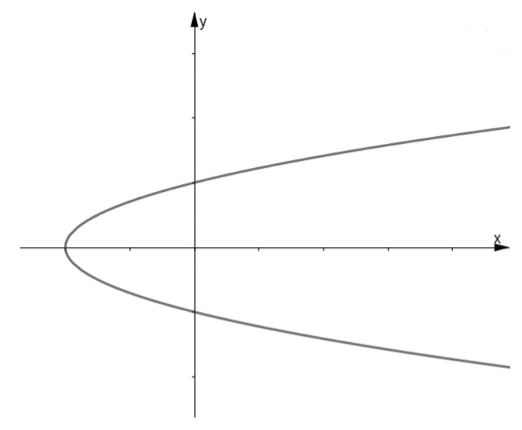
Tijek aktivnosti: Nastavnik prije početka aktivnosti, u diskusiji s učenicima, ponavlja definiciju pojma funkcije. Naglašava da je funkcija zapravo relacija između dva skupa (domene i kodomene) u kojoj se svakom elementu domene pridružuje točno jedan element iz kodomene. Nastavnik na ploči crta dva skupa koja predstavljaju domenu i kodomenu te shematskim prikazom daje jedan primjer preslikavanja koji zapravo prikazuje funkciju. Nakon primjera nastavnik ponovno u diskusiji s učenicima dolazi do pojma grafa funkcije. Naglašava važnost uređenog para u toj definiciji tj. da prvi član tog para je element domene, a drugi kodomene.



Zatim na ploči crta novi shematski prikaz preslikavanja te pokreće diskusiju s učenicima predstavlja li to preslikavanje zapravo funkciju. Zajedničkim dijalogom dolaze do zaključka da ne jer postoji element domene kojemu su pridružena dva elementa kodomene, a po definiciji to preslikavanje nije funkcija. Nakon toga, svakom učeniku, dijeli nastavni listić kojeg učenik samostalno rješava i na kraju uspoređuje rješenja s kolegom iz klupe i komentira rezultate s nastavnikom te zajednički dolaze do efikasne metode za brzu provjeru je li graf na slici zaista graf funkcije ili ne (vertikalni test).

Slijedi primjer nastavnog listića te njegovo rješenje. Na grafičkim karticama su prikazani grafovi tj. krivulje. Koristeći definiciju funkcije treba odrediti i obrazložiti predstavljaju li zadane krivulje zapravo grafove funkcija ili ne.

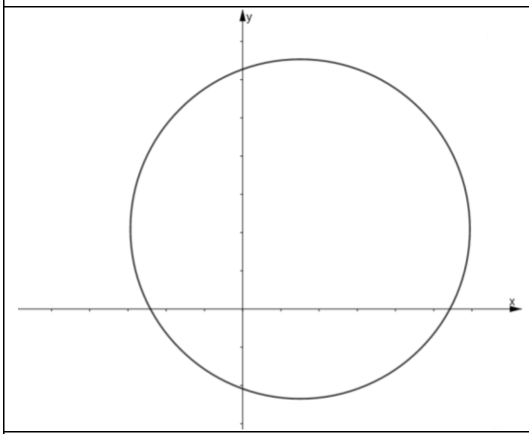
Kartica 1



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: [-2,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

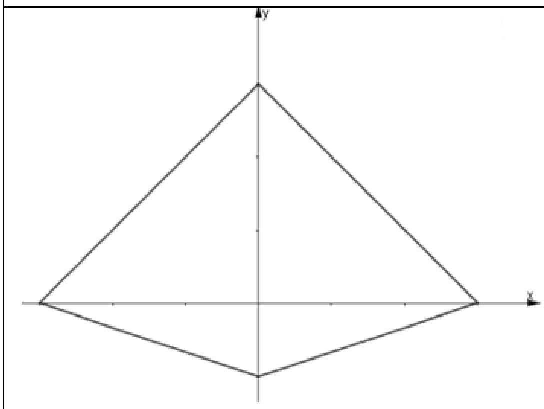
Kartica 2



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: [-3,6] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

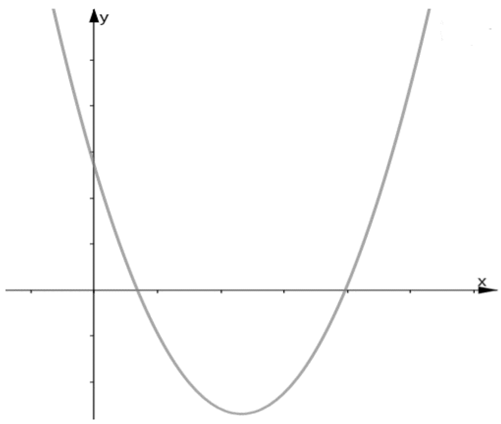
Kartica 3



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: [-3,3] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

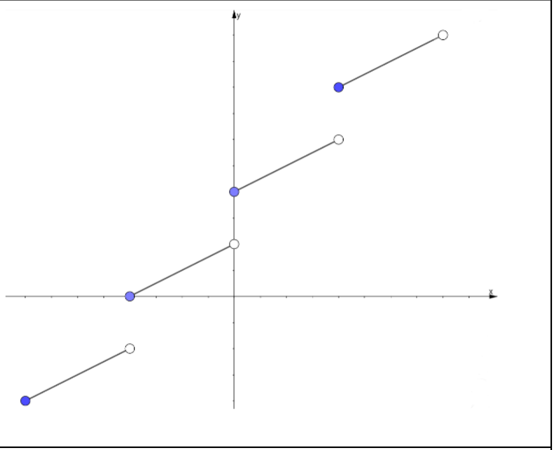
Kartica 4



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

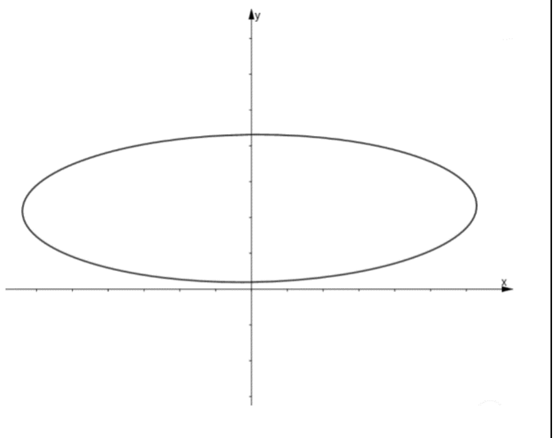
Kartica 5



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

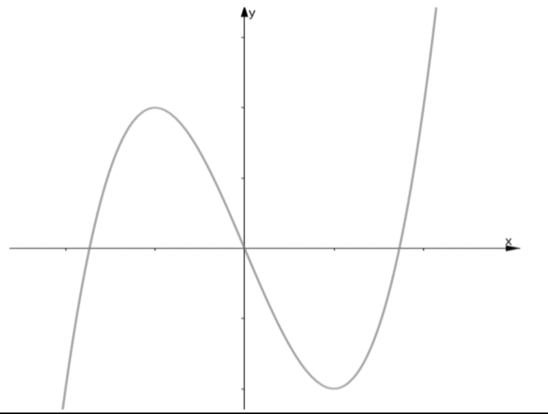
Kartica 6



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: [-6,6] \rightarrow \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

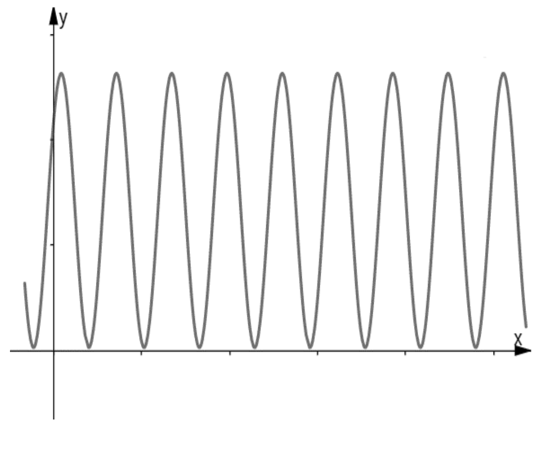
Kartica 7



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

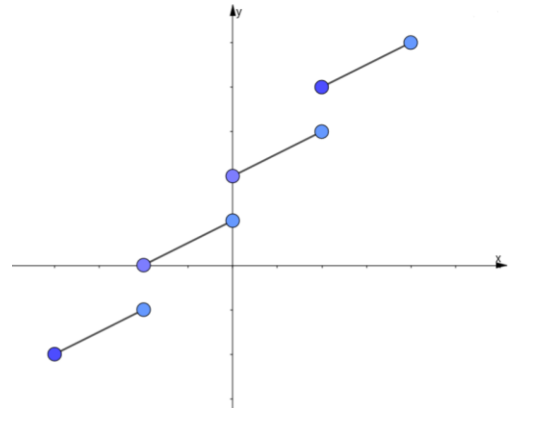
Kartica 8



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

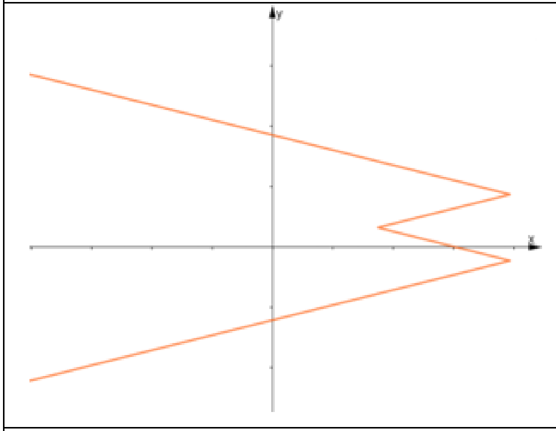
Kartica 9



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 10

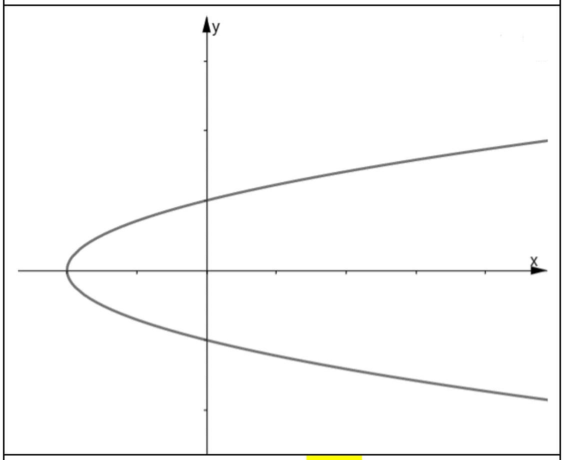


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \langle -\infty, 4] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

<u>Primjer **rješenja** nastavnog listića</u>

Kartica 1

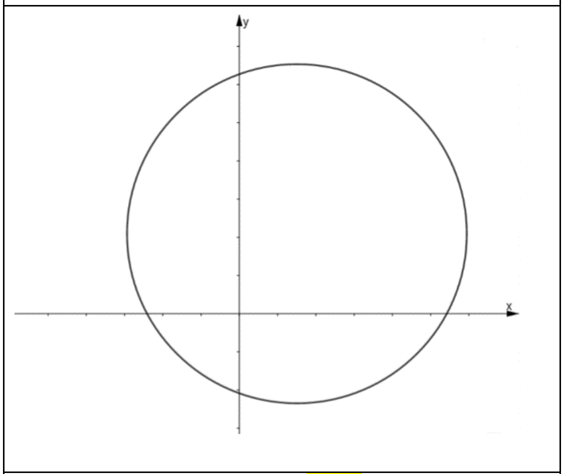


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: [-2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Funkcija je dobro definirana ako za svaki element domene postoji točno jedan element kodomene. Na ovoj krivulji možemo vidjeti da postoji element domene (x) kojem su pridružena dva elementa kodomene (y). Dakle ova krivulja ne predstavlja graf funkcije.

Kartica 2

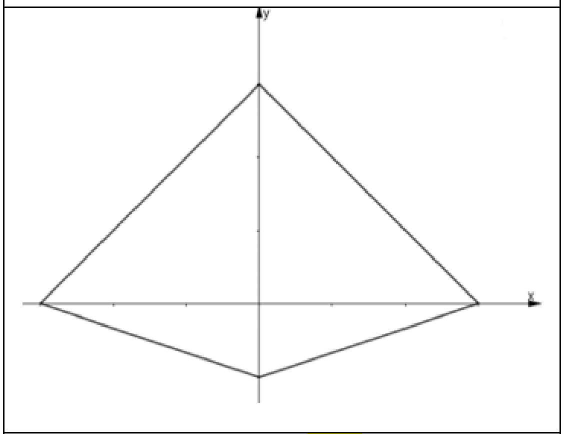


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: [-3, 6] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Funkcija je dobro definirana ako za svaki element domene postoji točno jedan element kodomene. Na ovoj krivulji možemo vidjeti da postoji element domene (x) kojem su pridružena dva elementa kodomene (y). Dakle ova krivulja ne predstavlja graf funkcije.

Kartica 3

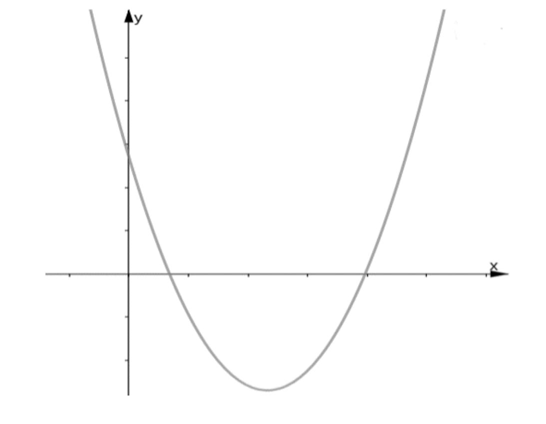


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Funkcija je dobro definirana ako za svaki element domene postoji točno jedan element kodomene. Na ovoj krivulji možemo vidjeti da postoji element domene (x) kojem su pridružena dva elementa kodomene (y). Dakle ova krivulja ne predstavlja graf funkcije.

Kartica 4

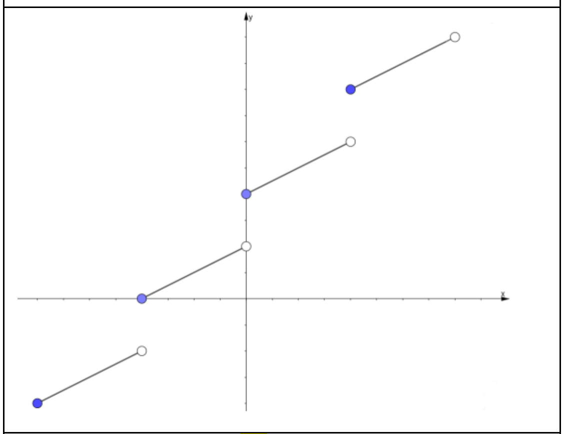


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

U ovome slučaju na krivulji ne možemo naći element iz domene kojemu je pridruženo više od jednog elementa iz kodomene. Drugim riječima ova krivulja predstavlja graf funkcije jer je svakom x-u pridružen točno jedan y.

Kartica 5

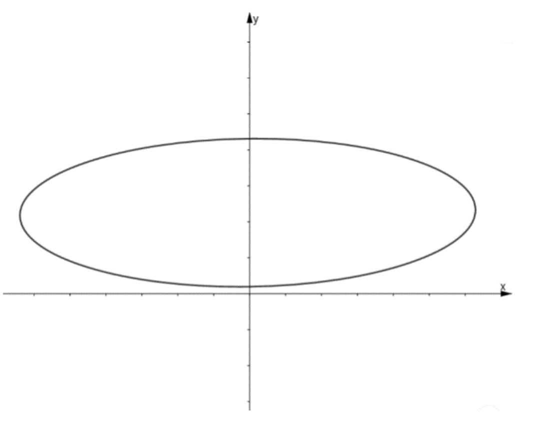


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Ovdje moramo obratiti pozornost na točke koje su ili pune ili prazne. Iako nam se čini da postoje elementi domene kojima su pridruženi više elemenata kodomene, to nije tako jer puna točka znači da je pridružena, a prazna znači da nije. Dakle ovo je graf funkcije.

Kartica 6

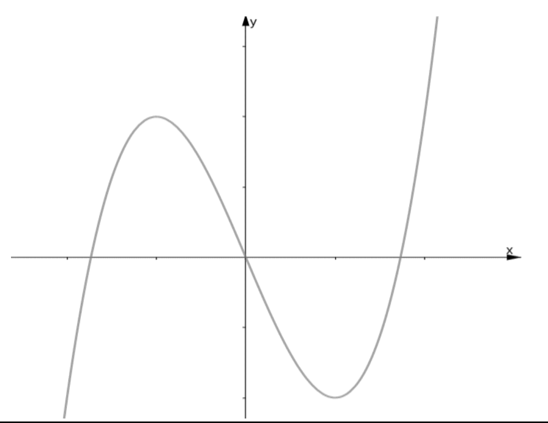


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f\colon [-6,6] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Funkcija je dobro definirana ako za svaki element domene postoji točno jedan element kodomene. No na ovoj krivulji možemo vidjeti da postoji element domene kojem su pridružena dva elementa kodomene. Nije graf funkcije.

Kartica 7

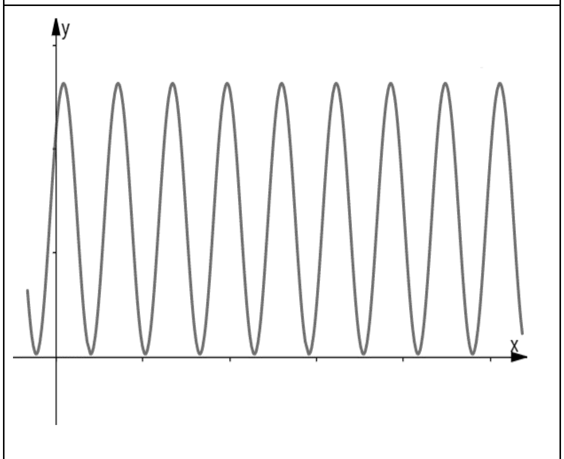


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

U ovome slučaju na krivulji ne možemo naći element iz domene kojemu je pridruženo više od jednog elementa iz kodomene. Drugim riječima ova krivulja predstavlja graf funkcije jer je svakom x-u pridružen točno jedan y.

Kartica 8

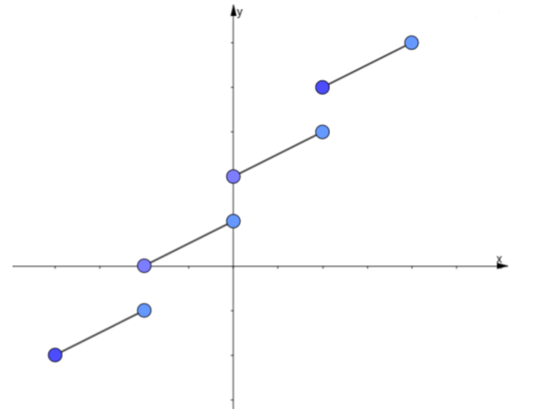


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Iako se malo teže vidi zbog „gustoće" krivulje, ova krivulja predstavlja graf funkcije jer je svakom elementu iz domene pridružen točno jedan element iz kodomene, dakle preslikavanje je funkcija, a skup uređenih parova (x,y) čine graf te funkcije.

Kartica 9

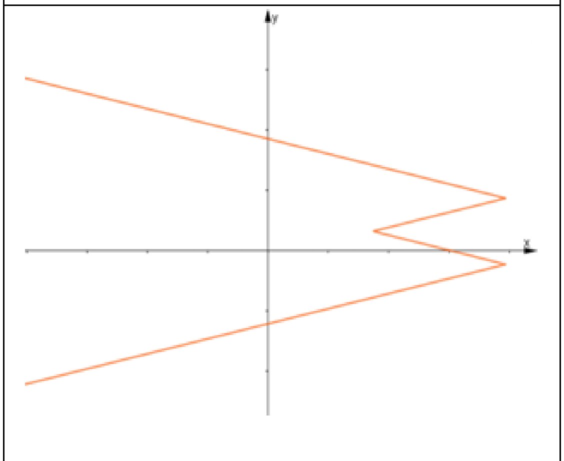


Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Obratimo pozornost na točke. Uočimo da su pune. Postoje elementi iz domene kojima su pridružena dva elementa iz kodomene. Na primjer argumentu $x = 0$ pridružene su dvije iste vrijednosti funkcije. Krivulja sa slike nije graf f-je.

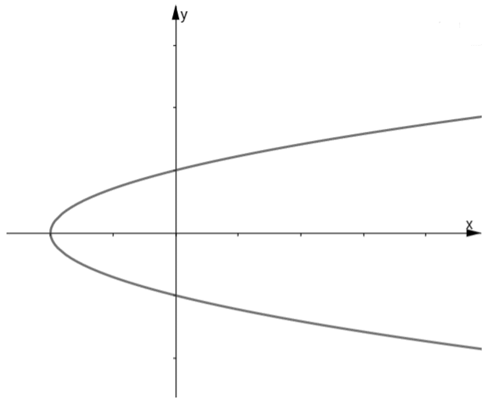
Kartica 10



Krivulja na slici JE / NIJE graf funkcije $f: \langle -\infty, 4] \to \mathbb{R}$ (zaokruži)

Obrazloženje:

Sa slike uočavamo da postoji element domene kojimu je pridruženo više od jednog elementa iz kodomene pa krivulja sa slike ne predstavlja graf funkcije jer uopće ne zadovoljava definiciju funkcije u kojoj se elementu domene pridružuje točno jedan element iz kodomene.



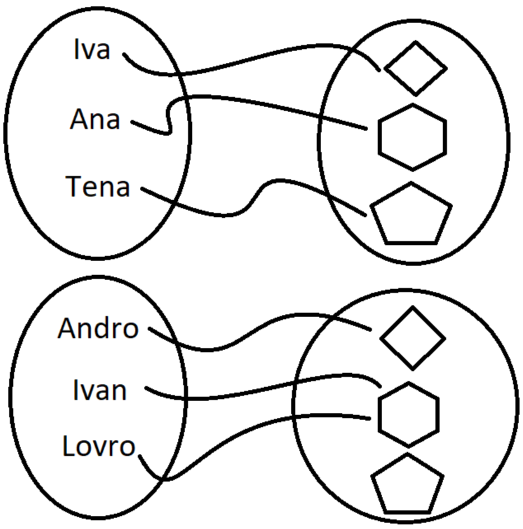
U prethodnoj aktivnosti vrlo važno naglasiti domenu i kodomenu potencijalne funkcije. U prvome primjeru (Kartica 1) domena funkcije je $[-2,+\infty\rangle$. Da smo stavili da je domena $\mathbb{R}$ mogli bismo odmah sa slike zaključiti da postoje elementi iz domene kojima nije pridružen niti jedan element iz kodomene pa po definiciju funkcije odmah znamo da se ne radi o grafu funkcije, a nije nam cilj da učenici dođu do zaključka tim putem, već preko formuliranja i korištenja vertikalnog testa. Uvijek treba postaviti aktivnost tako da „pogodi" ishod koji smo si postavili na početku.

2.3. Aktivnost „Injektivnost funkcije"

Cilj aktivnosti: učenici će, samostalnim rješavanjem nastavnog listića, riječima opisati i formulirati „horizontalni test"

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku samostalnog rada

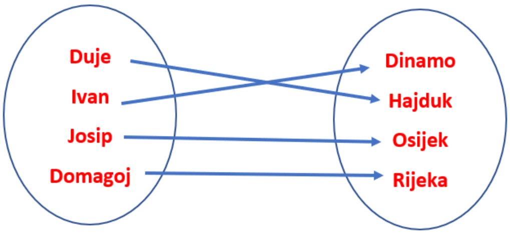
Potreban materijal: nastavni listić za svakoga učenika



Tijek aktivnosti: Nastavnik na početku sata u diskusiji s učenicima ponavlja definiciju funkcije. Nakon toga definira pojam injekcije funkcije, no radi lakšeg razumijevanja definicije skicira na ploči dva dijagrama, prvi koji predstavlja injektivnost preslikavanja i drugi koji ne preslikava. Isto tako naglašava važnost da pošto se radi o funkciji, svakom elementu domene mora biti pridružen jedan i samo jedan element kodomene i da su različitim elementima domene pridruženi različiti elementi kodomene. Nakon toga, svakom učeniku, dijeli nastavni listić kojeg učenik samostalno rješava i na kraju uspoređuje rješenja s kolegom iz klupe i komentira rezultate s nastavnikom te zajednički dolaze do efikasne metode za brzu provjeru predstavlja li graf funkcije injektivnu funkciju tj. formuliraju tzv. horizontalni test.

Slijedi primjer nastavnog listića te njegovo rješenje.

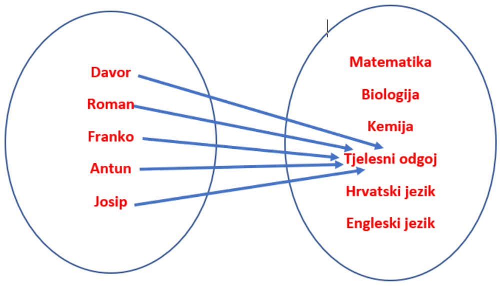
Kartica 1



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazano injektivno preslikavanje (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 2



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazano injektivno preslikavanje (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 3

$$f:\{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	2	1	1	4

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 4

$$f:\{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	4	3	2	1

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 5

$$f:\{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	2	2	2	2

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Kartica 6

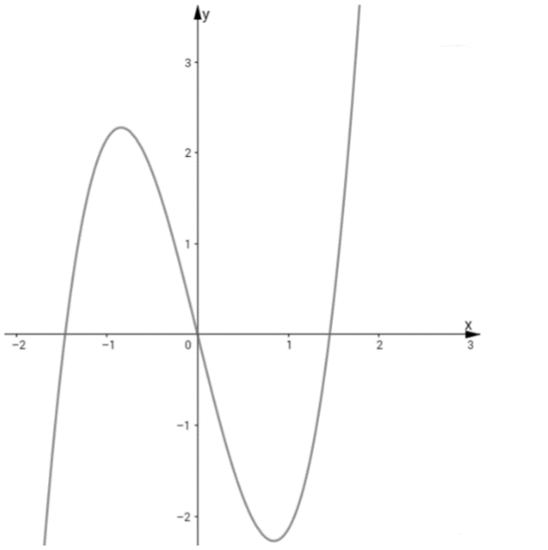
$$f:\{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	1	4	2	3

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

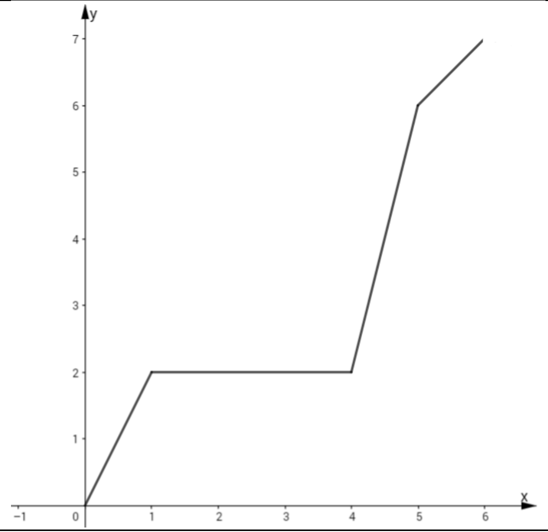
Kartica 7



Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

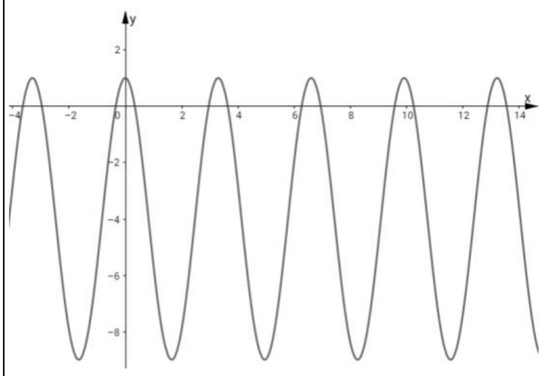
Kartica 8



Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

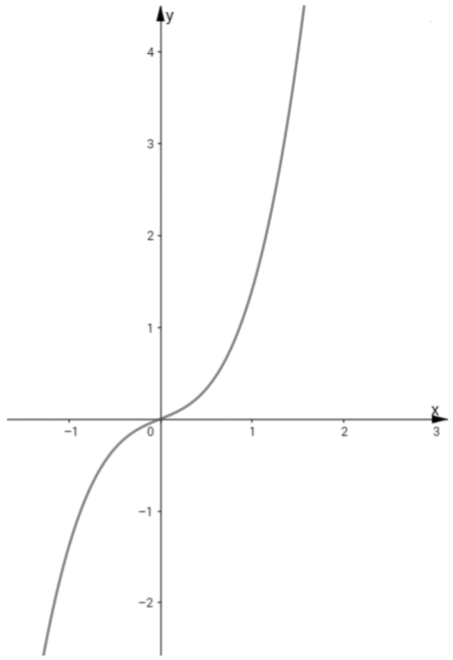
Kartica 9



Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

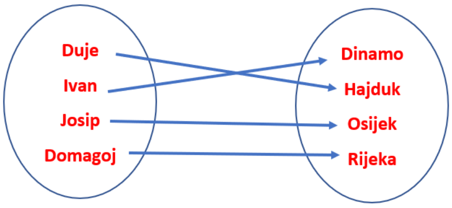
Kartica 10



Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

Kartica 1

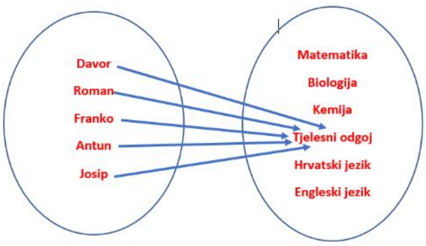


Ovim dijagramom JE / NIJE prikazano injektivno preslikavanje (zaokruži)

Obrazloženje:

Imamo 4 različite osobe kojima su pridružena 4 različita kluba, tj. svakoj osobi je pridružen drugi klub, a po definiciji to je injektivno preslikavanje.

Kartica 2



Ovim dijagramom JE / NIJE prikazano injektivno preslikavanje (zaokruži)

Obrazloženje:

Svakome učeniku je najdraži predmet tjelesni, tj. svim elementima iz domene je pridružen isti element iz kodomene, a to nije injektivno preslikavanje.

Kartica 3

$$f: \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	2	1	1	4

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Imamo dva različita elementa iz domene kojima je pridružen isti element iz kodomene, a to nije onda injektivno preslikavanje.

Kartica 4

$$f: \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	4	3	2	1

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Svakome elementu iz domene pridružen je različiti element iz kodomene, a to je injektivno preslikavanje.

Kartica 5

$$f: \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4\}$$

x	a	b	c	d
f(x)	2	2	2	2

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Imamo četiri različita elementa iz domene kojima je pridružen isti element iz kodomene, a to nije onda injektivno preslikavanje.

Kartica 6

$$f: \{a, b, c, d\} \to \{1,2,3,4\}$$

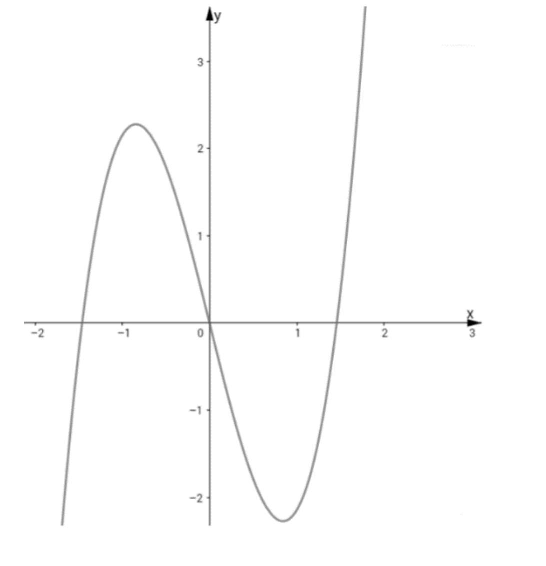
x	a	b	c	d
f(x)	1	4	2	3

Pravilom pridruživanja prikazanih tablicom JE / NIJE zadana injektivna funkcija (zaokruži)

Obrazloženje:

Svakome elementu iz domene pridružen je različiti element iz kodomene, a to je injektivno preslikavanje.

Kartica 7

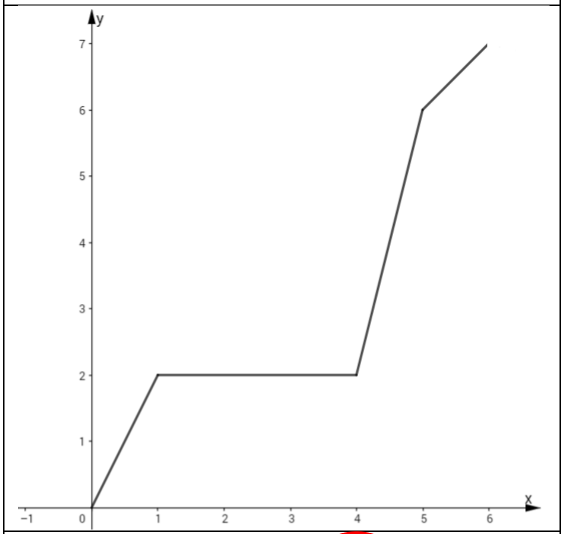


Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

Na grafu možemo naći dva elementa iz domene(x-evi) kojima je pridruženi isti element iz kodomene (y-oni).

Kartica 8

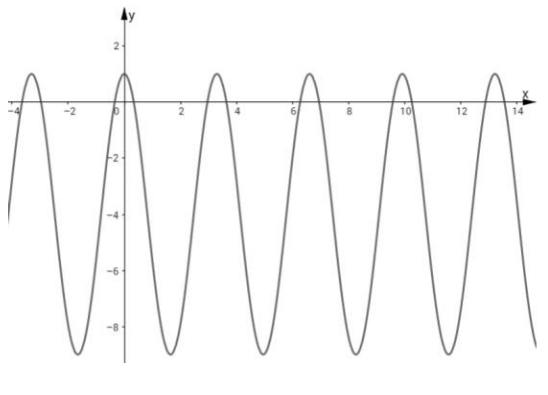


Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

Na intervalu $x \in [1,3]$ možemo naći tri cijela broja domene kojima je pridružen isti element kodomene. Dakle nemamo injektivno preslikavanje stoga ovim grafom nije prikazana injektivna funkcija.

Kartica 9

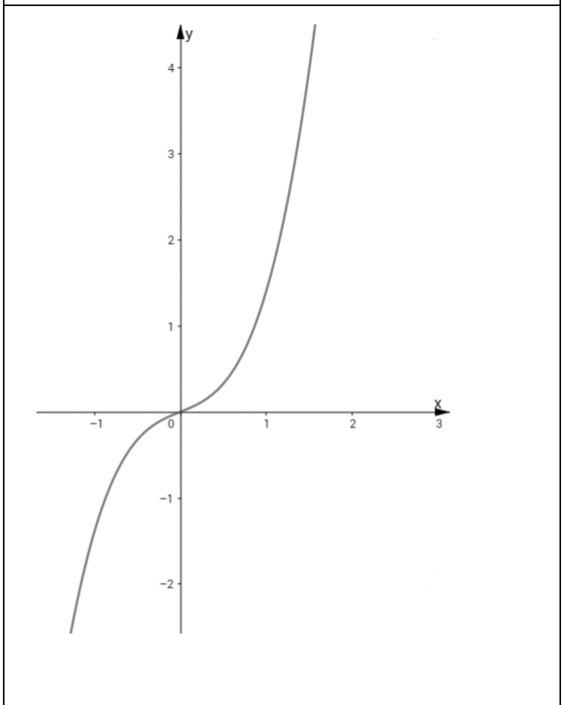


Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

Na grafu možemo naći dva elementa iz domene(x-evi) kojima je pridruženi isti element iz kodomene (y-oni).

Kartica 10



Ovim grafom JE / NIJE prikazana injektivna funkcija (obrazloži)

Obrazloženje:

Svakom elementu domene je pridružen jedan različiti element kodomene tj. ne možemo na slici naći dva različita x-a kojima je pridružena ista vrijednost y-ona. Dakle na slici se nalazi graf injektivne funkcije.

2.4. Aktivnost „Rastem ili padam?“

Cilj aktivnosti: učenici će, uparivanjem kartica uvježbati ispitivanje monotonosti funkcije

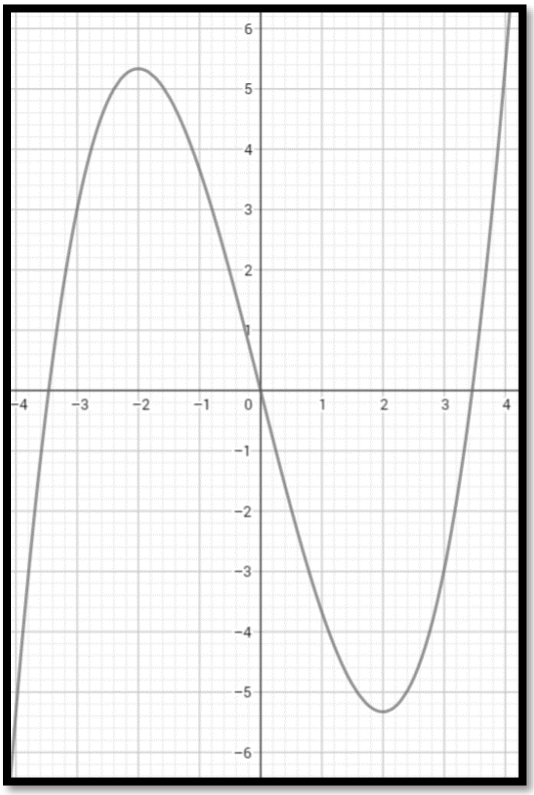
Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

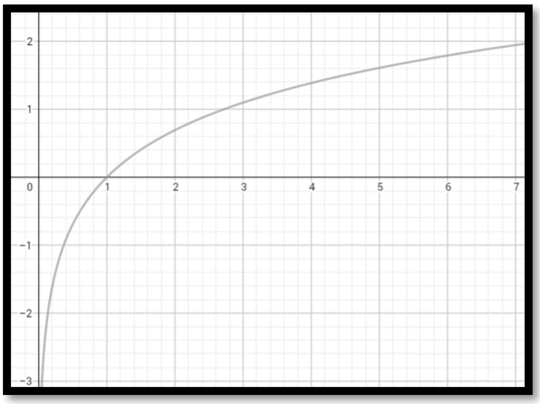
Potreban materijal: plastificirane kartice za svaki par učenika, projektor

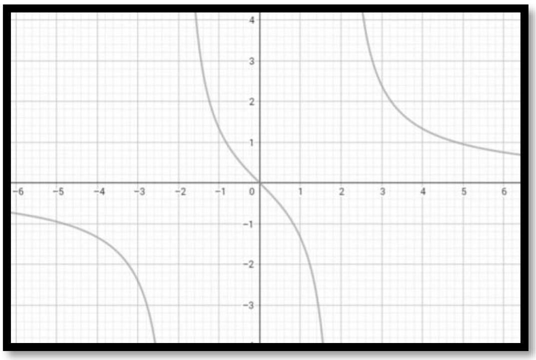
Tijek aktivnosti:

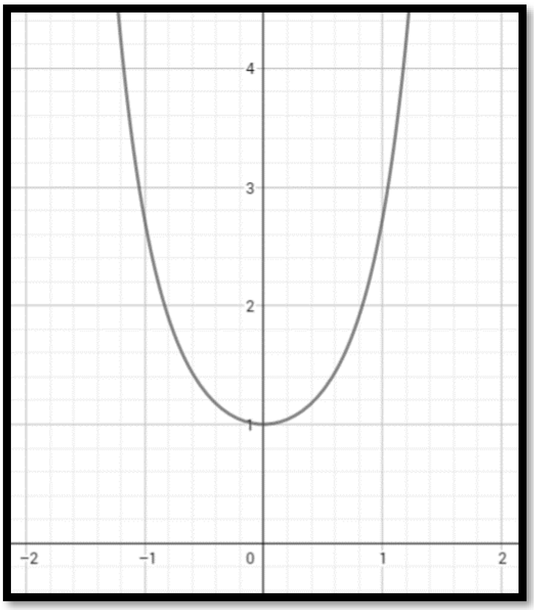
Prije početka same aktivnosti nastavnik uz kratku diskusiju s učenicima ponovi što znači da je funkcija monotona te osnovna svojstva monotonosti funkcije. Nastavnik piše na ploču zaključak diskusije: ako uzmemo dva argumenta x_1 i x_2 za koje vrijede nejednakosti $x_1 < x_2$ i $f(x_1) < f(x_2)$ onda zaključujemo da je funkcija rastuća. Obrnuti slučaj učenici sami moraju napisati u bilježnicu. Nastavnik kratkom šetnjom po razredu provjerava jesu li svi učenici točno napisali taj drugi slučaj. Nakon uvodnog ponavljanja osnovnih svojstava monotonosti funkcije, nastavnik dijeli razredni odjel u grupe od dva člana i to na način da jednu grupu sačinjavaju učenici koji sjede u istoj klupi. Učenik koji nema svog para, pridružuje se njemu najbližoj grupi. Nastavnik svakom paru dijeli kartice. Imamo dvije vrste kartica, grafove funkcija i intervale pada i rasta funkcije. Kartica sa intervalima pada i rasta funkcije ima više i to nastavnik naglašava učenicima. Cilj aktivnosti je da učenici upare karticu na kojoj se nalazi graf funkcije s karticom koja točno opisuje interval na kojem ta funkcija raste i pada. Višak kartica moraju odložiti u gornji desni rub stola. Za vrijeme trajanja aktivnosti, nastavnik cijelo vrijeme obilazi grupe i na taj način provjera kako napreduje aktivnost. Između članova grupe je dozvoljena komunikacija. Nakon što učenici završe sa uparivanjem, nastavnik uz pomoć projektora na platnu prikazuje na koji način su učenici trebali upariti kartice. Time aktivnost završava.

