Blackwellov teorem obnavljanja

Banić, Barbara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Banić

BLACKWELLOV TEOREM OBNAVLJANJA

Diplomski rad

Zagreb, rujan, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Banić

BLACKWELLOV TEOREM OBNAVLJANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Mami i tati.

Sadržaj

Uvod

Niz obnavljanja je jedan od glavnih modela u primjenama teorije slučajnih procesa. Uveden je kako bi modelirao vremena pristizanja događaja između kojih protiču međusobno nezavisna i jednako distribuirana međudolazna vremena.

Rad ćemo započeti sa iskazom nekih osnovnih definicija i rezultata. Zatim ćemo definirati neke pojmove iz teorije obnavljanja kao što su niz obnavljanja, proces obnavljanja te funkcija obnavljanja. Također ćemo objasniti što su to jednadžbe obnavljanja te stacionarni niz obnavljanja. Zatim ćemo uvesti pojam direktne Riemann integrabilnosti i iskazati ekvivalentne oblike teorema obnavljanja među kojima su i Blackwellov teorem obnavljanja i ključni teorem obnavljanja. Pokazat ćemo njihovu ekvivalentnost, te ćemo i prezentirati dokaz jednog od tih ekvivalentnih oblika teorema obnavljanja po uzoru na S. I. Resnicka, te na taj način pokazati da vrijedi Blackwellov teorem obnavljanja. Blackwellov teorem obnavljanja kaže da za dani niz obnavljanja $\{S_n : n \geqslant 0\}$ uz određene uvjete na razdiobu međudolaznih vremena i za bilo koju vjerojatnosnu funkciju distribucije slučajne varijable S_0, očekivani broj obnavljanja na nekom polutovorenom intervalu $(t, t+b]$ asimptotski je proporcionalan duljini intervala $b > 0$ kada $t \to \infty$.

Poglavlje 1

Osnovni rezultati i pojmovi

U ovom poglavlju ćemo definirati neke pojmove te iskazati neke pomoćne rezultate koje ćemo koristiti u nastavku ovog rada.

Definicija 1.0.1. *Neka je $X \geqslant 0$ slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Kažemo da je funkcija distribucije F aritmetička ako postoji $a > 0$ takav da vrijedi*

$$P(X \in \{ka : k \in \mathbb{N}_0\}) = 1.$$

Definicija 1.0.2. *Funkcija izvodnica momenata slučajne varijable X je funkcija M_X definirana sa*

$$M_X(t) := E(e^{tX}),$$

za sve realne brojeve t za koje to očekivanje postoji.

Sada ćemo iskazati Waldovu jednakost. Za dokaz vidi [4, str. 95].

Propozicija 1.0.3. *Neka je $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ niz nezavisnih i nenegativnih slučajnih varijabli takvih da su slučajne varijable $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ jednako distribuirane. Neka je $S_n = Y_0 + Y_1 + ... + Y_n$ i $N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n)$. Vrijedi*

$$E(S_{N(t)}) = E(N(t))E(Y_1) + E(Y_0),$$

s tim da obje strane mogu biti $+\infty$.

1.1 Konvolucija

Definicija 1.1.1. *Neka je $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija te neka je $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija. Funkcija definirana sa*

$$F * g(t) := \int_0^t g(t-x)dF(x), \quad za\ t \geqslant 0,$$

zove se konvolucija funkcija F i g.

Sada ćemo navesti neka svojstva konvolucije:

1. $F * g$ je lokalno ograničena funkcija,
2. kovolucija funkcija distribucije F_1 i F_2 je funkcija distribucije zbroja nezavisnih slučajnih varijabli X_1 i X_2 čije su funkcije distribucije F_1 i F_2, jer za $t \geqslant 0$ vrijedi
$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leqslant t) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}_+ : x+y\leqslant t\}} dF_1(x)dF_2(y) = \int_{x=0}^{t}\int_{y=0}^{t-x} dF_2(y)dF_1(x) \\ &= \int_0^t F_2(t-x)dF_1(x) = F_1 * F_2(t), \end{aligned}$$
3. vrijedi komutativnost, odnosno $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$,
4. neka su $X_i,\ i = 1, ..., n$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Tada $X_1 + ... + X_n$ ima funkciju distribucije F^{n*}.

1.2 Laplaceova transformacija

Definicija 1.2.1. *Pretpostavimo da je X nenegativna slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Laplaceova transformacija od X ili F je funkcija definirana na $[0, \infty)$ s*
$$\hat{F}(\lambda) := E\left(e^{-\lambda X}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dF(x), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Definicija 1.2.2. *Neka je U rastuća funkcija definirana na $[0, \infty)$. Ako postoji $a \geqslant 0$ takav da vrijedi $\int_0^\infty e^{-\lambda x}dU(x) < \infty$ za svaki $\lambda > a$, tada je Laplaceova transformacija od U definirana relacijom*
$$\hat{U}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x}dU(x), \quad \lambda > a.$$

Sada ćemo navesti neka korisna svojstva Laplaceove transformacije:

1. Različite funkcije distribucije imaju različite Laplaceove transformacije.
2. Pretpostavimo da su $X_1,\ X_2$ nezavisne slučajne varijable, te da X_i ima funkciju distribucije $F_i,\ i = 1, 2$. Tada
$$(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) = E\left(e^{-\lambda(X_1+X_2)}\right) = E\left(e^{-\lambda X_1}\right)E\left(e^{-\lambda X_2}\right) = \hat{F}_1(\lambda)\hat{F}_2(\lambda),$$
pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili nezavisnost. Slijedi da ako su slučajne varijable nezavisne jednako distribuirane s funkcijom distribucije F, vrijedi
$$(\widehat{F^{n*}})(\lambda) = (\hat{F}(\lambda))^n, \quad \text{za svaki } n \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Primjer 1.2.3. *Neka je G gama funkcija distribucije s parametrima $n+1$ i α. Primijetimo da je*

$$\begin{aligned}\hat{G}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{\alpha(\alpha x)^n e^{-\alpha x}}{n!}dx = \alpha^{n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda+\alpha)x}x^n}{n!}dx \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-y}y^n}{n!}dy = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Neka su $X_1,\dots,X_n$ nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom $\alpha > 0$, tj. funkcija gustoće neka im je dana sa $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}1_{[0,\infty)}(x)$. Tada je

$$\hat{F}(\lambda) = E\left(e^{-\lambda X_1}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dF(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}.$$

Koristeći (1.1) *slijedi,*

$$(\widehat{F^{n*}})(\lambda) = \left(\hat{F}(\lambda)\right)^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^n.$$

Dakle, Laplaceova transformacija od $\sum_{i=1}^n X_i$ je dana sa

$$E\left(e^{-\lambda\sum_{i=1}^n X_i}\right) = (\widehat{F^{n*}})(\lambda) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{\alpha(\alpha x)^{n-1}e^{-\alpha x}}{(n-1)!}dx.$$

Budući da Laplaceova transformacija jedinstveno određuje distribuciju, slijedi da $\sum_{i=1}^n X_i$ ima gama distribuciju s parametrima n i α, tj. funkcija gustoće je dana s $x \mapsto \alpha(\alpha x)^{n-1}\frac{e^{-\alpha x}}{(n-1)!}1_{[0,\infty)}(x)$.

Neka je F funkcija distribucije takva da vrijedi $F(0-) = 0$ i $F(0) < 1$. Sada ćemo pokazati neke korisne jednakosti. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda x}F(x)dx &= \int_{x=0}^\infty e^{-\lambda x}\left(\int_{y=0}^x dF(y)\right)dx \\ &= \int_{y=0}^\infty\left(\int_{x=y}^\infty e^{-\lambda x}dx\right)dF(y) \\ &= \int_{y=0}^\infty \frac{e^{-\lambda y}}{\lambda}dF(y) \\ &= \frac{\hat{F}(\lambda)}{\lambda}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Očito je da vrijedi i

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}(1-F(x))dx = \frac{1-\hat{F}(\lambda)}{\lambda}. \tag{1.3}$$

Poglavlje 2

Teorija obnavljanja

U ovom poglavlju definirat ćemo neke osnovne pojmove teorije obnavljanja, kao što su niz obnavljanja, proces obnavljanja te funkcija obnavljanja. Također, iskazat ćemo i dokazati neke osnovne rezultate kao što su jaki zakon velikih brojeva za proces obnavljanja te elementarni teorem obnavljanja. Osvrnut ćemo se i na jednadžbe obnavljanja.

2.1 Procesi obnavljanja

Definicija 2.1.1. *Neka je* $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ *niz nezavisnih i nenegativnih slučajnih varijabli, te neka je* $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ *niz jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Niz obnavljanja je niz* $\{S_n : n \geqslant 0\}$ *definiran sa*

$$S_n := Y_0 + Y_1 + ... + Y_n, \quad n \geqslant 0.$$

Slučajne varijable $Y_n,\ n \geqslant 1$ nazivamo međudolazna vremena. O veličinama S_n možemo razmišljati kao o vremenima pojavljivanja nekog fenomena, te ih zovemo vremena obnavljanja.

Neka je $F(x) = P(Y_n \leqslant x)$ zajednička funkcija distribucije slučajnih varijabli $\{Y_n : n \geqslant 1\}$, a $G(x) = P(Y_0 \leqslant x)$ funkcija distribucije slučajne varijable Y_0. Pretpostavljamo,

$$F(0-) = 0,\ F(0) < 1,$$

tj.

$$P(Y_n < 0) = 0,\ P(Y_n = 0) < 1,\ \text{za svaki } n \geqslant 1.$$

Funkcija F se naziva međudolaznom funkcijom distribucije. Ukoliko je $Y_0 = 0$ kažemo da je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ čisti niz obnavljanja, a ukoliko je $P(Y_0 > 0) > 0$ kažemo da je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ odgođeni niz obnavljanja.

Primjer 2.1.2. *Neka niz $\{S_n : n \geqslant 0\}$ predstavlja vremena u kojima žarulja izgori te se odmah zamijeni s novom žaruljom. Ukoliko je u trenutku $t = 0$ žarulja bila nova, tada je niz obnavljanja $\{S_n : n \geqslant 0\}$ čist, a ako u trenutku $t = 0$ žarulja nije bila nova, tj. već je gorjela neko vrijeme, tada je je niz obnavljanja odgođen.*

Primjer 2.1.3. *Promatrajmo jednosmjernu cestu na kojoj sva vozila voze konstantnom brzinom. Vremena $\{S_n : n \geqslant 0\}$ mogu predstavljati trenutke u kojima vozila prođu određenu točku na cesti, ili pak mogu predstavljati trenutnu poziciju vozila na cesti. U oba slučaja, oblik međudolazne funkcije distribucije ovisi o gužvi na cesti. U slučaju manjeg broja vozila distribucija F može biti eksponencijalna, dok bi u slučaju veće gužve na cesti, vozila bila podjednako odmaknuta, tj. distribucija F je koncentrirana u jednoj točki.*

Sljedeći pojam koji uvodimo je proces obnavljanja koji broji koliko se obnavljanja dogodilo do određenog trenutka.

Definicija 2.1.4. *Neka je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ niz obnavljanja. Proces obnavljanja je slučajni proces $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ definiran sa*

$$N(t) := \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n).$$

Uočimo $E(N(t))$ je očekivani broj obnavljanja do trenutka t. Funkciju $t \mapsto E(N(t))$ zovemo funkcijom obnavljanja. Primijetimo da ako je $S_0 = 0$ tada se trenutak $t = 0$ broji kao vrijeme obnavljanja, te je u tom slučaju funkcija obnavljanja dana izrazom

$$U(t) := E(N(t)) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leqslant t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t).$$

U drugom slučaju, tj. kada je riječ o odgođenom nizu obnavljanja, te Y_0 ima funkciju distribucije G, funkcija obnavljanja je dana sa

$$V(t) := E(N(t)) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leqslant t) = \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{(n-1)*}(t) = G * U(t).$$

Sada ćemo navesti neke relacije između $\{S_n\}$ i $\{N(t)\}$ koje će biti korisne u nastavku:

$$\{N(t) \leqslant n\} = \{S_n > t\}, \qquad n \geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$S_{N(t)-1} \leqslant t < S_{N(t)} \quad \text{na} \quad \{N(t) \geqslant 1\}, \tag{2.2}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_{n-1} \leqslant t < S_n\}, \qquad n \geqslant 1. \tag{2.3}$$

Sada ćemo pokazati zašto ne može doći do beskonačno mnogo obnavljanja u konačno mnogo vremena, tj. u intervalu $[0, t]$ za bilo koji $t \geqslant 0$. Naime, $N(t)$ možemo zapisati u sljedećem obliku

$$N(t) = \begin{cases} \max\{n \geqslant 1 : S_{n-1} \leqslant t\} & , S_0 \leqslant t \\ 0 & , S_0 > t. \end{cases} \tag{2.4}$$

Iz jakog zakona velikih brojeva slijedi da, s vjerojatnošću 1,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{Y_0}{n} + \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} \to 0 + E(Y_1) = E(Y_1) =: \mu \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Budući da je $\mu > 0$ znači da S_n teži u beskonačnost kada i n teži u beskonačnost. Zato, S_n može biti manji ili jednak t za najviše konačno mnogo vrijednosti od n, te po (2.4) , $N(t)$ mora biti konačan.