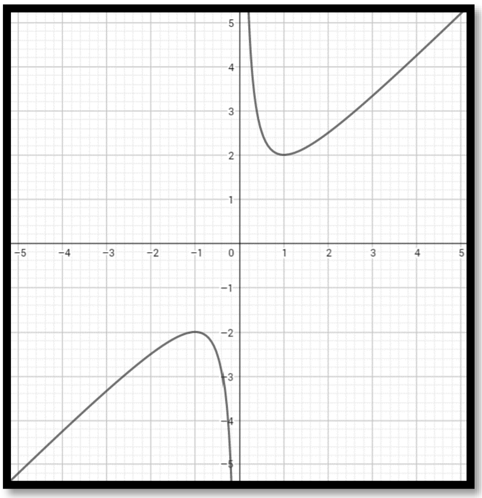
Na sljedećoj stranici su primjeri kartica s funkcijama i intervalima pada i rasta. Kartice je potrebno izrezati i po volji plastificirati radi očuvanja.

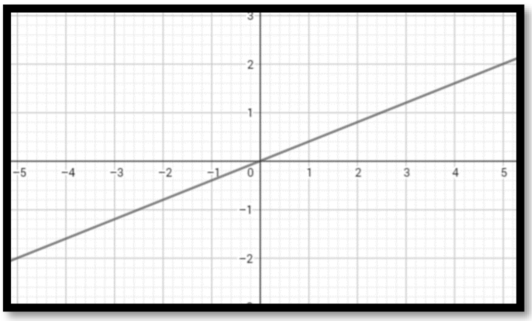

6
5
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−1
−2
−3
−4
−5
−6

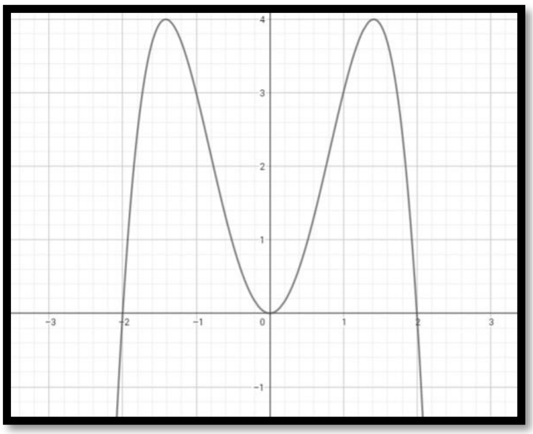

2
1
0 1 2 3 4 5 6 7
−1
−2
−3


4
3
2
1
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3


4
3
2
1
−2 −1 0 1 2


5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5


3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
−1
−2


4
3
2
1
−3 −2 −1 0 1 2 3
−1

Raste	$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -2,2\rangle$

Raste	$x \in \langle 0, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -\infty, 0\rangle$

Raste	$x \in \mathbb{R}$
Pada	$x \in \emptyset$

Raste	$x \in \langle 0, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \emptyset$

Raste	$x \in \emptyset$
Pada	$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2,2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$

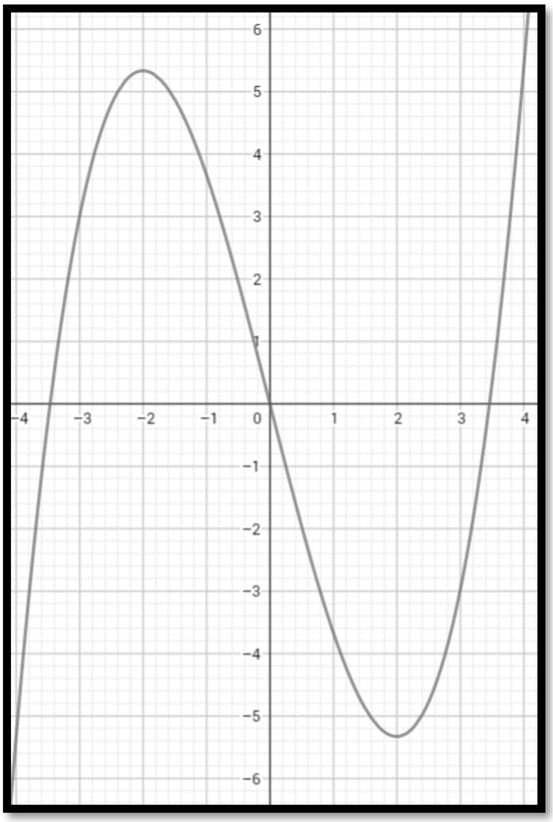
Raste	$x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -1,0\rangle \cup \langle 0,1\rangle$

Raste	$x \in \langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{2}\rangle$
Pada	$x \in \langle -\sqrt{2}, 0\rangle \cup \langle \sqrt{2}, +\infty\rangle$

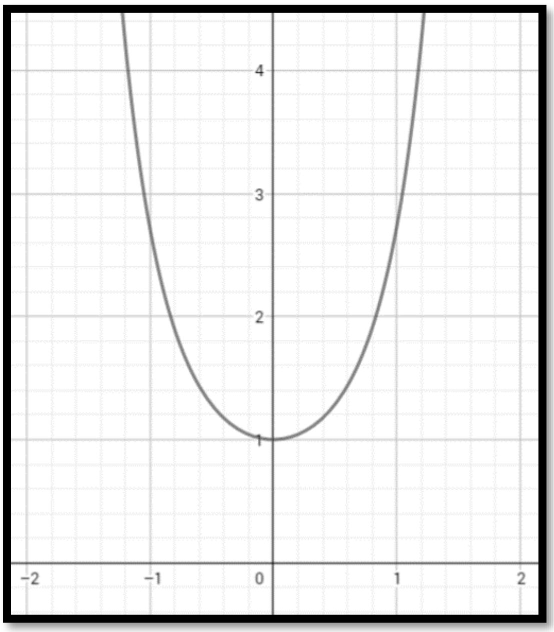
Raste	$x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -4,4\rangle$

Raste	$x \in \langle -\infty, -3\rangle$
Pada	$x \in \langle 3, +\infty\rangle$

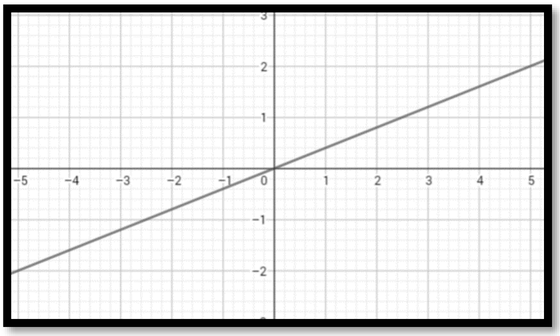
Rješenja kako bi kartice trebale biti uparene:



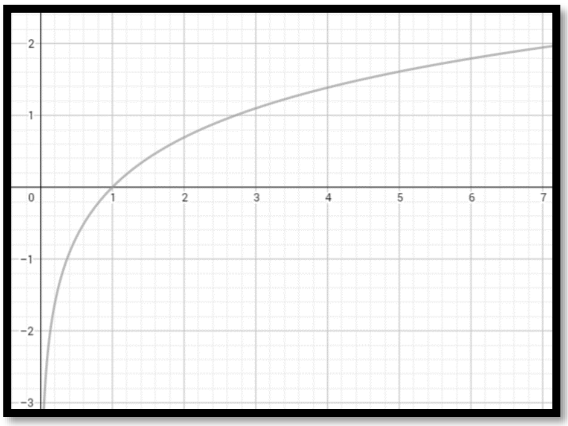
Raste	$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -2,2\rangle$



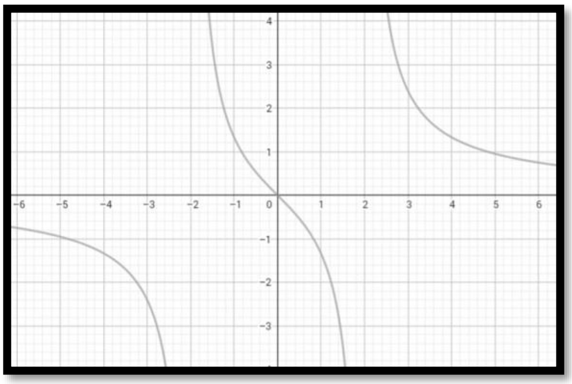
Raste	$x \in \langle 0, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -\infty, 0\rangle$



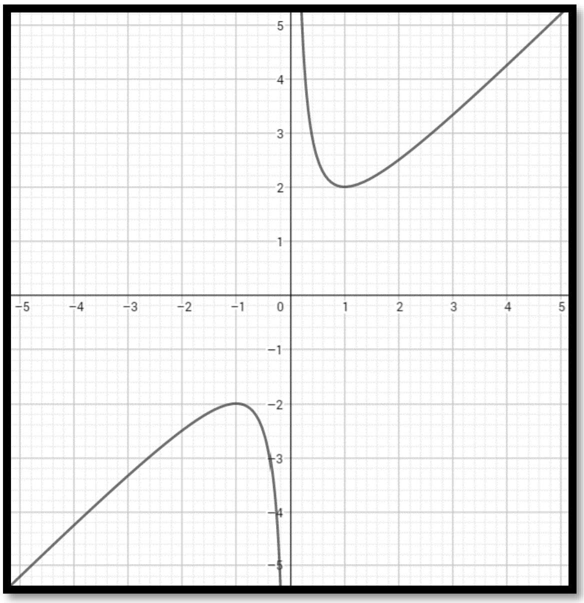
Raste	$x \in \mathbb{R}$
Pada	$x \in \emptyset$



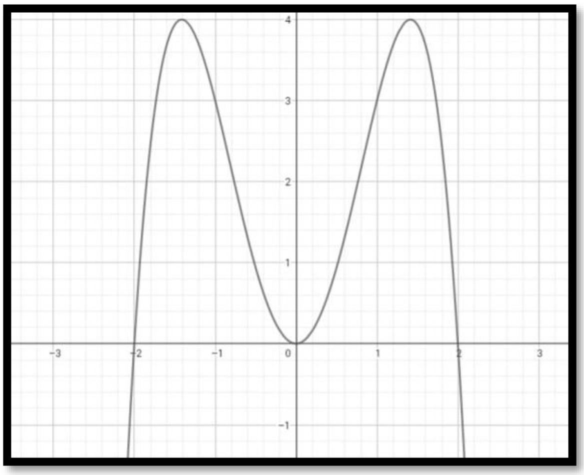
Raste	$x \in \langle 0, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \emptyset$



Raste	$x \in \emptyset$
Pada	$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2,2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$



Raste	$x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -1,0\rangle \cup \langle 0,1\rangle$



Raste	$x \in \langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{2}\rangle$
Pada	$x \in \langle -\sqrt{2}, 0\rangle \cup \langle \sqrt{2}, +\infty\rangle$

Kartice koje bi trebale biti viška su:

Raste	$x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$
Pada	$x \in \langle -4,4\rangle$

Raste	$x \in \langle -\infty, -3\rangle$
Pada	$x \in \langle 3, +\infty\rangle$

Aktivnost „Monotonost“ je prva u kojoj se pojavljuje suradnički i to u paru. Na početku rada smo pisali o važnosti suradničkog rada i kognitivnim sposobnostima koje razvija kod učenika. Važna stvar je ta da učenik u suradnji s drugim učenikom razvija svoj kritički način razmišljanja, ali i razvija svoje matematičko izražavanje. Vizualnim karticama se kao i u prijašnjim aktivnostima postiže da učenik na primjeru grafa funkcije uoči osnovna svojstva monotonosti. Aktivnost uparivanja kartica je veoma poželjna pojava u aktivnoj nastavi. Ne oduzima puno vremena međutim vrlo brzo, čak i trenutno daje povratnu informaciju. Nastavnik šetnjom po razredu i laganim pogledom na klupu odmah saznaje jesu li učenici usvojili željenu definiciju monotonosti funkcije i mogu li tu definiciju primijeniti na konkretnom primjeru. Uz pomoć tehnologije tj. projektora nastavnik vrlo lako može na platno ili na zid projicirati rješenja, a učenici mogu brzo provjeriti rješenja i ući u diskusiju s nastavnikom o onim karticama koje nisu dobro uparili. Važno je da broj kartica i broj intervala monotonosti ne bude jednak. Ako imamo isti broj onda onaj zadnji slučaj uparivanja učenici će automatski znati riješiti jer su samo te dvije kartice ostale te smo time izgubili jedan primjer tj. učenike nismo stavili u situaciju da sami razmisle već automatizmom uparuju te zadnje dvije kartice. Nakon aktivnosti nastavnik može odlučiti, ovisno o tome kako su učenici reagirali na aktivnost, nastavlja li dalje s gradivom ili mora ipak ponoviti dosadašnje gradivo i usporiti tempo.

3. Transformacije grafova elementarnih funkcija

U srednjoškolskoj matematici dovoljno se vremena posvećuje elementarnim funkcijama i crtanju njihovog grafa, međutim čim se učenicima da zadatak u kojem moraju nacrtati graf funkcije koja je nastala kompozicijom više funkcija, učenici vrlo često taj zadatak ne rješavaju na testu. U ovome poglavlju ćemo se posvetiti upravo crtanju grafova tih „kompliciranijih“ funkcija i to uz pomoć transformacije grafa elementarnih funkcija. U praksi se pokazuje da većina učenika uspješno skicira ili crta grafove elementarnih funkcija. To nam je temelj na kojem možemo graditi sljedeću priču.

Zadatci koji traže da se nacrta graf funkcije vrlo često se pojavljuju na državnoj maturi. Isto tako u mnogim zadatcima crtanje grafa je dio nekog većeg zadatka i ako učenikova vještina crtanja grafa nije razvijena i uvježbana vrlo teško će ga uspjeti riješiti do kraja. Stoga je vrlo važno da učenik ima razvijenu tu vještinu. Postoji mnogo načina crtanja grafa, no mi ćemo fokusirati na crtanje grafa uz pomoć kompozicije osnovnih transformacija grafa elementarnih funkcija. Ovim načinom crtanja grafa učenici mogu vrlo lako povezati graf funkcije s algebarskim zapisom funkcije, tj. uočiti za što je „odgovoran“ određeni koeficijent u algebarskom zapisu funkcije.

U srednjoškolskoj matematici tema funkcije se pojavljuje kroz sve četiri godine, kada govorimo o gimnazijskom programu ili programu tehničkih škola. Međutim tema transformacije grafa funkcije ni u jednom razredu se eksplicitno ne obrađuje. Spominje se, ali se ne obrađuje. Budući da je transformacija grafa elementarnih funkcija jedan od načina crtanja grafa možda bi bilo dobro da joj se više vremena posvetiti u planu i programu. Glavni naglasak bi trebao biti na pregledu i sistematizaciji elementarnih funkcija, ponoviti njihova svojstva i grafove s napomenom da učenici zapamte skiciranje grafova elementarnih funkcija. Nakon toga bi se temeljito obradile transformacije grafova kao što ćemo mi napraviti u prvome dijelu ovog poglavlja. U drugome dijelu ovog poglavlja možete naći aktivnosti u kojima će učenici otkriti što to u algebarskom zapisu funkcije utječe na transformaciju njezinog grafa i uvježbavati crtanje grafa funkcije koristeći transformacije elementarnih funkcija.

Linearna transformacija $g(x) = af(bx + c) + d$

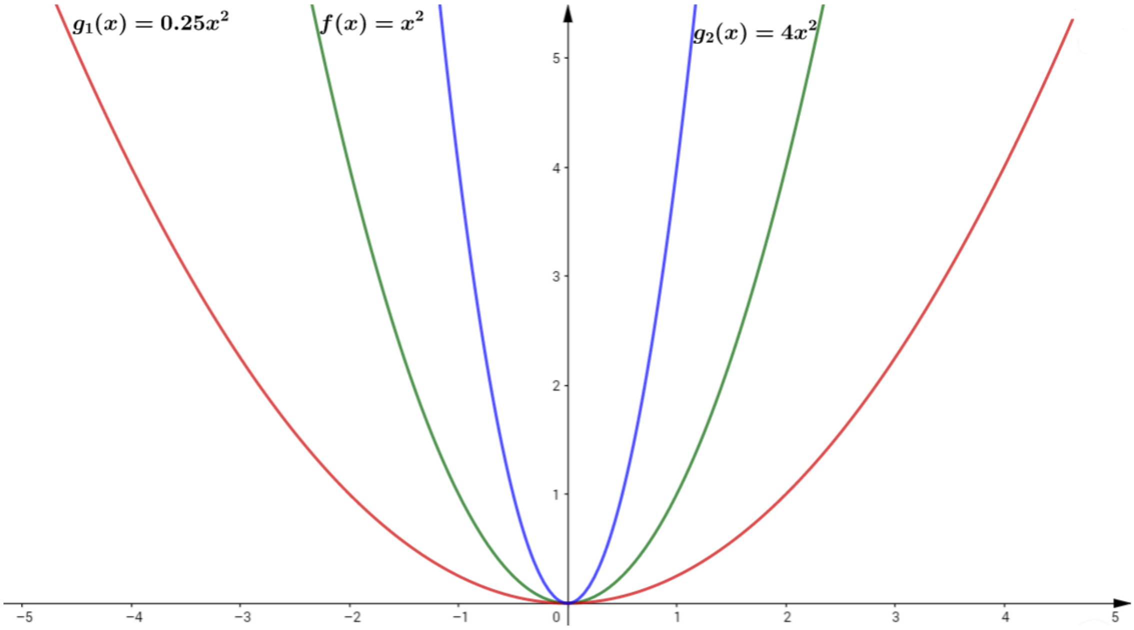
Transformaciju grafa elementarne funkcije možemo podijeliti u šest jednostavnih „koraka“:

- Rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija) u smjeru y–osi
- zrcaljenje s obzirom na x–os
- rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija) u smjeru x–osi
- zrcaljenje s obzirom na y–os,
- translacija u smjeru x–osi,
- translacija u smjeru y–osi

Geometrijski gledano kod svake od ovih transformacija možemo uočiti da je riječ o preslikavanjima ravnine: translaciji, osnoj ili centralnoj simetriji. Transformaciju grafa koja u sebi sadrži navedene korake zovemo još i linearna transformacija grafa. Alati dinamičke geometrije (GeoGebra, Sketchpad) nam uvelike mogu pomoći kod obrade gradiva kao što je transformacija grafa zbog mogućnosti izrade klizača kojim možemo mijenjati koeficijente u algebarskom zapisu funkcije i na taj način uočavati što se događa s grafom funkcije. Na internetu postoji mnogo gotovih materijala izrađenih uz pomoć alata dinamičke geometrije koji se mogu odmah koristiti u nastavi. Jedan od takvih materijala je i rad profesorice Željke Dijanić (vidi [2])

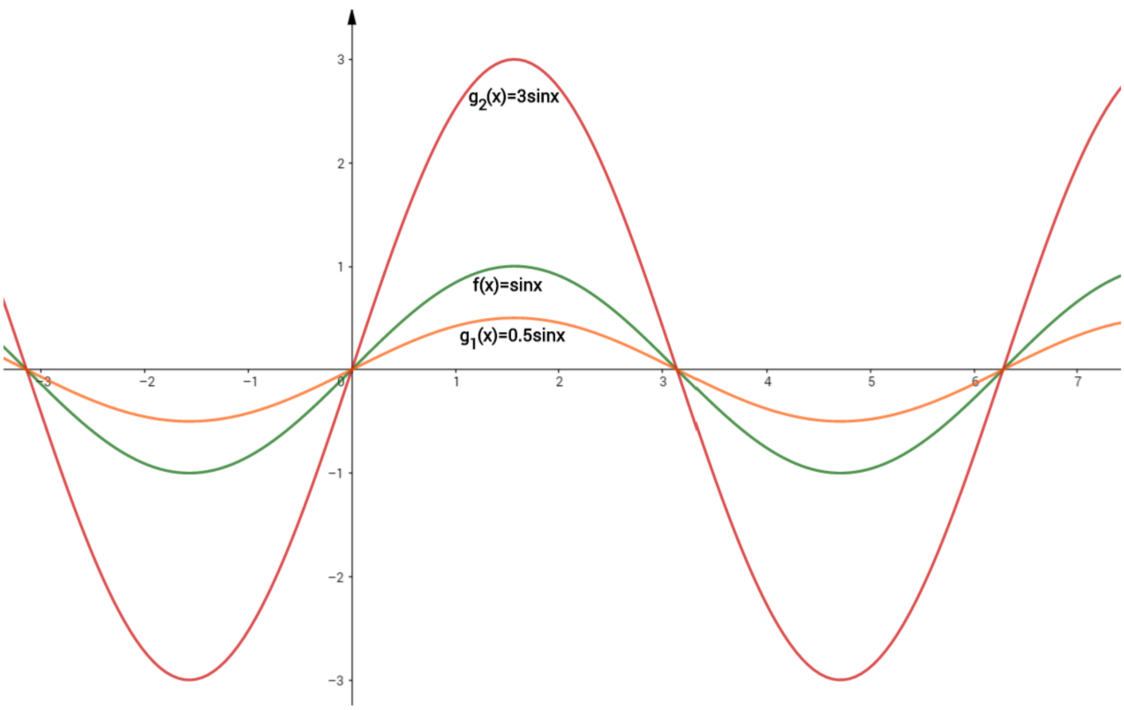
Rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija) grafa u smjeru y – osi

Graf funkcije $g(x) = af(x)$, nastaje rastezanjem ili stezanjem funkcije $f(x)$ u smjeru y–osi . Za $a > 1$ dolazi do rastezanja grafa funkcije $f(x)$ tj. stezanja grafa funkcije za $0 < a < 1$. Dodatno, za $a = -1$ imamo simetriju s obzirom na x–os. Vrlo često miješamo rastezanje i stezanje grafa funkcije u smjeru y–osi i smjeru x–osi. Recimo na primjeru kvadratne funkcije utjecaj koeficijenta a se ne vidi baš najbolje. Na grafu kvadratne funkcije nije nam jasno je li došlo do „stiskanja“ parabole u smjeru osi–y ili je „širenja“ u smjeru x–osi, stoga takve primjere treba izbjegavati. Na sinusoidi se utjecaj koeficijenta a puno bolje vidi. Odmah iz grafa vidimo da je došlo do „deformacije“ grafa, ali samo u smjeru y–osi pošto se nultočke nisu pomaknule, tj. nema „deformacije“ u smjeru x–osi. Na sljedećim slikama možemo vidjeti upravo utjecaj koeficijenta a na primjeru kvadratne funkcije te funkcije sinus.



Slika 1.

Sa slike 1 je vidljivo da je vrlo teško odrediti dolazi li do stezanja parabole u smjeru x–osi ili y – osi, međutim možemo uočiti da koeficijent a utječe na širinu parabole.

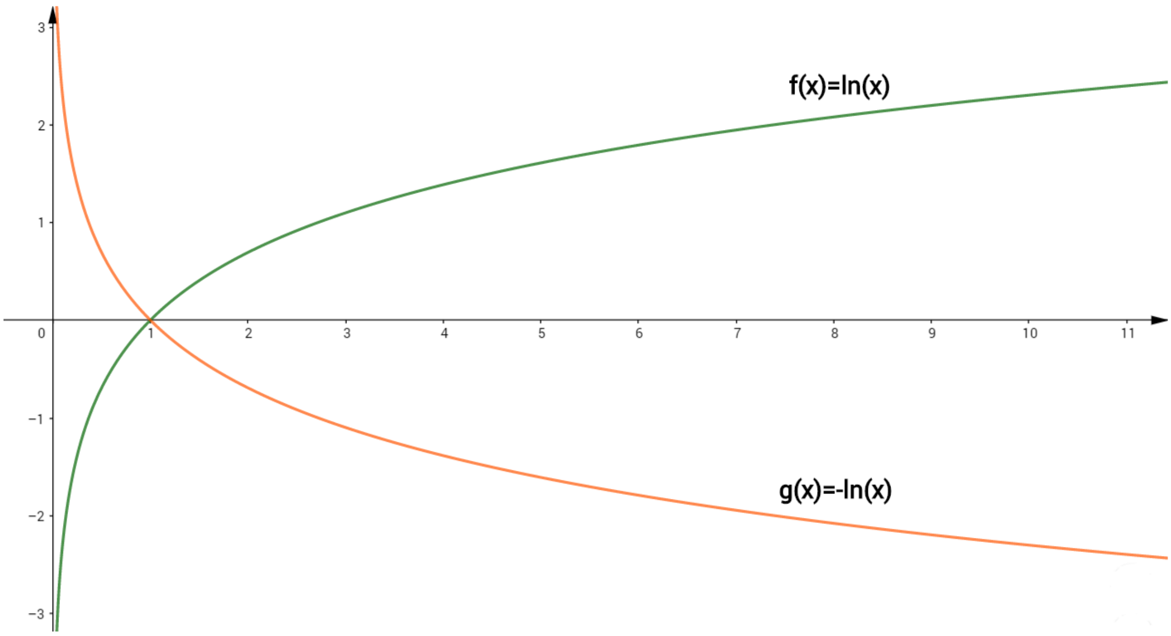


Slika 2.

Sa slike 2 se uočava da što je veći koeficijent a dolazi do rastezanja sinusoide u smjeru y–osi, te stezanja kako se koeficijent a smanjuje. Koeficijent a zovemo još i amplituda.

Zrcaljenje grafa s obzirom na x–os

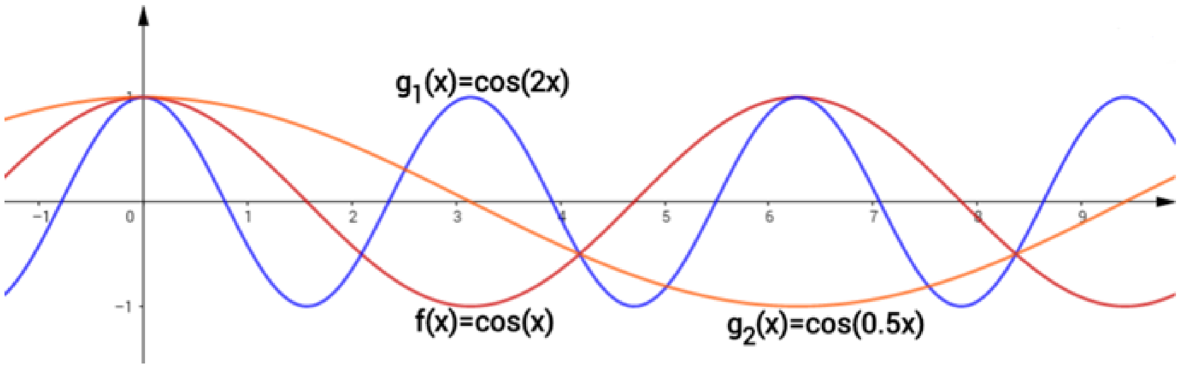
Zrcaljenje grafa funkcije s obzirom na x–os je poseban slučaj rastezanja ili stezanja grafa funkcije u smjeru y–osi događa se u slučaju kada je koeficijent $a = -1$. Drugim riječima, graf funkcije $g(x) = -f(x)$ nastaje osno-simetričnim preslikavanjem grafa funkcije $f(x)$ s obzirom na pravac $y = 0$. Primijetimo da se vrijednost x koordinate ne mijenja već je jedina razlika u predznaku ordinata (slika 3).



Slika 3.

Rastezanje (dilatacija) ili stezanje (kontrakcija) grafa u smjeru x – osi

Graf funkcije $g(x) = f(bx)$, nastaje rastezanjem ili stezanjem funkcije $f(x)$ u smjeru osi–x. Graf funkcije $g(x)$ nastaje širenjem grafa funkcije $f(x)$ u smjeru x–osi ako je $0 < b < 1$, te sužavanjem ako je $b > 1$. Za $b = -1$ imamo simetriju s obzirom na y–os , a o tome ćemo uskoro. Kao i u slučaju rastezanja (dilatacija) ili stezanja (kontrakcija) grafa u smjeru y – osi i u ovome slučaju ćemo djelovanje koeficijenta b lakše uočiti na primjeru grafa trigonometrijskih funkcija nego na primjeru grafa polinoma. Stoga je bolje koristiti primjere grafova funkcija u kojima su određena svojstva uočljivija. Mi ćemo izbjeći primjer s kvadratnom funkcijom već ćemo dati primjer samo sa, ovaj put, grafom funkcije kosinus.

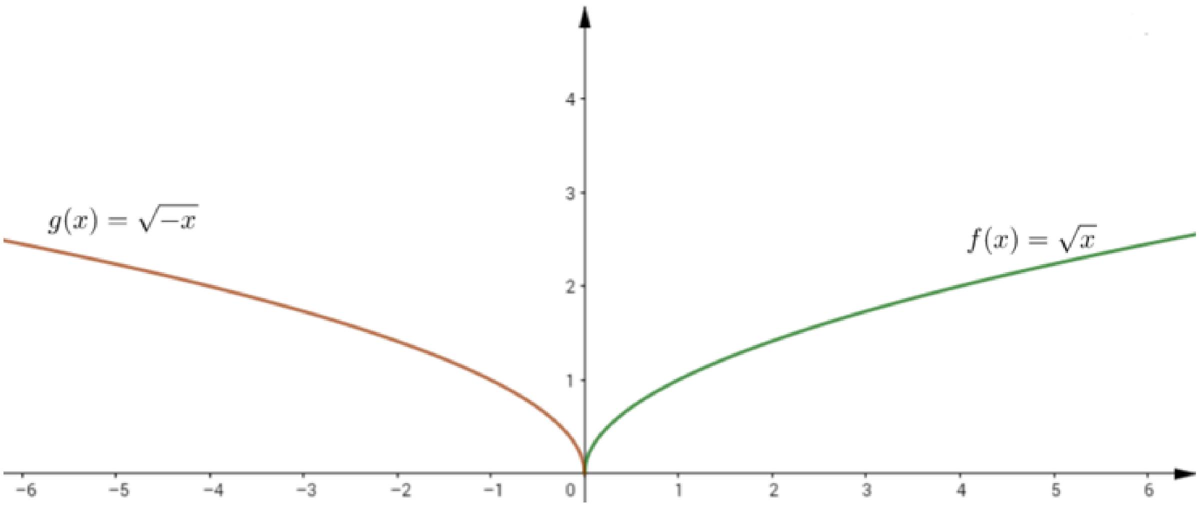


Slika 4.

Sa slike 4 uočavamo kao se povećanjem koeficijenta b graf elementarne funkcije $f(x) = \cos(x)$ rasteže i smjeru osi–x , dok se smanjivanjem graf funkcije kosinus steže u istome smjeru. Koeficijent b kod trigonometrijskih funkcija zovemo još i kružna frekvencija.

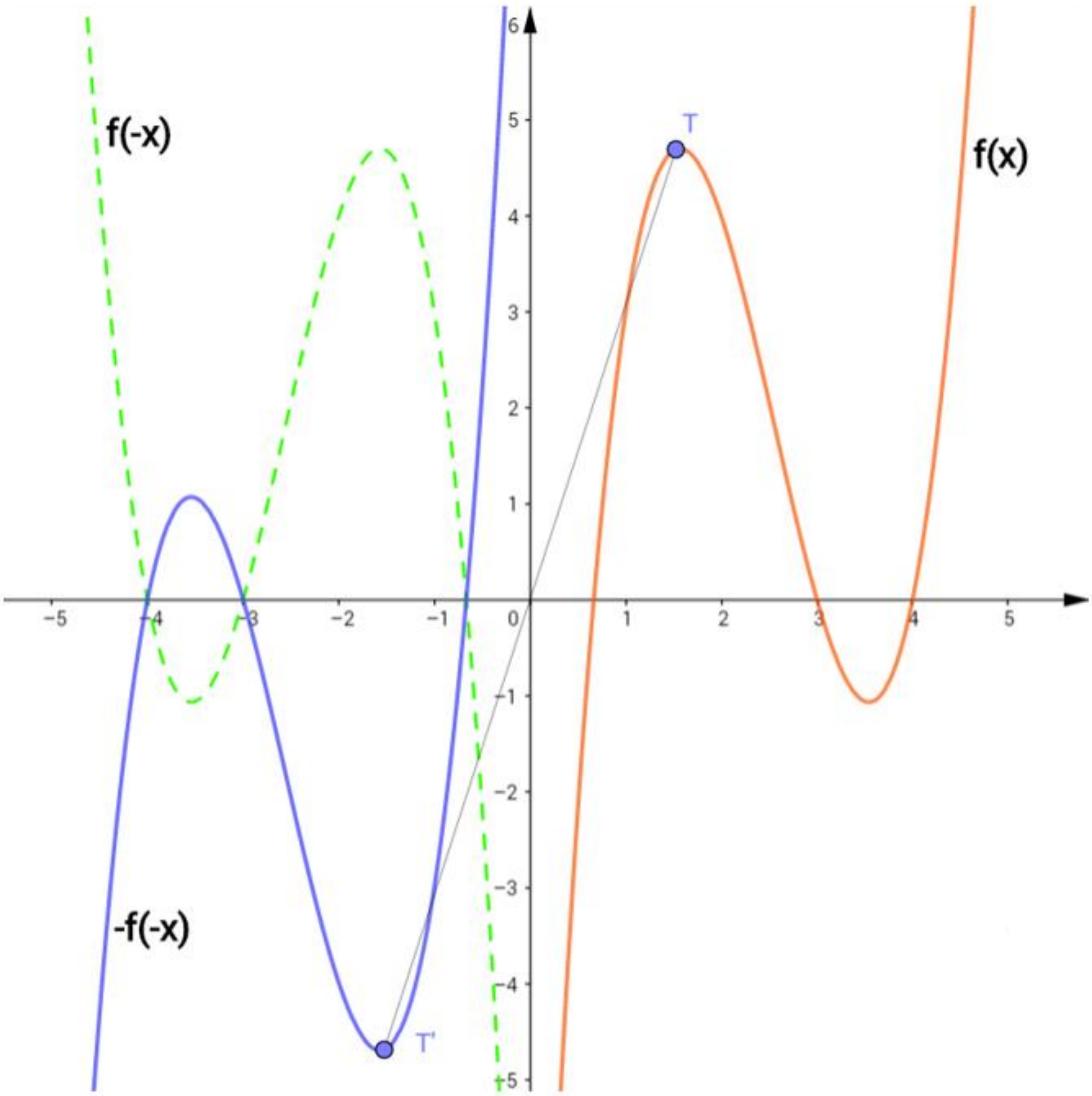
Zrcaljenje grafa s obzirom na y–os

Zrcaljenje grafa funkcije s obzirom na y–os je poseban slučaj rastezanja ili stezanja grafa funkcije u smjeru x–osi događa se u slučaju kada je koeficijent $b = -1$. Drugim riječima, graf funkcije $g(x) = f(-x)$ nastaje osno-simetričnim preslikavanjem grafa funkcije $f(x)$ s obzirom na os–y . Primijetimo da vrijednost y koordinate ne mijenja već je jedina razlika u predznaku apscisa (slika 5).



Slika 5.

U uvodnom dijelu ovog poglavlja spomenuli smo da kod transformacija grafa ustvari možemo primijetiti preslikavanja ravnine. Do sada smo, od tih preslikavanja vidjeli samo osnu simetriju. Zanimljivo je primijetiti da se kompozicijom dvije osne simetrije imamo centralnu simetriju s obzirom na ishodište. Pogledajmo primjer na slici 6.

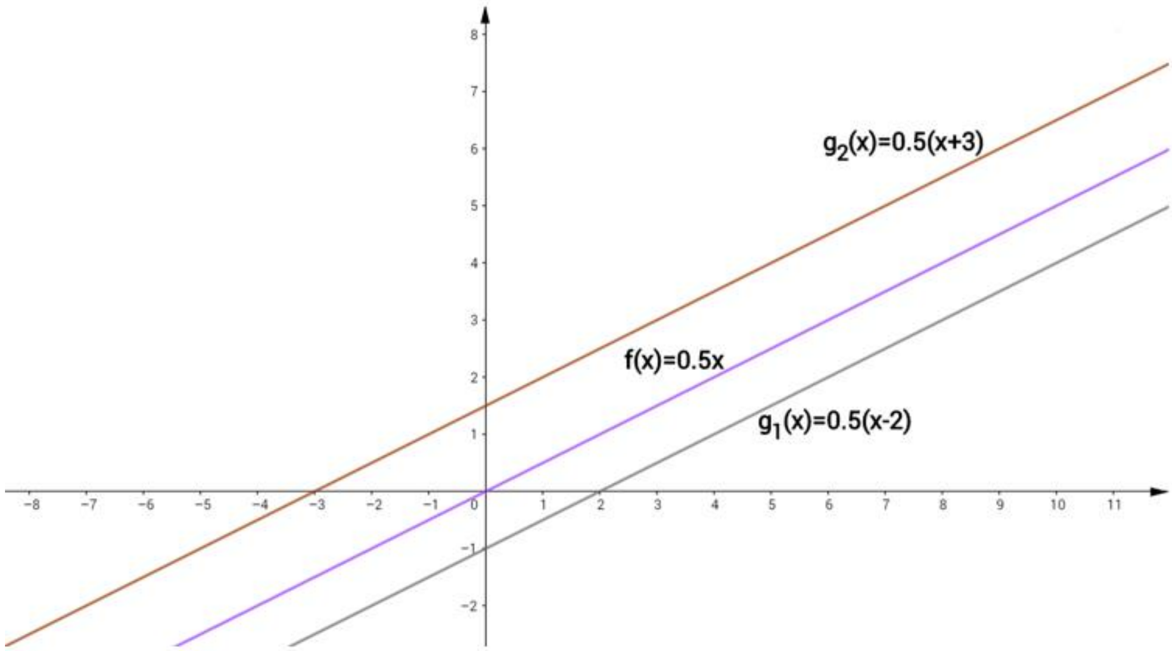


Slika 6.

Plavi graf smo dobili tako što smo napravili kompoziciju dviju osnih simetrija. Prvo smo graf funkcije $f(x)$ preslikali s obzirom na y–os, a nakon toga i s obzirom na x–os. Sa slike uočavamo da u točke T i T' centralno simetrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, a upravo to smo i htjeli primijetiti sa dane slike.

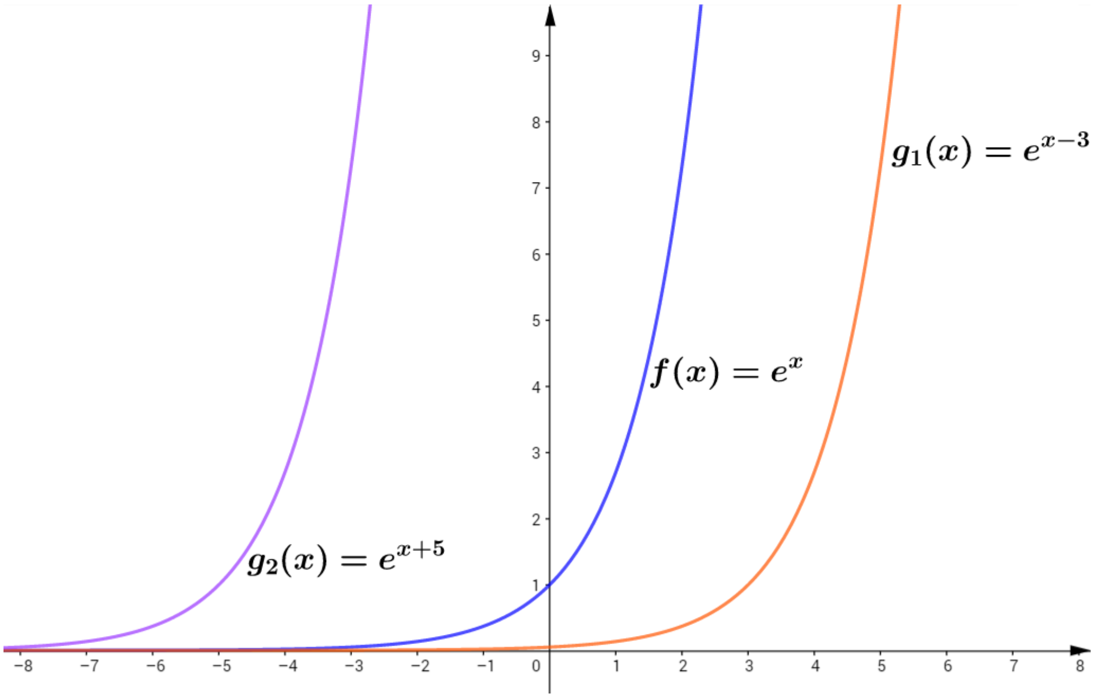
Translacija u smjeru x–osi

Zadnje preslikavanje ravnine koje nam je ostalo, a vezano je uz transformaciju grafa je translacija. Graf funkcije $g(x) = f(x + c)$ dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru x–osi za apsolutnu vrijednost koeficijenta c, tj. za $|c|$. Ako je $c > 0$ graf funkcije se translatira u lijevo, a ako je $c < 0$ onda se graf funkcije translatira udesno za iznos koeficijenta c. U ovome slučaju možemo uzeti bilo koji primjer elementarne funkcije jer za svaku elementarnu funkciju translacija njezinog grafa po osi x – se lijepo vidi. U sljedeća dva primjera mi ćemo uzeti linearnu (slika 7) i eksponencijalnu funkciju (slika 8)



Slika 7.