Teorem 2.1.5. *Neka je F međudolazna funkcija distribucije čistog niza obnavljanja,* $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ *pripadni proces obnavljanja te U pripadna funkcija obnavljanja. Za svaki* $t \geqslant 0$ *vrijedi,*

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n F^{n*}(t) < \infty$ *za* $\gamma < \frac{1}{F(0)}$.

(2) Funkcija izvodnica momenata od $N(t)$ *postoji na intervalu* $(-\infty, \ln(\gamma))$ *za neki* γ *takav da vrijedi* $1 < \gamma < 1/F(0)$*, za svaki* $t \geqslant 0$*, pa su svi momenti od* $N(t)$ *konačni. Specijalno,* $U(t) < \infty$*.*

Dokaz. (1) Primijetimo da je

$$\lim_{\lambda \to \infty} \hat{F}(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(F(0) + \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} dF(x) \right) = F(0).$$

Fiksirajmo $\gamma < \frac{1}{F(0)}$. Iz toga slijedi da je moguće izabrati dovoljno velik λ takav da $\hat{F}(\lambda)\gamma < 1$, te za $Y_0 = 0, S_n = Y_1 + ... + Y_n$ imamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n F^{n*}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P(S_n \leqslant t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P(e^{-\lambda S_n} \geqslant e^{-\lambda t}) \\ \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n E(e^{-\lambda S_n}) e^{\lambda t} &= e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma \hat{F}(\lambda))^n = e^{\lambda t} \frac{1}{1 - \gamma \hat{F}(\lambda)} < \infty, \end{aligned} \tag{2.5}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti iskoristili Markovljevu nejednakost, a u zadnjem koraku $\gamma \hat{F}(\lambda) < 1$.

(2) Pokažimo prvo da za pozitivnu slučajnu varijablu Z funkcija izvodnica momenata postoji na nekom intervalu $(0, \theta_0)$ ako i samo ako je rep funkcije distribucije od Z eksponencijalno ograničen, tj. postoje $K > 0, c > 0$ takvi da za sve $x > 0$, vrijedi

$$P(Z > x) \leqslant Ke^{-cx}. \tag{2.6}$$

Pretpostavimo prvo da funkcija izvodnica momenata postoji na intervalu $(0, \theta_0)$. Tada za $\theta < \theta_0$ koristeći Markovljevu nejednakost dobivamo

$$P(Z > x) = P(e^{\theta Z} > e^{\theta x}) \leqslant E(e^{\theta Z})e^{-\theta x}, \quad \text{za svaki } x > 0,$$

tj. rep funkcije distribucije slučajne varijable Z je eksponencijalno ograničen.
Obratno, pretpostavimo da je rep funkcije distribucije slučajne varijable Z eksponencijalno ograničen kao u (2.6). Tada, za $\theta < c$, vrijedi

$$\begin{aligned} E(e^{\theta Z} - 1) &= E\left(\int_0^Z \theta e^{\theta x} dx\right) = E\left(\int_0^\infty \theta e^{\theta x} 1_{[x<Z]} dx\right) = \int_0^\infty \theta e^{\theta x} P(Z > x) dx \\ &\leqslant \theta K \int_0^\infty e^{\theta x} e^{-cx} dx = \theta K \frac{1}{c - \theta} < \infty, \end{aligned} \tag{2.7}$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti iskoristili Fubinijev teorem. Iz toga slijedi $E(e^{\theta Z}) < \infty$. Slijedi, da bismo dokazali (2) dovoljno je pokazati da je $P(N(t) > n)$ eksponencijalno ograničeno. Uzmimo γ takav da $1 < \gamma < \frac{1}{F(0)}$, te iz prvog dijela teorema, koristeći nužan uvjet konvergencije slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n F^{n*}(t) = 0, \tag{2.8}$$

tj. postoji n_0 takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$F^{n*}(t) \leqslant \gamma^{-n} = e^{-\ln(\gamma)n}.$$

Koristeći (2.1), pri čemu je $Y_0 = 0$, imamo da za $n \geqslant n_0$,

$$P(N(t) > n) = P(S_n \leqslant t) = F^{n*}(t) \leqslant e^{-\ln(\gamma)n}.$$

S odgovarajućim izborom konstante K, ovo se može proširiti za sve n do

$$P(N(t) > n) \leqslant Ke^{-cn}.$$

$\square$

Prethodni teorem kaže da je $U(t)$ konačno za svaki $t \geqslant 0$. U sljedećem primjeru ćemo izračunati funkciju U eksplicitno.

Primjer 2.1.6. *Neka je F funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable X. Funkcija gustoće slučajne varijable X tada je $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{[0,\infty)}(x)$. Iz Primjera 1.2.3 slijedi da je za svaki $n \geqslant 1$,*

$$dF^{n*}(x) = \alpha(\alpha x)^{n-1} \frac{e^{-\alpha x}}{(n-1)!} 1_{[0,\infty)}(x) dx.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \alpha(\alpha s)^{n-1} \frac{e^{-\alpha s}}{(n-1)!} ds = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\alpha s)^{n-1} \frac{e^{-\alpha s}}{(n-1)!} ds \\ &= \int_0^x \alpha ds = \alpha x.\end{aligned}$$

Iz čega slijedi

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) = F^{0*}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) = 1 + \alpha x.$$

Dokazat ćemo jaki zakon velikih brojeva za proces obnavljanja, ali prvo ćemo iskazati jednu pomoćnu lemu (za dokaz leme vidi [4, str. 93]).