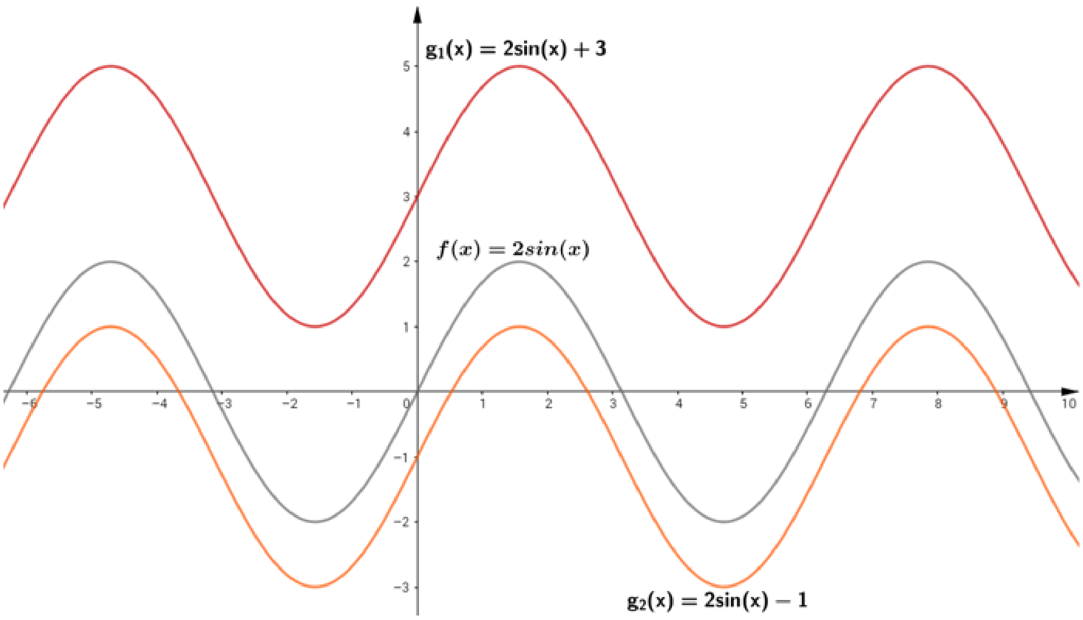
Sa slike 7 uočavamo da se graf linearne funkcije $f(x) = 0.5x$ dva puta translatirao. U prvome slučaju funkcija $g_1(x) = 0.5(x - 2)$ je nastala je tako da smo graf funkcije $f(x)$ translatirali udesno za apsolutnu vrijednost koeficijenta -2. Analogno, funkcija $g_2(x) = 0.5(x + 3)$ je nastala je tako da smo graf funkcije $f(x)$ translatirali ulijevo za apsolutnu vrijednost koeficijenta 3. Translacija se lijepo uočava samim pogledom na nultočke jednog i drugog i trećeg grafa. Učenicima treba obratiti pozornost na koeficijente i na pomicanje grafa. Intuitivno je da ako je koeficijent c zbog kojeg i dolazi do translacije pozitivan da će se graf funkcije pomaknuti udesno, a ako je negativan ulijevo. Međutim, ovdje je upravo obrnuta priča. Na slici 8 možemo vidjeti kako koeficijent c utječe na eksponencijalnu funkciju.



Slika 8.

Translacija u smjeru y–osi

Translacija u smjeru y–osi je intuitivnija. Graf funkcije $g(x) = f(x) + d$ dobiva se translacijom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru y–osi za apsolutnu vrijednost koeficijenta d, tj. za $|d|$. Ako je $d < 0$ graf funkcije se translatira „prema dolje“, a ako je $d > 0$ graf se pomiče „prema gore“.



Slika 9.

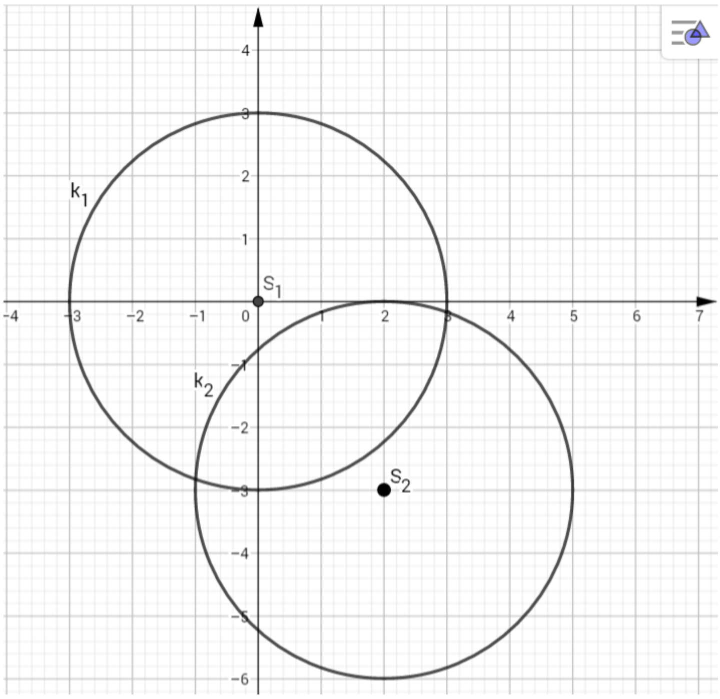
Sa slike 9 vrlo lako uočavamo kako je došlo do translacije grafa funkcije $f(x)$ ovisno o vrijednosti koeficijenta d. Vrijednost koeficijenta d kod funkcije $g_1(x)$ je 3 stoga vidimo da smo njezin graf dobili pomicanjem grafa funkcije $f(x)$ za tri prema gore. Analogna priča vrijedi i za graf funkcije $g_2(x)$. Isto tako ako obratimo pažnju gdje funkcije sijeku os ordinata vrlo lako možemo uočiti pomicanje grafa funkcije $f(x)$ prema gore odnosno prema dolje.

Translacijom grafa funkcije u smjeru y–osi završili smo prvi dio ovog poglavlja u kojem smo opisali i uz pomoć grafova prikazali linearnu transformaciju grafa i to podijeljenu na 6 osnovnih dijelova. U nastavku slijede aktivnosti koje su koncipirane na način da učenici prolazeći kroz njih samostalno otkrivaju sve dijelove linearne transformacije grafova i uočavaju pravilnosti, te uvježbavaju crtanje „kompliciranijih“ grafova upravo primjenjujući navedenu transformaciju na grafove elementarnih funkcija.

Aktivnosti otkrivanja linearne transformacije grafa

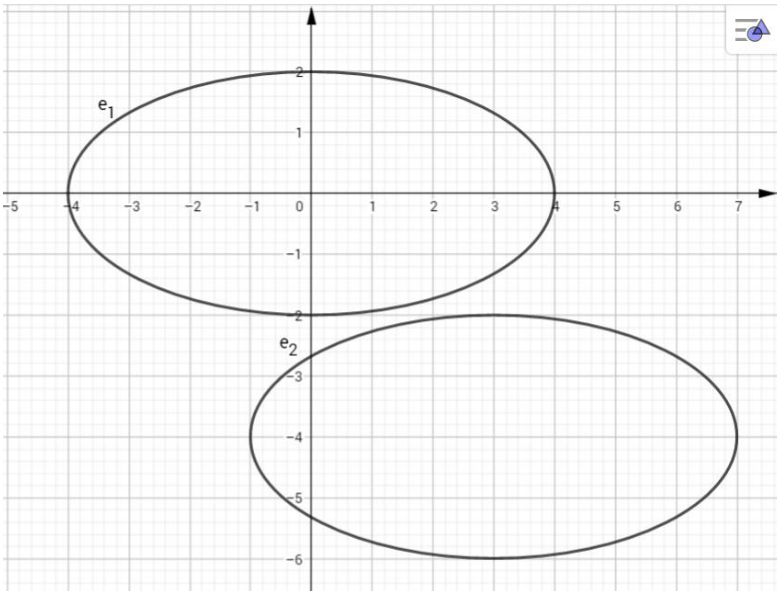
Kod otkrivanja linearne transformacije grafa tj. uočavanja na koji način koeficijenti iz algebarskog zapisa $g(x) = af(bx + c) + d$ utječu na pomicanje grafa elementarne funkcije $f(x)$ možemo napraviti za svaki koeficijent posebnu aktivnost. Te aktivnosti ne bi trajale duže od 10 minuta i idealne bi bile za početak sata u kojima bi učenici u uvodnom dijelu sata otkrili pravilnosti, a ostatak sata uvježbavali crtanje grafa uz pomoć otkrivene transformacije. Mi ćemo napraviti jednu veliku aktivnost čije je trajanje cijeli školski sat u kojoj će učenici otkriti svih 6 dijelova linearne transformacije grafa. Kao što smo rekli u uvodnom dijelu ovog poglavlja ideja je da se u redovnom programu, najbolje na početku četvrtog razreda gimnazijskog programa i programa za tehničke škole, kada su funkcije ponovno nastavna tema, ponove svojstva elementarnih funkcija i crtanje njihovih grafova te tada obradi tema crtanja grafa koristeći transformacije elementarnog grafa funkcije. Za obradu nam je dovoljno jedan sat, upravo na tome satu bi napravili aktivnost koja slijedi, a za uvježbavanja bi trebalo predvidjeti još jedan školski sat. Dakle u dva školska sata može se obraditi cijela priča oko crtanja grafa uz pomoć transformacije iako nije u programu. Na većini fakulteta koji imaju matematiku jedan ili dva semestra tema funkcija i njihovog grafa se ne obrađuje već se vrlo brzo kreće na tok funkcije ili računanje površine ispod grafa krivulje. Oni studenti koji ne znaju crtati grafove imati će velikih problema, zato je vrlo važno odvojiti nekoliko sati u redovnoj nastavi kako bi se obradila ova tema i kako bi se pripremilo buduće maturante na nove izazove.

Da bi učenici otkrili na koji način pojedini koeficijent u algebarskom zapisu linearne transformacije grafa $g(x) = af(bx + c) + d$ utječe na „pomicanje“ grafa elementarne funkcije ne moramo nužno u aktivnostima koristiti grafove elementarnih funkcija. Upravo i je ideja da se učenicima daju grafovi „nepoznatih“ funkcija tj. da fokus nije na algebarskom zapisu danog grafa ili na prepoznavanju o kojem se grafu radi. Cilj je da učenici prolazeći kroz aktivnost sami otkriju kako se pomiče graf te nepoznate funkcije s obzirom na pojedini koeficijent. Upravo takvim pristupom učenici mogu dobiti širu sliku pojma transformacije, kao preslikavanja ravnine. Pod pojmom šire slike smatra se da učenici mogu prepoznati i povezati transformaciju kod nekih drugih matematičkih tema.



Jedan vrlo jednostavan primjer je kružnica. Iz jednadžbe kružnice $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ vrlo lako uočavamo da se radi o kružnici radijusa 3 sa središtem $S(2, -3)$. Međutim, samo malom napomenom koja nam neće oduzeti puno vremena možemo potaknuti učenike na razmišljanje i primijetiti da smo danu kružnicu dobili zapravo pomicanjem kružnice $x^2 + y^2 = 9$ istog radijusa, čije se središte nalazi u ishodištu, za 2 udesno u smjeru x–osi te za 3 prema dolje u smjeru y – osi. Iz toga učenici vrlo lako mogu dobiti osjećaj na koji način utječu koeficijenti p i q u algebarskom zapisu jednadžbe kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ na kružnicu sa središtem u ishodištu i radijusom r čija je jednadžba $x^2 + y^2 = r^2$ te primijetiti da se transformacija tj. preslikavanje ravnine pojavljuje i kod crtanja ili određivanja jednadžbe kružnice.

Srednjoškolska matematika je koncipirana tako da se gradivo nadovezuje jedno na drugo tj. da bi savladali gradivo koje trenutno radimo potrebno je koristiti prethodno stečeno znanje. Isto tako uloga nastavnika je tu da svaki put, kada mu to gradivo dopusti, poveže temu koja se sada obrađuje s nekom temom koja se već obradila. Takvim pristupom učenici dobivaju širu sliku i osjećaj kako stečeno znanje mogu primijeniti i povezati s drugim dijelovima matematike. Povezivanje različitih matematičkih tema nastavniku ne oduzima puno vremena, a učenicima uvelike pomaže jer na taj način još bolje utvrđuju gradivo i lakše dolaze do „aha efekta“. Ovdje smo dali primjer povezivanja transformacije grafa s kružnicom.



Analogno, kroz razgovor s učenicima, možemo doći do zaključka da taj određeni oblik transformacije vrijedi na primjer i za elipsu. Slobodno možemo reći da elipsu čija je jednadžba $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ dobijemo pomicanjem tj. transformacijom elipse kojoj je velika polu-os 4, a mala polu-os 2 te središte u ishodištu koordinatnog sustava, za 3 udesno u smjeru osi x i za 4 prema dolje u smjeru osi y.

U nastavku slijede aktivnosti u kojima će učenici, prolazeći kroz njih, otkrivati na koji način utječu pojedini koeficijenti na grafove elementarnih funkcija u linearnoj transformaciji $g(x) = af(bx + c) + d$. Cilj prve aktivnosti je da učenici iz grafa neke „nepoznate“ funkcije uoče na koji način se transformirala funkcija s obzirom na dani koeficijent. Tim načinom učenicima mičemo pažnju s algebarskog zapisa funkcije i stavljamo u fokus graf funkcije te način na koji se on mijenja tj. transformira. Isto tako učenici nakon što uoče transformaciju određenih, vrlo lako uočljivih, točaka dobivaju širu sliku da se ta transformacija odnosi i na cijeli graf. Cilj druge aktivnosti se ne razlikuje puno od cilja prve. Jedina razlika je u tome što se ovdje koriste grafovi „poznatih“ funkcija. Kako smo na početku ovog odlomka rekli, ovaj dio gradiva je predviđen za četvrti razred srednje škole stoga su učenici, nakon ponavljanja s nastavnikom, vrlo dobro upoznati s grafovima elementarnih funkcija pa nema problema da u aktivnosti krećemo sa trigonometrijskom funkcijom. Treća aktivnost je aktivnost uvježbavanja u kojoj će učenici crtati graf složenije funkcije na način da će koristiti kompoziciju osnovnih transformacija elementarnih funkcija korak po korak.

3.1. Aktivnost „Funkcijski Transformersi 1“

Cilj aktivnosti: učenici će, podijeljeni u parove, zajedničkim rješavanjem nastavnog listića, uočiti pravilnosti pomicanja grafa funkcije ovisno o vrijednosti koeficijenata iz algebarskog zapisa funkcije $g(x) = af(bx + c) + d$

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listići za svaki par, papir za zaključke

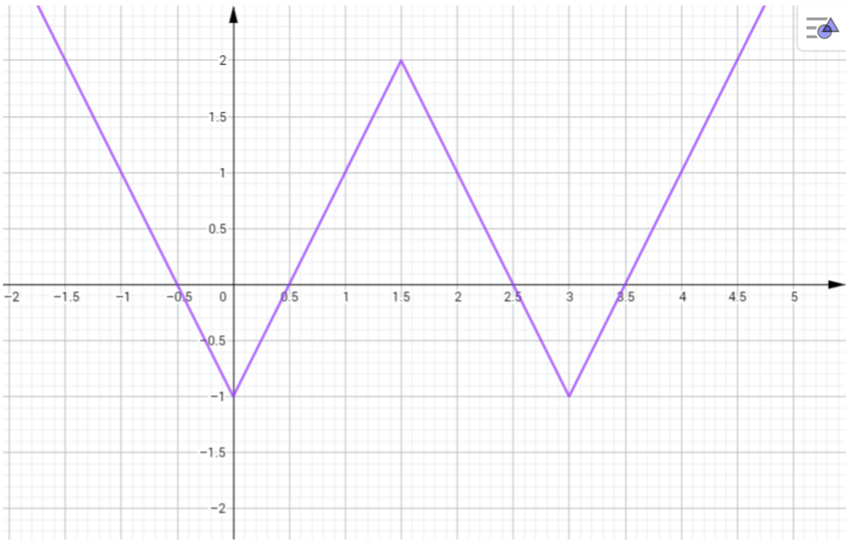
Tijek aktivnosti: Nastavnik na početku sata zajedno s učenicima ponovi definiciju funkcije te definiciju grafa funkcije. Nakon uvodnog ponavljanja nastavnik dijeli svakom paru nastavne listiće, a oni ih samostalno rješavaju. Nakon svakog rješavanja pojedinog nastavnog listića, učenici na poseban papir za zaključke pišu što su otkrili prolazeći i rješavajući listić.

Nastavni listić 1

Na svakoj slici je graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)$. Očitajte lako uočljive točke $(x, f(x))$ sa grafa i unesite ih u danu tablicu. Nova funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = af(x)$. Ovisno o koeficijentu a, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš zadatak je otkriti vezu između koeficijenta a te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite danu tablicu, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i nacrtajte graf funkcije $g(x)$. Zapišite svoje zaključke.

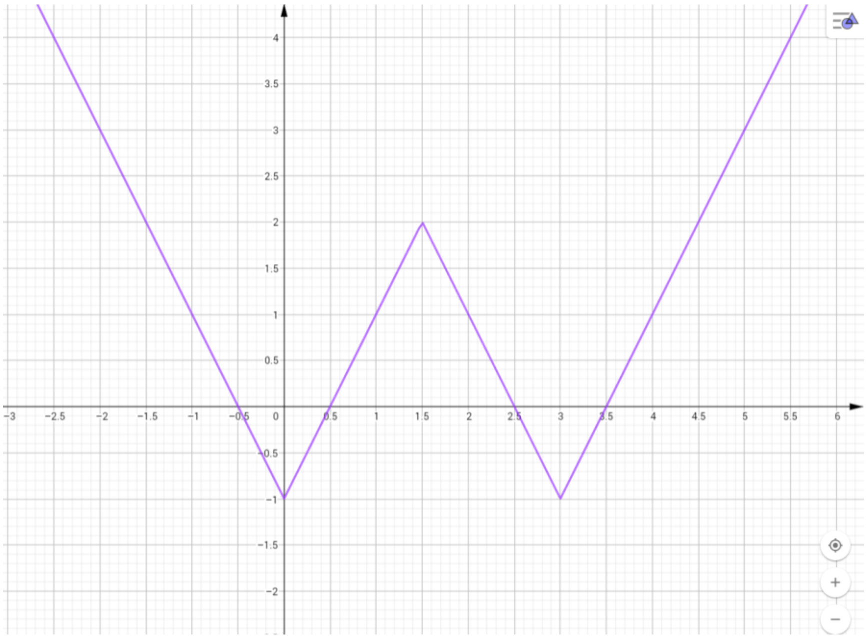
a) $\boldsymbol{a = -1}$, $\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$, $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					
$\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$					



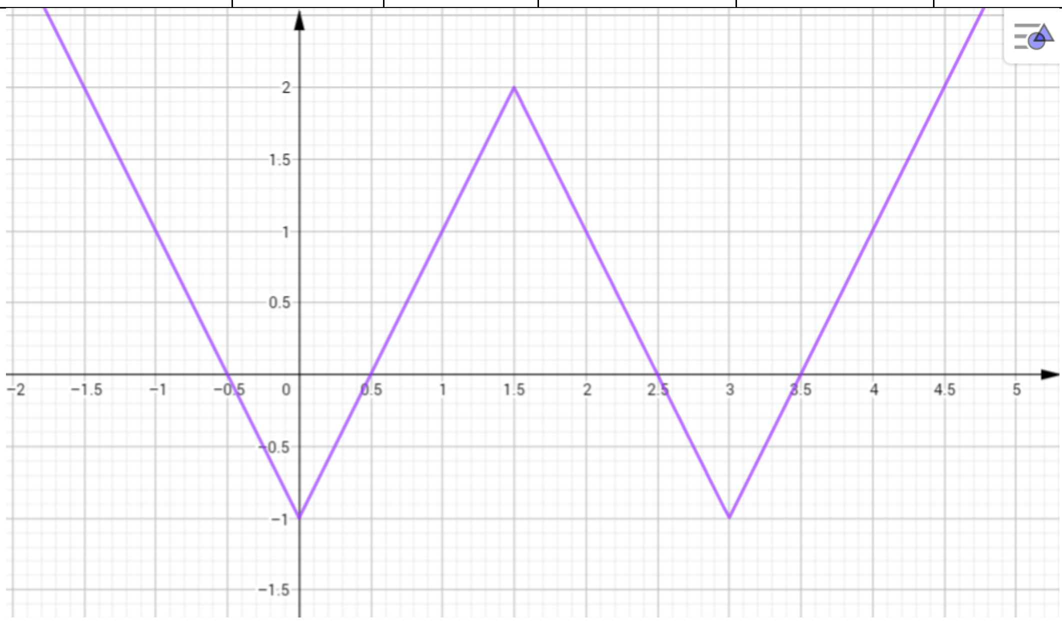
b) $\boldsymbol{a = 2, \quad g(x) = 2f(x), \quad x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					
$\boldsymbol{g(x) = 2f(x)}$					



c) $\boldsymbol{a = -0.5, \quad g(x) = -0.5f(x), \quad x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					
$\boldsymbol{g(x) = -0.5f(x)}$					



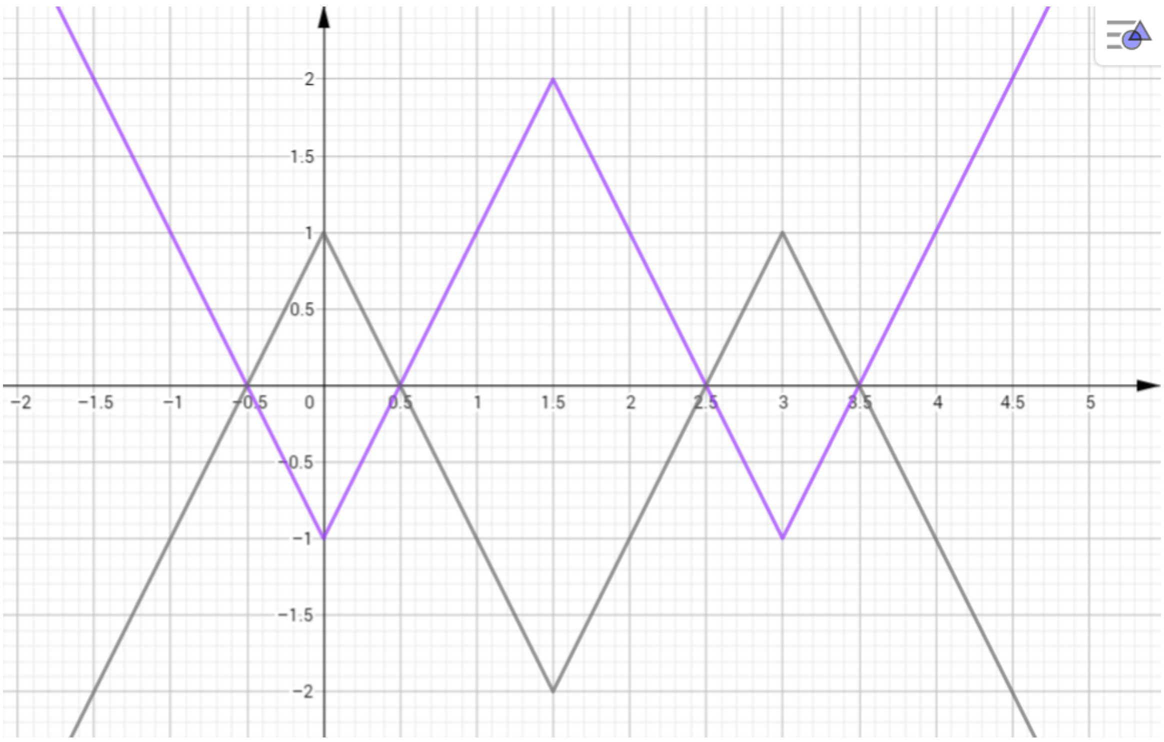
Nastavni listić 1 (rješenje)

Na svakoj slici je graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)$. Očitajte lako uočljive točke $(x, f(x))$ sa grafa i unesite ih u danu tablicu. Nova funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = af(x)$. Ovisno o koeficijentu a, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš zadatak je otkriti vezu između koeficijenta a te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite danu tablicu, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i nacrtajte graf funkcije $g(x)$. Zapišite svoje zaključke.

a) $\boldsymbol{a = -1}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = -f(x)}$, $\quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Kada je $a = -1$ graf funkcije $f(x)$ se zrcali s obzirom na x–os

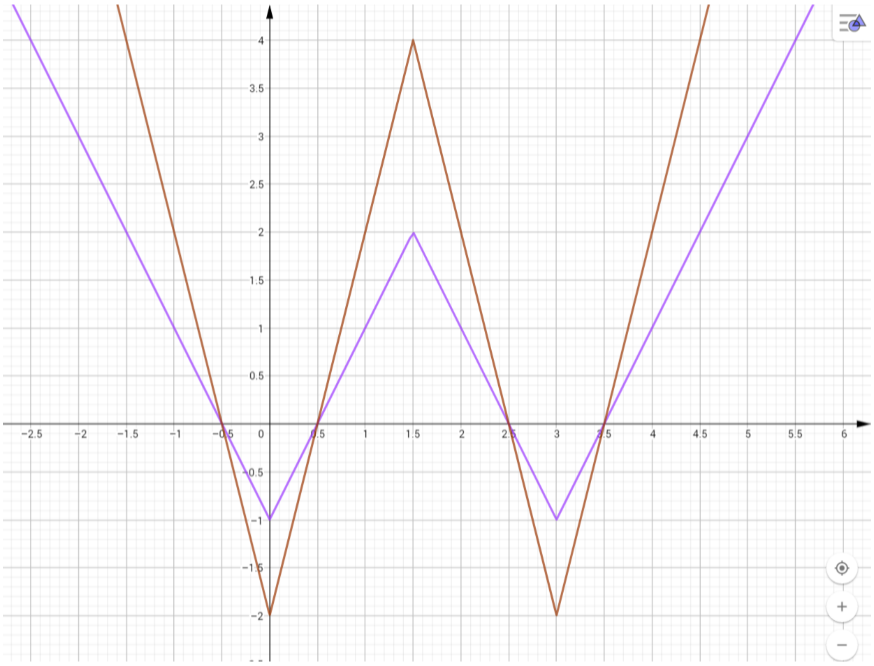
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-0.5}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1.5}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{4}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{1}$
$\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{-1}$



b) $\boldsymbol{a = 2}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = 2f(x)}$, $\quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Funkcija $f(x)$ se rastegnula dva puta u smjeru y–osi kada je koeficijent $a = 2$

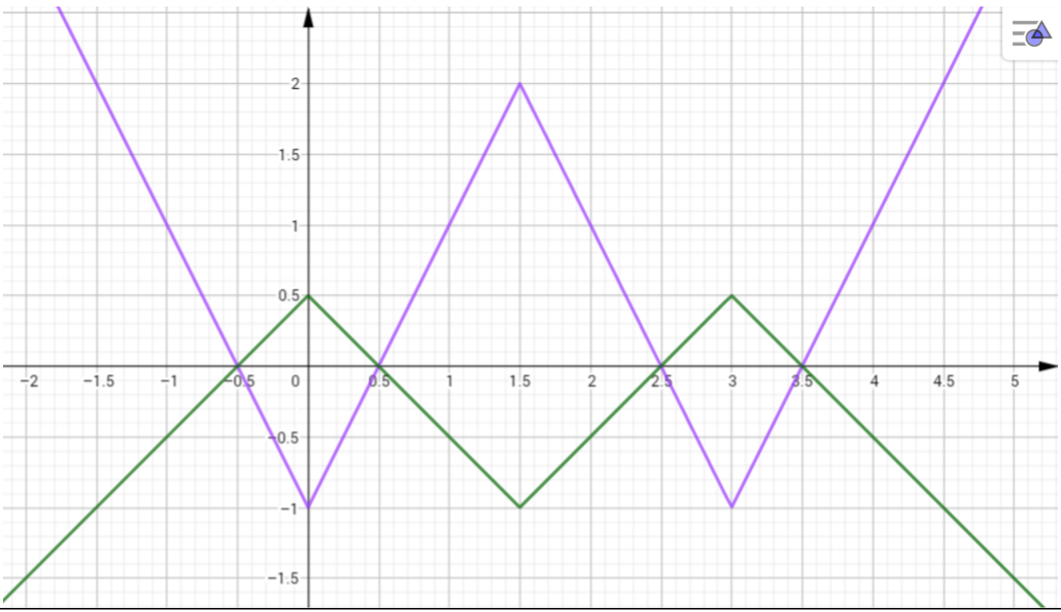
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-0.5}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1.5}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{4}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{1}$
$\boldsymbol{g(x) = 2f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{2}$



c) $\boldsymbol{a = -0.5}, \quad \boldsymbol{g(x) = -0.5f(x)}, \quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

Koeficijent $a = -0.5$ nam govori dvije stvari. Prva je ta da kada gledamo njegovu apsolutnu vrijednost koja je 0.5 što znači da se funkcija $f(x)$ stegnula i smjeru y–osi dva puta $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$, a zbog negativnog predznaka uočavamo da se ta „stegnuta“ funkcija zrcali s obzirom na x–os.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-0.5}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1.5}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{4}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{1}$
$\boldsymbol{g(x) = -0.5f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0.5}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{0.5}$	$\boldsymbol{-0.5}$

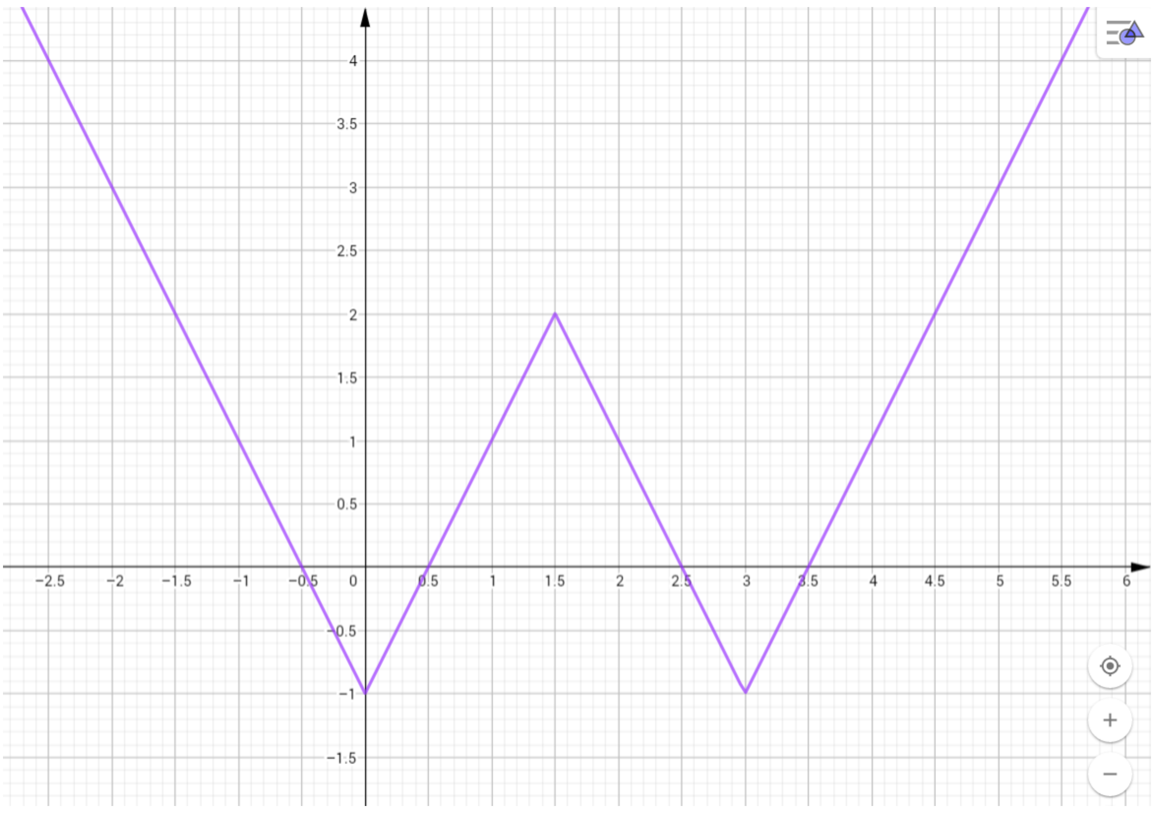


Nastavni listić 2

Na svakoj slici je graf funkcije$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)$. Očitajte lako uočljive točke $(x, f(x))$ sa grafa i unesite ih u danu tablicu. Nova funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = f(x) + d$. Ovisno o koeficijentu d, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš zadatak je otkriti vezu između koeficijenta d te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite danu tablicu, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i nacrtajte graf funkcije $g(x)$. Zapišite svoje zaključke!

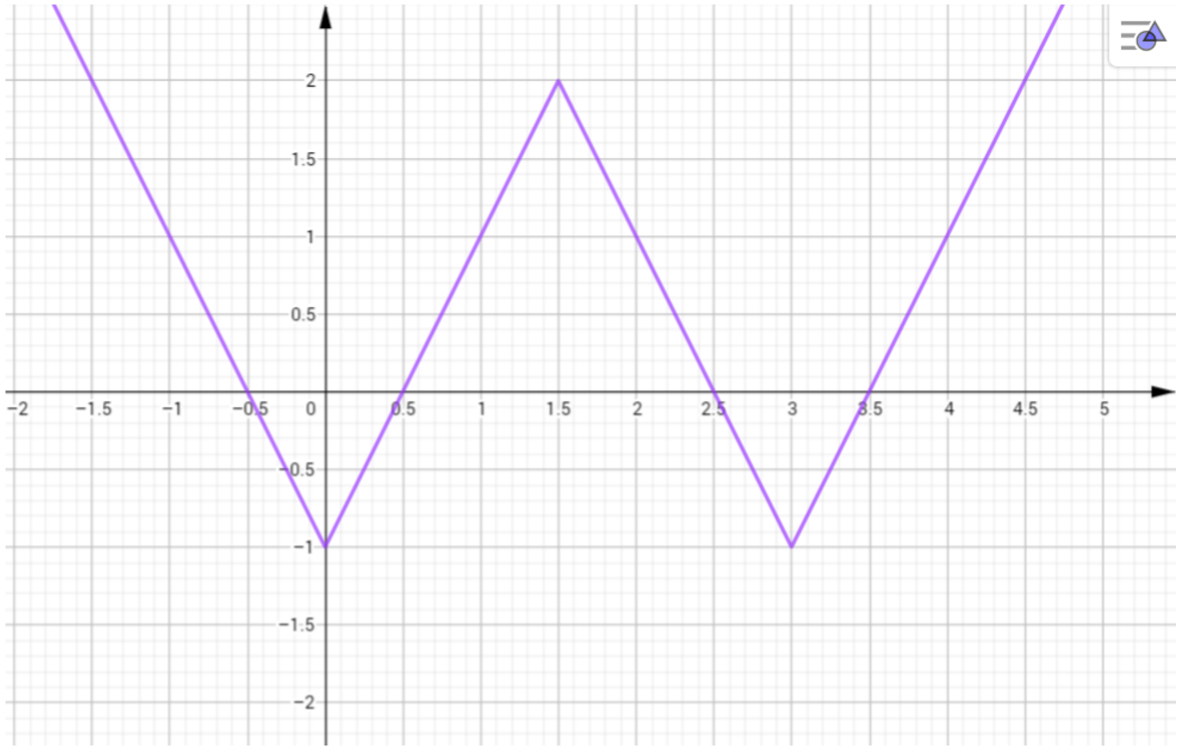
a) $\boldsymbol{d = 2}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = f(x) + 2}$, $\quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					
$\boldsymbol{g(x) = f(x) + 2}$					



b) $\boldsymbol{d = -1}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = f(x) - 1}$, $\quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

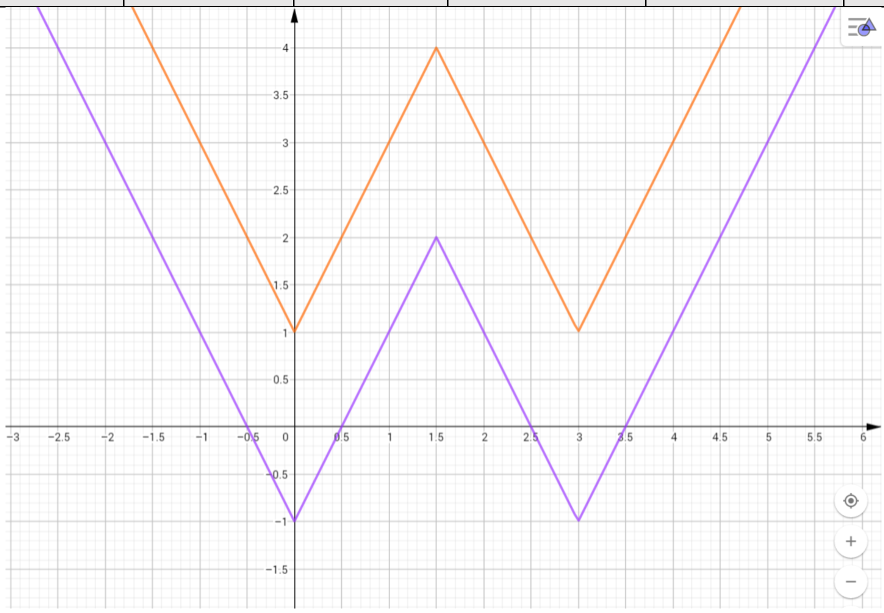
$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					
$\boldsymbol{g(x) = f(x) - 1}$					



Nastavni listić 2 (rješenje)

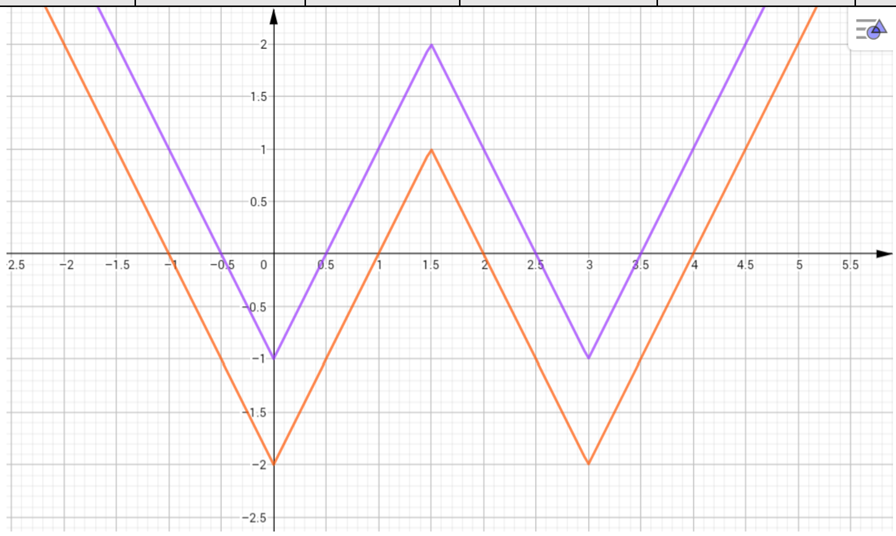
a) $d = 2, \quad g(x) = f(x) + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

x	-0.5	0	1.5	3	4
$f(x)$	0	-1	2	-1	1
$g(x) = f(x) + 2$	2	1	4	1	3



b) $\boldsymbol{d = -1}, \quad \boldsymbol{g(x) = f(x) - 1}, \quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-0.5}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1.5}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{4}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{1}$
$\boldsymbol{g(x) = f(x) - 1}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{0}$



Funkcija $f(x)$ se pomaknula za dva prema gore u smjeru y–osi kada je koeficijent $d = 2$, a za jedan prema dolje smjeru y–osi kada je koeficijent $d = -1$.

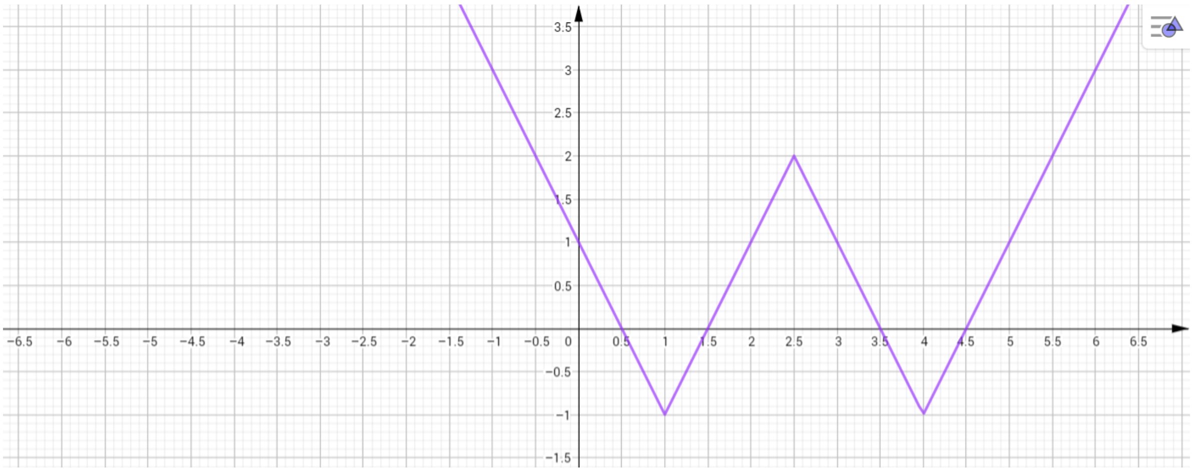
U prva dva nastavna listića koeficijenti a i d mijenjali su vrijednost funkcije što je bilo lako uočljivo samim popunjavanjem tablice. Već iz tabličnih podatka da se naslutiti kako dani koeficijenti utječu na transformaciju grafa funkcije $f(x)$. U sljedeća dva nastavna listića nije odmah lako uočiti na koji način koeficijenti b i c utječu na transformaciju grafa funkcije $f(x)$ stoga je važno da nastavni listić „navodi" učenike do željenog zaključka.

Nastavni listić 3

Na svakoj slici je graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)$. Očitajte lako uočljive točke $(x, f(x))$ sa grafa i unesite ih u danu tablicu. Nova funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = f(bx)$. Ovisno o koeficijentu b, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš zadatak je otkriti vezu između koeficijenta b te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite danu tablicu. Objasni!

a) $\boldsymbol{b = -1}, \quad \boldsymbol{g(x) = f(-x)}, \quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					

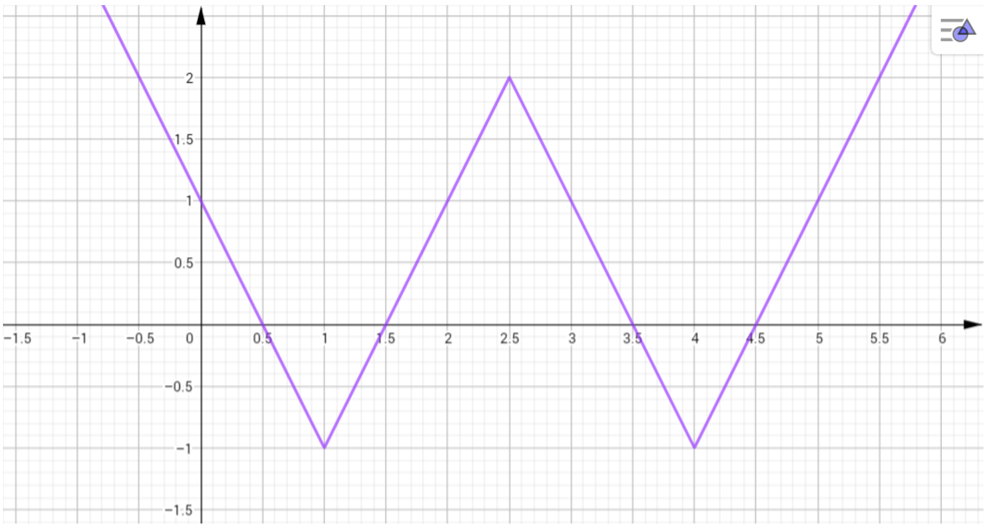


Otkrijte i obrazložite za koje vrijednosti $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ vrijedi da $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})$ koristeći gornju tablicu. Na temelju dobivenih rezultata popunite tablicu te nacrtajte graf funkcije $g(x)$.