Lema 2.1.7. *Neka je $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ proces obnavljanja. Vrijedi $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ gotovo sigurno.*

Teorem 2.1.8. *Neka je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ niz obnavljanja te $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ pripadni proces obnavljanja. Neka je $\mu = E(Y_1) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ očekivano vrijeme između obnavljanja. Ako je $P(Y_0 < \infty) = 1$, tada*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \textit{gotovo sigurno.}$$

Dokaz. Iz jakog zakona velikih brojeva slijedi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{Y_0}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \right) = 0 + \mu = \mu \text{ gotovo sigurno.}$$

Budući da je po Lemi 2.1.7 $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ gotovo sigurno, slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu \quad \text{gotovo sigurno.} \tag{2.9}$$

Po (2.2) vrijedi $S_{N(t)-1} \leqslant t < S_{N(t)}$ na $\{N(t) \geqslant 1\}$, pa je

$$\frac{S_{N(t)-1}}{N(t)-1} \frac{N(t)-1}{N(t)} \leqslant \frac{t}{N(t)} \leqslant \frac{S_{N(t)}}{N(t)}.$$

Pustimo $t \to \infty$ i iskoristimo (2.9). Slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mu \quad \text{gotovo sigurno,}$$

odnosno

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{gotovo sigurno.}$$

$\square$

Sada ćemo navesti neke primjere u kojima ćemo primijeniti jaki zakon velikih brojeva za proces obnavljanja.

Primjer 2.1.9. *Neka imamo radio koji radi s jednom baterijom, te pretpostavimo da čim se trenutna baterija isprazni zamijenimo je novom. Neka je vijek trajanja baterije (u satima) uniformno distribuiran na intervalu* $(30, 60)$. *Zanima nas koliko često ćemo morati mijenjati bateriju. Označimo sa* $N(t)$ *broj baterija koje su se ispraznile do trenutka* t. *Po Teoremu 2.1.8,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{45},$$

stoga ćemo u dugom roku u prosjeku morati mijenjati bateriju svakih 45 sati.

Primjer 2.1.10. *Neka su sve pretpostavke iste kao i u Primjeru 2.1.9 osim te da ne mijenjamo baterije čim se one isprazne, već da svaki put moramo ići kupiti novu bateriju. Pretpostavimo da je vrijeme potrebno za kupovinu nove baterije uniformno distribuirano na* $(0, 1)$. *Tada je očekivano vrijeme između obnavljanja dano s* $\mu = E(U_1) + E(U_2)$. *Stoga,* $\mu = 45 + 0.5 = 45.5$, *tj. dugoročno gledano mijenjat ćemo baterije u prosjeku svakih 45.5 sati.*

Sada ćemo dokazati elementarni teorem obnavljanja koji kaže da se prosječni očekivani broj obnavljanja ponaša asimptotski kao $\frac{1}{\mu}$. Elementarni teorem obnavljanja također slijedi iz Blackwellovog teorema obnavljanja što ćemo kasnije pokazati.

Teorem 2.1.11. *Neka je* $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ *niz nezavisnih i nenegativnih slučajnih varijabli takvih da su* $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ *jednako distribuirane, te neka je* $\{S_n : n \geqslant 0\}$ *pripadni niz obnavljanja i neka su* V *i* U *pripadne funkcije obnavljanja. Neka je* $\mu = E(Y_1) < \infty$. *Ako je* $Y_0 < \infty$ *gotovo sigurno, tada vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Dokaz. Koristeći Fatouovu lemu i Teorem 2.1.8 slijedi da je

$$\frac{1}{\mu} = E\left(\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right) \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t}. \tag{2.10}$$

Definirajmo

$$Y_0^* = 0,\ Y_i^* = \min\{Y_i, m\}, \quad \text{za} \quad i \geqslant 1,$$

$$S_0^* = 0,\ S_n^* = Y_1^* + ... + Y_n^*, \quad \text{za} \quad n \geqslant 1,$$

$$N^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n^*),\ V^*(t) = E(N^*(t)), \quad \text{za} \quad t \geqslant 0.$$

Tada je $S_n \geqslant S_n^*$ i $N^*(t) \geqslant N(t)$. Stoga, $V^*(t) = E(N^*(t)) \geqslant E(N(t)) = V(t)$.

Iz Waldove jednakosti (Propozicija 1.0.3) slijedi $E\left(S^*_{N^*(t)}\right) = E(N^*(t))E\left(Y_1^*\right) + E\left(Y_0^*\right) = V^*(t)E\left(Y_1^*\right)$. Stoga

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{V^*(t)}{t} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{E\left(S^*_{N^*(t)}\right)}{tE\left(Y_1^*\right)} \\
&= \frac{1}{E\left(Y_1^*\right)} \limsup_{t\to\infty} \frac{E\left(S^*_{N^*(t)-1} + Y^*_{N^*(t)}\right)}{t} \\
&\leqslant \frac{1}{E\left(Y_1^*\right)} \limsup_{t\to\infty} \frac{t+m}{t} \\
&= \frac{1}{E(Y_1^*)} \\
&= \frac{1}{E(\min\{Y_1, m\})}.
\end{aligned}$$

Pustimo $m \to \infty$, pa iz Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $E(\min\{Y_1, m\}) \to E(Y_1) = \mu$. Dobivamo

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\mu},$$

tj. zajedno s (2.10) dobivamo

$$\frac{1}{\mu} \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\mu}.$$

Slijedi tvrdnja teorema. □

2.2 Jednadžbe obnavljanja

Jednadžba obnavljanja je konvolucijska jednadžba oblika

$$Z = z + F * Z,$$

odnosno

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)dF(y). \tag{2.11}$$

Neka su sve funkcije definirane na $[0,\infty)$, a za $t < 0$ neka vrijedi $z(t) = Z(t) = F(t) = 0$. Funkcija Z je nepoznata, za funkciju z se pretpostavlja da je poznata, a F je funkcija distribucije na $[0,\infty)$ takva da je $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$. Ako vrijedi $F(\infty) = 1$ kažemo da je jednadžba prava.

Primjer 2.2.1. *Promotrimo funkciju obnavljanja U. Slijedi*

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(t) = F^{0*}(t) + F * U(t),$$

odnosno dobivamo jednadžbu obnavljanja gdje je $Z = U$ i $z = F^{0*}$.

Zanima nas postojanje rješenja jednadžbe obnavljanja. Neka je $m = F(\infty) < \infty$, $F(0-) = 0$ i $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Najčešće je F vjerojatnosna funkcija distribucije odnosno $m = 1$. Pretpostavimo da je $F(0) < 1$. Tada

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n (m^{-1}F)^{n*}(t), \quad \text{za svaki } t > 0.$$

Budući da je $m(m^{-1}F)(0) = F(0) < 1$ iz Teorema 2.1.5 slijedi $U(t) < \infty$, za svaki $t > 0$. Sada ćemo dokazati teorem koji uz određene uvjete daje rješenje jednadžbe obnavljanja (2.11).

Teorem 2.2.2. *Neka je $z(t) = 0$ za $t < 0$, te neka je z lokalno ograničena funkcija. Neka je F funkcija distribucije takva da $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$ i $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$ te $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$.*

(1) Lokalno ograničeno rješenje jednadžbe obnavljanja (2.11) *je dano izrazom*

$$U * z(t) = \int_0^t z(t-u)dU(u).$$

(2) Ne postoji ni jedno drugo lokalno ograničeno rješenje koje iščezava na $(-\infty, 0)$.

Dokaz. (1) Prvo ćemo provjeriti da je $U * z$ lokalno ograničeno. Za bilo koji $T > 0$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} U * z(t) = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_0^t z(t-u)dU(u) \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} z(t) \int_0^t dU(u)$$
$$\leqslant \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} z(t)\right) U(T) < \infty,$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti iskoristili lokalnu ograničenost funkcije z. Slijedi, $U * z$ je lokalno ograničeno.
Da bismo provjerili da je $U * z$ rješenje, primijetimo

$$F * (U * z) = (F * U) * z = (U - F^{0*}) * z = U * z - z,$$

gdje smo redom iskoristili asocijativnost konvolucije, Primjer 2.2.1 te $F^{0*} = 1$. Stoga je

$$U * z = z + F * (U * z),$$

odnosno $U * z$ je rješenje jednadžbe obnavljanja (2.11).

(2) Neka su Z_1 i Z_2 dva lokalno ograničena rješenja jednadžbe (2.11) koja iščezavaju na $(-\infty, 0)$ takva da

$$Z_i = z + F * Z_i, \quad i = 1, 2.$$

Neka je $H = Z_1 - Z_2$. Primijetimo da je H također lokalno ograničeno. Nadalje,

$$H = Z_1 - Z_2 = (z + F * Z_1) - (z + F * Z_2) = F * Z_1 - F * Z_2 = F * (Z_1 - Z_2) = F * H.$$

Induktivno, slijedi da je za svaki $n \geqslant 1$

$$H = F^{n*} * H.$$

Slijedi da za bilo koji $T > 0$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |H(t)| = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\int_0^t (H(t-y))dF^{n*}(y)| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_0^t |H(t-y)|dF^{n*}(y)$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |H(t)| \int_0^t dF^{n*}(y)$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |H(t)| F^{n*}(T) \to 0$$

kada $n \to \infty$ jer je H lokalno ograničena i jer iz $U(T) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(T) < \infty$ slijedi $\lim_{n\to\infty} F^{n*}(T) = 0$. Slijedi $H = 0$ odnosno $Z_1 = Z_2$. □

Primjer 2.2.3. *Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla i $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija. Iz Primjera 2.1.6 znamo da je $U(t) = 1 + \alpha t$. Stoga*

$$U * z(t) = z(t) + \alpha \int_0^t z(t-y)dy = z(t) + \alpha \int_0^t z(u)du.$$

Sada ćemo definirati vremena obnavljanja unaprijed i unatrag.

Definicija 2.2.4. *Neka je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ niz obnavljanja, te $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ pripadni proces obnavljanja. Definirajmo slučajne procese $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ i $\{A(t) : t \geqslant S_0\}$ sa*

$$\begin{aligned} B(t) &:= S_{N(t)} - t,\ t \geqslant 0, \\ A(t) &:= t - S_{N(t)-1},\ t \geqslant S_0. \end{aligned}$$

Slučajnu varijablu $B(t)$ zovemo vrijeme obnavljanja unaprijed, a slučajnu varijablu $A(t)$ vrijeme obnavljanja unatrag.

Vrijeme obnavljanja unaprijed predstavlja vrijeme od trenutka t do idućeg obnavljanja, a vrijeme obnavljanja unatrag predstavlja vrijeme proteklo od zadnjeg obnavljanja prije trenutka t. Da bismo izračunali funkcije distribucije slučajnih varijabli $A(t)$ i $B(t)$ prvo ćemo zapisati pripadne jednadžbe obnavljanja. Pretpostavimo da je niz obnavljanja čist. Fiksirajmo $x > 0$,

$$P(A(t) \leqslant x) = P(A(t) \leqslant x, Y_1 \leqslant t) + P(A(t) \leqslant x, Y_1 > t).$$

Na događaju $\{Y_1 > t\}$ je $A(t) = t$, pa

$$P(A(t) \leqslant x, Y_1 > t) = P(t \leqslant x, Y_1 > t) = P(Y_1 > t) \cdot 1_{[0,x]}(t) = (1 - F(t)) \cdot 1_{[0,x]}(t).$$

Budući da je po (2.1) $P(Y_1 \leqslant t) = P(S_1 \leqslant t) = P(N(t) > 1) = P(N(t) \geqslant 2)$, slijedi

$$
\begin{aligned}
P(A(t) \leqslant x, Y_1 \leqslant t) = P(t - S_{N(t)-1} \leqslant x, N(t) \geqslant 2) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(t - S_{N(t)-1} \leqslant x, N(t) = n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(t - S_{n-1} \leqslant x, S_{n-1} \leqslant t < S_n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(t - (y + \sum_{i=2}^{n-1} Y_i) \leqslant x, y + \sum_{i=2}^{n-1} Y_i \leqslant t < y + \sum_{i=2}^{n} Y_i) dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(t - y - S_{n-2} \leqslant x, S_{n-2} \leqslant t - y < S_{n-1}) dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(t - y - S_{N(t-y)-1} \leqslant x, N(t-y) = n - 1) dF(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(A(t-y) \leqslant x, N(t-y) = n) dF(y) \\
&= \int_0^t P(A(t-y) \leqslant x) dF(y).
\end{aligned}
$$

Dobili smo jednadžbu obnavljanja

$$P(A(t) \leqslant x) = (1 - F(t)) \cdot 1_{[0,x]}(t) + \int_0^t P(A(t-y) \leqslant x) dF(y), \tag{2.12}$$

s pripadnim funkcijama $z(t) = (1 - F(t)) \cdot 1_{[0,x]}(t)$ i $Z(t) = P(A(t) \leqslant x)$.
Na sličan način se za proces $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ pokaže da vrijedi

$$P(B(t) > x) = 1 - F(t + x) + \int_0^t P(B(t-y) > x) dF(y).$$

Koristeći Teorem 2.2.2 slijedi da za funkciju distribucije slučajne varijable $A(t)$ vrijedi

$$P(A(t) \leqslant x) = U * ((1 - F(\cdot))1_{[0,x]}(\cdot))(t), \tag{2.13}$$

a za rep funkcije distribucije slučajne varijable $B(t)$ vrijedi

$$P(B(t) > x) = U * (1 - F(\cdot + x))(t) = \int_0^t (1 - F(t + x - y)) dU(y). \tag{2.14}$$