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$					

b) $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{2}\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$					

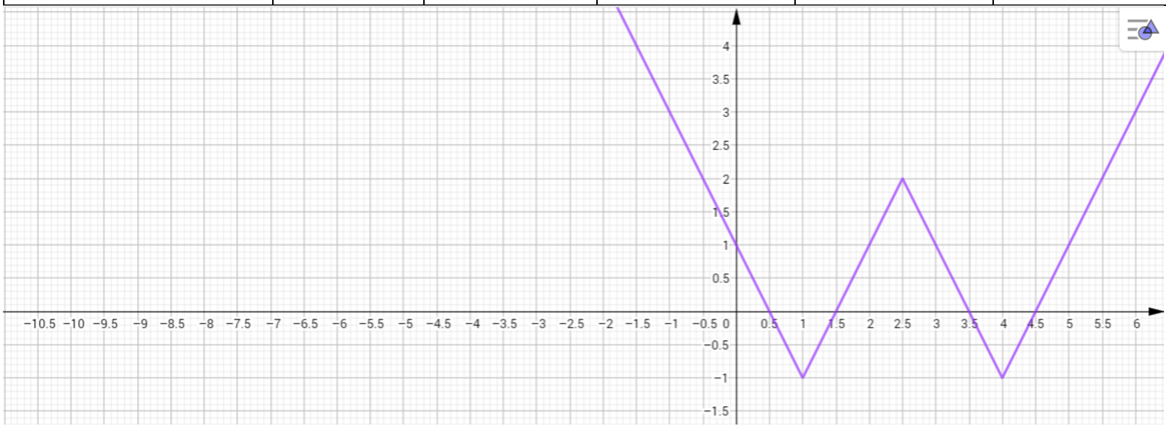


Otkrijte i obrazložite za koje vrijednosti $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ vrijedi da $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})$ koristeći gornju tablicu. Na temelju dobivenih rezultata popunite tablicu te nacrtajte graf funkcije $g(x)$.

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$					

c) $b = -\frac{1}{2}$, $\quad g(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $\quad x \in \mathbb{R}$

x					
$f(x)$					



Otkrijte i obrazložite za koje vrijednosti $x \in \mathbb{R}$ vrijedi da $g(x) = f(-x)$ koristeći gornju tablicu. Na temelju dobivenih rezultata popunite tablicu te nacrtajte graf funkcije $g(x)$.

x					
$g(x)$					

Nastavni listić 3 (rješenje)

a) $b = -1$, $\quad g(x) = f(-x)$, $\quad x \in \mathbb{R}$

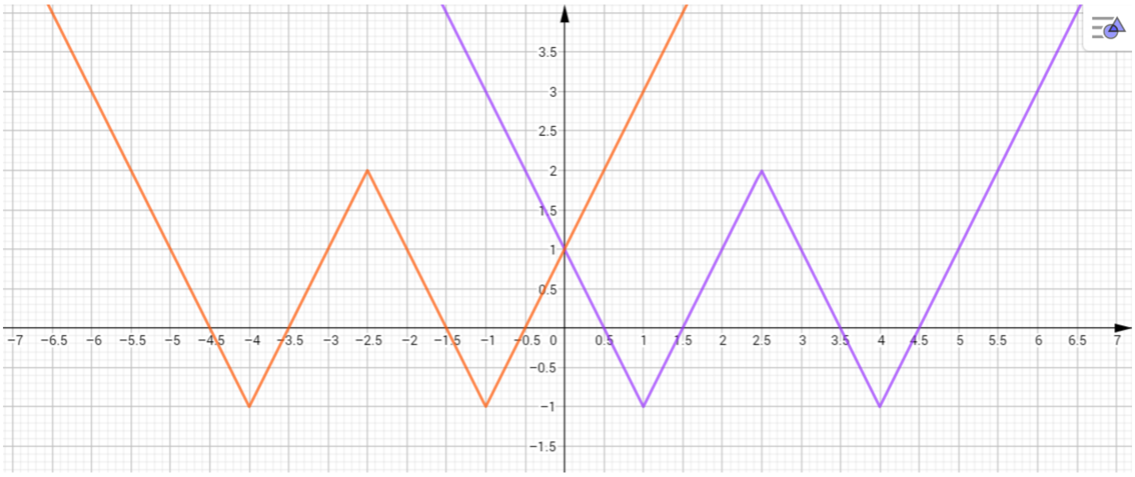
x	-1	1	2.5	4	4.5
$f(x)$	3	-1	2	-1	0

Koristeći podatke iz tablice i jednakost $f(-x) = g(x)$ zaključujemo:

- $f(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = g(1) = 3$
- $f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = g(-1) = -1$
- $f(2.5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2.5) = g(-2.5) = 2$
- $f(4) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(4) = g(-4) = -1$
- $f(4.5) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(4.5) = g(-4.5) = 0$

Sada možemo popuniti tablicu vrijednosti za funkciju $g(x)$ te nacrtati njezin graf te uočiti na koji način je koeficijent $b = -1$ utjecao na transformaciju grafa $f(x)$.

x	1	-1	-2.5	-4	-4.5
$g(x)$	3	-1	2	-1	0



Iz grafa zaključujemo da se graf funkcije $f(x)$ preslikao osno simetrično s obzirom na y–os.

b) $\boldsymbol{b = 2}$, $\boldsymbol{g(x) = f(2x)}$, $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

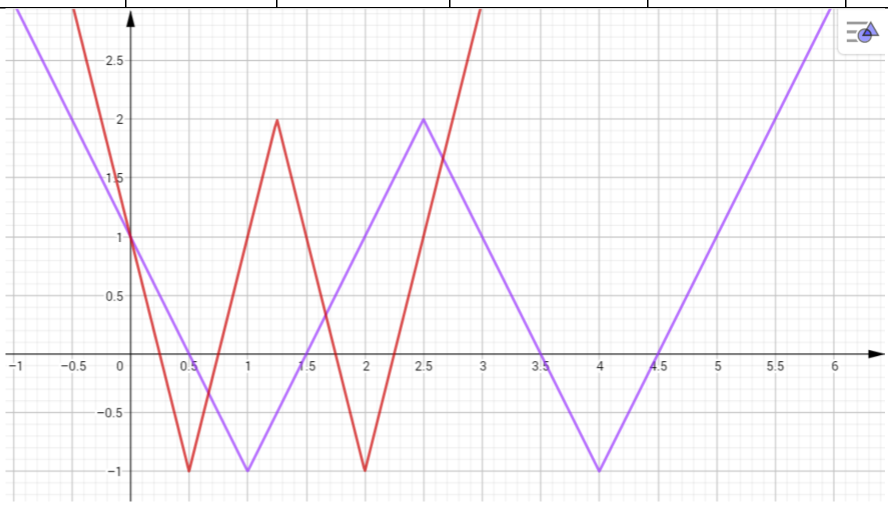
$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2.5}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4.5}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$

Koristeći podatke iz tablice i jednakost $f(2x) = g(x)$ zaključujemo:

- $f(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = \boldsymbol{g(-0.5) = 3}$
- $f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = \boldsymbol{g(0.5) = -1}$
- $f(2.5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2.5) = \boldsymbol{g(1.25) = 2}$
- $f(4) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(4) = \boldsymbol{g(2) = -1}$
- $f(4.5) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(4.5) = \boldsymbol{g(2.25) = 0}$

Sada možemo popuniti tablicu vrijednosti za funkciju $g(x)$ te nacrtati njezin graf te uočiti na koji način je koeficijent $b = -1$ utjecao na transformaciju grafa $f(x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-0.5}$	$\mathbf{0.5}$	$\mathbf{1.25}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2.25}$
$\boldsymbol{g(x)}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$



Iz grafa možemo zaključiti da se graf funkcije $f(x)$ stegnuo u smjeru x–osi.

c) $\boldsymbol{b = -\frac{1}{2}}, \quad \boldsymbol{g(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)}, \quad \boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$

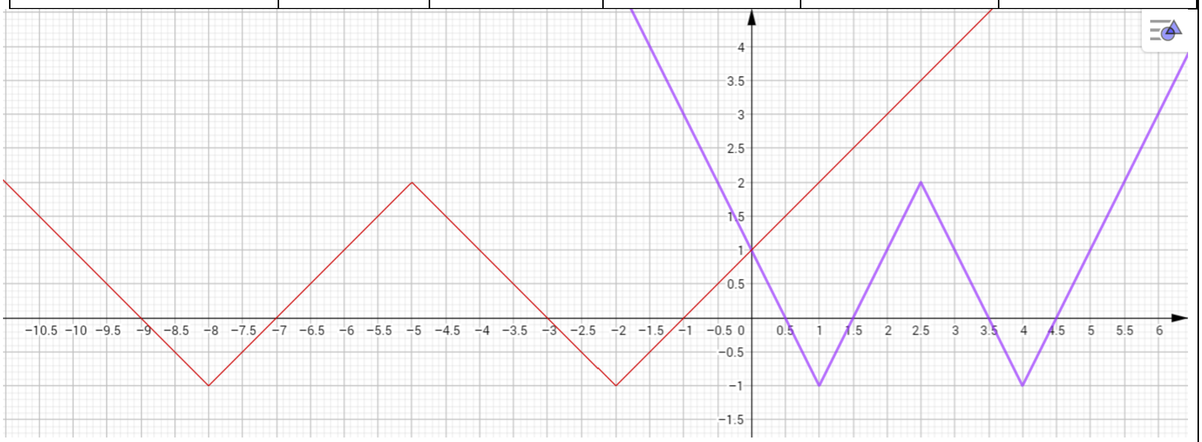
$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2.5}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4.5}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$

Koristeći podatke iz tablice i jednakost $f\left(-\frac{1}{2}x\right) = g(x)$ zaključujemo:

- $f(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = \boldsymbol{g(2) = 3}$
- $f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = \boldsymbol{g(-2) = -1}$
- $f(2.5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2.5) = \boldsymbol{g(-5) = 2}$
- $f(4) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(4) = \boldsymbol{g(-8) = -1}$
- $f(4.5) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(4.5) = \boldsymbol{g(-9) = 0}$

Sada možemo popuniti tablicu vrijednosti za funkciju $g(x)$ te nacrtati njezin graf te uočiti na koji način je koeficijent $b = -1$ utjecao na transformaciju grafa $f(x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-9}$
$\boldsymbol{g(x)}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$



Iz grafa možemo zaključiti da se graf funkcije $f(x)$ rastegnuo u smjeru x–osi na što je utjecala apsolutna vrijednost koeficijenta $b = -\frac{1}{2}$, a negativni predznak je uzrok zrcaljenja s obzirom na y–os.

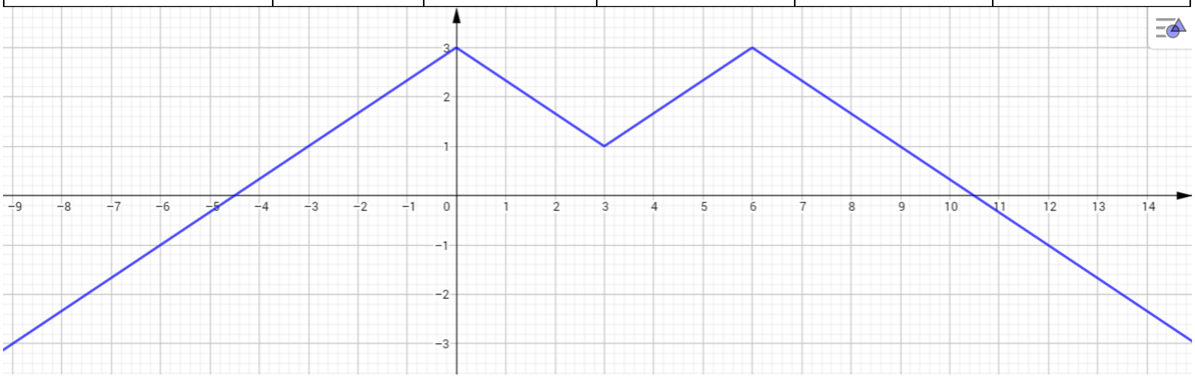
Cilj ovog nastavnog listića je da učenici otkriju utjecaj koeficijenta b iz algebarskog izraza $g(x) = f(bx)$ na graf funkcije $f(x)$. Kada je $b = -1$ graf funkcije $f(x)$ zrcali se s obzirom na os ordinata. Ako je $|b| > 1$ graf funkcije se rasteže u smjeru x–osi, a ako je $0 < |b| < 1$ graf funkcije $f(x)$ se steže u smjeru x–osi.

Nastavni listić 4

Na svakoj slici je graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)$. Očitajte lako uočljive točke $(x, f(x))$ sa grafa i unesite ih u danu tablicu. Nova funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = f(x + c)$. Ovisno o koeficijentu c, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš zadatak je otkriti vezu između koeficijenta c te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite danu tablicu. Objasni!

a) $\boldsymbol{c = 1}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = f(x+1)}$, $\quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					

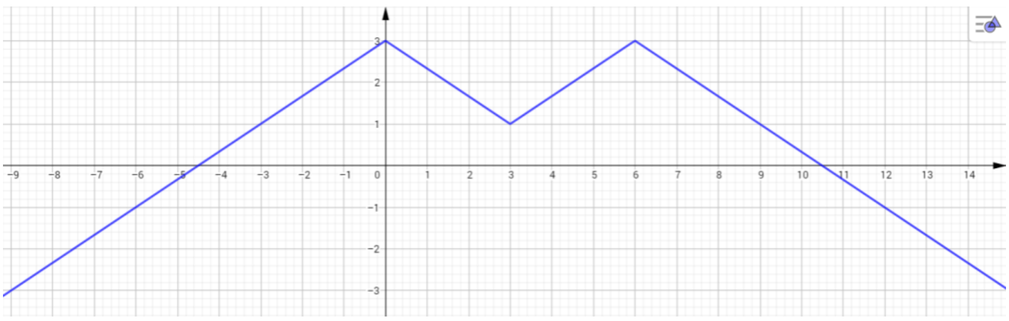


Otkrijte i obrazložite za koje vrijednosti $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ vrijedi da $\boldsymbol{g(x) = f(x+c)}$ koristeći gornju tablicu. Na temelju dobivenih rezultata popunite tablicu te nacrtajte graf funkcije $g(x)$.

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{g(x)}$					

b) $\boldsymbol{c = -2}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = f(x-2)}$, $\quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x}$					
$\boldsymbol{f(x)}$					



Otkrijte i obrazložite za koje vrijednosti $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ vrijedi da $\boldsymbol{g(x) = f(x+c)}$ koristeći gornju tablicu. Na temelju dobivenih rezultata popunite tablicu te nacrtajte graf funkcije $g(x)$.

Nastavni listić 4 (rješenje)

a) $\boldsymbol{c=1}$, $\boldsymbol{g(x)=f(x+1)}$, $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$

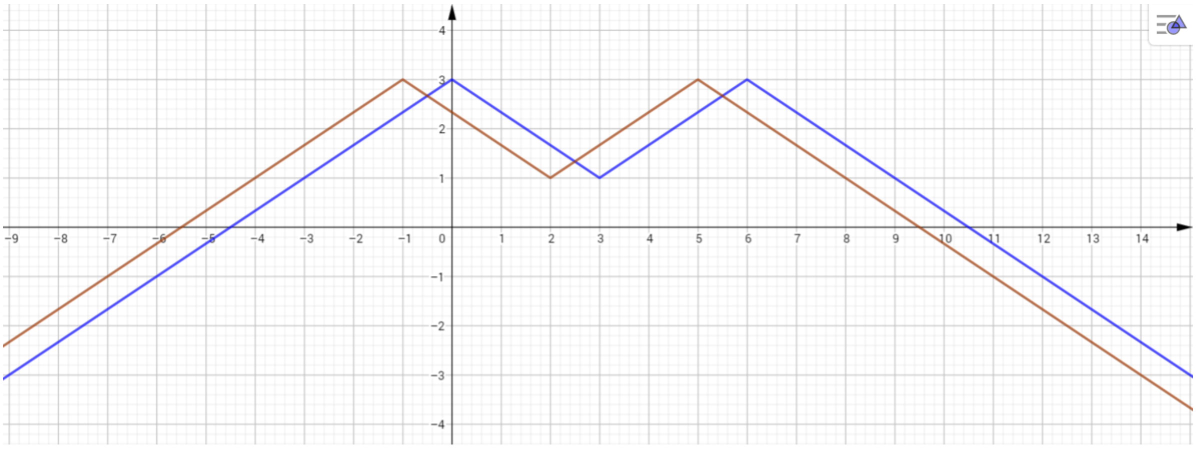
$\boldsymbol{x}$	-6	0	3	6	12
$\boldsymbol{f(x)}$	-1	3	1	3	-1

Koristeći podatke iz tablice i jednakost $f(x+1)=g(x)$ zaključujemo:

- $f(-6)=-1 \quad \Rightarrow \quad f(-6)=\boldsymbol{g(-7)=-1}$
- $f(0)=3 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\boldsymbol{g(-1)=3}$
- $f(3)=1 \quad \Rightarrow \quad f(3)=\boldsymbol{g(2)=1}$
- $f(6)=3 \quad \Rightarrow \quad f(6)=\boldsymbol{g(5)=3}$
- $f(12)=-1 \quad \Rightarrow \quad f(12)=\boldsymbol{g(11)=-1}$

Sada možemo popuniti tablicu vrijednosti za funkciju $g(x)$ te nacrtati njezin graf te uočiti na koji način je koeficijent c= 1 utjecao na transformaciju grafa $f(x)$.

$\boldsymbol{x}$	-7	-1	2	5	11
$\boldsymbol{g(x)}$	-1	3	1	3	-1



Uočavamo da se graf funkcije $f(x)$ pomaknuo ulijevo za vrijednost 1 u smjeru osi apscisa.

b) $\boldsymbol{c=-2}$, $\boldsymbol{g(x)=f(x-2)}$, $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$

$\boldsymbol{x}$	-6	0	3	6	12
$\boldsymbol{f(x)}$	-1	3	1	3	-1

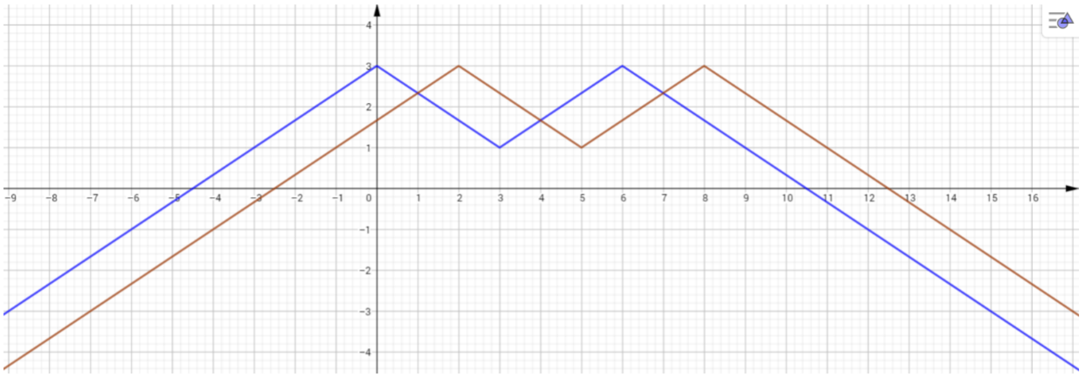
Koristeći podatke iz tablice i jednakost $f(x-2)=g(x)$ zaključujemo:

- $f(-6)=-1 \quad \Rightarrow \quad f(-6)=\boldsymbol{g(-4)=-1}$
- $f(0)=3 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\boldsymbol{g(2)=3}$
- $f(3)=1 \quad \Rightarrow \quad f(3)=\boldsymbol{g(5)=1}$

- $f(6) = 3 \quad \Rightarrow \quad f(6) = \boldsymbol{g(8) = 3}$
- $f(12) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(12) = \boldsymbol{g(14) = -1}$

Sada možemo popuniti tablicu vrijednosti za funkciju $g(x)$ te nacrtati njezin graf te uočiti na koji način je koeficijent c$= -2$ utjecao na transformaciju grafa $f(x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-4}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{5}$	$\boldsymbol{8}$	$\boldsymbol{14}$
$\boldsymbol{g(x)}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{-1}$



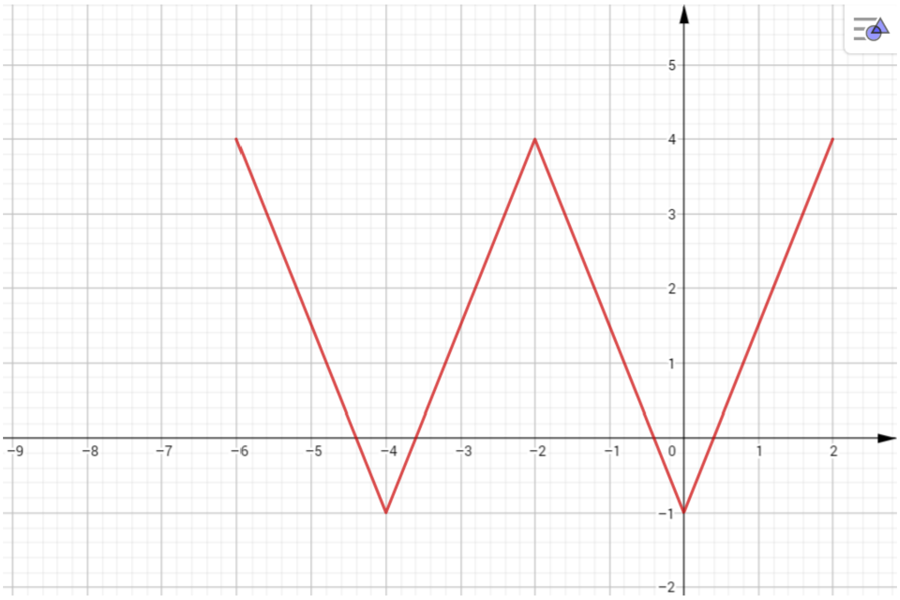
Uočavamo da se graf funkcije $f(x)$ pomaknuo udesno za vrijednost 2 u smjeru osi apscisa.

Cilj ovog nastavnog listića je da učenici otkriju utjecaj koeficijenta c iz algebarskog izraza $g(x) = f(x + c)$ na graf funkcije $f(x)$. Ako je $c > 0$ graf funkcije $f(x)$ se translatira u lijevo, a ako je $c < 0$ onda se graf funkcije translatira udesno za iznos koeficijenta c. Treba obratiti pozornost da se graf funkcije pomiče suprotno od „intuicije".

Kod pomicanja grafa funkcije u smjeru osi apscisa zanimljivo je primijetiti da osim pomicanja grafa dolazi i do „pomicanja" domene funkcije. To se ne može lako vidjeti ako je funkcija definirana na cijelom skupu realnih brojeva tj. vrijedi $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, međutim kod restrikcije (suženja) funkcije je to vrlo lako uočljivo. Da bi učenici to otkrili može se napraviti vrlo kratka aktivnost kojom ćete postići željeni ishod. Isto tako može se napraviti jedan primjer na ploči u kojem ćete kroz razgovor s učenicima također doći do željenog zaključka.

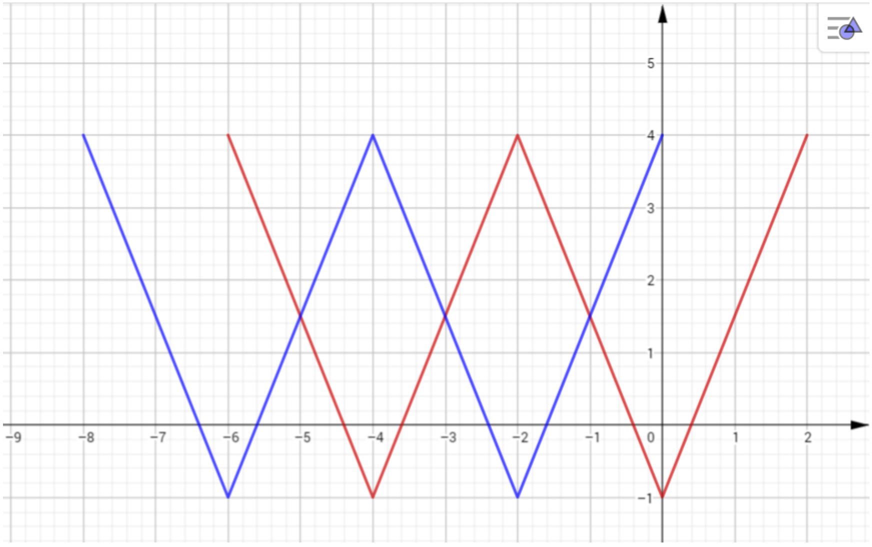
Nastavnik na ploči nacrta graf nepoznate restringirane funkcije. Time će se izbjeći fokus sa algebarskog zapisa funkcije te će se sva pažnja usmjeriti na graf nacrtan na ploči. Vrlo važno je da nastavnik na ploči napiše restrikciju funkcije tj. domenu funkcije. Nakon toga od učenika traži da nacrtaju graf funkcije $g(x) = f(x + c)$ gdje on sam odabere iznos koeficijenta c. Graf funkcije $g(x)$ nastaje translacijom grafa funkcije $f(x)$ i to ako je $c > 0$ graf funkcije $f(x)$ se translatira u lijevo, a ako je $c < 0$ onda se graf funkcije translatira udesno za iznos koeficijenta

c. Nakon prvog zaključka, učenici u diskusiji s nastavnikom primjećuju da se i domena „translatirala“. Pokažimo to na konkretnom primjeru.



Graf funkcije $f(x)$ je na slici. Uočimo da je $f\colon [-6,2] \to [-1,4]$. Drugim riječima, domena funkcije $f(x)$ je $[-6,2]$. Neka je $g(x)$ funkcija nastala translacijom grafa funkcije $f(x)$ ulijevo za 2 u smjeru x–osi.

Dakle, $g(x) = f(x+2)$. Nakon što nacrtamo graf funkcije $g(x)$ postavljamo pitanje vrijedi li da je domena funkcije $g(x)$ ista kao i domena funkcije $f(x)$. Iz grafa se uočava da nije. Za



funkciju $g(x)$ vrijedi $g\colon [-8,0] \to [-1,4]$. Zaključujemo da se i domena funkcije $g(x)$ pomaknula ulijevo za 2 u smjeru osi apscisa tj. da koeficijent 2 u algebarskom izrazu $g(x) = f(x+2)$ osim na pomicanje grafa utječe samim time i na pomicanje domene. Zanimljivo je primijetiti kako su kodmene ostale iste. To je i logično pošto smo funkciju pomicali u smjeru osi apscisa. Iako su do sada spomenute stvari trivijalne, važno ih je spomenuti jer upravo zbog te trivijalnosti zaboravimo na njih, a ne oduzimaju nam puno vremena. Analogno, nadovezujući se na temu, možemo učenicima postaviti pitanje koji koeficijent i kako će promijeniti kodomenu funkcije $g(x)$ s obzirom na kodomenu funkcije $f(x)$ u algebarskom zapisu linearne transformacije $g(x) = af(bx+c) + d$ i time ih potaknuti na analogno razmišljanje.

3.2. Aktivnost „Funkcijski Transformersi 2“

Cilj aktivnosti: učenici će, podijeljeni u parove, zajedničkim rješavanjem nastavnog listića, uočiti pravilnosti pomicanja grafa funkcije ovisno o vrijednosti koeficijenata iz algebarskog zapisa funkcije $g(x) = af(bx + c) + d$

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listići za svaki par, papir za zaključke

Tijek aktivnosti: Nastavnik na početku sata zajedno s učenicima ponovi definiciju funkcije te definiciju grafa funkcije. Nakon uvodnog ponavljanja nastavnik dijeli svakom paru nastavne listiće, a oni ih samostalno rješavaju. Nakon svakog rješavanja pojedinog nastavnog listića, učenici na poseban papir za zaključke pišu što su otkrili prolazeći i rješavajući listić.

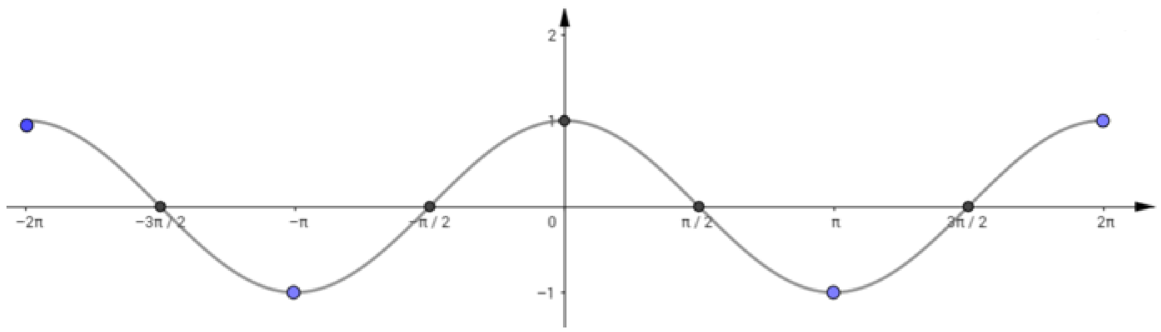
Nastavni listić 1

Na svakoj slici je graf funkcije $f: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$. Koordinate točaka na grafu su u tablici. Funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = af(x)$. Ovisno o koeficijentu a, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš zadatak je otkriti vezu između koeficijenta a te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite odgovarajuće tablice, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i skicirajte graf funkcije $g(x)$. Zapišite svoje zaključke na danom papiru.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-2\pi}$	$\boldsymbol{-\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{-\pi}$	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1}$

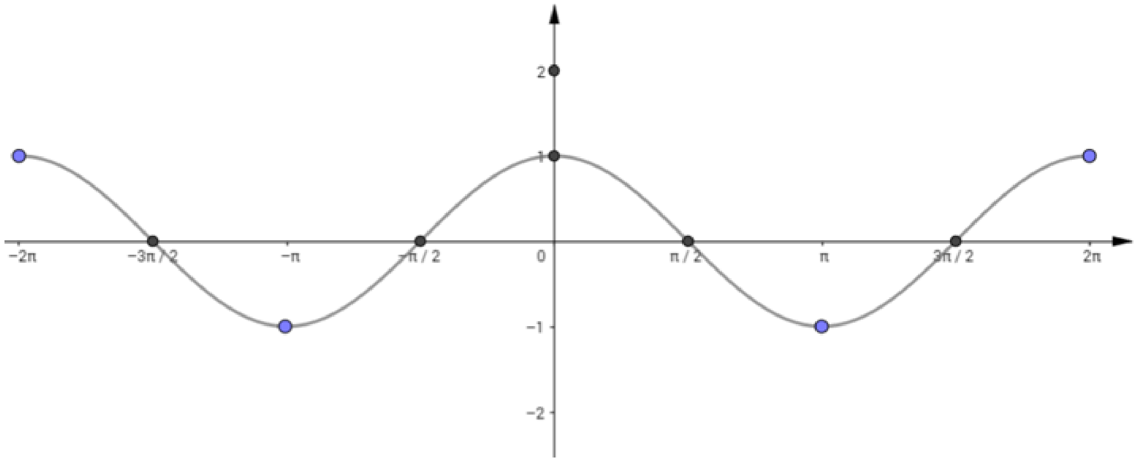
a) $\boldsymbol{a = -1}$, $\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-2\pi}$	$\boldsymbol{-\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{-\pi}$	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$									



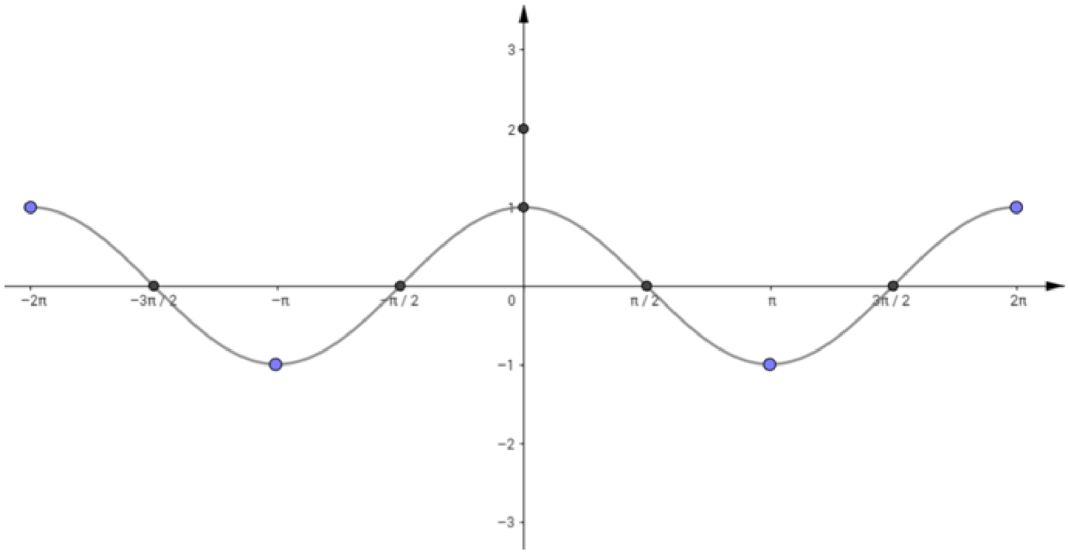
b) $a = 2$, $g(x) = 2f(x)$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = 2f(x)$									



c) $a = -3$, $g(x) = -3f(x)$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = -3f(x)$									

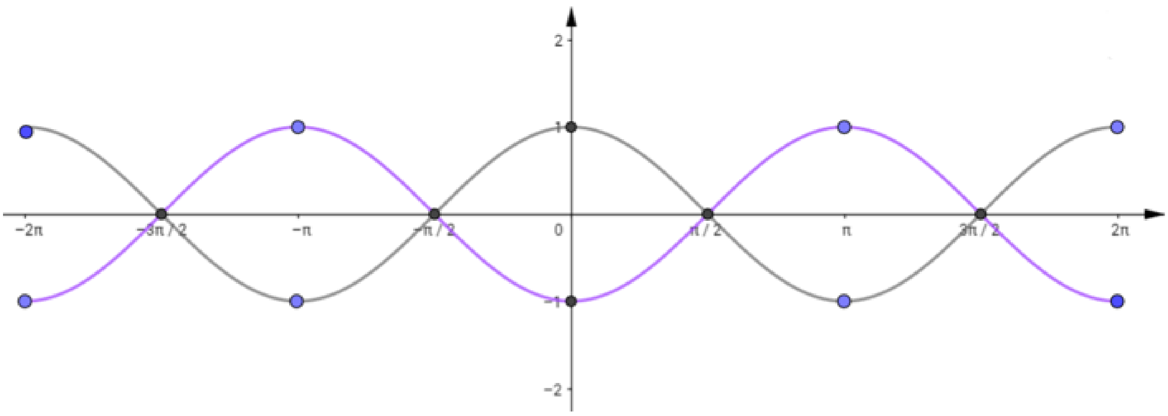


Svoje zaključke napišite na danom papiru!

Nastavni listić 1 (rješenje)

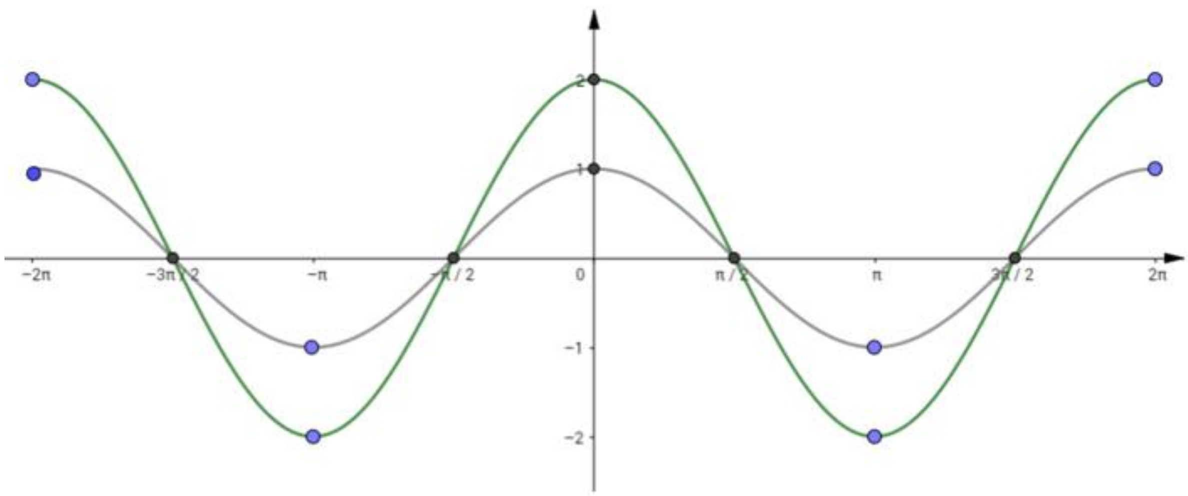
a) $a = -1, \quad g(x) = -f(x)$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = -f(x)$	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1



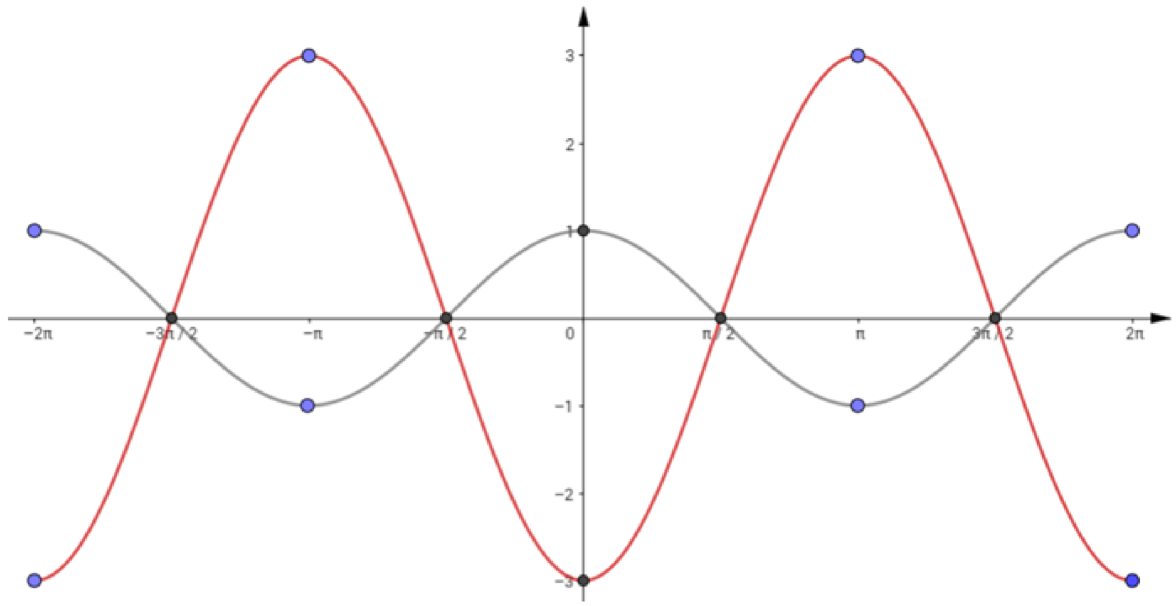
b) $a = 2, \quad g(x) = 2f(x)$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = 2f(x)$	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2



c) $a = -3, \quad g(x) = -3f(x)$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = -3f(x)$	-3	0	3	0	-3	0	3	0	-3



Nastavni listić 2

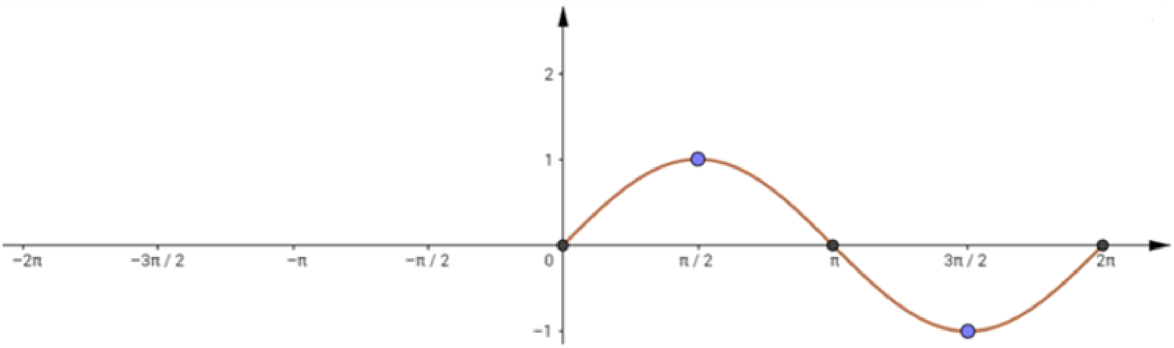
Na svakoj slici je graf funkcije$f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$. Koordinate točaka na grafu su u tablici. Funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = f(bx)$. Ovisno o koeficijentu b, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš je zadatak otkriti vezu između koeficijenta b te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite odgovarajuće tablice, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i skicirajte graf funkcije $g(x)$ te zapišite zaključke.