Primjer 2.2.5. *Neka je* $F(x) = (1 - e^{-\alpha x}) \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$*. Koristeći* $U(y) = 1 + \alpha y$ *(Primjer 2.1.6) slijedi da za* $x \geqslant 0$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}\int_0^t (1 - F(t + x - y))dU(y) &= 1 - F(t + x) + \alpha \int_0^t (1 - F(t + x - y))dy \\ &= e^{-\alpha(t+x)} + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t+x-y)}dy \\ &= e^{-\alpha(t+x)} + e^{-\alpha x} \int_0^t \alpha e^{-\alpha s}ds \\ &= e^{-\alpha(t+x)} + e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha t}) \\ &= e^{-\alpha x}.\end{aligned}$$

Stoga $P(B(t) > x) = e^{-\alpha x}$*, za* $x \geqslant 0$*, odnosno slučajna varijabla* $B(t)$ *ima eksponencijalnu funkciju distribucije za svaki* t*.*

Slično se pokaže da vrijedi i

$$P(A(t) \leqslant x) = \begin{cases} 1, & t \leqslant x \\ 1 - e^{-\alpha x}, & t > x. \end{cases}$$

Dva glavna asimptotska rezultata (koja su ujedno i ekvivalentna) su Blackwellov teorem obnavljanja i ključni teorem obnavljanja kojeg je formulirao Walter L. Smith 1954. godine. Blackwellov teorem obnavljanja kaže da ako je funkcija distribucije slučajne varijable Y_0 vjerojatnosna funkcija distribucije, tada

$$\lim_{t\to\infty} V(t, t + a] = \frac{a}{\mu},$$

za $a > 0$.

Neka je $Z = U * z$ rješenje jednadžbe obnavljanja $Z = z + F * Z$ pri čemu je F vjerojatnosna funkcija distribucije. Ako funkcija z zadovoljava pretpostavku direktne Riemann integrabilnosti tada ključni teorem obnavljanja kaže da vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} U * z(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty z(s)ds.$$

Uvjet direktne Riemann integrabilnosti je zadovoljen na primjer za funkcije z koje su opadajuće i integrabilne. Ovo ukazuje na metodu obnavljanja, tj. ako želimo izračunati $\lim_{t\to\infty} Z(t)$ prvo zapišemo jednadžbu obnavljanja za funkciju Z, riješimo je i zatim primijenimo ključni teorem obnavljanja. Na ovaj način u sljedećem primjeru ćemo izračunati asimptotske distribucije slučajnih varijabli $A(t)$ i $B(t)$.

Primjer 2.2.6. *Znamo da za vrijeme obnavljanja unaprijed čistog niza obnavljanja vrijedi*

$$P(B(t) > x) = U * (1 - F(\cdot + x))(t),$$

pri čemu je $z(s) = 1 - F(s + x)$. *Stoga, za svaki* $x > 0$ *iz ključnog teorema obnavljanja slijedi*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(u)du \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1 - F(u + x))du \\ &= \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1 - F(s))ds =: 1 - F_0(x).\end{aligned}$$

Slično, za vrijeme obnavljanja unatrag znamo da vrijedi

$$P(A(t) \leqslant x) = U * ((1 - F(\cdot))1_{[0,x]}(\cdot))(t),$$

pri čemu je $z(s) = (1 - F(s)) \cdot 1_{[0,x]}(s)$. *Puštajući* $t \to \infty$ *i koristeći ključni teorem obnavljanja slijedi*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leqslant x) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)ds \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1 - F(s)) \cdot 1_{[0,x]}(s)ds \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^x (1 - F(s))ds = F_0(x).\end{aligned}$$

Stoga se granične distribucije slučajnih varijabli $A(t)$ *i* $B(t)$ *podudaraju.*

Napomena 2.2.7. *Primijetimo da je Laplaceova transformacija od* F_0 *dana s*

$$\hat{F}_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_0(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{1 - F(x)}{\mu} dx = \frac{1 - \hat{F}(\lambda)}{\lambda\mu}.$$

U zadnjoj jednakosti smo koristili (1.2).

Propozicija 2.2.8. *Za odgođeni niz obnavljanja, funkcija obnavljanja* $V(t)$ *je linearna, oblika* $V(t) = t/\mu$, *ako i samo ako je funkcija distribucije* G *slučajne varijable* Y_0 *jednaka* F_0.

Dokaz. Izračunajmo Laplaceovu transformaciju od $W(t) = t/\mu$,

$$\widehat{W}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dW(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{dt}{\mu} = \frac{1}{\lambda\mu}. \tag{2.15}$$

Pretpostavimo prvo da je funkcija distribucije G jednaka F_0. Znamo da je $V = G * U = G * \sum_{n=0}^\infty F^{n*}$. Slijedi

$$\begin{aligned}\hat{V}(\lambda) &= (\widehat{G * U})(\lambda) = \hat{G}(\lambda)\hat{U}(\lambda) = \hat{F}_0(\lambda)\hat{U}(\lambda) = \hat{F}_0(\lambda) \cdot \sum_{n=0}^\infty (\widehat{F^{n*}})(\lambda) \\ &= \hat{F}_0(\lambda) \cdot \sum_{n=0}^\infty (\hat{F}(\lambda))^n = \frac{\hat{F}_0(\lambda)}{1 - \hat{F}(\lambda)} = \frac{1}{\lambda\mu},\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz Napomene 2.2.7. Iz (2.15) slijedi da je dobiveno upravo Laplaceova transformacija funkcije $t \to t/\mu$, odnosno slijedi $V(t) = t/\mu$.
Obratno, ako je $V(t) = t/\mu$ tada

$$\frac{1}{\lambda\mu} = \hat{V}(\lambda) = \hat{G}(\lambda)\hat{U}(\lambda) = \frac{\hat{G}(\lambda)}{1 - \hat{F}(\lambda)},$$

iz čega korištenjem Napomene 2.2.7 slijedi

$$\hat{G}(\lambda) = \frac{1 - \hat{F}(\lambda)}{\lambda\mu} = \hat{F}_0(\lambda),$$

tj. $G = F_0$. □

2.3 Stacionarni niz obnavljanja

Stacionarni niz obnavljanja je odgođeni niz obnavljanja gdje je funkcija distribucije slučajne varijable Y_0 dana s $F_0(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(u))du$ pri čemu je $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$.

Propozicija 2.3.1. *Za stacionarni niz obnavljanja, pripadni proces vremena obnavljanja unaprijed $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ je homogen Markovljev proces, tj. za svaki $t > 0$, $s > 0$ i $x > 0$ vrijedi*

$$P(B(t+s) \leqslant x \mid B(u), u \leqslant t) = P(B(t+s) \leqslant x \mid B(t)) = P(B(s) \leqslant x \mid B(0)). \tag{2.16}$$

Za dokaz vidi [2, str. 227].

Teorem 2.3.2. *Neka je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ stacionarni niz obnavljanja. Tada je pripadni slučajni proces vremena obnavljanja unaprijed $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ striktno stacionaran, tj. za svaki $k > 0$, $h > 0$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_k$ vrijedi*

$$P(B(t_i) \leqslant x_i, i = 1, ..., k) = P(B(t_i + h) \leqslant x_i, i = 1, ..., k).$$

Dokaz.

$$P(B(t) > x) = P(B(t) > x, N(t) = 0) + P(B(t) > x, N(t) > 0)$$

Za prvi sumand vrijedi

$$P(B(t) > x, N(t) = 0) = P(S_0 - t > x) = P(Y_0 > t + x) = 1 - F_0(t + x),$$

a za drugi sumand se na analogan način kao i u (2.12) pokaže da vrijedi

$$P(B(t) > x, N(t) > 0) = \int_0^t P(B(t - y) > x \mid B(0) = 0) dF_0(y).$$

Primjenom (2.14) slijedi

$$\begin{aligned}
P(B(t) > x) &= 1 - F_0(t + x) + \int_0^t P(B(t - y) > x \mid B(0) = 0) dF_0(y) \\
&= 1 - F_0(t + x) + \int_0^t U * (1 - F(\cdot + x))(t - y) dF_0(y) \\
&= 1 - F_0(t + x) + F_0 * U * (1 - F(\cdot + x))(t) \\
&= 1 - F_0(t + x) + V * (1 - F(\cdot + x))(t).
\end{aligned}$$

Pošto se radi o odgođenom nizu obnavljanja i funkcija distribucije slučajne varijable Y_0 je F_0, iz Propozicije 2.2.8 slijedi $V(t) = t/\mu$, odnosno $dV(t) = dt/\mu$. Slijedi, za svaki $t > 0$

$$\begin{aligned}
P(B(t) > x) &= 1 - F_0(t + x) + \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(t + x - y)) dy \\
&= \frac{1}{\mu} \int_{t+x}^{\infty} (1 - F(y)) dy + \frac{1}{\mu} \int_x^{t+x} (1 - F(u)) du \\
&= \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} (1 - F(y)) dy = 1 - F_0(x) = P(Y_0 > x) = P(B(0) > x).
\end{aligned}$$

Dobili smo $B(t) \sim B(0)$, za svaki $t > 0$. Sada ćemo pokazati da je proces $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ striktno stacionaran,

$$\begin{aligned}
P(B(t_i + h) \leqslant x_i, i \leqslant k) &= \int_{\mathbb{R}^+} P(B(t_i + h) \leqslant x_i, i \leqslant k \mid B(h) = x) dF_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} P(B(t_i) \leqslant x_i, i \leqslant k \mid B(0) = x) dF_0(x) \\
&= P(B(t_i) \leqslant x_i, i \leqslant k),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili Propoziciju 2.3.1. $\square$

Poglavlje 3

Direktna Riemann integrabilnost

U ovom poglavlju ćemo objasniti što se podrazumijeva pod pojmom direktne Riemann integrabilnosti te ćemo iskazati i dokazati neke tvrdnje kojima se može provjeriti kada je neka funkcija direktno Riemann integrabilna. Direktna Riemann integrabilnost nam je zanimljiva da bismo u idućem poglavlju pokazali ekvivalentnost između Blackwellovog teorema obnavljanja i ključnog teorema obnavljanja.

Pretpostavimo da je funkcija z takva da je $z(t) \geqslant 0$ za $t \geqslant 0$ i $z(t) = 0$ za $t < 0$. Definirajmo za $k \geqslant 1$ sljedeće

$$m_k(h) := \inf_{(k-1)h \leqslant t < kh} z(t),$$

$$M_k(h) := \sup_{(k-1)h \leqslant t < kh} z(t),$$

$$s(h) := \sum_{k=1}^{\infty} h m_k(h),$$

$$S(h) := \sum_{k=1}^{\infty} h M_k(h),$$

pri čemu je $h > 0$.

Definicija 3.0.1. *Funkcija* $z : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *je direktno Riemann integrabilna ako vrijedi* $S(h) < \infty$ *za bar jedan* $h > 0$ *(a tada i za sve* $h > 0$*) i*

$$\lim_{h \to 0} (S(h) - s(h)) = 0.$$

U slučaju da funkcija z poprima i negativne vrijednosti kažemo da je ona direktno Riemann integrabilna, ako su $z^+ = max\{z, 0\}$ i $z^- = max\{-z, 0\}$ direktno Riemann integrabilne funkcije. Nadalje pretpostavljamo $z : [0, \infty) \to [0, \infty)$.

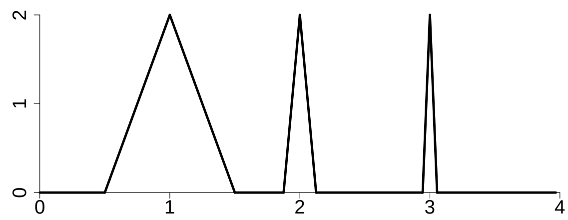
Sada ćemo navesti jedan primjer funkcije koja je Riemann integrabilna, ali nije direktno Riemann integrabilna.

Primjer 3.0.2. *Neka je z funkcija koja se sastoji od takvih trokuta da je n-ti trokut centriran u točki n i ima bazu duljine $a_n = 1/n^2$ i visine je $v_n = 2$ (vidi Sliku 3.1). Pripadne duljine baza a_n su takve da se trokuti ne preklapaju. Također, duljine baza i visine trokuta su takve da vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$. Pošto je $z \geqslant 0$, $\int_0^{\infty} z(s)ds$ predstavlja površinu između grafa funkcije z i osi apcisa. Vrijedi*

$$\int_0^{\infty} z(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

odnosno funkcija z je Riemann integrabilna na $[0, \infty)$. *No funkcija z nije direktno Riemann integrabilna jer*

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{n-1 \leqslant t < n} z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty.$$



Slika 3.1: Funkcija z iz Primjera 3.0.2 na intervalu $[0, 4]$.

Navedimo neke propozicije koje pod određenim uvjetima daju vezu između Riemann integrabilnosti i direktne Riemann integrabilnosti.