Napomena: primijetimo da $bx \in [0,2\pi]$ tj. $x \in \left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ za $b > 0$ i $x \in \left[\frac{2\pi}{b}, 0\right]$ za $b < 0$ te upravo zbog ovog uvjeta moramo biti oprezni kod odabira nezavisne varijable x. Za točke s grafa vrijedi:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	-1	0

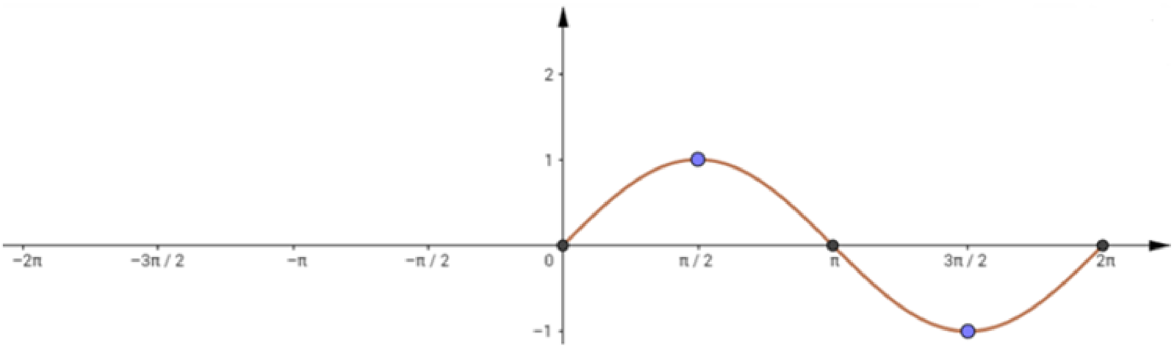
a) $b = -1, \quad g(x) = f(-x), \quad x \in [-2\pi, 0]$

x	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$-x$					
$g(x) = f(-x)$					



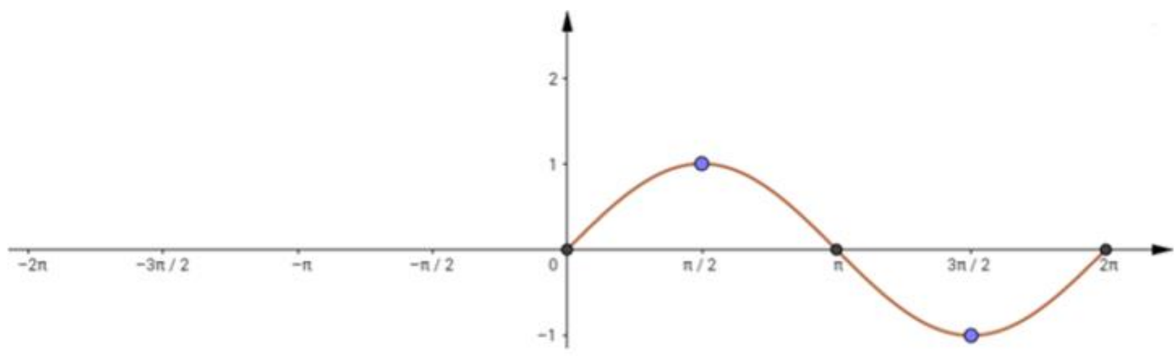
b) $b = 2, \quad g(x) = f(2x), \quad x \in [0, \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = f(2x)$					



c) $b = -4, \quad g(x) = f(-4x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

x	0	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{2}$
$-4x$					
$g(x) = f(-4x)$					

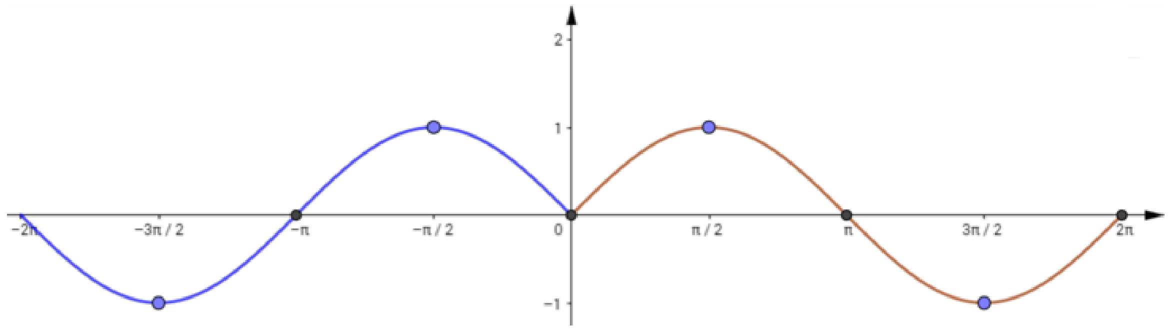


Svoje zaključke napišite na danom papiru!

Nastavni listić 2 (rješenje)

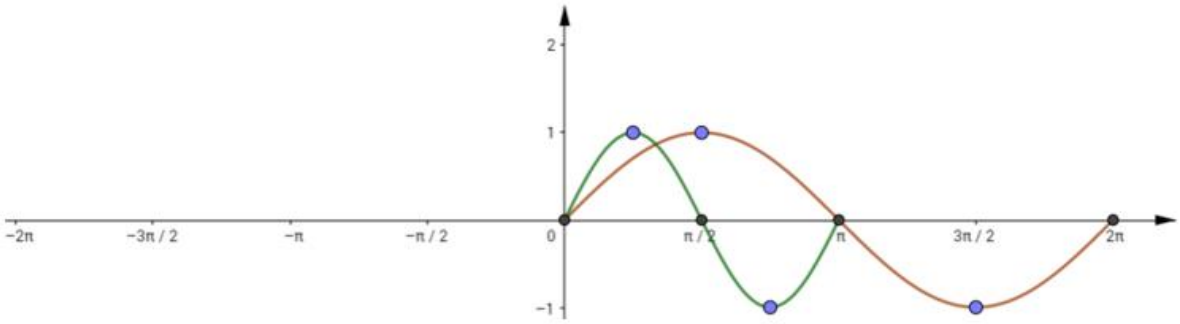
a) $b = -1, \quad g(x) = f(-x), \quad x \in [-2\pi, 0]$

x	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$-x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = f(-x)$	0	1	0	-1	0



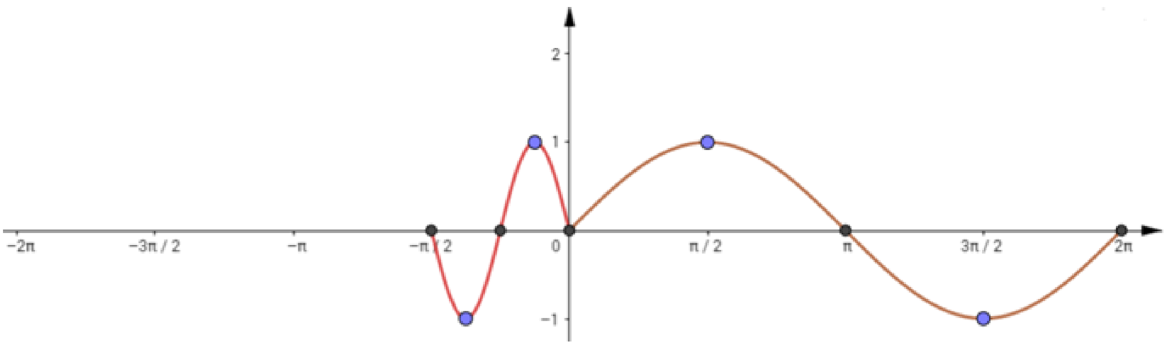
b) $b = 2, \quad g(x) = f(2x), \quad x \in [0, \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = f(2x)$	0	1	0	-1	0



c) $\boldsymbol{b = -4}$, $\boldsymbol{g(x) = f(-4x)}$, $\boldsymbol{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{8}}$	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{-\frac{3\pi}{8}}$	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$
$\boldsymbol{-4x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\boldsymbol{g(x) = f(-4x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{0}$



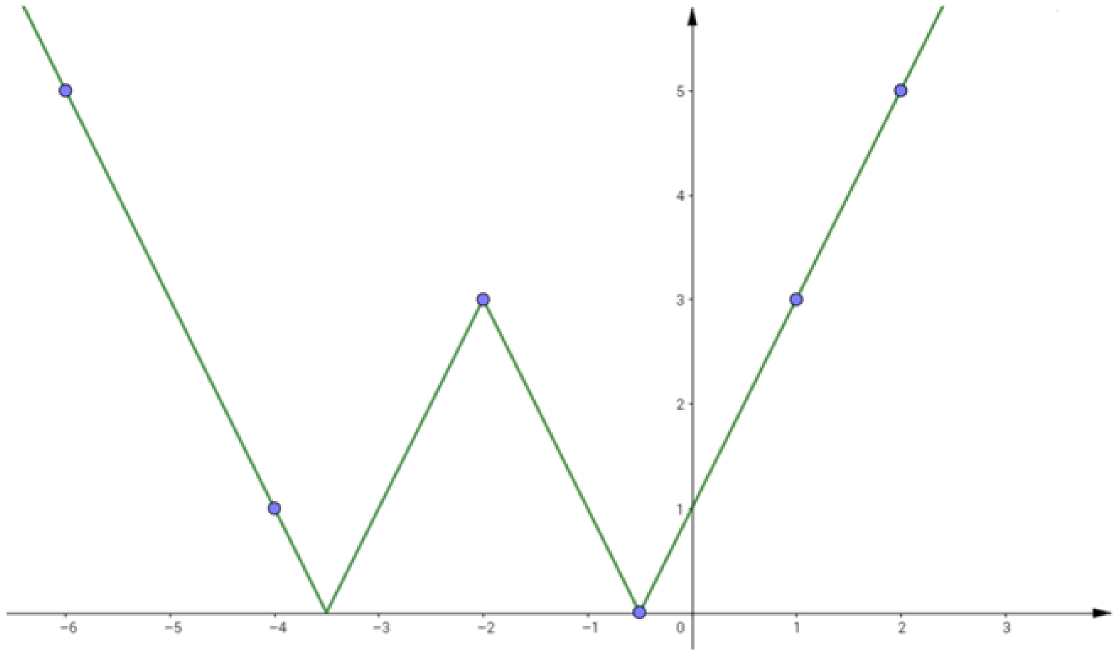
Nastavni listić 3

Na svakoj slici je graf funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \big||2x+4| - 3\big|$ Koordinate točaka označenih na grafu su u tablici. Funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = f(x+c)$. Ovisno o koeficijentu c, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš je zadatak otkriti vezu između koeficijenta c te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite odgovarajuće tablice, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i skicirajte graf funkcije $g(x)$. Napiši zaključak!

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-6}$	$\boldsymbol{-4}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{-0.5}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{5}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{5}$

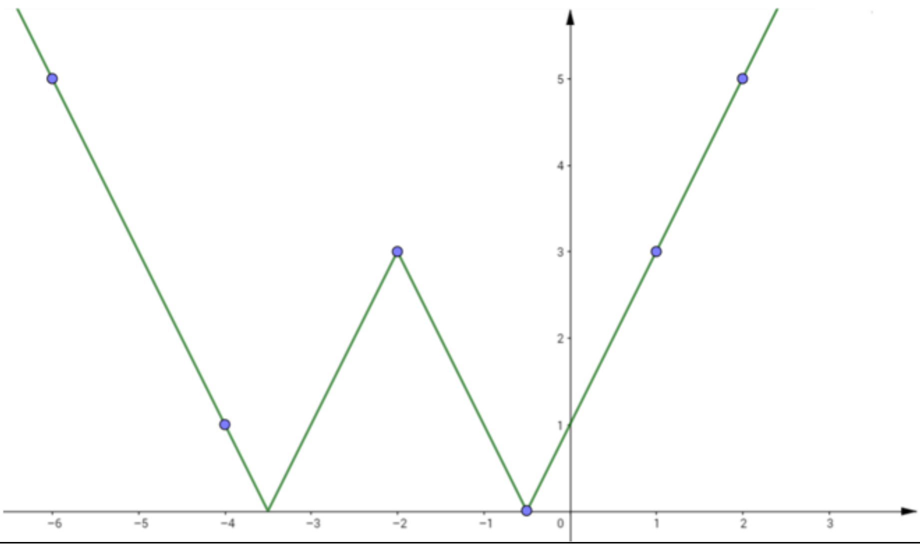
a) $c = -1, \quad g(x) = f(x-1)$

x	-5	-3	-1	0.5	2	3
$x-1$						
$g(x) = f(x-1)$						



b) $c = 2, \quad g(x) = f(x+2)$

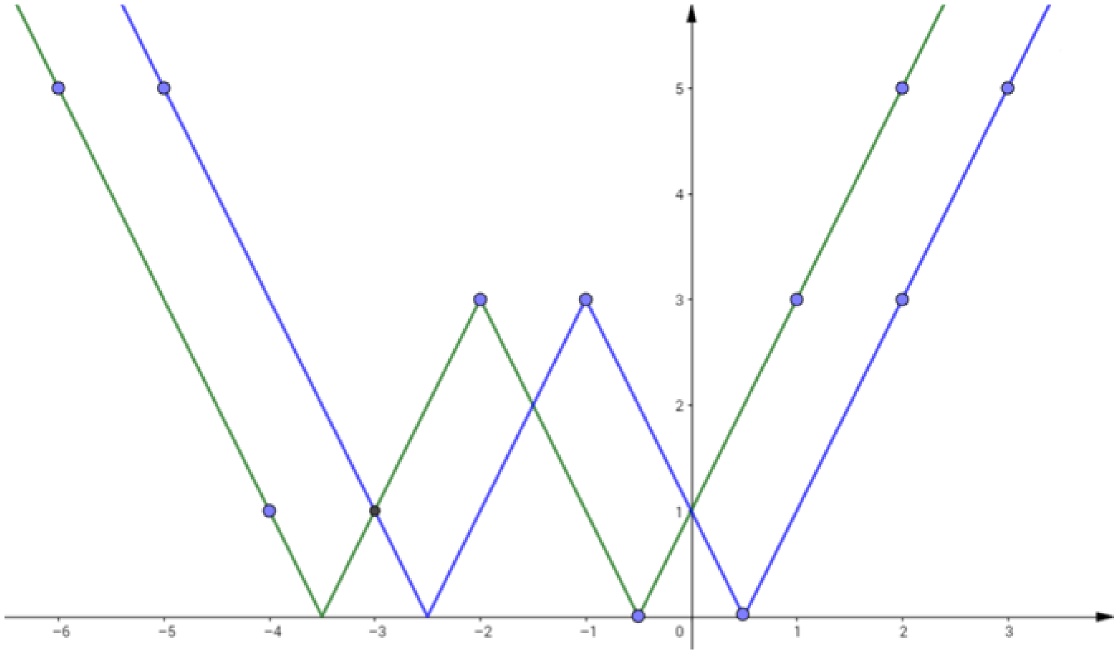
x	-8	-6	-4	-2.5	-1	0
$x+2$						
$g(x) = f(x+2)$						



Nastavni listić 3 (rješenje)

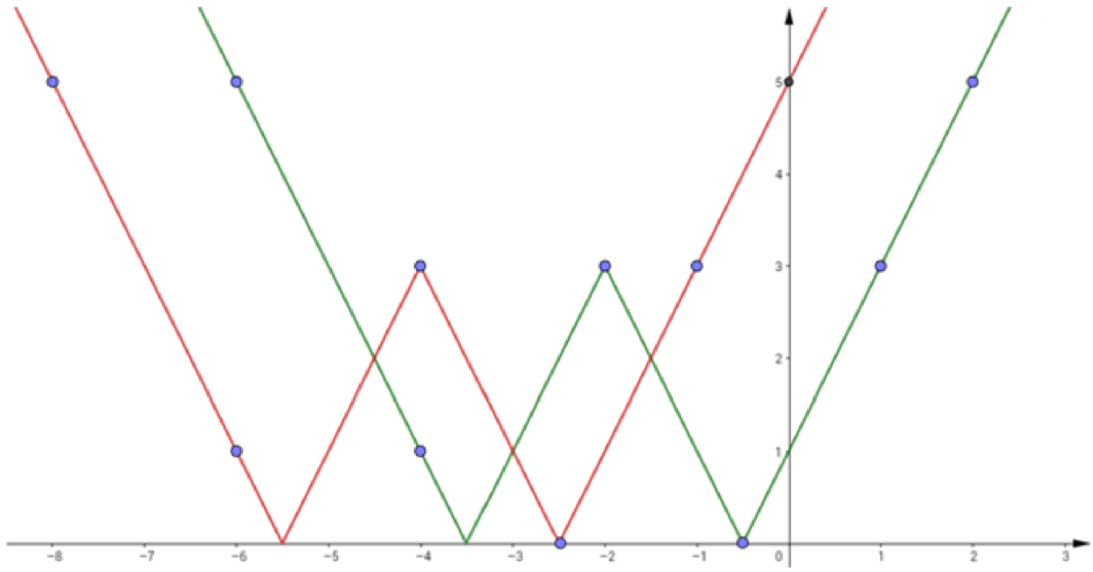
a) $c = -1, \quad g(x) = f(x-1)$

x	-5	-3	-1	0.5	2	3
$x-1$	-6	-4	-2	-0.5	1	2
$g(x) = f(x-1)$	5	1	3	0	3	5



b) $c = 2, \quad g(x) = f(x+2)$

x	-8	-6	-4	-2.5	-1	0
$x+2$	-6	-4	-2	-0.5	1	2
$g(x) = f(x+2)$	5	1	3	0	3	5



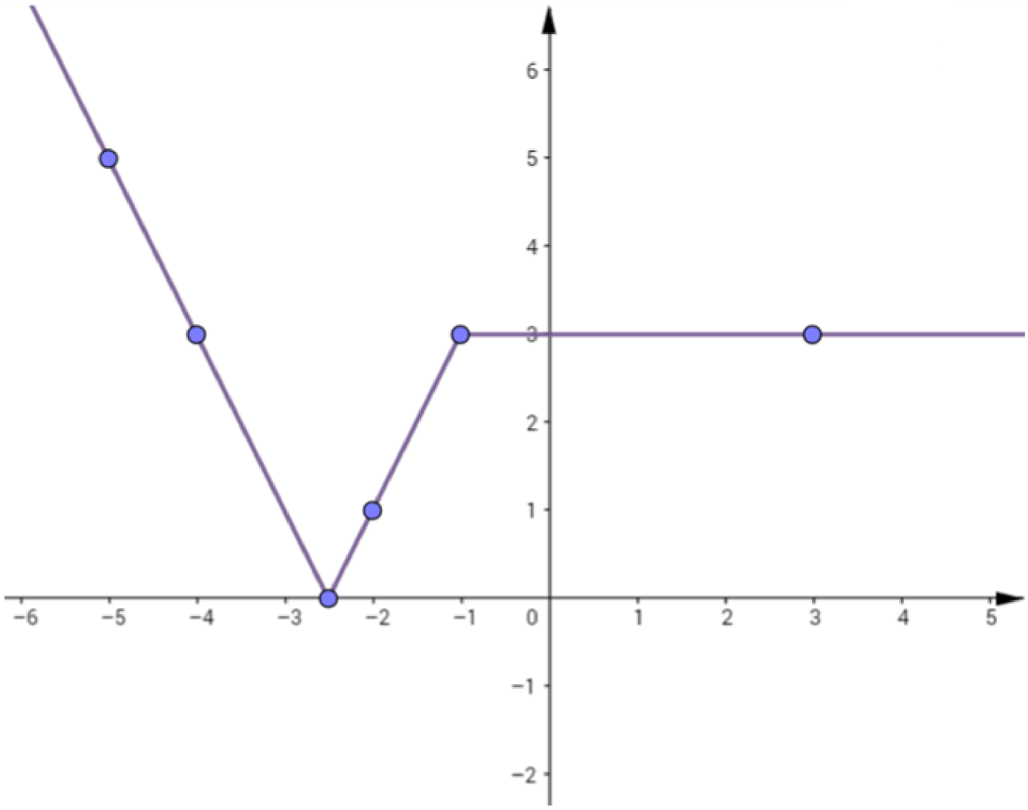
Nastavni listić 4

Na svakoj slici je graf funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, koordinate točaka označenih na grafu su u tablici. Funkcija $g(x)$ zadana je pravilom $g(x) = f(x) + d$. Ovisno o koeficijentu d, njezin graf se mijenja u odnosu na graf funkcije $f(x)$. Vaš je zadatak otkriti vezu između koeficijenta d te grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Popunite odgovarajuće tablice, dobivene točke ucrtajte u koordinatni sustav i skicirajte graf funkcije $g(x)$. Napiši zaključak na za to predviđeno mjesto.

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-2.5}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{3}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$

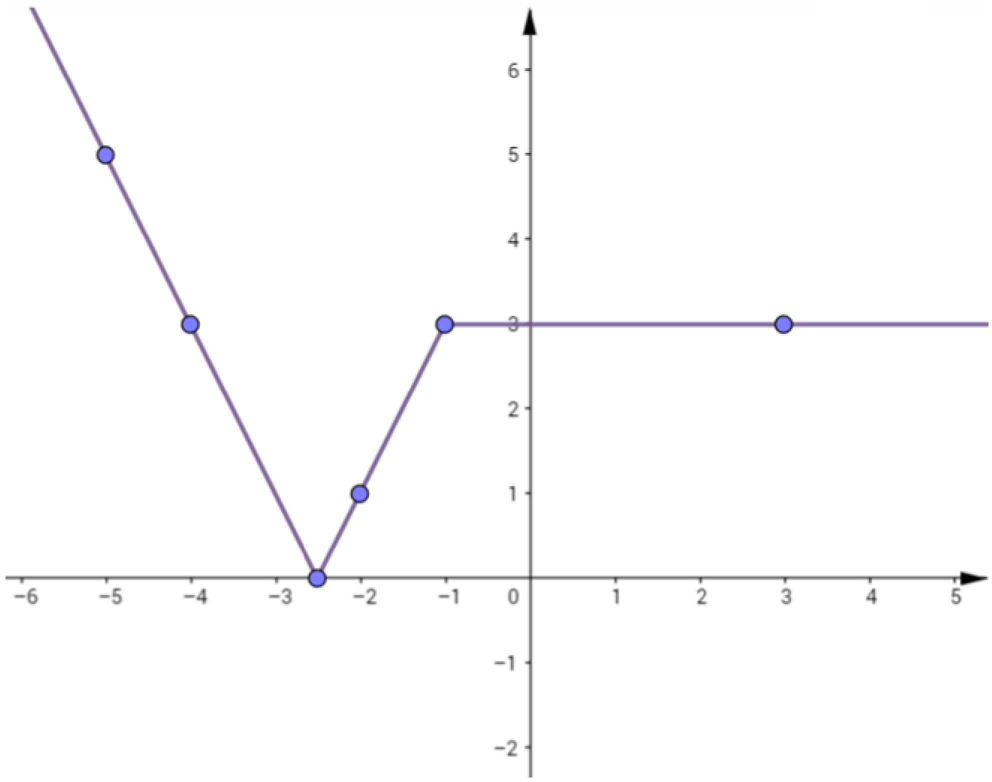
a) $\boldsymbol{d = 1}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = f(x) + 1}$

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-2.5}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{3}$
$\boldsymbol{g(x) = f(x) + 1}$						



b) $\boldsymbol{d = -2}$, $\quad \boldsymbol{g(x) = f(x) - 2}$

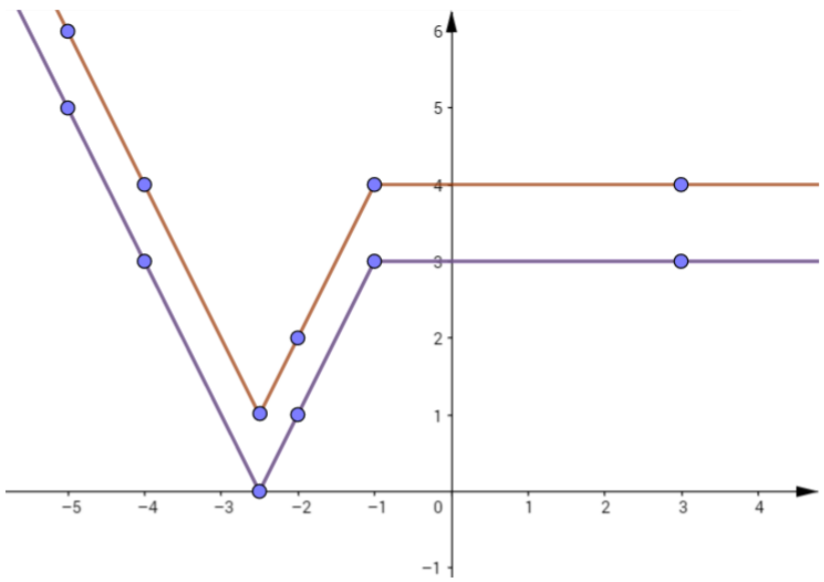
$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-2.5}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{3}$
$\boldsymbol{g(x) = f(x) - 2}$						



Nastavni listić 4 (rješenje)

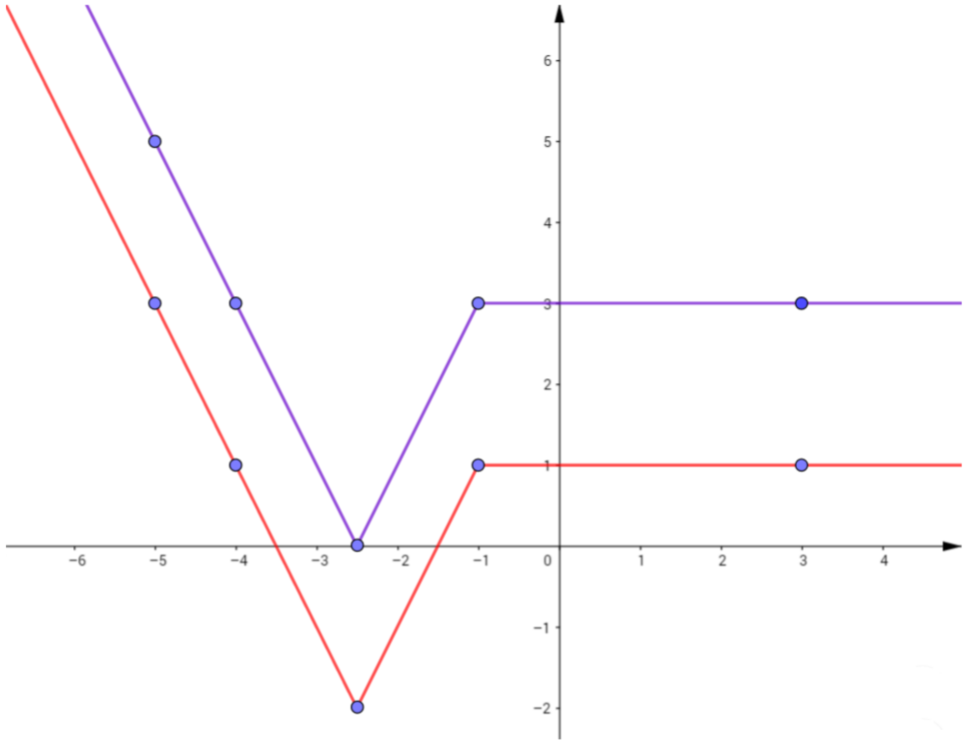
a) $d = 1, \quad g(x) = f(x) + 1$

x	-5	-4	-2.5	-2	-1	3
$g(x) = f(x) + 1$	6	4	1	2	4	4



b) $d = -2, \quad g(x) = f(x) - 2$

x	-5	-4	-2.5	-2	-1	3
$g(x) = f(x) - 2$	3	1	-2	-1	1	1



Papir za zaključke

Aktivnost 1

Aktivnost 2

Aktivnost 3

Aktivnost 4

3.3. Aktivnost „Nacrtaj me!“

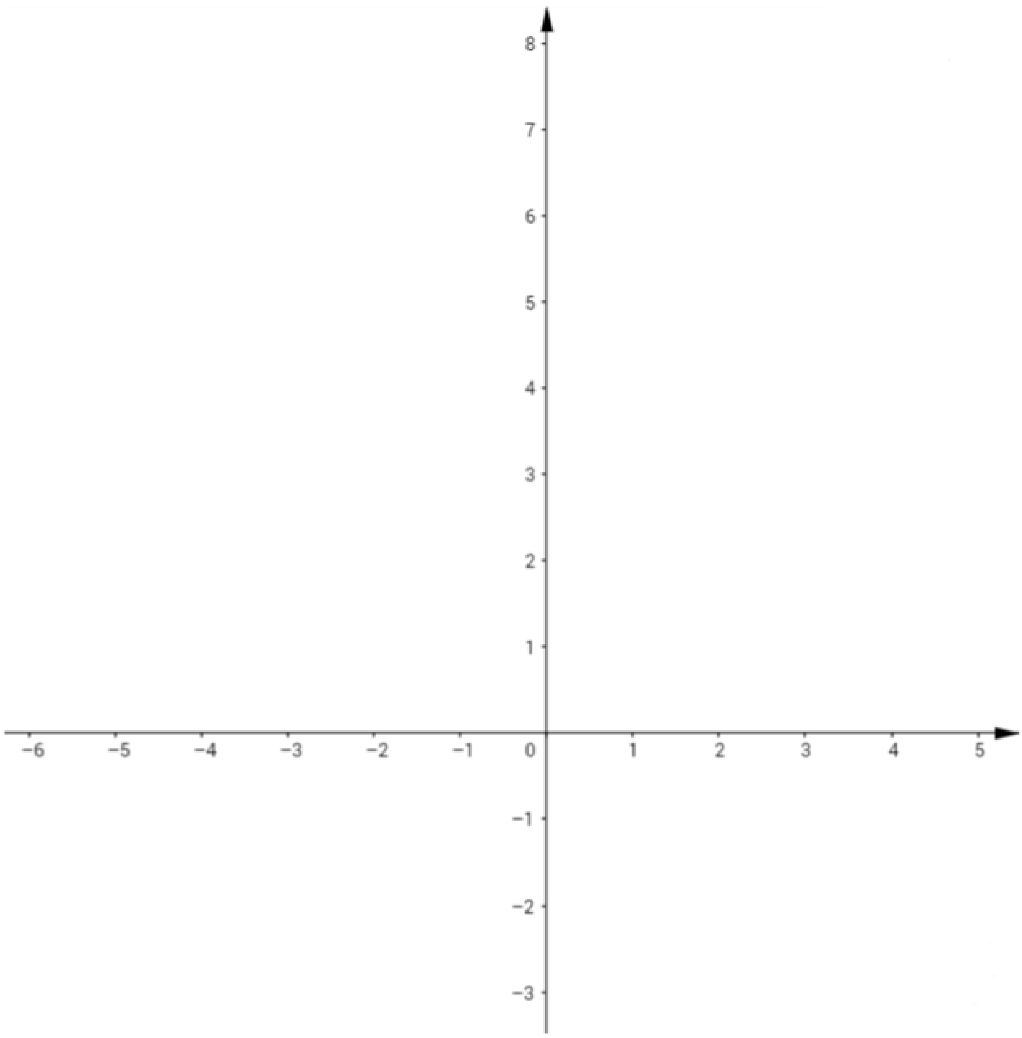
Cilj aktivnosti: učenici će samostalno, rješavajući nastavni listić, uvježbati crtanje grafa funkcije uz pomoć linearne transformacije elementarnih funkcija.

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku individualnog rada

Potreban materijal: nastavni listići za svakog učenika

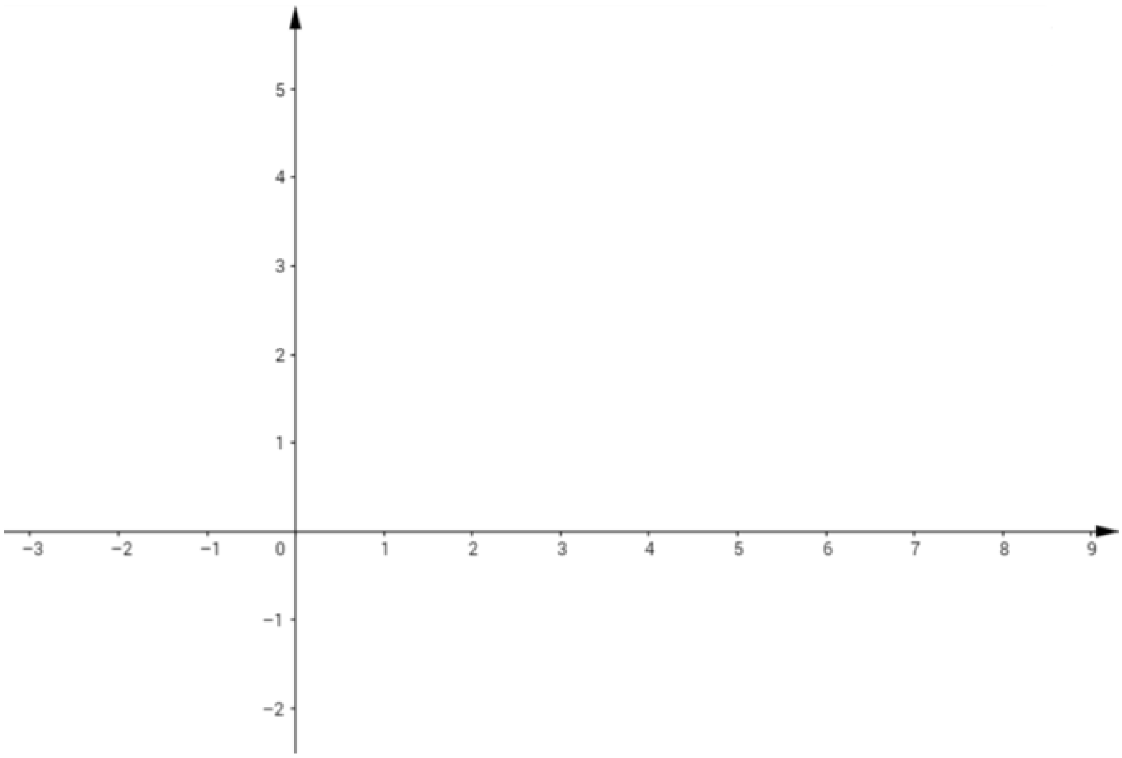
Tijek aktivnosti: nastavnik na početku aktivnosti, u diskusiji s učenicima, ponavlja svojstva linearne transformacije grafa funkcije $g(x) = af(bx + c) + d$, te utjecaja svakog pojedinog koeficijenta na deformaciju grafa elementarne funkcije. Nakon ponavljanja, nastavnik dijeli svakome učeniku nastavni listić sa zadatcima i uputama na njemu. Učenici samostalno rješavaju zadatke s nastavnog listića.

Nastavni listić
Zadatak 1. Nacrtaj funkciju $f(x) = 2e^{x+2} - 3$ koristeći se transformacijom grafa i obrazloži.



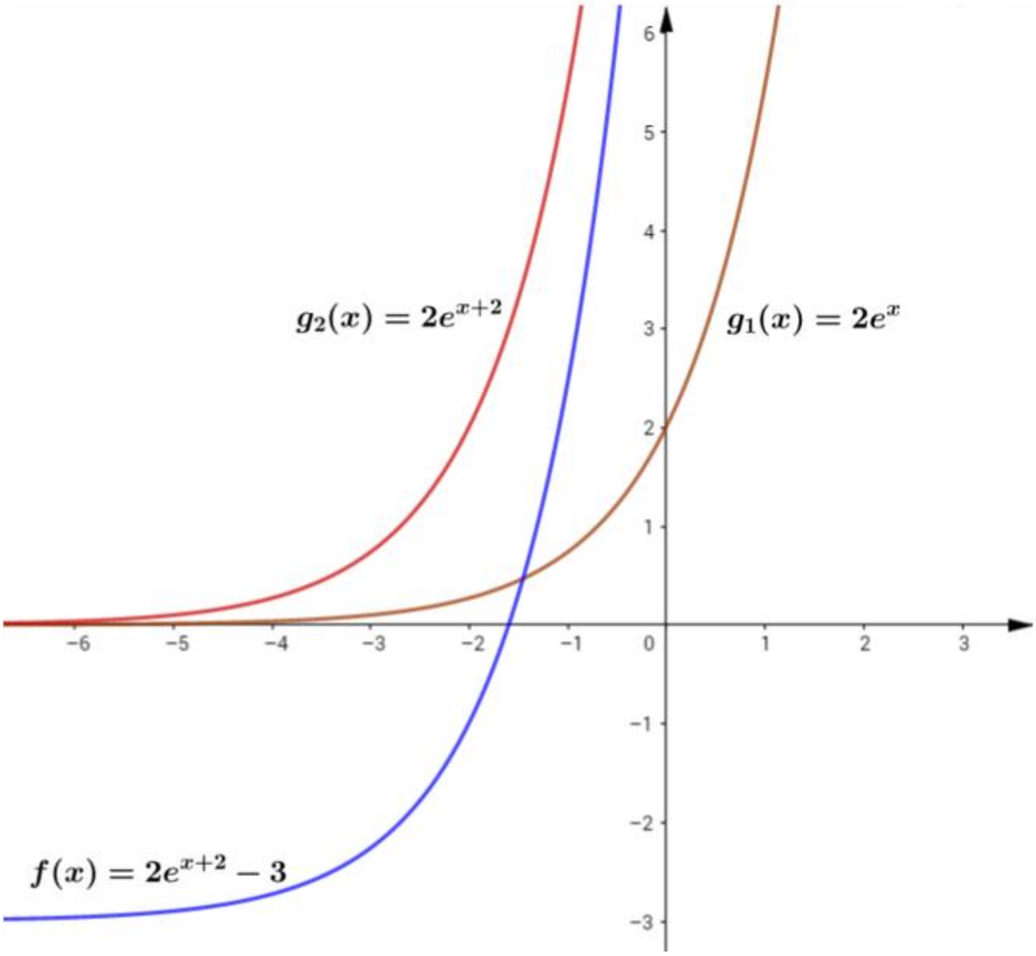
Zadatak 2. Nacrtaj funkciju $f(x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ koristeći se transformacijom grafa i obrazloži svoje postupke.

Zadatak 3. Nacrtaj funkciju $f(x) = 3\ln(4x + 8) + 1$ koristeći se transformacijom grafa i obrazloži svoje postupke.



Nastavni listić (rješenje)

Zadatak 1. Nacrtaj funkciju $f(x) = 2e^{x+2} - 3$ koristeći se transformacijom grafa i obrazloži.

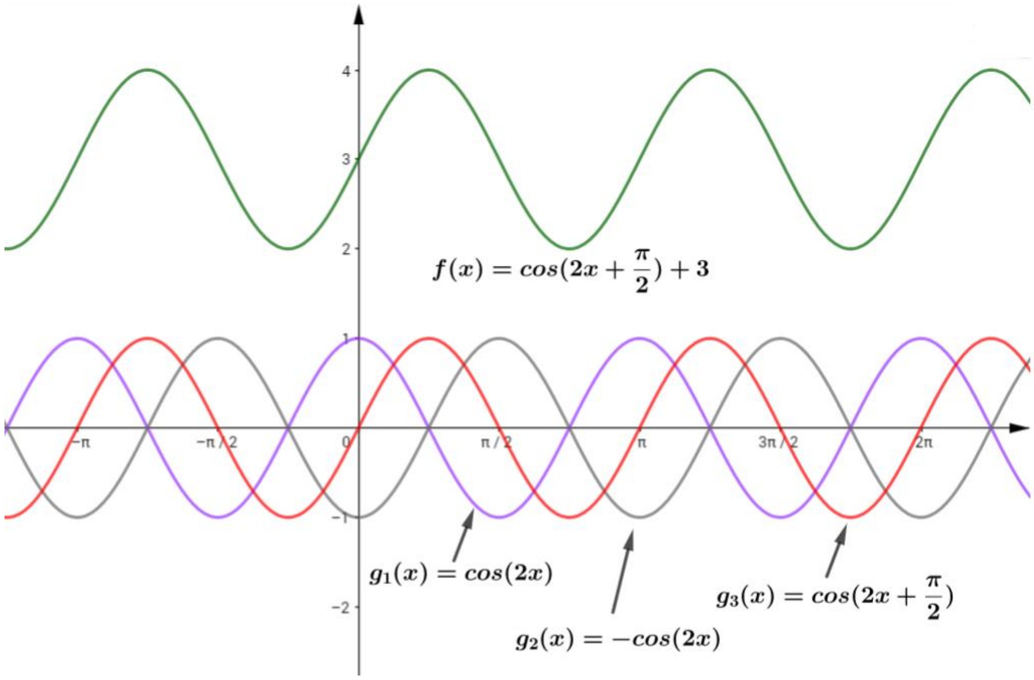


Obrazloženje:

Iz algebarskog zapisa funkcije $f(x) = 2e^{x+4} - 3$ vrlo lako čitamo koeficijente linearne transformacije grafa: $a = 2, b = 1, c = 4$ i $d = -3$. Graf funkcije $f(x) = 2e^{x+4} - 3$ nacrtali smo tako da smo prvo nacrtali graf funkcije $g_1(x) = 2e^x$. Taj graf nacrtamo tako da proizvoljno odaberemo nekoliko nezavisnih varijabli, uvrstimo ih u funkciju $g_1(x)$ te dobijemo točke uz pomoć kojih skiciramo graf. Drugim riječima, vrijednosti grafa funkcije $h(x) = e^x$ pomnožili smo koeficijentom $a = 2$ Graf funkcije $g_2(x) = 2e^{x+2}$ dobijemo tako da graf funkcije $g_1(x)$ translatiramo u smjeru osi x ulijevo za apsolutnu vrijednost parametra $c = 2$. Dakle, graf funkcije $g_1(x)$ pomaknemo ulijevo za vrijednost dva.

Konačno, graf tražene funkcije $f(x) = 2e^{x+4} - 3$ dobijemo tako da graf funkcije $g_2(x)$ translatiramo u smjeru y–osi prema dolje za apsolutnu vrijednost parametra $d = -3$ tj. graf funkcije $g_2(x)$ pomaknemo prema dolje za vrijednost 3.

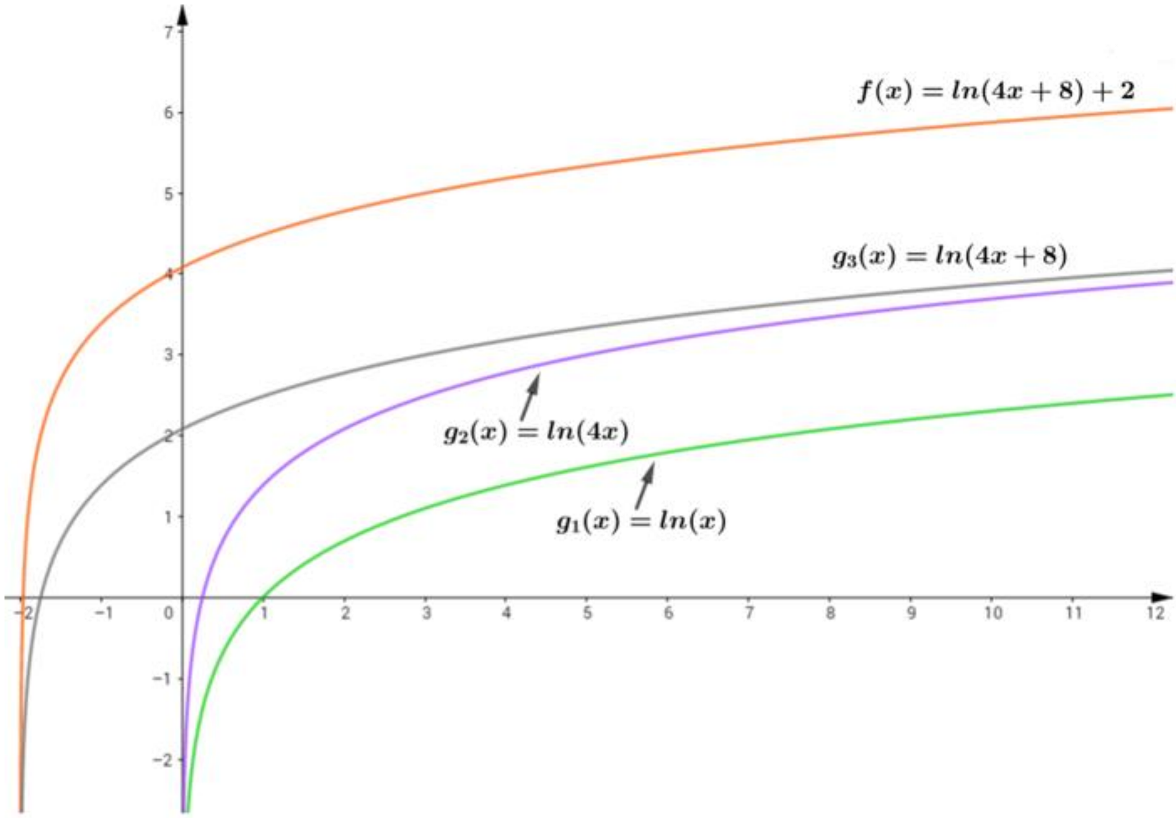
Zadatak 2. Nacrtaj funkciju $f(x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ koristeći se transformacijom grafa i obrazloži svoje postupke.



Obrazloženje:

Iz algebarskog zapisa funkcije očitavamo koeficijente linearne transformacije grafa, no vrlo lako možemo napraviti grešku pa iz zapisa funkcije $f(x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ zaključiti da je koeficijent $c = \pi$. To nije točno. U algebarskom zapisu linearne translacije grafa funkcije u smjeru x–osi piše $g(x) = f(x + c)$, dakle i mi moramo „srediti" naš algebarski izraz tako da imamo unutar zagrade izraz $x + c$. To ćemo učiniti vrlo lako, izlučivanjem koeficijenta 2 iz izraza $2x + \pi$. Sada naša funkcija izgleda $f(x) = -\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 3$ i iz nje lako možemo očitati koeficijente linearne transformacije grafa: $a = -1, b = 2, c = \frac{\pi}{4}$ i $d = 3$. Graf funkcije $g_1(x) = \cos(2x)$ nacrtali smo tako što smo suzili funkciju $h(x) = cosx$ u smjeru x–osi za koeficijent $b = 2$, drugim riječima, period funkcije $g_1(x)$ je duplo manji od perioda funkcije $h(x)$. Graf funkcije $g_2(x) = -\cos(2x)$ dobili smo kao osno simetričnu sliku grafa funkcije $g_1(x)$ s obzirom na x–os. Graf funkcije $g_3(x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ nacrtamo tako da graf funkcije $g_2(x)$ pomaknemo ulijevo u smjeru osi x za vrijednost koeficijenta $c = \frac{\pi}{4}$. Konačno, graf tražene funkcije $f(x)$ dobijemo translacijom grafa funkcije $g_3(x)$ u smjeru y–osi prema za vrijednost koeficijenta $d = 3$.

Zadatak 3. Nacrtaj funkciju $f(x) = \ln(4x+8) + 2$ koristeći se transformacijom grafa i obrazloži svoje postupke.



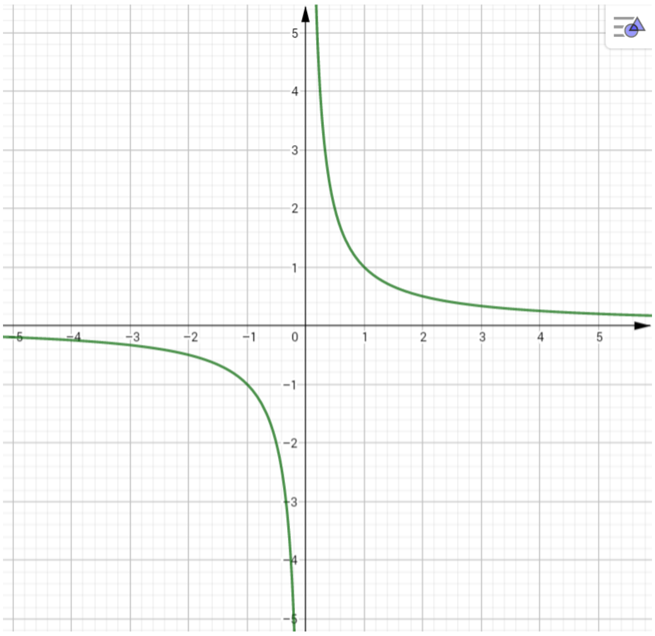
Obrazloženje:

Algebarski izraz $f(x) = \ln(4x+8) + 2$ zapišemo ovako $f(x) = \ln(4(x+2)) + 2$ te iz njega zapišemo koeficijente linearne transformacije grafa $a = 1, b = 4, c = 2$ i $d = 2$. Graf funkcije $g_1(x) = \ln(x)$ nacrtamo uz pomoć tablice i proizvoljog odabira nezavisnih varijabli. Graf funkcije $g_1(x) = \ln(4x)$ također nacrtamo uz pomoć tablice i proizvoljog odabira nezavisnih varijabli ili sužavanjem grafa $g_1(x)$ u smjeru x − osi s obzirom na iznos koeficijenta $b = 4$. Drugim riječima, za svaku točku koja leži na grafu $g_2(x)$ vrijedi da je oblika $\left(\frac{x}{4}, y\right)$, gdje su x i y koordinate točke koja leži na grafu $g_1(x)$. Graf funkcije $g_3(x) = \ln\big(4(x+2)\big) = \ln(4x+8)$ dobijemo translacijom grafa funkcije $g_2(x)$ ulijevo u smjeru osi–x za vrijednost koeficijenta $c = 2$. Traženu funkciju $f(x) = \ln(4x+8) + 2$ nacrtamo tako da graf funkcije $g_3(x)$ translatiramo prema gore za vrijednost koeficijenta $d = 2$.

Transformira li se samo graf funkcije?

Odgovor na ovo pitanje već znamo jer smo ranije u ovome poglavlju obratili pozornost na pomicanje domene i kodomene kod restringiranih funkcija kada se grafovi njihovih funkcija pomiču u smjeru x–osi, tj. u smjeru y–osi. Naš cilj, u ovome dijelu poglavlja, je primijetiti transformaciju još nekih „svojstava" funkcije koja se događaju kada se transformira njezin graf funkcije. Uzmimo na primjer graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ te obratimo pozornost na asimptote te funkcije i kako se one pomiču s obzirom na pomicanje grafa funkcije $f(x)$ tj. hiperbole. U prvome primjeru prikazati ćemo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ i njezina osnovna svojstva.

Primjer 1



Funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ prvi put susrećemo u sedmom razredu osnovne škole iako toga vrlo često nismo svjesni. Grafički prikaz obrnute proporcionalnosti je upravo grafički dio pozitivnog dijela spomenute funkcije s time da treba napomenuti kako elementi domene moraju biti prirodni brojevi pošto uglavnom predstavljaju broj radnika ili strojeva koji obavljaju određeni posao. Primijetimo da je funkcija monotona ali i da ima prekid. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je jedna od onih za koju moramo biti oprezni kada pričamo o njezinoj domeni. Često učenici zaborave na uvjet kada se susretnu sa ovom funkcijom, a on je da nazivnik mora biti različit od nule, tj, $x \neq 0$. Dakle, domena ove funkcije su svi x–evi osim nule. Matematički, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Iz uvjeta ili domene uočavamo da je vertikalna asimptota zapravo pravac $x = 0$. Isto tako treba primijetiti da ova funkcija ima još jednu asimptotu, pravac $y = 0$. Zaista, po definiciji vertikalne i horizontalne asimptote dokažimo te dvije tvrdnje.

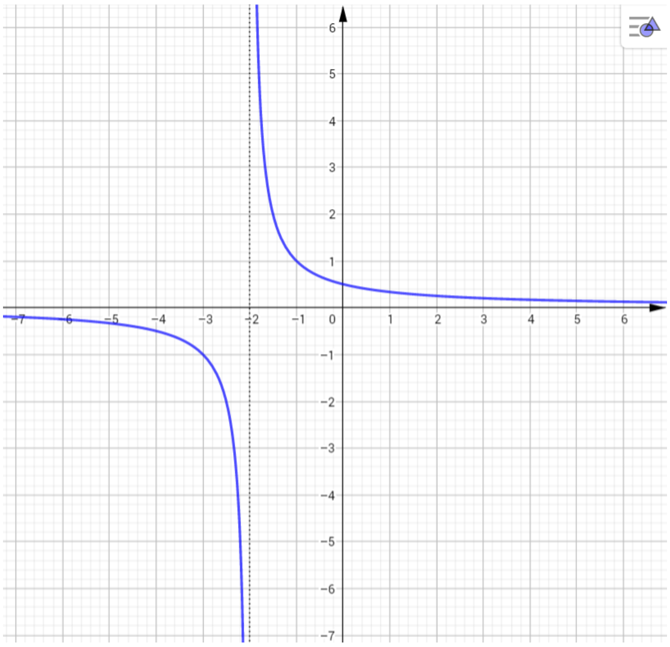
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \& \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\; je\ vertikalna\ asimptota$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \& \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \Rightarrow \quad y = 0 \;\; je\ horizontalna\ asimptota$

U sljedećim primjerima ćemo prvo algebarski srediti pravilo kojim je funkcija $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ zadana kako bi lakše uočili kojim je elementarnim transformacijama funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ nastala dana funkcija.

Primjer 2

Proučimo funkciju $g(x) = \frac{1}{x+2}$ i njezin graf. Pošto se radi o racionalnoj funkciji, prvo joj odredimo domenu, a iz domene i „kandidata" za vertikalnu asimptotu. Uvjet je da nazivnik ne smije biti jednak nuli tj. $x + 2 \neq 0$. Iz toga slijedi da $x \neq -2$. Dakle, $D_g = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$. Dokažimo da je vertikalna asimptota pravac $x = -2$ te izračunajmo horizontalnu asimptotu ako postoji.

- $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \quad \& \quad \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -2 \ \ \textit{je vertikalna asimptota}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \quad \& \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ \ \textit{je horizontalna asimptota}$



Primijetimo da za funkciju $g(x)$ zapravo vrijedi $g(x) = f(x+2)$. Koristeći do sada poznate stvari iz ovog rada možemo zaključiti da je graf funkcije $g(x)$ nastao pomakom grafa funkcije $f(x)$ za dva ulijevo u smjeru x–osi. Uočimo sa grafa da se i vertikalna asimptota također pomaknula, dok je horizontalna asimptota ostala ista. Možemo zaključiti: ako se graf funkcije koji ima vertikalnu asimptotu pomiče u smjeru osi apscisa da se tada pomiče i ta asimptota u tome istom smjeru. Dakle, transformacijom grafa funkcije ne mijenja se nužno samo graf funkcije već i određena druga svojstva funkcije. Isto tako, možemo primijetiti kako graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ nema odsječak na osi ordinata što je i logično pošto je os ordinata ujedno i vertikalna asimptota. Međutim, graf funkcije $g(x) = \frac{1}{x+2} = f(x+2)$ ima odsječak na y–osi i to $y = \frac{1}{2}$. Primijetimo da se i priča oko odsječka na y–osi promijenila kada se graf funkcije $f(x)$ transformira i graf funkcije $g(x)$.

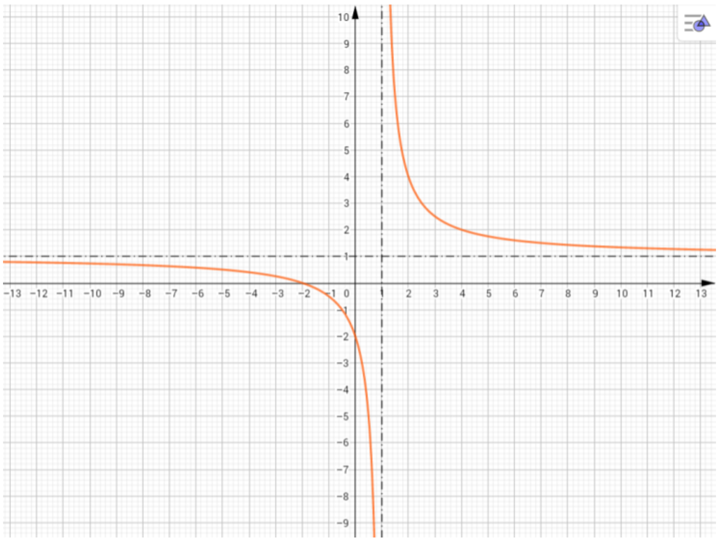
Primjer 3

Pogledajmo u ovome primjeru malo složeniju racionalnu funkciju $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Složeniji oblici funkcija su poželjni primjeri koji bi se mogli obraditi na redovnoj nastavi jer iz samo jednog algebarskog zapisa funkcije možemo otkriti puno zanimljivih svojstava funkcije. Krenimo redom, prvo algebarski uredimo pravilo kojim je zadana funkcija.

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$$

Iz algebarskog izraza uočavamo da je funkcija $g(x)$ nastala kompozicijom elementarnih linearnih transformacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, tj. $g(x) = 3f(x-1) + 1$. Koeficijent $a = 3$ je odgovoran za rastezanje funkcije $f(x)$ u smjeru y–osi, koeficijent $c = -1$ za pomicanje funkcije $f(x)$ u smjeru x–osi za jedan udesno, a koeficijent $d = 1$ za pomicanje funkcije $f(x)$ u smjeru y–osi za jedan prema gore. Pošto se radi o racionalnoj funkciji uvjet je da nazivnik ne smije biti jednak nuli tj. $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$. Dakle domena funkcije je $D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Iz grafa funkcije $g(x)$ koji se nalazi na slici uočavamo da ima također dvije asimptote ako i graf funkcije $f(x)$. Dokažimo to. Kandidata za vertikalnu asimptotu vidimo iz domene funkcije.

- $\lim\limits_{x\to1^+} 1 + \frac{3}{x-1} = +\infty \quad \& \quad \lim\limits_{x\to1^-} 1 + \frac{3}{x-1} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \textit{je vertikalna asimptota}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{3}{x-1} = 1 \quad \& \quad \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \textit{je horizontalna asimptota}$



Kao i u prethodnom primjeru, primijetimo kako se kod transformacije grafa ne transformira samo graf već i obje asimptote. Koeficijent $c = -1$ odgovoran je za pomicanje funkcije $f(x)$, ali i vertikalne asimptote u smjeru x–osi za jedan udesno. Koeficijent $d = 1$ uzrok je pomicanja funkcije $f(x)$, ali i horizontalne asimptote u smjeru y–osi za jedan prema gore. Isto tako, sa slike jako lijepo vidimo kako su se pomaknule asimptote funkcije $g(x)$ s obzirom na početne asimptote funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. Uočimo da funkcija $g(x)$ ima odsječak na y–osi, $y = -2$ i nultočku $x = -2$ za razliku od funkcije $f(x)$ koja nema ni jedno ni drugo. Dakle, opet možemo zaključiti da transformacijom grafa se mijenjaju i određena svojstva funkcije.

Sve do sada navedene stvari mogu se činiti vrlo trivijalne, što one zaista i jesu, međutim u nastavi ih se vrlo često zaboravi spomenuti. Samim spominjanjem ovakvih napomena i primjera kod učenika stvaramo širu sliku i potičemo ih na analogno razmišljanje. Nije loše i da učenicima zadamo da sami probaju otkriti koja se još svojstva funkcije mijenjaju njihovom linearnom transformacijom. Do sada smo spomenuli mijenjanje domene i kodomene kod pojedinih funkcija, zatim mijenjanje jednadžbi asimptota, te mijenjanje odsječaka na osima. Kao bismo pokazali da ovakvih primjera ima još, možemo na kraju sata započeti temu o promjeni monotonosti određenih funkcija koje uzrokuje koeficijent a u linearnoj transformaciji funkcije $g(x) = af(bx + c) + d$, a učenicima ostaviti da sami dođu do zaključka. Uzmemo primjer kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ te kažemo učenicima da razmisle o njezinoj monotonosti i kako se ona mijenja s obzirom na to kako se mijenjaju njezini koeficijenti. Kako bi im bilo lakše uočiti možemo im predložiti da koriste programe dinamičke geometrije, npr. GeoGebra u kojoj možemo izraditi klizače te u realnom vremenu mijenjati koeficijente a, b i c te proučavati na koji način se mijenja graf, a samim time i njegova monotonost.

4. Crtanje grafa funkcije

Graf funkcije možemo crtati na različite načine isto kao što u funkciju možemo zadati na više načina. Na primjer, funkcija može biti zadana pravilom, grafički (pomoću grafa ili dijagrama), tablično, ali isto tako funkciju možemo zadati i riječima. Takav način zadavanja funkcije je karakterističan za problemske zadatke. S druge strane, crtanje grafa funkcije također možemo promatrati na više načina. U ovome poglavlju ćemo se osvrnuti na:

- crtanje grafa točkama (tablica pridruženih vrijednosti)
- crtanje grafa iz riječi (opisivanje situacije iz svakodnevnog života grafom)
- crtanje grafa iz slike (opisivanje situacije sa slike grafom)
- crtanje grafa lokalno
- crtanje grafa globalno

Kada kažemo da ćemo graf crtati lokalno, time smatramo da nam je za rješavanje našeg problema bitan samo dio grafa. Primjer za tu situaciju je da na tome grafu pratimo određene točke koje su nam zanimljive i nema potrebe da se crta i promatra graf funkcije za cijelo područje definicije. Dok s druge strane, globalno crtanje grafa nam može pomoći ako želimo iz grafa saznati i predvidjeti događaje koji bi se mogli dogoditi u budućnosti. U nastavku slijede primjeri zadataka koje će učenici moći rješavati korištenjem grafičkog načina te crtanjem tog grafa iz jednog od navedenih načina.

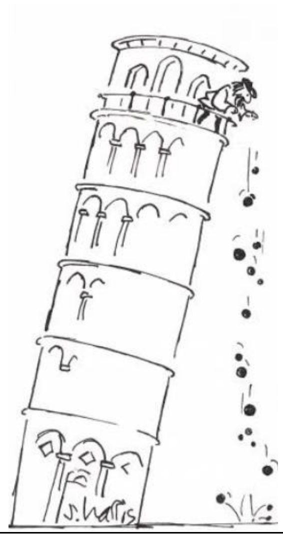
<u>Crtanje grafa točkama</u>

Tablice vrijednosti često u sebi skrivaju jednostavno matematičko pravilo kojim je zadana funkcija. Često to pravilo nazivamo pravilo pridruživanja koje, kada ga znamo, koristimo da bi predvidjeli nepoznate varijable. Funkciju iz tablice vrijednosti nekada je vrlo teško naći, osobito ako tablica u sebi sadrži zaokružene vrijednosti ili vrijednosti koja su nastala mjerenjem pa postoji vjerojatnost da nisu matematički precizna. Nakon što nacrtamo graf iz tablice pridruženih vrijednosti, uvelike nam pomaže ako uspijemo i prepoznati o kojem grafu funkcije se radi. U sljedećim zadatcima slijede grafovi važnijih funkcija.

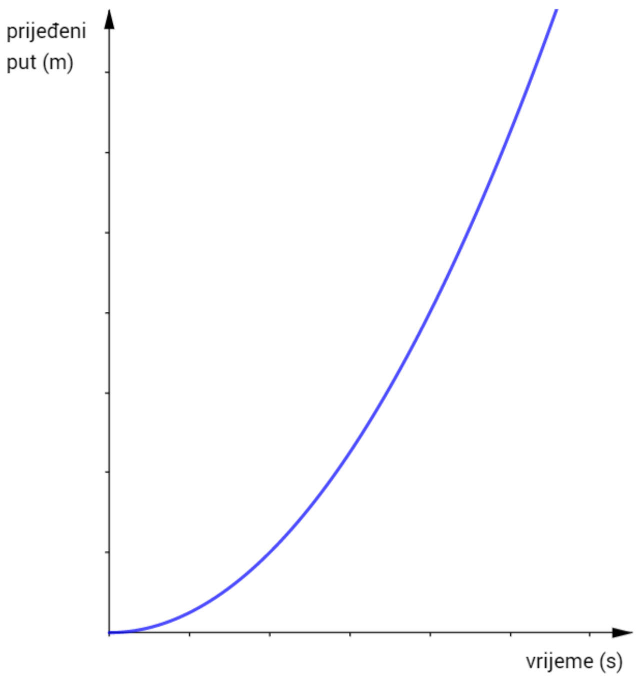
Zadatak „Padanje kamena“

Vrijeme (s)	0	1	2	3	4	5
Prijeđeni put (m)	0	5	2	45	80	125

- Nacrtajte graf kojim bi opisali podatke iz tablice.
- Na koji do sada poznati graf funkcije vam sliči graf koji ste nacrtali?
- Možeš li primijetiti kojim pravilom su povezani podatci iz tablice? Opiši to pravilo riječima, a ako je moguće, i matematičkom formulom.
- Kamen je bačen iz zrakoplova. Koliki će put prevaliti u 10 sekundi?



Zadatak „Padanje kamena“ (rješenje)



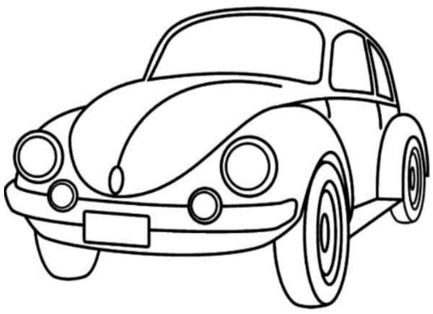
Graf funkcije koji smo nacrtali možemo usporediti s grafom kvadratne funkcije.

Formula kojom možemo opisati podatke iz tablice je $d = 5t^2$ gdje je d prijeđeni put u metrima za t sekundi.

Nakon 10 sekundi, kamen će prijeći put od 500 metara.

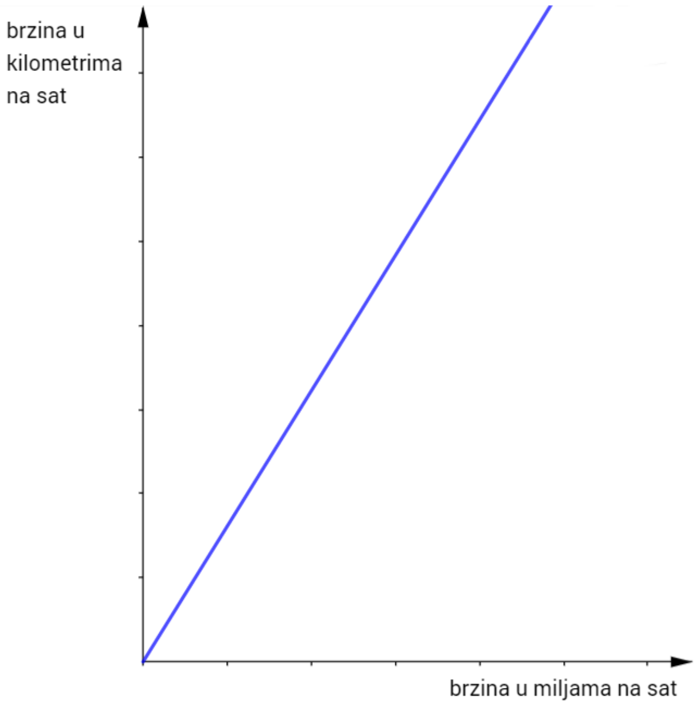
Zadatak „Tablica pretvorbe“

mph	10	20	30	40	50	60	70	80
kph	16.1	32.2	48.3	64.4		96.6	112.7	128.7



- Nacrtajte graf kojim bi opisali podatke iz tablice.
- Na koji do sada poznati graf funkcije vam sliči graf koji ste nacrtali?
- Možeš li primijetiti kojim pravilom su povezani podatci iz tablice? Opiši to pravilo riječima, a ako je moguće, i matematičkom formulom.
- Popuni dio tablice koji nedostaje. (mph – milja na sat; kph – kilometar na sat)

Zadatak „Tablica pretvorbe“ (rješenje)



Graf funkcije koji smo nacrtali možemo usporediti s grafom linearne funkcije.

Formula kojom možemo opisati podatke iz tablice je y$= 1.61x$ gdje je x brzina u miljama na sat, a y brzina u kilometrima na sat.

Brzina od 50 milja na sat odgovara brzini od 80.5 kilometara na sat.

Zadatak „Radio frekvencija i valna duljina“

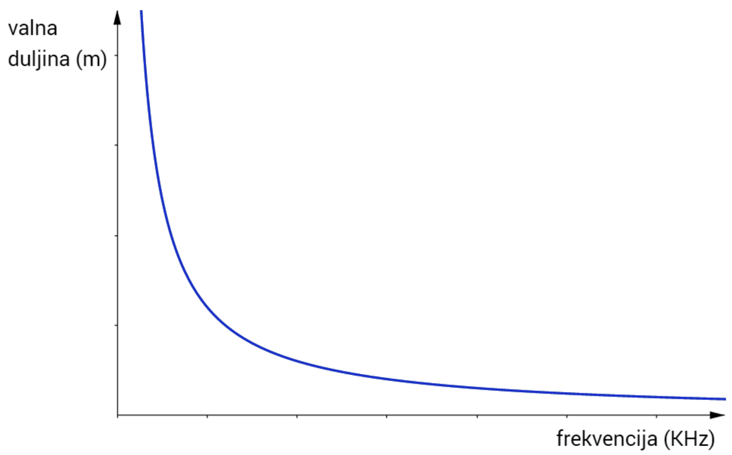
Frekvencija (KHz)	100	200	300	400	500	600	700	800
Valna duljina (m)	3000	1500	1000	750	600	500	429	375

- Iz dane tablice probaj otkriti vezu između frekvencije i valne duljine
- Na temelju toga popunite sljedeću tablicu:

Radio	Narodni	Otvoreni	Laganini
Frekvencija (KHz)	909	1089	1215
Valna duljina (m)			

- Nacrtajte graf kojim bi opisali podatke iz tablice.
- Na koji do sada poznati graf funkcije vam sliči graf koji ste nacrtali?
- Možeš li primijetiti kojim pravilom su povezani podatci iz tablice? Opiši to pravilo riječima, a ako je moguće, i matematičkom formulom.

Zadatak „Radio frekvencija i valna duljina“ (rješenje)



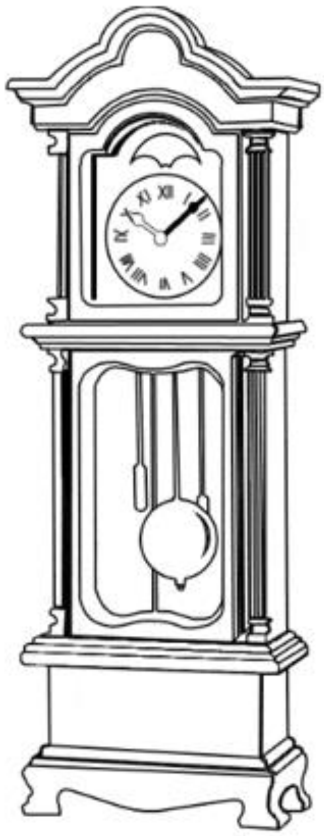
Iz tablice uočavamo da vrijedi $xy = 300000$ gdje je x frekvencija u KHz, a y valna duljina u metrima.

Graf funkcije koji smo nacrtali možemo usporediti s grafom racionalne funkcije.

Radio	Narodni	Otvoreni	Laganini
Frekvencija (KHz)	909	1089	1215
Valna duljina (m)	330	275	247

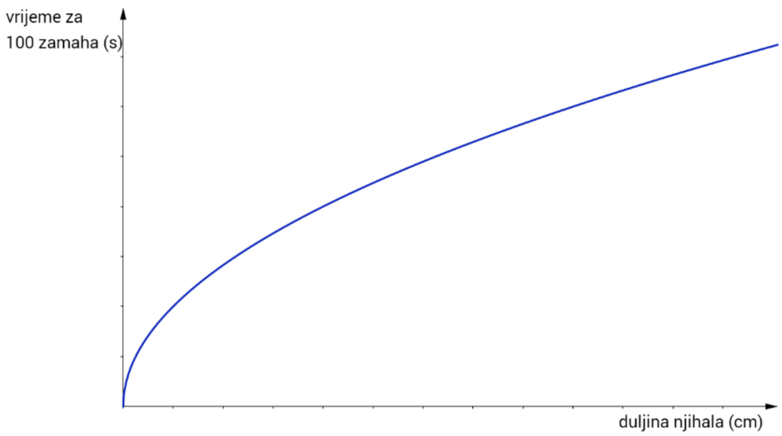
Zadatak „Mehanički sat“

Duljina njihala (cm)	Vrijeme za 100 zamaha (s)
0	0
5	45
10	63
15	77
20	89
25	100
30	110
35	118
40	126
45	134
50	141
60	?



- Nacrtajte graf kojim bi opisali podatke iz tablice.
- Na koji do sada poznati graf funkcije vam sliči graf koji ste nacrtali?
- Možeš li primijetiti kojim pravilom su povezani podatci iz tablice? Opiši to pravilo riječima, a ako je moguće, i matematičkom formulom. Popunite do kraja tablicu.

Zadatak „Mehanički sat“ (rješenje)



Iz tablice uočimo da je $t = 20\sqrt{l}$ gdje je l duljina njihala u centimetrima, a t vrijeme u sekundama potrebno za 100 njihaja. Njihalu duljine 60 cm trebati će oko 155 sekundi da napravi 100 njihaja.

Graf funkcije koji smo nacrtali možemo usporediti s grafom funkcije drugog korijena.

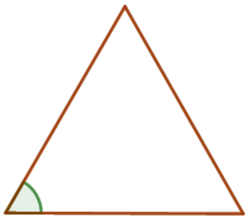
Crtanje grafa iz riječi i slike lokalno i globalno

U uvodnom dijelu ovoga rada rekli smo da je ekonomska pismenost vrlo važna u današnjem svijetu. Ekonomija se bazira na matematici, točnije na vjerojatnosti i statistici. Konstantno se pokušavaju događaji iz stvarnog života opisati funkcijom i grafovima. Zašto je to tako? Upravo zbog toga da bi se mogla predvidjeti budućnost. Praćenjem poznatih podataka možemo vrlo lako skicirati graf koji opisuje određenu situaciju. To je lokalna slika. Međutim, naš cilj je iz te lokalne slike dobiti globalnu. Globalna slika nam govori o budućnosti. Nitko nam ne garantira što će se dogoditi za 5 ili 10 godina, međutim gledajući grafove i uočavajući pravilna ponašanja u njima sigurno ćemo biti bliže predviđanju događaja koji slijede od gospođe koja čita iz kristalne kugle ili šalice kave. Upravo je to ideja zadataka koji slijede. Svakodnevnu situaciju iz života probati opisati funkcijom i grafom kako bi smo prvo dobili lokalnu sliku cijele priče, a iz toga globalnu kojom ćemo moći dati odgovore situacijama koje slijede tj. koje se traže u zadatku.

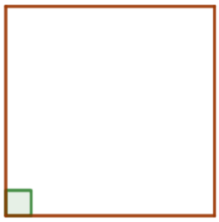
Vrlo često se zna dogoditi da učenici znaju postupak računanja maksimuma određene funkcije, ali u globalu ne znaju povezati što su to oni izračunali i što uopće predstavlja apscisa, a što ordinata tog maksimuma. Zato nije loše kod takvih zadataka traženje maksimuma ili minimuma funkcije zapakirati u priču iz svakodnevnog života. Na primjer, umjesto zadatka u kojem moraju naći maksimum neke funkcije, da im se zada zadatak u kojem je zarada neke tvornice koja ovisi o broju prodanih proizvoda opisana funkcijom te da učenici nađu broj proizvoda za koji se postiže maksimalna zarada. Analogno možemo postaviti zadatak gdje je funkcijom opisan ukupni rashod tvornice pa se traži minimum te funkcije.

Sljedeći zadatci traže od učenika da situaciju sa slike ili iz svakodnevnog života opišu funkcijom i grafom i na temelju toga daju odgovore na pitanja iz zadatka koristeći upravo dobiveno pravilo kojim je zadana funkcija i graf koji su skicirali. Zadatci su koncipirani tako da učenici sami razmisle na koji način bi ih riješili, a ako nemaju ideju, onda se mogu poslužiti malim savjetima iz zadatka. Tim načinom komunikacija između učenika i nastavnika je svedena na minimum što pridonosi tome da učenici sami probaju doći do odgovora. Na taj način razvijaju se kognitivni procesi kod učenika.

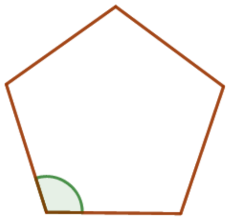
Zadatak „Pravilni poligoni“



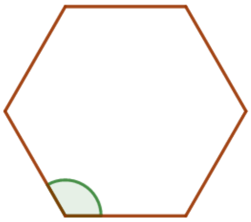
jednakostranični trokut



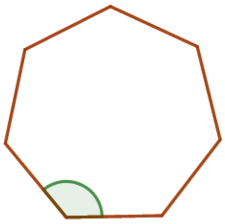
kvadrat



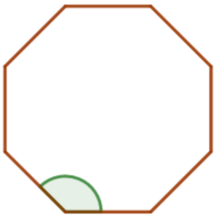
pravilni peterokut



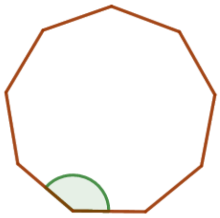
pravilni šesterokut



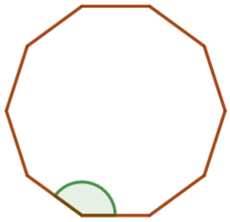
pravilni sedmerokut



pravilni osmerokut



pravilni deveterokut



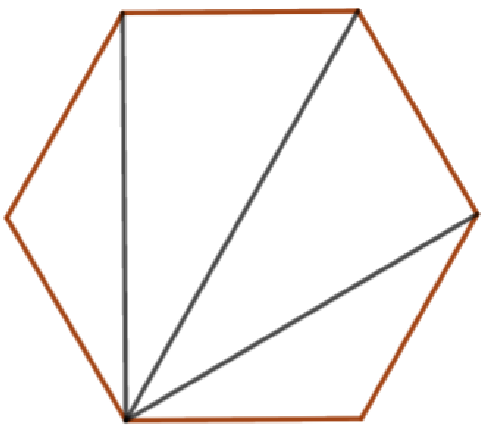
pravilni deseterokut

Na koji način veličina jednog od unutarnjih kutova ovisi o broju stranica tog poligona?

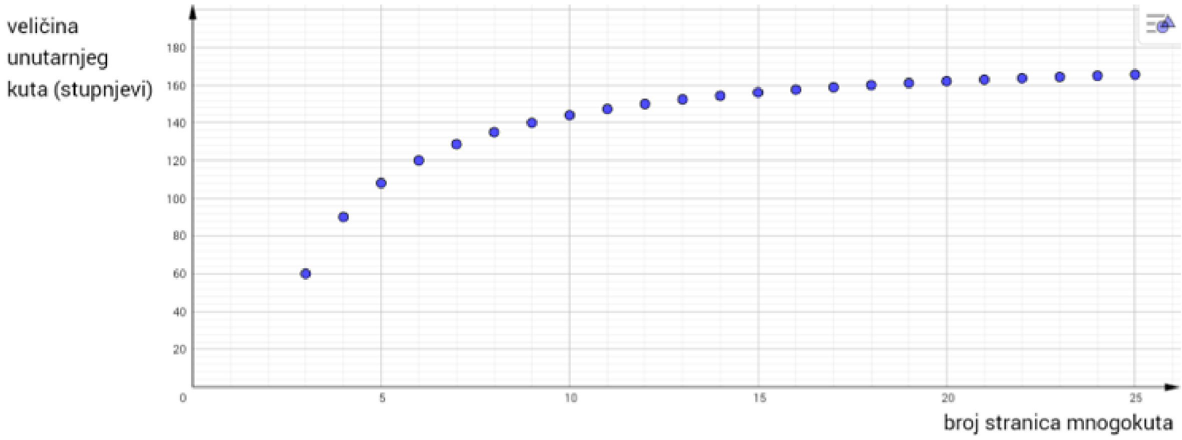
- Opišite svoja razmišljanja i zapažanja riječima, a grafom skicirajte traženu ovisnost
- Napravite tablicu vrijednosti i nakon toga provjerite skicu svoga grafa
- Napomena: ako vam je teško, možda vam pomogne da prvo izračunate ukupni zbroj svih kutova poligona na način da poligon podijelite na trokute
- Opišite riječima kako izračunate veličinu unutarnjeg kuta u pravilnom n–terokutu. Možete li napisati formulu za to?

Zadatak „Pravilni poligoni“ (rješenje)

NAPOMENA: Kako bismo lakše izračunali unutarnji kut u pravilnom mnogokutu, izračunamo ukupni zbroj kutova u mnogokutu i podijelimo ga sa brojem kutova. Na primjer, pravilni šesterokut možemo podijeliti na 4 trokuta, dakle ukupni zbroj kutova u šesterokutu je $4 \cdot 180^o = 720^o$. Iz toga slijedi da je veličina unutarnjeg kuta šesterokuta $720° : 6 = 120°$.



Graf sa slike i tablica ispod njega pokazuju ovisnost veličine unutarnjeg kuta α pravilnog mnogokuta o broju stranica n tog istog mnogokuta



n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha(°)$	60	90	108	120	128.6	135	140	144	147.27	150

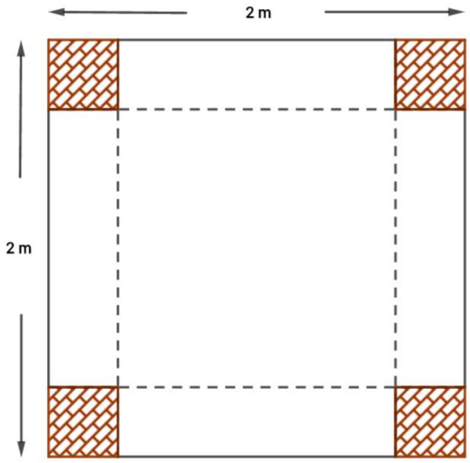
n	30	40	60	72	90	120	180	360	720	∞
$\alpha(°)$	168	171	174	175	176	177	178	179	179.5	180

Formula kojom opisujemo podatke iz tablice tj. ovisnost veličine unutarnjeg kuta α pravilnog mnogokuta o broju stranica n tog istog mnogokuta je $\alpha = 180° - \frac{360°}{n}$

Obratimo pažnju da ne možemo točke sa grafa spojiti neprekidnom linijom jer ne postoji pravilni poligon sa na primjer $2\frac{1}{2}$ strana ili sa π strana.

Iz ovog zadatka možemo uočiti kako graf neke funkcije ne mora nužno biti nacrtan linijom već ga možemo prikazati „točkicama“. Prvi put se s ovim problemom susrećemo u 7. razredu osnovne škole kod pojma proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti i grafa funkcije $f(x) = \frac{a}{x}$ i $f(x) = ax$; $a \in \mathbb{R}$. Iako mi možemo iz grafa uočiti ili algebarski izračunati da za obavljanje nekog posla nam treba 2.5 čovjeka što je matematički točno, fizički je to neizvedivo. Upravo na ovakvim primerima zadataka učenici mogu uočiti da nekada rezultat koji su dobili ili podatak koji su pročitali iz grafa ne mora nužno značiti rješenje zadatka ako se taj zadatak bazirao na problemu iz svakodnevnog života.

Zadatak „Dizajniranje spremnika za vodu“



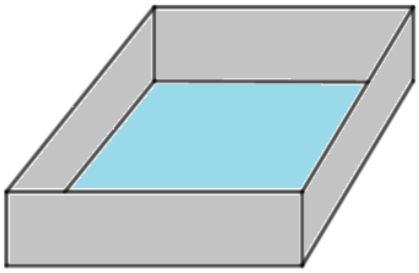
Od lima u obliku kvadrata duljine stranice 2 metra potrebno je izradit spremnik za vodu tako da rezanjem četiri manja kvadrata sa svih kutova (označeno na slici) i savijanjem preostalih pravokutnika formirate stranice vašeg spremnika za vodu. Stranice tj. rubovi će na kraju biti zavareni kako voda ne bi mogla istjecati van spremnika.

- Kako će konačni volumen spremnika ovisiti o veličini kvadrata koje ste izrezali sa rubova.
- Opišite svoje odgovore:

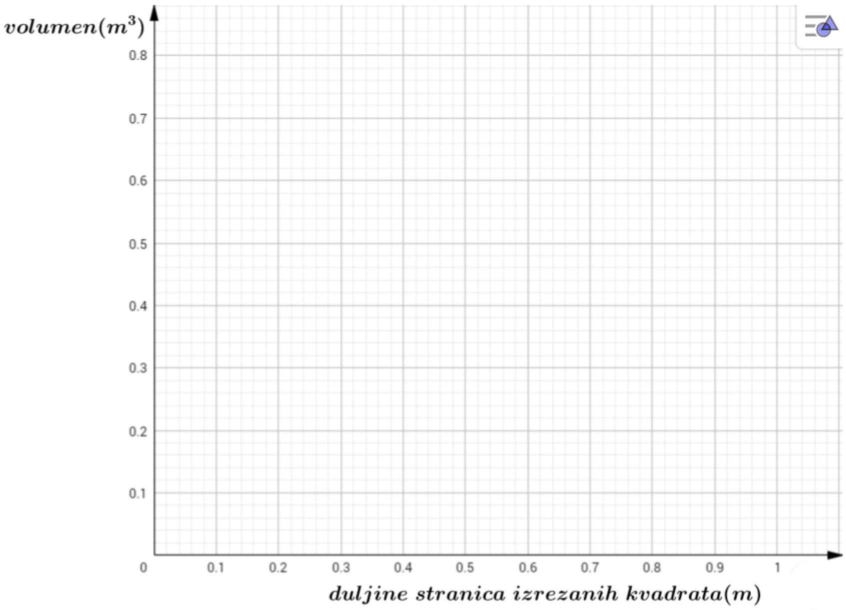
a) Skiciranjem grafa

b) Opisujući izgled vašeg grafa riječima

c) Pokušavajući pronaći algebarsku formulu i tražene ovisnosti



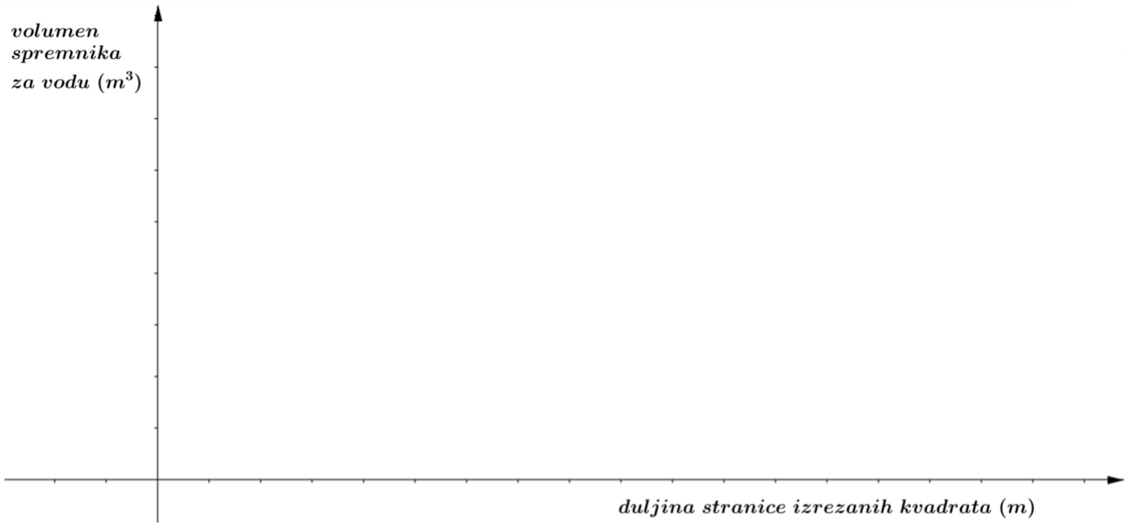
- Koliko dugačka mora biti stranica kvadrata koje izrezujemo s rubova da volumen spremnika bude što veći mogući?



Razmislite!

- **Zamislite kako režete vrlo male kvadrate sa rubova danog lima.**
  U svojoj glavi, savijte preostale rubove tako da dobijete spremnik.
  Hoće li volumen dobivenog spremnika biti veliki ili mali? Zašto?

  Sada zamislite kako režeš sve veće i veće kvadrate s ruba danog lima.
  Kolika je duljina stranice najvećeg kvadrata kojeg možete izrezati?
  Koliki će volumen biti u tom slučaju?
- **Prostoručno skicirajte graf i opišite svoja razmišljanja ispod grafa.**



____

____

____

____

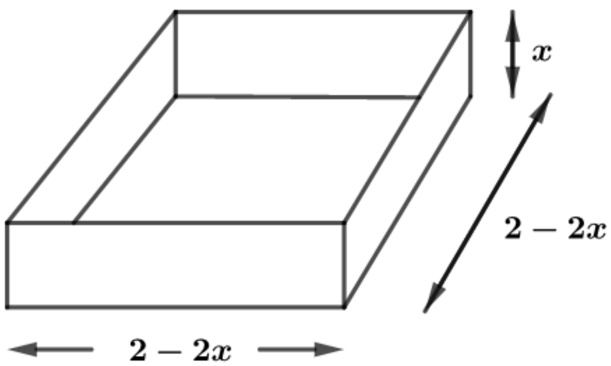
- **U cilju pronalaženja formule, zamislite kako režete kvadrat duljine stranice x sa svakog ruba danog lima. Nađite algebarski izraz koji opisuje traženi volumen.**
- **Sada uz pomoć algebarskog izraza (formule) pokušajte nacrtati precizan graf (jedinična dužina predstavlja 0.1 metar na x–osi, a 0.1 kubni metar na y–osi)**
  Usporedite svoju skicu grafa s nacrtanim grafom. Koliko dobra je bila skica?
- **Iskoristite nacrtani graf kako biste odredili kolike duljine moraju biti stranice kvadrata izrezanih sa rubova da dobijete maksimalni mogući volumen spremnika**

Zadatak „Dizajniranje spremnika za vodu“ (primjer rješenja)

Rješavanje danog problema učenicima bi bio znatno lakši kada bi ga mogli vizualizirati tj. kada bi se rješavanju ovoga problema pristupilo na praktičan način. Razredni odjel nastavnik može podijeliti na u skupine po dvoje učenika. Svakom paru učenika potrebno je osigurati škare te čvršći papir, dimenzija 20 cm sa 20 cm. Time bi stvorili uvjete učenicima da konstruiraju model spremnika za vodu u omjeru 1:10. Izazov svakog para je napravit „najveći“ spremnik za vodu tj. onaj s najvećim kapacitetom (volumenom) iz dobivenog papra u obliku kvadrata.

Dio učenika će odmah pristupiti algebarskom načinu rješavanja problema, dok će dio isprobati određeni broj različitih slučajeva sve dok ne dobiju snažan intuitivni osjećaj za rješavanje problema. Isprobavanjem uočavaju određene pravilnosti i na temelju njih sistematiziraju metodu rješavanja zadatka u jednu smislenu cjelinu. Ovaj pristup rješavanju zadatka je karakterističan ljudskome rodu. Isprobavanjem i ispitivanjem pokušavamo doći do konačnog odgovora. Oduzima više vremena međutim treba ga poduprijeti i nikako požurivati.

Konačno, mi ćemo dati algebarsko i grafičko rješenje danog problema. Veza između volumena spremnika za vodu (V/m^3) i duljine stranice izrezanih kvadrata sa rubova je:



$$V = (2-2x)(2-2x)x$$

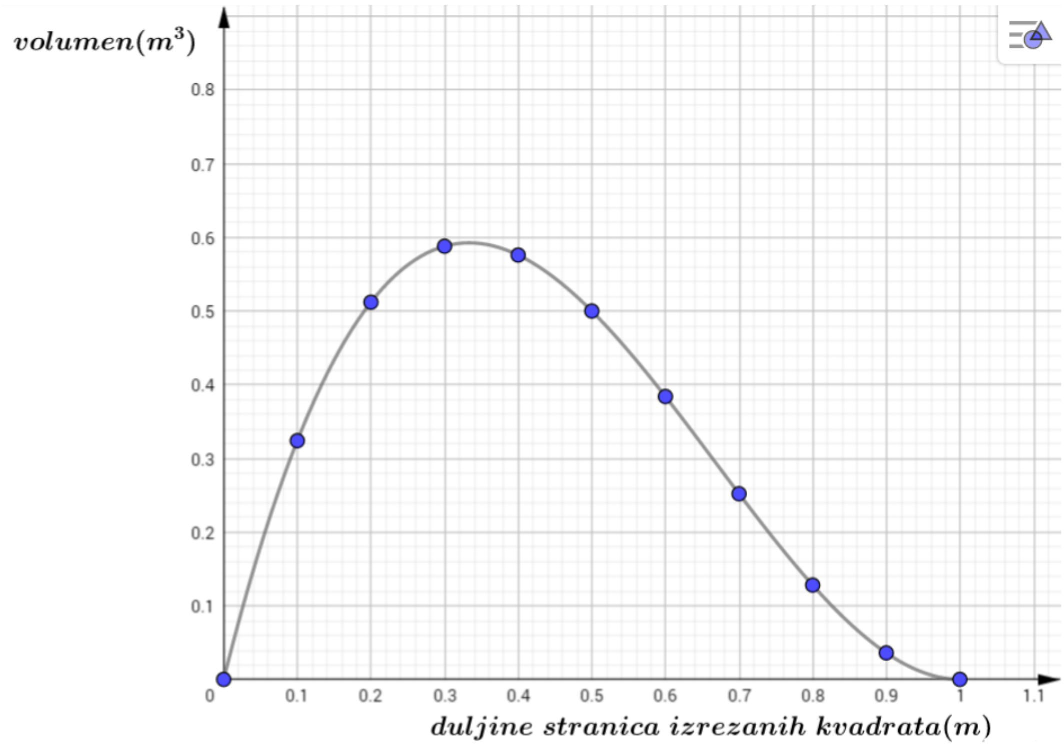
$$V = 4x(1-x)^2$$

$$(0 < x < 1)$$

Sada algebarski znamo ovisnost volumena o duljini stranice izrezanog kvadrata pa možemo izračunati sljedeću tablicu vrijednosti.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
V	0	0.324	0.512	0.588	0.576	0.5	0.384	0.252	0.128	0.036	0

Dobivene vrijednosti sada možemo ucrtati u koordinatni sustav te nacrtati graf.



Iz grafa sada možemo vrlo precizno odrediti maksimalni volumen.

Maksimalni volumen spremnika za vodu od $0.593\ m^3$ imamo kada je duljina stranice izrezanih kvadrata $0.33\ m$

Lokalno crtanje grafa u ovome zadatku dolazi do izražaja. Prije crtanja, situaciju iz realnog života smo morali opisati funkcijom kako bismo ju uopće i mogli prikazati u koordinatnom sustavu. Funkcija $f(x) = 4x(1-x)^2$ postoji za svaki realni argument, međutim za rješavanje našeg problema dovoljno je promatrati graf te funkcije na intervalu $[0,1]$. Drugim riječima zanima nas samo dio grafa tj. graf ćemo crtati na lokalnoj razini. Koordinatni sustav smo „uvećali“ te promatrali samo dio grafa iz kojeg smo ujedno i dobili rješenje.

Drugi način kojim smo mogli doći do rješenje je uz pomoć diferencijalnog računa te traženja maksimuma dobivene funkcije.

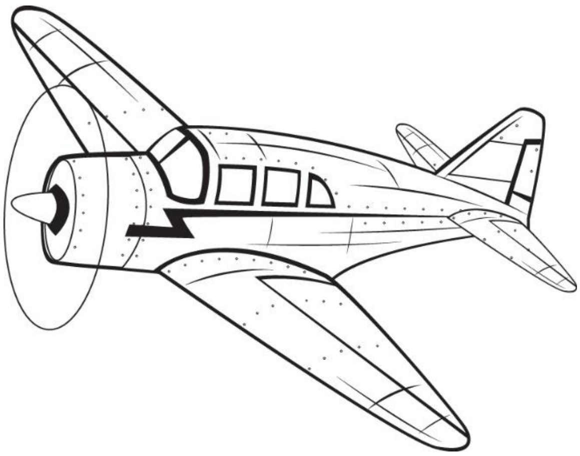
$$f(x) = 4x(1-x)^2 = 4x(1-2x+x^2) = 4x^3 - 8x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^2 - 16x + 4$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 16x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0.33, \quad x_2 = 1$$

Uočimo da za $x = 1$ volumen će biti 0 stoga $f(0.33) = 0.593$

Zadatak „Točka bez povratka“

Zamislite da ste pilot zrakoplova sa slike koji je u mogućnosti letjeti zrakom stalnom brzinom od 300 km/h. Imate dovoljno goriva u njemu za 4 sata leta.



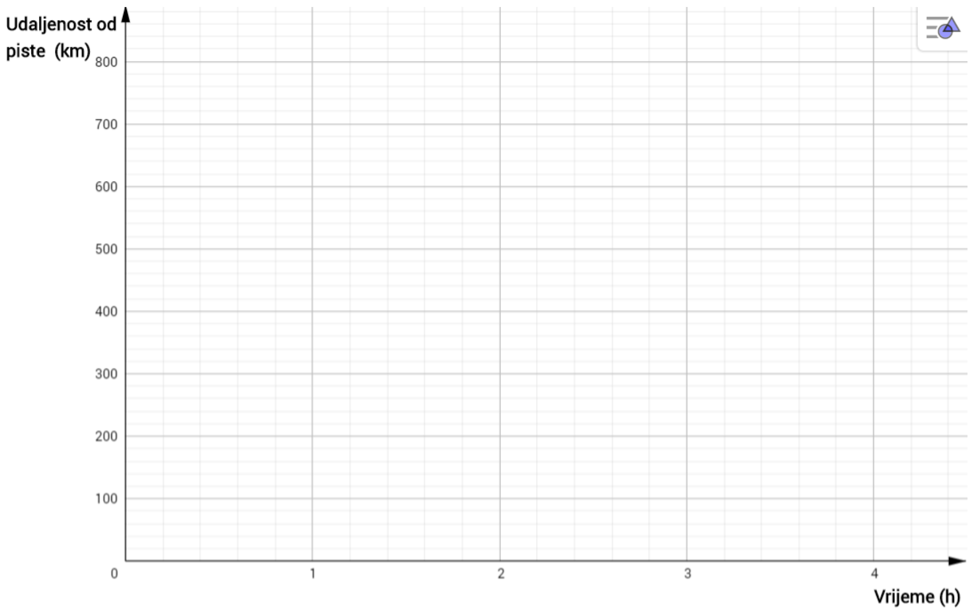
Polazite sa zrakoplovne piste na vaš let tijekom kojeg vam vjetar brzine 50 km/h cijelo vrijeme puše u rep i time povećava vašu brzinu letenja s obzirom na zemlju na 350 km/h.

Iznenada shvatite da ćete na vašem povratnom letu biti suočeni s vjetrom koji puše u nos vašeg aviona i na taj način usporiti vaš avion na brzinu letenja od 250 km/h

- Kolika je maksimalna udaljenost od zrakoplovne piste do koje možete letjeti i biti sigurni da imate dovoljno goriva da ćete su uspjeti sigurno vratiti
- Istražite te „točke bez povratka“ za različite brzine vjetra

Razmislite!

- **Nacrtajte graf kojim ćete pokazati kako se tvoja udaljenost od zrakoplovne piste mijenja s obzirom na vrijeme**
  Kako na grafu možete prikazati brzinu zrakoplova od 350 km/h kojom leti odlazeći od piste, a kako brzinu od 250 km/h kojom se vraća prema pisti.



- Iskoristite nacrtani graf kako biste pronašli maksimalnu udaljenost od piste i vrijeme tj. trenutak u kojem biste se trebali okrenuti.
- Na istom grafu ispitajte „točke bez povratka“ za različite brzine vjetra. Uočavate li na kojoj krivulji leže te točke? Možete li objasniti zašto?
- Pretpostavite da je brzina vjetra v km/h, „točka bez povratka“ je od piste udaljena za d km, a trenutak u kojem biste trebali okrenuti avion je t sati.

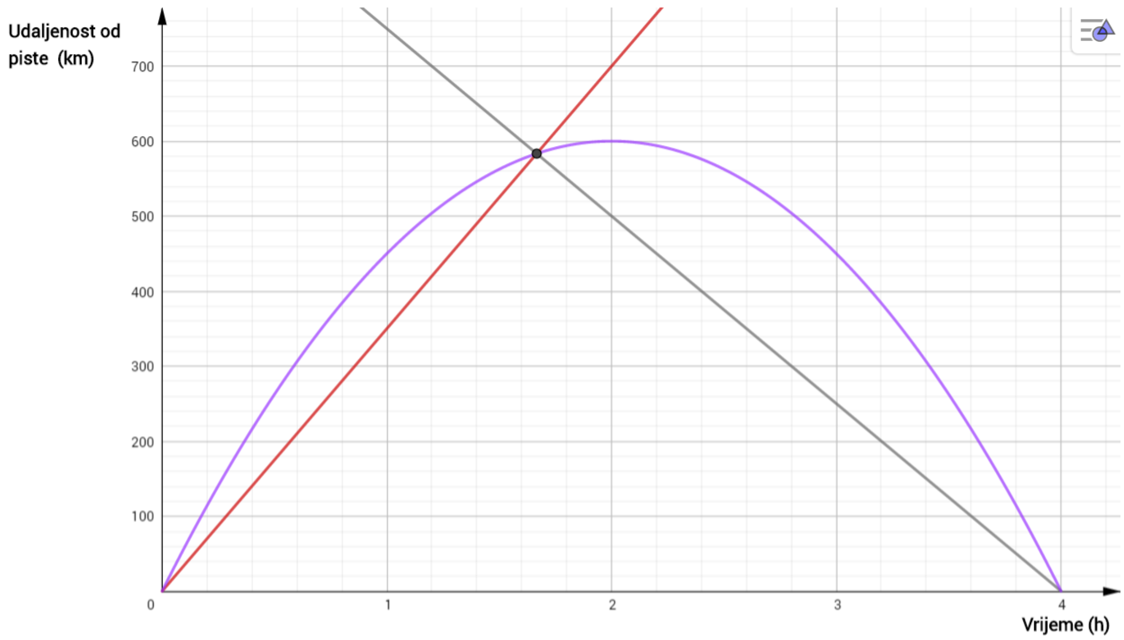
  Napišite dva algebarska izraza kojima opisujete brzinu kojom se zrakoplov udaljava od piste, jedan neka uključuje v, a drugi neka uključuje d i t.

  Probajte izraziti d samo preko t eliminiranjem w iz dvije prethodno dobivene jednadžbe.

  Uočavate li možda poveznicu između dobivenog algebarskog izraza i krivulje na kojoj leže „točke bez povratka“ koje ste skicirali na grafu?

Zadatak „Točka bez povratka“ (primjer rješenja)

Grafički pristup ovome problemu je vjerojatno najpristupačniji. Uz vjetar koji puše brzinom 50 km/h, točka bez povratka se može naći kao presjek dva pravca. Jedan pravac prolazi kroz ishodište i ima nagib 350 (km/h), a drugi prolazi kroz točku (4,0) i ima nagib −250 (km/h).



Iz grafa očitamo da je maksimalna udaljenost od piste koju možemo preći 580 km, točnije 583 km, a trenutak u kojem moramo okrenuti avion oko 1 sat i 40 minuta nakon polijetanja.

Nakon što nađemo nekoliko „točaka bez povratka“ pri različitim brzinama vjetra i označimo ih na koordinatnom sustavu, može se uočiti da te točke leže na paraboli.

Pridržavajući se uputa iz zadatka vrlo lako možemo doći do jednadžbe te parabole.

d = maksimalna udaljenost od piste koju možemo proći.

t = vrijeme koje je prošlo nakon polijetanja u kojem moramo okrenuti zrakoplov

v = brzina zrakoplova

brzina kojom zrakoplov leti odlazeći od piste $= 300 + v = \frac{d}{t}$ $\quad (\circledast)$

brzina kojom se zrakoplov vraća prema pisti $= 300 - v = \frac{d}{4-t}$ $\quad (\otimes)$

Zbrajanjem $(\circledast) + (\otimes)$ dobivamo rezultat $600 = \frac{d}{t} + \frac{d}{4-t}$, a iz toga $d = 150t(4-t)$ što je ujedno jednadžba tražene parabole.

Isto tako možemo algebarski izraziti i druge veličine:

$$t = 2 - \frac{v}{150}$$

$$d = \frac{1}{150}(300 + v)(300 - v)$$

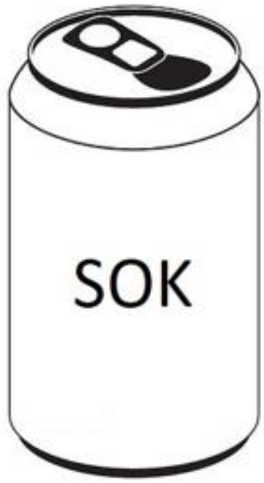
Ove formule možemo koristiti da odredimo vrijeme tj. trenutak u kojem bi se zrakoplov trebao okrenuti i udaljenost zrakoplova od piste za bilo koju brzinu vjetra.

Analogno, kao i u prethodnom zadatku, situaciju iz svakodnevnog života smo modelirali tj. opisali funkcijom. Osim što smo uz pomoć presjeka dvije funkcije našli točku s koje nema sigurnog povratka na zrakoplovnu pistu s obzirom na zadanu brzinu zrakoplova i vjetra, mi smo odredili i grafom opisali maksimalnu udaljenost od piste koju možemo proći s obzirom na različite brzine vjetra, tj. zrakoplova pošto vjetar direktno utječe na brzinu zrakoplova. Također nas je zanimala lokalna slika grafa stoga smo crtali i promatrali graf samo na određenom intervalu.

Vrlo slična priča se pojavljuje i u sljedećem zadatku u kojem ćemo također problem opisati funkcijom te skicirati njezin graf. Proučavati ćemo graf na lokalnoj razini jer želimo naći lokalni minimum te argument za koji se on postiže.

Zadatak „Pomozi tvornici“

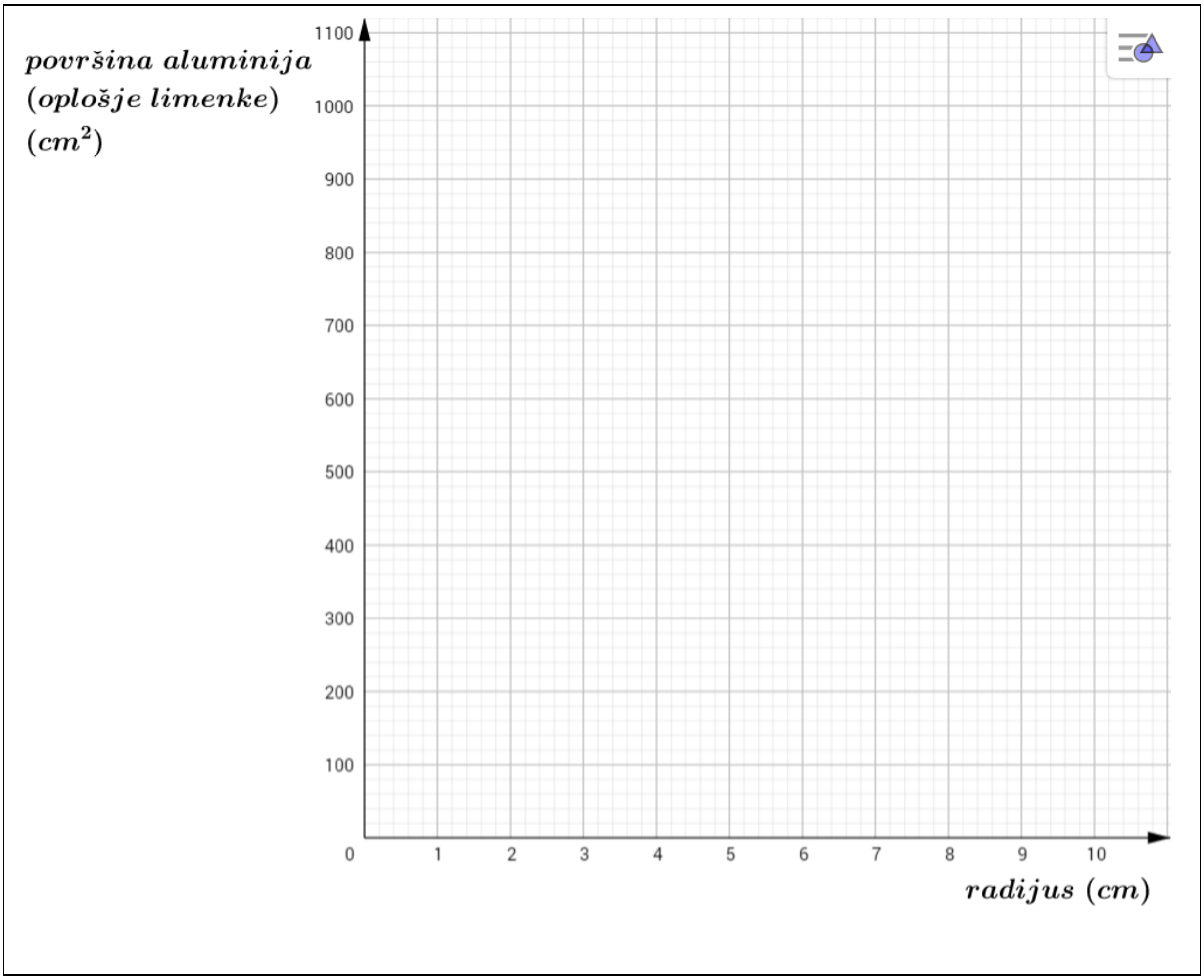
Tvornica sokova „Maky i sinovi“ iz Slavonskog Kobaša proizvodi sokove. Tvornica je do sada aluminijske limenke u koje je punila svoj sok naručivala iz Velike Britanije. Troškovi carine zbog Brexita su narasli stoga je direktor firme Marin odlučio kupiti stroj za proizvodnju limenki i sam ih proizvoditi. Međutim, Marin se našao u problemu. Aluminijska limenka mora biti valjkastog oblika i u nju mora stati pola litre soka.



- Pomozite naći Marinu radijus i visinu limenke tako da se potroši što manje aluminija tako da proizvodnja limenki bude što jeftinija. Ne zaboravi da limenka mora biti valjkastog oblika i da u nju mora stati pola litre ($500\ cm^3$) soka.
- Kojeg je oblika limenka? Jeste li ikad vidjeli limenku takvog oblika? Možete li razmisliti o praktičnosti takvog oblika limenke i zašto više limenki takvog oblika ne vidite na policama u trgovinama ili općenito na tržištu

Razmisli!

- **Neka je radijus limenke r centimetara, a visina limenke h centimetara.**
  Napišite algebarski izraz koji daje:
  - **volumen limenke**
  - **ukupnu površinu koju zauzima limenka tj. površina utrošenog materijala od koje je napravljena limenka (oplošje) prikazanu pomoću r i h**
- **Koristeći podatak da volumen limenke mora biti $500\ cm^3$ možete probati:**
  - **naći određene parove vrijednosti za r i h za koje ćete dobiti traženi volumen**
  - **naći jedinstveni izraz za površinu koju zauzima limenka tj. materijal od koje je napravljena (oplošje) prikazanu pomoću r tako da eliminirate h uz pomoć prethodno dobivenih jednadžbi.**
- **Sada nacrtajte graf kako biste pokazali kako se to površina utrošenog materijala (oplošje limenke) mijenja u odnosu na radijus limenke. Pronađite, koristeći nacrtani graf, vrijednost za r za koju je površina utrošenog materijala minimalna.**
- **Odredi visinu za dobiveni radijus. Kakvog je oblika ta limenka?**



Zadatak „Pomozi tvornici“ (primjer rješenja)

Većina učenika kako bi našli različite vrijednosti za radijus i visinu limenke vrlo vjerojatno će koristiti formulu za volumen valjka: $V = r^2\pi h = 500 \quad (\odot)$

$$h = \frac{500}{r^2\pi}$$

a nakon toga, koristeći te vrijednosti, procijeniti odgovarajuću površinu utrošenog materijala (oplošje limenke) koristeći se formulom

$$A = 2r\pi h + 2r^2\pi \quad (\otimes)$$

$$A = 2r\pi(r + h)$$

Ovaj pristup će rezultirati sljedeću tablicu:

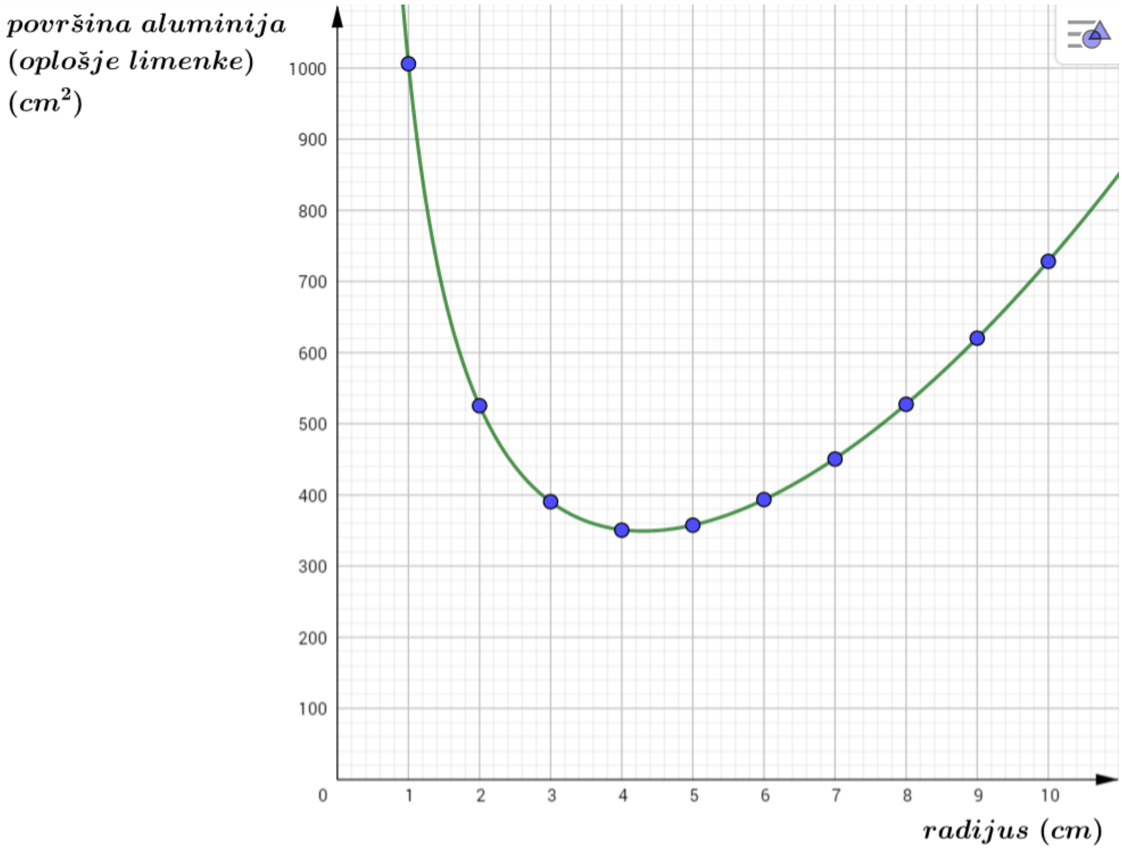
$r(cm)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(cm)$	∞	159	39.8	17.7	9.9	6.4	4.4	3.3	2.5	2	1.6
A	∞	1006	525	390	350	357	393	450	527	620	728

Sofisticiraniji pristup koji uključuje malo veći stupanj algebarskog računanja kojim ćemo izbjeći numeričko računanje uključuje supstituiranje $\pi r h = \frac{500}{r}$ iz ($\odot$) te uvrštavanje tog izraza u ($\otimes$) time dobivamo sljedeći izraz:

$$A = \frac{1000}{r} + 2r^2\pi \quad (\bowtie)$$

Ovaj pristup uklanja potrebu za računanje srednje vrijednosti za h iz tablice.

Sada možemo grafički prikazati ovisnost površine utrošenog materijala (aluminija) i radijusa limenke koristeći gornju tablicu ili dobiveni algebarski izraz ($\bowtie$)

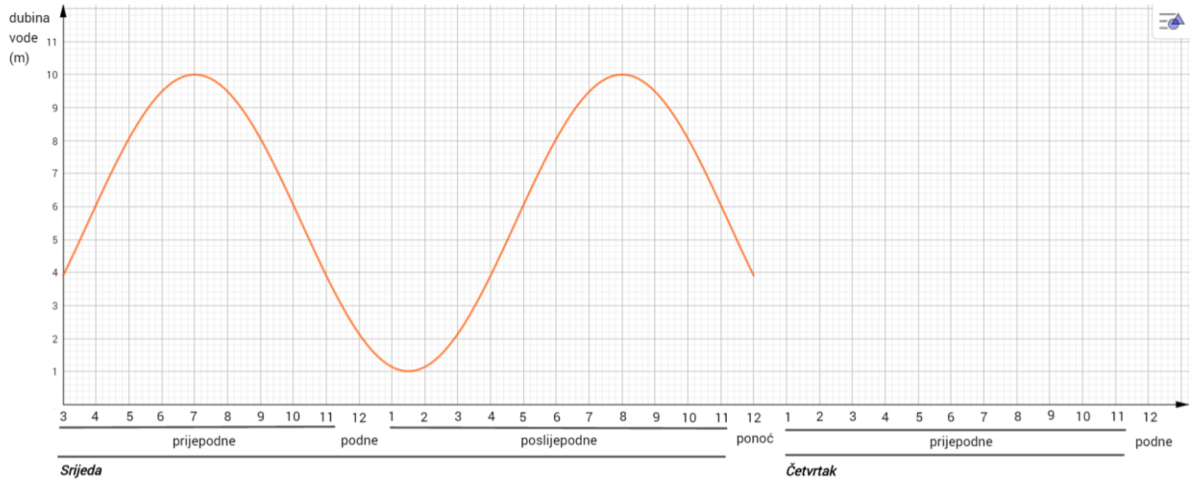


Iz grafa možemo očitati da je minimalna površina utrošenog materijala za limenku otprilike $350\ cm^2$ i dogodi se kada je radijus otprilike $4.3\ cm$, a visina je $8.6\ cm$. To znači da kada pogledamo limenku sa strane vidimo kvadrat.

Prijetimo sa grafa da je vrlo mala razlika u površini utrošenog materijala kada radijus varira između $3\ cm$ i $6\ cm$. Uže limenke su puno lakše za držanje i vrlo vjerojatno je to razlog zbog kojeg vidimo tako malo „kvadratičastih“ limenki na tržištu.

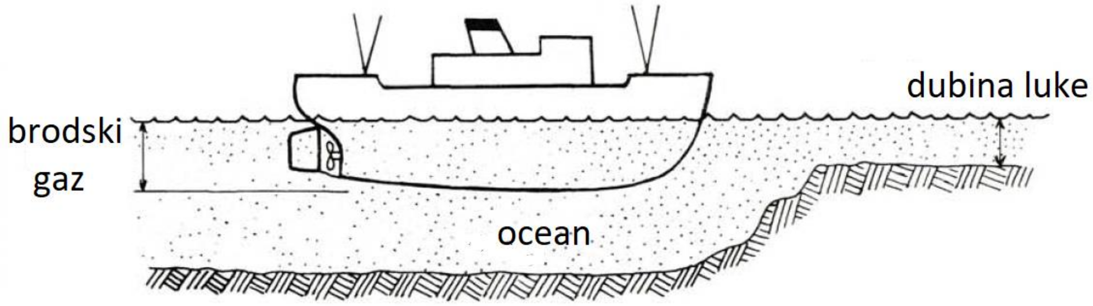
Zadatak „Plima u luci“

Graf sa slike ispod prikazuje se dubina vode u luci mijenja neke srijede u godini.



1) Ukratko riječima opišite što primjećujete iz grafa:
   - Kada je plima visoka/niska? Kada se razina vode diže/spušta?
   - Kada razina vode ubrzano raste/pada?
   - Kolika je brzina rasta/pada u tome trenutku?
   - Koja je prosječna dubina vode?
   - Koliko dubina vode oscilira s obzirom na prosijek?
2) Brod može ući u luku samo kada je voda dovoljno duboka. Što mislite koji faktori utječu na to može li pojedini brod ući ili izaći iz luke?

   Brod sa slike ispod ima gaz od 5 metara kada je napunjen s teretom i gaz od samo 2 metra kada je prazan. Komentirajte kada je sigurno da brod napusti luku.

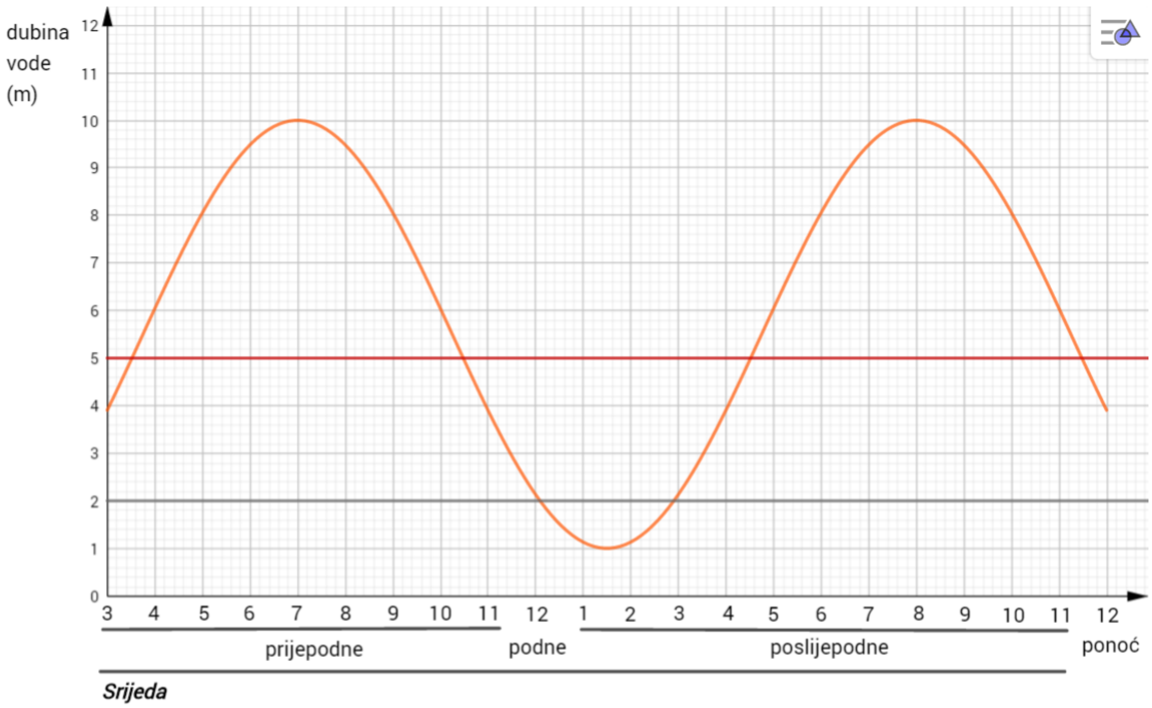


3) Probajte dovršiti graf te iz njega predvidjeti kako će se plima mijenjati u četvrtak.
4) Možete li iz grafa naći formulu $h(x) = Acos(Bx + C) + D$ kojom prikazujete ovisnost promjene plime tj. dubine vode o vremenu. Možete li iz toga predvidjeti kako će se plima mijenjati u petak i ostale dane koji slijede?

Zadatak „Plima u luci“ (rješenje)

1) (u ovome dijelu dajemo učenicima priliku da pokažu na koji način gledaju podatke iz grafa te možemo vidjeti njihovo shvaćanje cijele situacije)
Najmanja dubina vode je 1 m, a najveća 10 m stoga je prosječna dubina vode 5.5 m jer je $\frac{1+10}{2} = 5.5$. Možemo onda reći da je plima visoka kada se nalazi iznad, a niska kada se nalazi ispod prosječne dubine vode. Iz grafa sa sigurnošću vidimo da u srijedu voda raste do 7 sati i od 13:30 do 20 sati, a pada od 7 sati do 13:30 i od 20 sati do sigurno ponoći, ali i nakon toga. Brzina pada i rasta je ista. Razina vode padne s 10 metara na 1 metar u 6.5 sati pa je brzina pada približno $\frac{9}{6.5} \approx 1.4\ m/s$. S obzirom na prosjek (5.5 m) voda oscilira $\pm 4.5\ m$

2) Faktori koji utječu na siguran ulazak i izlazak broda iz luke su dubina gaza broda i dubina vode. Uz pomoć grafa možemo komentirati kada brod sigurno može napustiti luku bilo da je prazan ili pod teretom. Nacrtamo pravce $y = 2$ i $y = 5$ te gledamo presjek s grafom. Uočimo da kada je brod prazan, samo u periodu od 12 h do 14 h ne može sigurno napustiti luku, a dok je napunjen teretom taj period je od 10:30 h do 16:30 h (ne računajući rubne dijelove grafa sa slike)



3) Pošto se plima i oseka mijenjaju periodično možemo predvidjeti kako će se plima i oseka mijenjati u četvrtak ili u petak, ali da bi mogli točno predvidjeti što će se

dogoditi najbolje je situaciju opisati matematičkom formulom. Iz grafa možemo pročitati podatke iz kojeg možemo otkriti formulu koja ga opisuje.

4) Maksimalna razina vode je 10 m, a minimalna 1 m. Iz toga možemo odrediti amplitudu $A = \frac{10-1}{2} = 4.5$

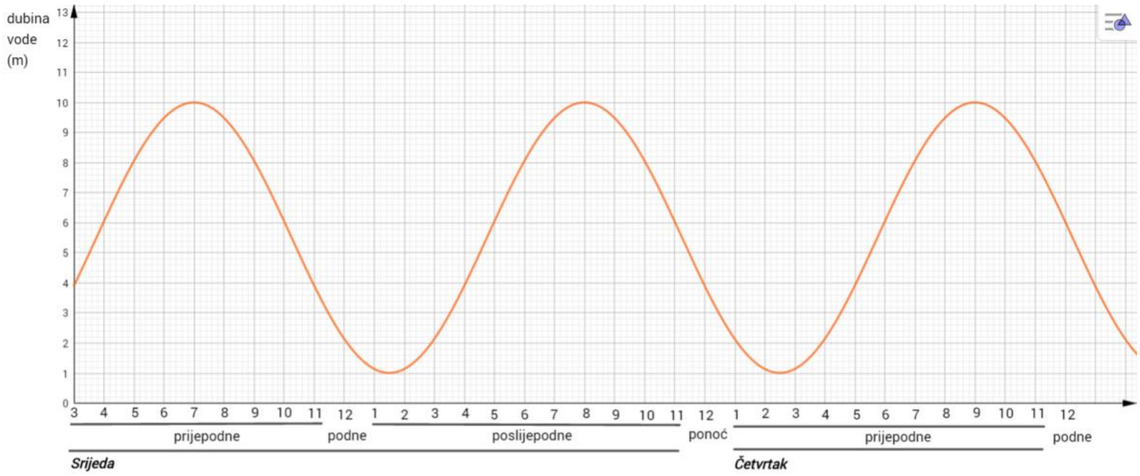
Sada kada znamo amplitudu i maksimum funkcije, zaključujemo da je graf funkcije nastao pomicanjem prema gore za 5.5. Dakle, $D = 5.5$

Period funkcije je 13 stoga znamo i kružnu frekvenciju $13 = \frac{2\pi}{B} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2\pi}{13}$

Za sada naša formula izgleda $h(x) = 4.5cos\left(\frac{2\pi}{13}x + C\right) + 5.5$

Odaberemo bilo koju točku koja se nalazi na grafu i uvrstimo ju u našu formulu te iz toga dobijemo zadnji koeficijent $C = -\frac{8\pi}{13}$

Dobijemo konačnu formulu $h(x) = 4.5cos\left(\frac{2\pi}{13}x - \frac{8\pi}{13}\right) + 5.5$ i iz toga možemo nacrtati graf do kraja te predvidjeti kako će se mijenjati plima i oseka u četvrtak i petak.



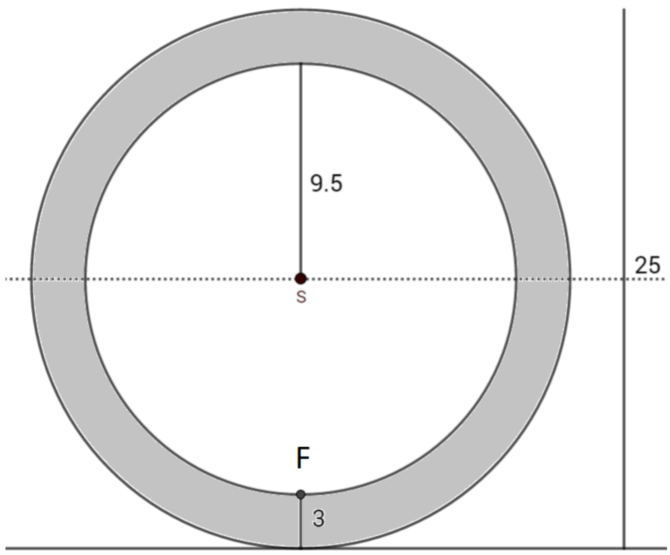
Zadnji zadatak ovoga poglavlja kombinira i lokalno i globalno crtanje grafa. Pošto su plima i oseka periodične pojave u prirodi logično je da kada ih idemo opisati matematičkom formulom tj. funkcijom da ćemo dobiti periodičnu funkciju. Gledajući lokalno iz grafa funkcije možemo predvidjeti promjenu dubine vode tijekom sutrašnjeg dana, ali isto tako na globalnoj razini možemo odrediti kako će se dubina vode mijenjati za mjesec ili dva dana. Dakle ovaj primjer kao i primjer sljedećeg zadatka govore nam da lokalna i globalna priča ne moraju nužno biti odvojene.

Zadatak „Bicikl i mrav“

Unutarnji naplatak biciklističkog kotača, čiji je primjer 25 inča, je 3 inča iznad zemlje. Mali mrav sjedi na unutarnjem naplatku kotača upravo na tom mjestu koje se nalazi 3 inča iznad zemlje. Biciklist počne voziti bicikl stalnom brzinom. Kotač napravi jedan okret svakih 1.6 sekundi.

- Nađite jednadžbu sinusoide koja opisuje kretanje mrava i nacrtajte graf te funkcije.
- Na koliko centimetara od zemlje će se nalaziti mrav 25 sekundi nakon što je biciklist krenuo s vožnjom ako vrijedi da je $1\ in\check{c} = 2.54\ cm$.
- Unutar prvih 10 sekundi koliko puta će se mrav naći na svojoj početnoj visini?

Zadatak „Bicikl i mrav“ (rješenje)



Općenita jednadžba sinusoide je $h(x) = Asin(Bx + C) + D$ i njome ćemo prikazati i opisati položaj mrava tj. njegovu visinu tijekom vožnje (okretanja kotača) gdje je x vrijeme u sekundama.

Iz teksta zadatka i skice kotača, lako se zaključuje da je polumjer unutarnje kružnice (na kojoj se nalazi mrav – točka F) 9.5 inča. Preostaje nam odrediti koeficijente funkcije $h(x)$.

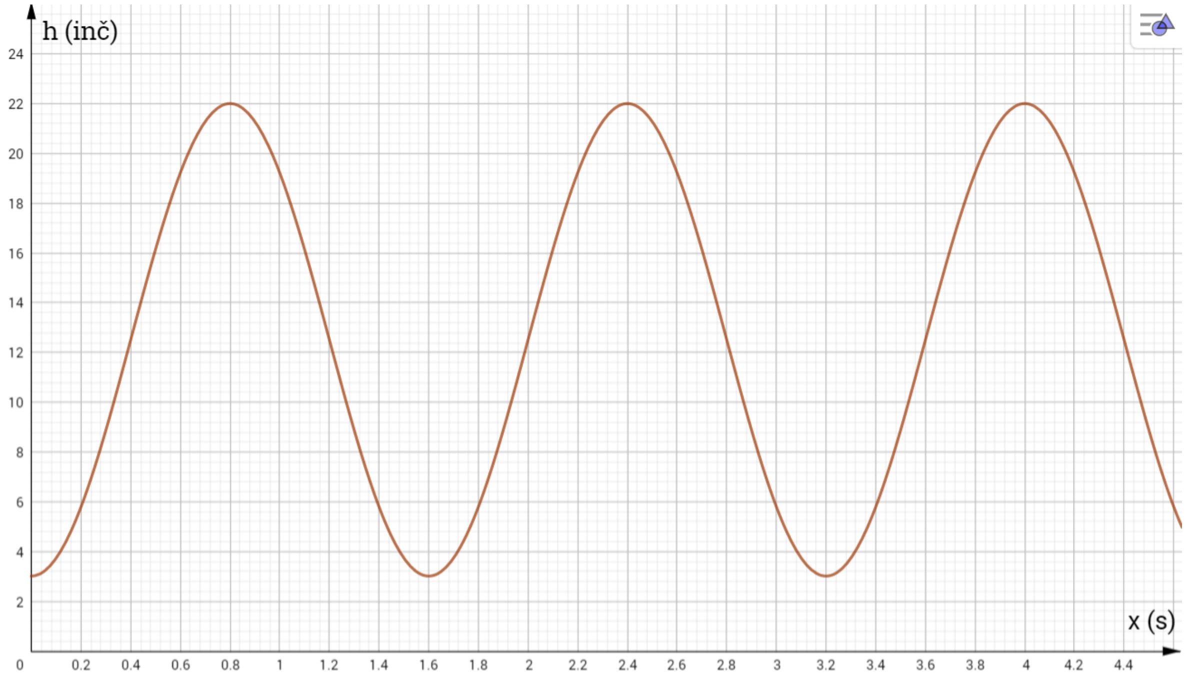
Najniža visina na kojoj se nalazi mrav je 3 inča, a najviša 22. I tog podatka zaključujemo: $A = \frac{22-3}{2} \rightarrow A = 9.5$ inča. Da bismo odredili koeficijent D moramo odrediti za koliko je sinusoida pomaknuta prema gore iz svog osnovnog položaja (minimum i maksimum funkcije su jednako udaljeni od x–osi). Stoga imamo da je $9.5 = 22 - D$ pošto nam je maksimum prije pomicanja sinusoide za D prema gore 9.5, a nakon pomicanja 22. Dakle $D = 12.5$ inča.

Znamo da je period tj. vrijeme potrebno da kotač napravi puni krug 1.6 s pa slijedi da je $P = \frac{2\pi}{B} \rightarrow 1.6 = \frac{2\pi}{B} \rightarrow B = \frac{5\pi}{4}$. Za sada jednadžba tražene sinusoide izgleda ovako:

$$h(x) = 9.5 \sin\left(\frac{5\pi}{4}x + C\right) + 12.5$$

Znajući da je početna visina na kojoj se mrav nalazi 3 inča tj. da vrijedi $h(0) = 3$ uvrštavanjem u gornju jednadžbu lako izračunamo da je $C = -\frac{\pi}{2}$. Konačno imamo:

$$h(x) = 9.5 \sin\left(\frac{5\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) + 12.5$$



Nakon 25 sekundi vožnje mrav će se nalaziti na visini od 19.218 inča, a to je 48.814 cm

$$t = 25 \quad \Rightarrow \quad h(25) = 9.5 \sin\left(\frac{5\pi}{4} \cdot 25 - \frac{\pi}{2}\right) + 12.5 = 19.218\ inča$$

$$19.218\ inča = 19.218 \cdot 2.54 = 48.814\ cm$$

Pošto je period 1.6 sekundi, u 10 sekundi kotač će napraviti $\frac{10}{1.6} = 6.25$ kruga tj. 6 punih krugova pa će se mrav unutar prvih 10 sekundi naći 7 puta na početnoj visini.

5. Zadatci s mature

U zadnjem poglavlju ovoga rada osvrnuti ćemo se na ishode i zadatke vezane uz državnu maturu u Hrvatskoj koju provodi Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Cijeli rad se temelji na pojmu grafa funkcije, načinima crtanja grafova pojedinih elementarnih funkcija, njihovim transformacijama, ali i rješavanju problema iz svakodnevnog života grafičkim metodama. Veliki dio rada temelji se na američkoj literaturi (navesti literaturu). Cilj ovog poglavlja je kroz ishode i zadatke koji se pojavljuju na državnoj maturi u Hrvatskoj pokazati da hrvatski učenici ne zaostaju gradivom za „zapadnim kolegama“ te da gradivo koje je obrađeno u ovome radu hrvatski obrazovni sustav u potpunosti pokriva što se i vidi iz sljedećih zadataka s mature. Zadatci su preuzeti sa stranice Nacionalnog centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Zadatci su prikazani odmah sa rješenjima.

Obrazovni ishodi

SADRŽAJ	OBRAZOVNI ISHODI
pojam funkcije, zadavanje funkcija i operacije s njima	• upotrebljavati funkcije zadane tablično, grafički, algebarski i riječima • izvoditi operacije s funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, komponiranje)
linearna i kvadratna funkcija, funkcija apsolutne vrijednosti, funkcija drugoga korijena, polinomi i racionalne funkcije, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije	• odrediti domenu funkcije • odrediti sliku funkcije • izračunati funkcijske vrijednosti • prikazati funkcije grafički • prikazati funkcije tablično • interpretirati graf funkcije • odrediti nultočke funkcije • odrediti sjecišta grafa s koordinatnim osima • iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju • odrediti i primijeniti rast/pad funkcije • odrediti tijek funkcije • razlikovati parne i neparne funkcije • za kvadratnu funkciju: – interpretirati ulogu koeficijenata i diskriminante – odrediti minimum/maksimum funkcije, odnosno tjeme parabole • za polinome i racionalne funkcije: – crtati grafove polinoma (najviše 3. stupnja) – crtati grafove racionalnih funkcija (polinomi najviše 2. stupnja u brojniku i nazivniku)

	• za eksponencijalne i logaritamske funkcije: – upotrebljavati osnovne eksponencijalne i logaritamske identitete • za trigonometrijske funkcije: – definirati trigonometrijske funkcije na brojevnoj kružnici – odrediti temeljni period i primijeniti svojstvo periodičnosti trigonometrijskih funkcija – primijeniti osnovne trigonometrijske identitete – primijeniti adicijske formule – primijeniti formule pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak i obrnuto – prepoznati, odnosno nacrtati grafove funkcija oblika: f(x)=Asin(Bx+C)+D i f(x)=Acos(Bx+C)+D
derivacija funkcije	• derivirati konstantnu funkciju, funkciju potenciranja i Trigonometrijske funkcije • derivirati zbroj, razliku, umnožak, kvocijent i kompoziciju funkcija • odrediti tangentu na graf funkcije u točki • upotrebljavati derivaciju funkcije kod ispitivanja tijeka funkcije
matematičko modeliranje	•derivirati konstantnu funkciju, funkciju potenciranja i trigonometrijske funkcije • derivirati zbroj, razliku, umnožak, kvocijent i kompoziciju funkcija • odrediti tangentu na graf funkcije u točki • upotrebljavati derivaciju funkcije kod ispitivanja tijeka funkcije

Zadatci

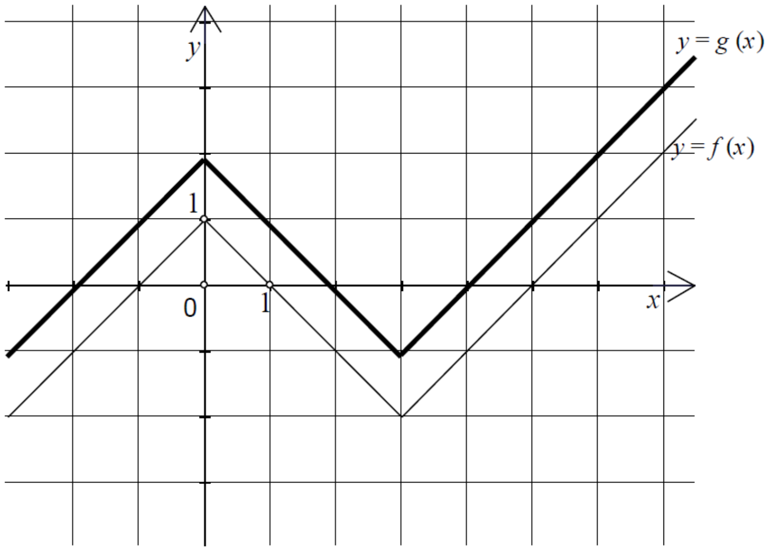
DM LJETO 2009./2010.

Zadatak. Na slici je graf funkcije f. U istom koordinatnome sustavu nacrtajte graf funkcije: $g(x) = f(x) + 1$.

Odgovor:

Graf funkcije $g(x)$ nestaje pomicanjem grafa funkcije $f(x)$ u smjeru y–osi za 1 prema gore.

Rješenje je prikazano na slici.



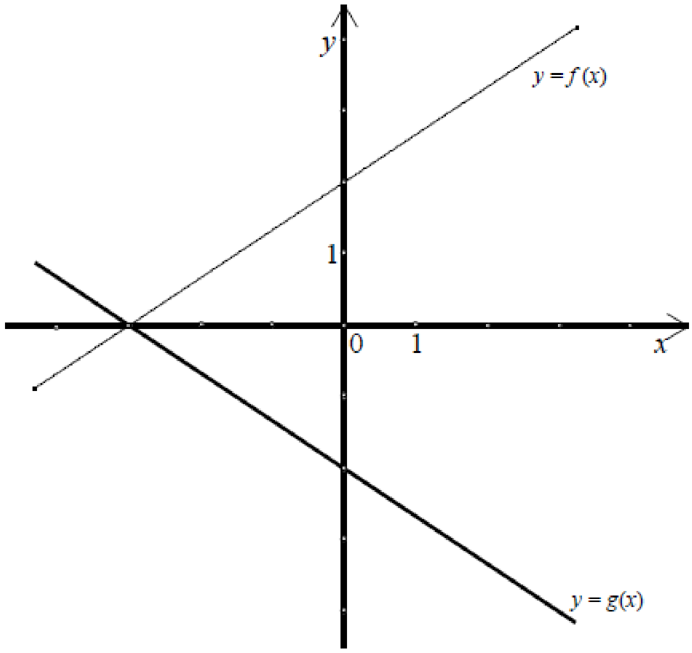
DM JESEN 2009./2010.

Zadatak. Na slici je graf funkcije f. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije g tako da $g(x) = -f(x)$.

Odgovor:

Graf funkcije $g(x)$ nastaje zrcaljenjem grafa funkcije $f(x)$ s obzirom na os apscisa. Koeficijent $a = -1$ uzrok je tog zrcaljenja.

Rješenje je prikazano na slici.



DM JESEN 2010./2011.

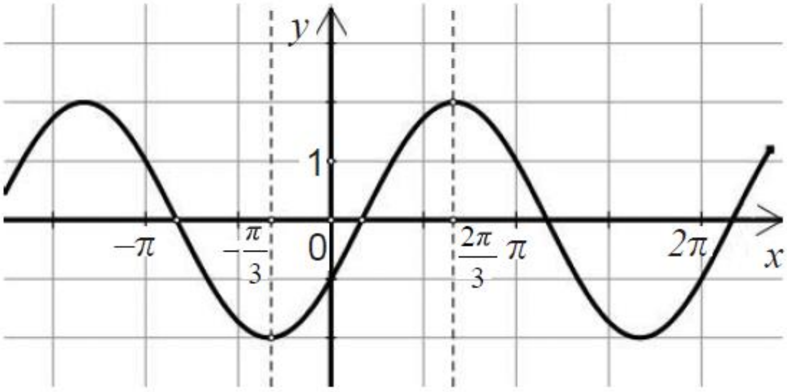
Zadatak. Grafom je zadana funkcija $f(x) = Asin(x + C)$. Odredite A i C

Odgovor:

Amplitudu $A = 2$ možemo odmah vidjeti sa slike isto kao i koeficijent $B = 1$

Dakle za sada znamo da je formula funkcije:

$f(x) = 2sin(x + C)$.



Odaberemo točku $T\left(\frac{2\pi}{3}, 2\right)$ s grafa te uvrstimo u funkciju i rješavanjem dobivene trigonometrijske jednadžbe dobijemo da je $C = -\frac{\pi}{6}$. Pošto je sinus periodična funkcija vrijedi: $C = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

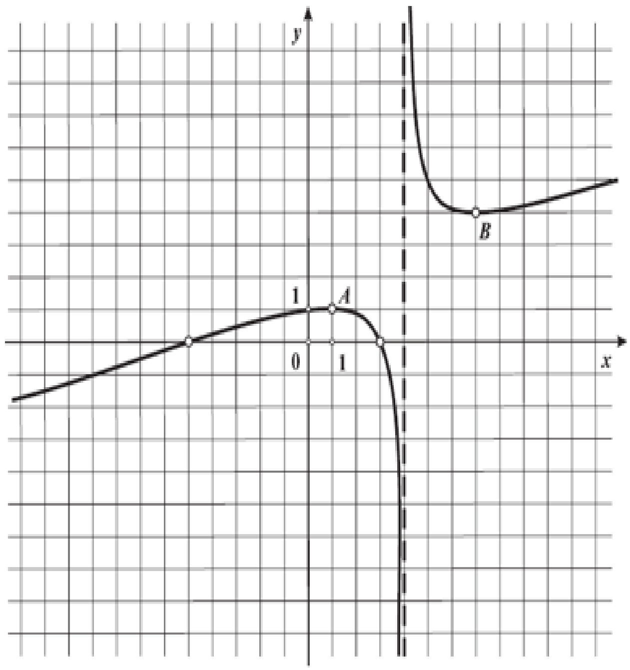
DM JESEN 2012./2013.

Zadatak. Na slici je prikazan graf racionalne funkcije $y = f(x)$. Točka $A(1,1)$ je točka lokalnog maksimuma, a točka $B(7,4)$ je točka lokalnog minimuma. Zadatke a), b) i c) riješite pomoću grafa.

a) Napišite sve nultočke funkcije f.

b) Za koje realne brojeve $f(x) < 0$?

c) Napiši skup svih vrijednosti funkcije f.



Odgovor:

a) $N_1(-5,0),\ N_2(3,0)$

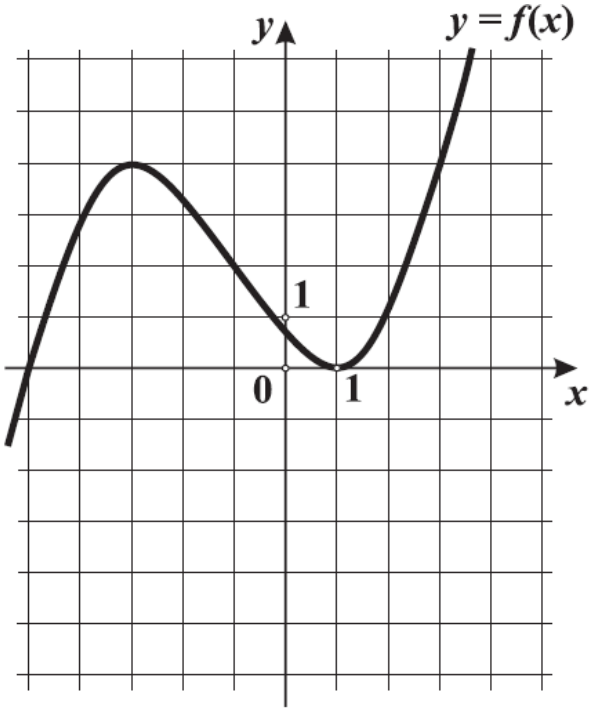
b) $x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 3,4\rangle$

c) $y \in \langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty\rangle$

Sve odgovore očitamo sa grafa na slici.

DM LJETO 2013./2014.

Zadatak. Na slici je prikazan graf funkcije f. Funkcija g zadana je formulom $g(x) = f(x+1) + 2$. Kolika je vrijednost $g(-2)$?



Odgovor:

Uvrstimo argument $x = -2$ u funkciju $g(x)$ te dobijemo:

$$g(-2) = f(-2+1) + 2 = f(-1) + 2$$

Iz grafa očitamo vrijednost funkcije f za argument -1. Vrijedi $f(-1) = 2$

Dakle, $g(-2) = f(-1) + 2 = 2 + 2 = 4$

DM JESEN 2013./2014.

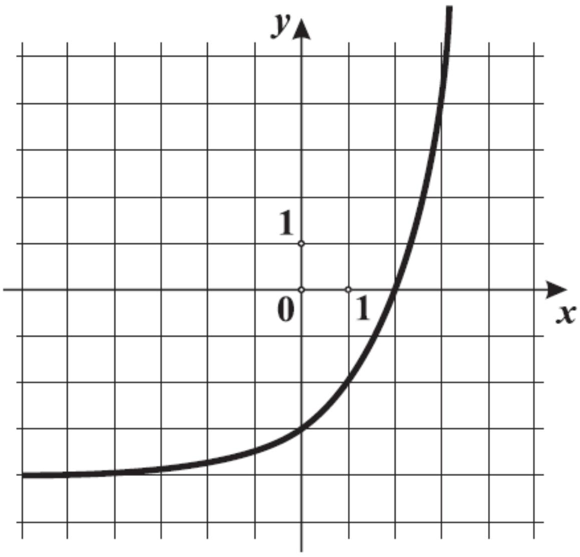
Zadatak. Na slici je prikazan graf funkcije f. Kojoj od navedenih funkcija pripada prikazani graf.

A) $f(x) = 2^x - 4$

B) $f(x) = 2^x - 2$

C) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

D) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$



Odgovor: A

Graf sa slike je nastao translacijom rastuće eksponencijalne funkcije $h(x) = 2^x$ u smjeru osi ordinata za 4 prema dolje jer funkcija $h(x) = 2^x$ prolazi točkom $T_1(0,1)$, a funkcija $f(x)$ točkom $T_2(0,-3)$.

Dakle na slici je graf funkcije $f(x) = 2^x - 4$

DM JESEN 2014./2015.

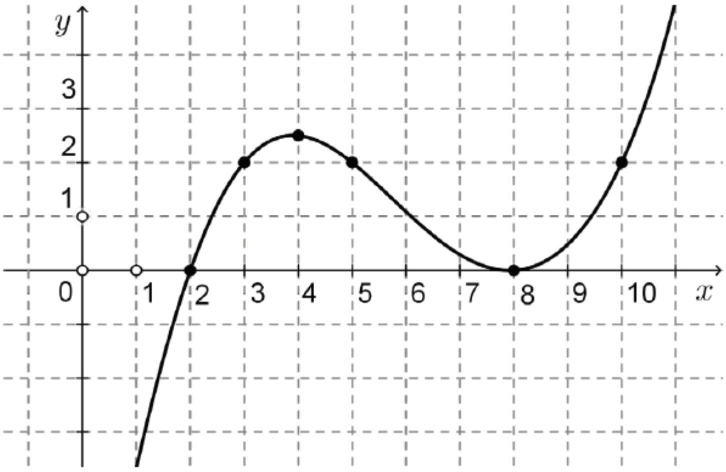
Zadatak. Slika prikazuje graf funkcije f na intervalu $\langle 1,11\rangle$. Odredite interval/intervale na kojemu/kojima je funkcija padajuća i postiže vrijednosti manje od 2.

Odgovor:

Funkcija je padajuća na intervalu: $x \in \langle 4,8\rangle$

Funkcija postiže vrijednost manju od 2 na intervalima $x \in \langle 1,3\rangle$ i : $x \in \langle 5,10\rangle$

Sve odgovore očitavamo sa grafa na slici.

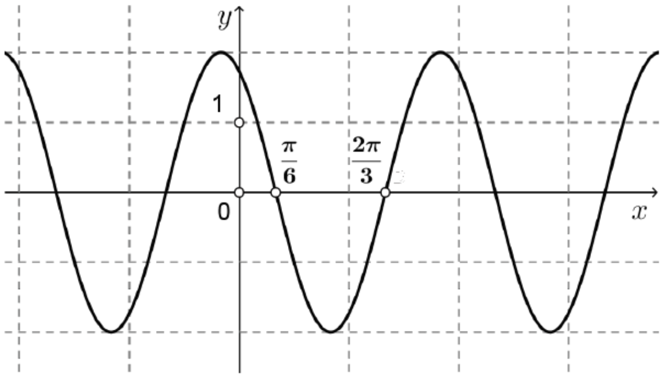


DM JESEN 2014./2015.

Zadatak. Na slici je prikazan graf funkcije $f(x) = 2sin(Bx + C)$.

a) Koliki je temeljni period te funkcije

b) Odredite najmanji pozitivan broj x za koji je $f(x) = -2$



Odgovor:

a) sa slike uočavamo da funkcija napravi pola perioda na intervalu $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ dakle polovica perioda je $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Dakle, cijeli period je $P = \pi$.

b) najmanji pozitivan broj x za koji je $f(x) = -2$ je upravo polovište dviju nultočaka koje su označene na grafu $N_1 = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ i $N_2 = \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$

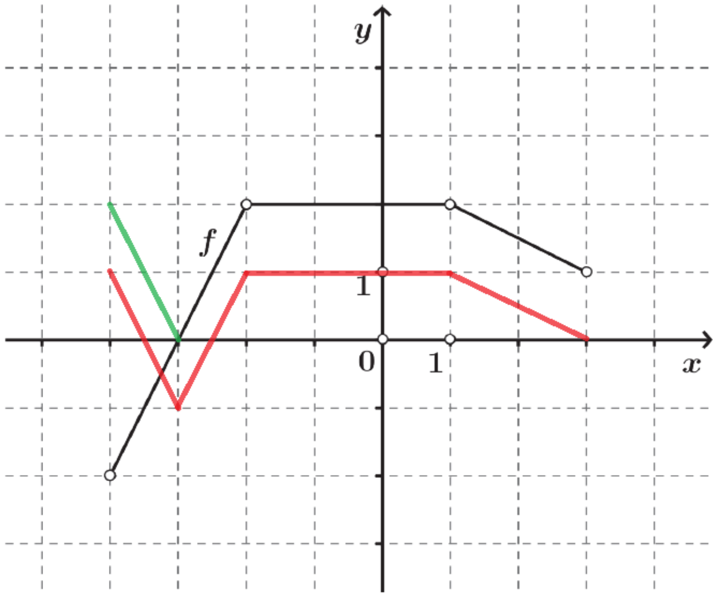
Dakle vrijedi da je traženi argument:

$$x = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{5\pi}{12}$$

DM LJETO 2016./2017.

Zadatak. U zadanom koordinatnom sustavu prikazan je graf funkcije f. U koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $g(x) = |f(x)| - 1$

Odgovor:

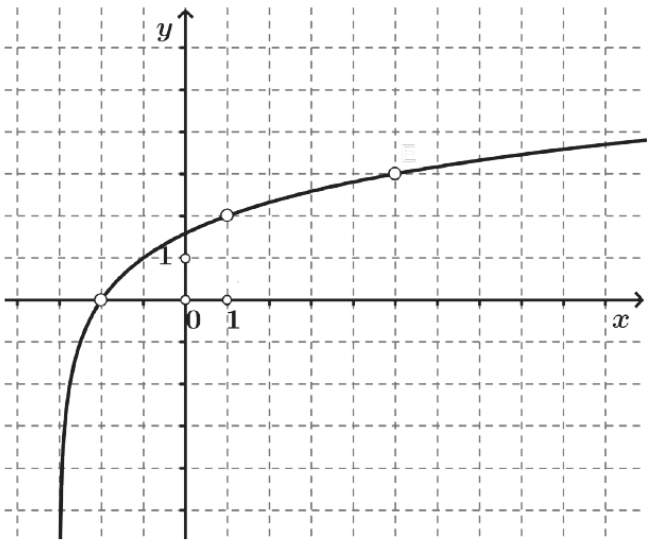


Crnom olovkom nacrtana je funkcija $f(x)$. Funkcija apsolutne vrijednosti $|f(x)|$ „prebacuje" skup svih točaka koje se nalaze ispod x–osi, iznad. Na slici je to zeleni dio grafa. Sada imamo nacrtan graf funkcije $|f(x)|$ (zelena i crna olovka) i uočimo da se sve točke nalaze iznad x–osi. Koeficijent -1 uzrok je pomaka grafa funkcije $|f(x)|$ u smjeru y–osi za jedan prema dolje, time dobivamo graf tražene funkcije $g(x) = |f(x)| - 1$ (crvena olovka).

DM JESEN 2016./2017.

Zadatak. Graf funkcije $f(x) = \log_b(x + a)$ prikazan je na slici. Odredite vrijednost cijelih brojeva a i b.

Odgovor:



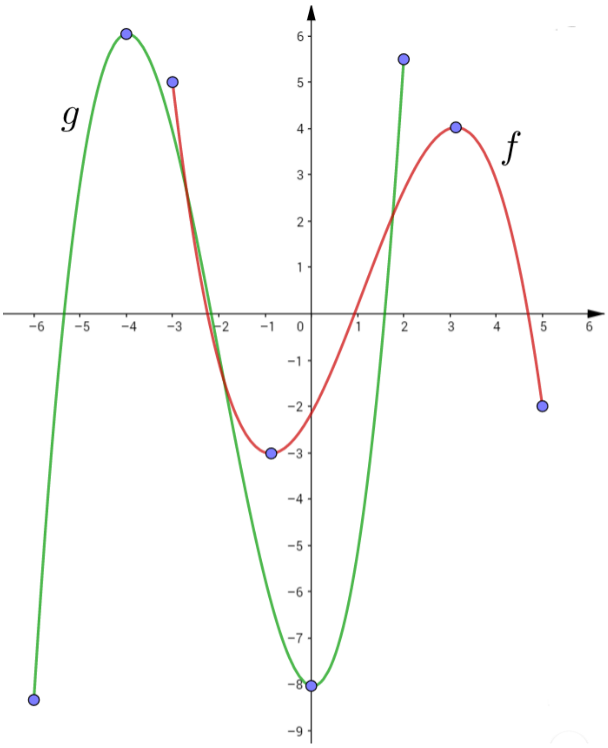
Graf sa slike nastao je translacijom rastuće $(b > 1)$ logaritamske funkcije $f(x) = \log_b(x)$ u smjeru x–osi za 3 ulijevo. Dakle $A = 3$.

Algebarski zapis funkcije sada je:

$f(x) = \log_b(x + a)$Uvrštavanjem nekih od istaknutih točaka s grafa, i uvrštavanjem u funkciju te rješavanjem logaritamske jednadžbe dobivamo da je $B = 2$.

DM LJETO 2017./2018.

Zadatak. Na slici je prikazan graf funkcije f koja je definirana na intervalu $[-3,5]$. Neka je g funkcija takva da vrijedi $g(x) = -2f(x+3)$. Za koju vrijednost x funkcija g poprima maksimalnu vrijednost i koliko ta maksimalna vrijednost iznosi? (koordinate točaka su cijeli brojevi).



Odgovor: $M(-4,6)$

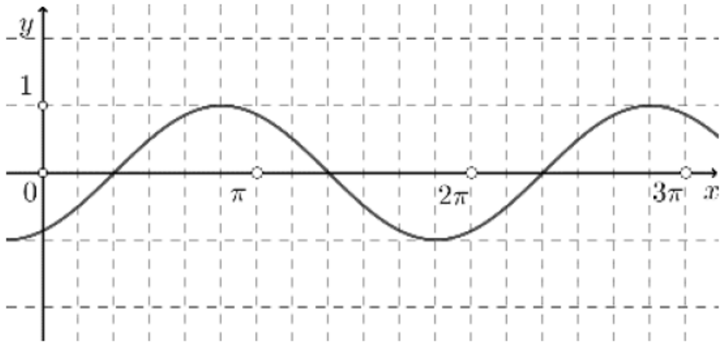
Iz zapisa $g(x) = -2f(x+3)$ uočavamo da je funkcija $g(x)$ nastala kompozicijom elementarnih transformacija grafa funkcije $f(x)$ (crvena boja). Koeficijent $a = -2$ utječe na rastezanje funkcije u smjeru y–osi za 2 te zrcaljenje s obzirom na x–os. Koeficijent $c = 3$ utječe na pomak tog novo dobivenog grafa u smjeru x–osi za 3 ulijevo. Time smo dobili graf tražene funkcije $g(x)$ (zelena boja).

Točke su označene na grafu radi lakšeg praćenja navedenih preslikavanja ravnine.

DM JESEN 2017./2018.

Zadatak. U zadanom koordinatnom sustavu na intervalu $x \in [0,3\pi]$ nacrtajte graf funkcije

$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right); x \in [0,3\pi]$



Odgovor:

Graf funkcije $f(x)$ nastao je translacijom grafa elementarne funkcije $h(x) = \sin(x)$ u smjeru x–osi udesno za vrijednost $\frac{\pi}{3}$.

Rješenje se nalazi na slici.

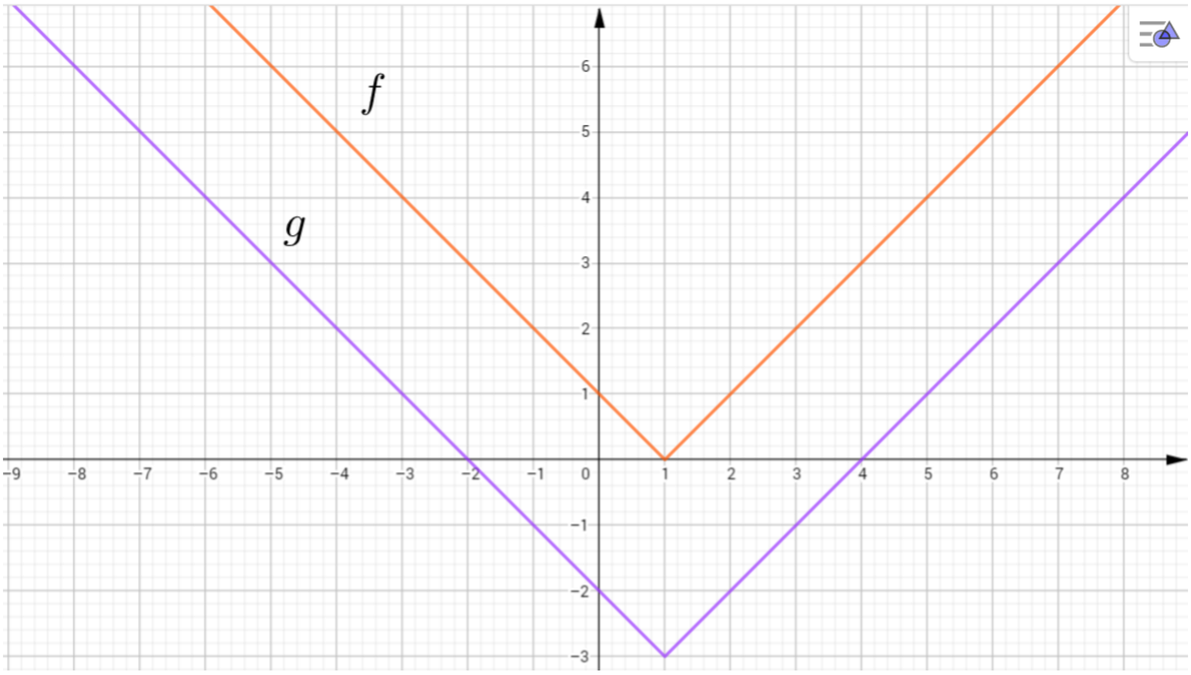
DM JESEN 2017./2018.

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$. Nacrtajte graf funkcije $g(x) = f(x) - 3$.

Odgovor:

Funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ možemo algebarski urediti pa dobijemo funkciju apsolutne vrijednosti: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$

Nacrtamo graf funkcije $f(x)$, a graf funkcije $g(x)$ dobijemo translacijom grafa funkcije $f(x)$ u smjeru y–osi za 1 prema dolje. Rješenje se nalazi na slici.



ZAKLJUČAK

Pojam funkcije i grafa funkcije jedan je od važnijih pojmova kako u osnovnoškolskoj tako i u srednjoškolskoj matematici. Matematički zapis definicije funkcije vrlo često učenicima stvara probleme stoga su aktivnosti koje se nalaze u ovom diplomskom radu koncipirane na način da učenici kroz aktivnu nastavu i rješavanjem grafičkih kartica svladaju pojam funkcije, ali i njezina svojstva. Veliki dio ovoga rada posvećen je transformaciji grafova elementarnih funkcija upravo zbog toga što se taj dio gradiva u osnovnoj i srednjoj školi jako malo ili nimalo ne obrađuje. Pri kraju ovoga rada nalaze se aktivnosti i zadatci u kojima učenici moraju grafom opisati situaciju iz svakodnevnog života. Smatram da je sposobnost opisivanja situacije iz svakodnevnog života grafom vrlo važna. Grafovi su danas svuda oko nas i onaj tko zna određenu situaciju opisati grafom te tko ih zna čitati je u velikoj prednosti na današnjem tržištu rada. Upravo je na nastavnicima da pojam funkcije i grafa funkcije pokušaju kroz aktivnu nastavu i primjere iz svakodnevnog života približiti učenicima. Na taj način učenici lakše povezuju matematiku sa stvarnim životom i dobivaju sliku kao je matematika zaista svuda oko nas.

LITERATURA

[1] Dakić B., Elezović N., (2015), *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio*, Zagreb, Element.

[2] Dijanić Ž., Transformacije grafa funkcije, dostupno na: https://www.geogebra.org/m/hmQTkBxV (travanj 2019.)

[3] *Exploring Trigonometric Graphs,* Project Maths, dostupno na: https://www.projectmaths.ie/documents/PDF/ExploringTrigonometricGraphs.pdf?strand (lipanj 2019.)

[4] Kabić M., *Transformacije grafova funkcija i krivulja,* dostupno na: https://mis.element.hr/fajli/915/51-09.pdf (travanj 2019.)

[5] Kabić M., *O problemu obrade grafova funkcija i krivulja u nastavi četverogodišnjih srednjih škola,* dostupno na: https://mis.element.hr/fajli/900/50-10.pdf

[6] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, *Nacionalni okvirni Kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Zagreb, 2010.

[7] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, *Provedeni ispiti*, dostupno na: https://www.ncvvo.hr/kategorija/drzavna-matura/provedeni-ispiti/ (svibanj 2019.)

[8] Swan M. i sur., *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Matematical Education, UK, 1985.

SAŽETAK

U ovome je radu prikazana važnost aktivne nastave te načini na koje učenici kroz takav oblik nastave, otkrivanjem, uče o pojmu funkcije i njezinom grafičkom prikazu. Prvi dio rada govori upravo o prednostima takvog oblika nastave. U sljedećim poglavljima nalaze se aktivnosti u kojima učenici otkrivaju svojstva funkcije, transformiraju grafove elementarnih funkcija koristeći linearne transformacije grafa, skiciraju grafove situacija koje su opisane tablicom, prikazane slikom ili opisane riječima. Uz svaku aktivnost i zadatak dani su savjeti nastavniku za lakši rad te detaljna rješenja.

SUMMARY

This thesis demonstrates the importance of active teaching and the ways in which students, through discovery, learn about the concept of a function and its graphical representation. The first part of the thesis focuses on the benefits of this type of teaching. The following chapters discuss the activities through which students discover features of functions and transform elementary function graphs using linear graph transformations. They also discuss the activities used to sketch situation graphs for the situations which are described in tables, shown in images or described verbally. Along with every activity and task, the teacher is provided with advice and detailed solutions.

ŽIVOTOPIS

Rođen sam 27. lipnja 1991. godine u Zagrebu. Svoje obrazovanje započeo sam 1998. u Osnovnoj školi Dugave u Zagrebu. Nakon toga 2006. godine upisujem XIII. Gimnaziju u Zagrebu, opći smjer.

Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2010. upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Fakulteta elektronike i računarstva, međutim vrlo brzo shvaćam da je moja prava ljubav matematika te 2011. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2015. godine stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika te iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer; nastavnički na već spomenutom fakultetu.