Propozicija 3.0.3. *Ako funkcija ima kompaktni nosač, tada je Riemann integrabilnost funkcije ekvivalentna direktnoj Riemann integrabilnosti.*

Propozicija 3.0.4. *Neka je funkcija z direktno Riemann integrabilna, tada je i Riemann integrabilna na intervalu* $[0, \infty)$ *te vrijedi*

$$\lim_{h\searrow 0} S(h) = \lim_{h\searrow 0} s(h) = (R)\int_0^\infty z(s)ds.$$

Dokaz. Za dani $\epsilon > 0$, zbog $S(1) < \infty$, postoji n_0 takav da $\sum_{n>n_0} M_n(1) < \epsilon$. Slijedi, da za svaki $h < 1$ vrijedi relacija

$$S(h) - \sum_{k:kh\leqslant n_0} hM_k(h) = \sum_{k:kh>n_0} hM_k(h) \leqslant \sum_{k:k>n_0} M_k(1) < \epsilon. \tag{3.1}$$

Nadalje, jer je funkcija z direktno Riemann integrabilna postoji sljedeći limes

$$\lim_{h\searrow 0} S(h) =: \sigma,$$

te stoga postoji $h_0 > 0$ takav da za sve $h < h_0$ vrijedi

$$|\sigma - S(h)| < \epsilon. \tag{3.2}$$

Koristeći direktnu Riemann integrabilnost funkcije dobivamo

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\searrow 0}(S(h) - s(h)) &= \lim_{h\searrow 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} hM_k(h) - \sum_{k=1}^{\infty} hm_k(h)\right) \\ = \lim_{h\searrow 0}\sum_{k=1}^{\infty} h(M_k(h) - m_k(h)) &\geqslant \lim_{h\searrow 0}\sum_{k:kh\leqslant a} h(M_k(h) - m_k(h)) \geqslant 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\lim_{h\searrow 0}\sum_{k:kh\leqslant a} h(M_k(h) - m_k(h)) = 0.$$

Slijedi Riemann integrabilnost funkcije z na intervalu $[0, a]$ za bilo koji $a > 0$.

Iz Riemann integrabilnosti na $[0, a]$ slijedi da postoji h_1 takav da za svaki $h < h_1$ vrijedi

$$|\sum_{k:kh\leqslant a} hM_k(h) - \int_0^a z(s)ds| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Iz relacija (3.1), (3.2) i (3.3) slijedi da za svaki $h < \min\{h_0, h_1, 1\}$ i $a > n_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} |\sigma - \int_0^a z(s)ds| &\leqslant |\sigma - S(h)| + |S(h) - \sum_{k:kh\leqslant a} hM_k(h)| + |\sum_{k:kh\leqslant a} hM_k(h) - \int_0^a z(s)ds| \\ &< 3\epsilon. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi
$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a z(s)ds = \sigma,$$
tj. z je Riemann integrabilna funkcija na $[0,\infty)$ i $\sigma = (R)\int_0^\infty z(s)ds$. □

Propozicija 3.0.5. *Neka je z padajuća funkcija. Tada je z direktno Riemann integrabilna funkcija ako i samo ako je Riemann integrabilna.*

Dokaz. Neka je z padajuća funkcija. Pretpostavimo prvo da je Riemann integrabilna. Slijedi
$$\infty > \int_0^\infty z(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)h}^{nh} z(s)ds \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} hm_n(h) = s(h),$$
pri čemu smo u trećem koraku iskoristili da je funkcija z padajuća. Nadalje, opet koristeći da je z padajuća funkcija za svaki N vrijedi
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} hM_n(h) - \sum_{n=1}^{N} hm_n(h) &\leqslant h\sum_{n=1}^{N}(z((n-1)h) - z(nh))\\ &= h(z(0) - z(Nh)) \stackrel{N\to\infty}{\to} h(z(0) - z(\infty)).\end{aligned}$$
Pustimo $N\to\infty$. Slijedi da je $S(h) < \infty$ ako i samo ako je $s(h) < \infty$ te vrijedi $S(h) - s(h) \leqslant h(z(0) - z(\infty))$. Budući da znamo da je $s(h) < \infty$, slijedi $S(h) < \infty$ te
$$\lim_{h\to 0}(S(h) - s(h)) = 0,$$
odnosno z je direktno Riemann integrabilna funkcija.
Obratni smjer vrijedi zbog Propozicije 3.0.4. □

Propozicija 3.0.6. *Ako je funkcija z Riemann integrabilna na intervalu $[0,a]$ za svaki $a > 0$ i $S(1) < \infty$, onda je z i direktno Riemann integrabilna funkcija.*

Dokaz. Budući da je $S(1) < \infty$ za dani $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da je $\sum_{n>n_0} M_n(1) < \epsilon$. Rastavimo $S(h) - s(h)$ na sljedeći način
$$S(h) - s(h) = h\sum_{n:nh\leqslant n_0}(M_n(h) - m_n(h)) + h\sum_{n:nh>n_0}(M_n(h) - m_n(h)).$$
Kada $h \searrow 0$ vrijedi
$$h\sum_{n:nh>n_0}(M_n(h) - m_n(h)) \leqslant h\sum_{n:nh>n_0} 2M_n(h) \leqslant 2\sum_{n>n_0} M_n(1) < 2\epsilon.$$

Također, jer je z Riemann integrabilna na $[0, n_0]$ slijedi

$$\lim_{h \searrow 0} \left(h \sum_{n: nh \leqslant n_0} (M_n(h) - m_n(h)) \right) = 0.$$

Slijedi

$$\lim_{h \searrow 0} (S(h) - s(h)) = 0,$$

tj. z je direktno Riemann integrabilna funkcija. □

Korolar 3.0.7. *Neka je z Riemann integrabilna funkcija na $[0, \infty)$ i $z \leqslant g$ pri čemu je g direktno Riemann integrabilna funkcija. Tada je i z direktno Riemann integrabilna funkcija.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije jer je z Riemann integrabilna na intervalu oblika $[0, a]$ za svaki $a > 0$ te jer vrijedi

$$S_z(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{n-1 \leqslant t < n} z(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{n-1 \leqslant t < n} g(t) = S_g(1) < \infty,$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti iskoristili direktnu Riemann integrabilnost funkcije g. □

Poglavlje 4

Ekvivalentni oblici teorema obnavljanja

U ovom poglavlju ćemo iskazati ekvivalentne oblike teorema obnavljanja, među kojima su i Blackwellov teorem obnavljanja i ključni teorem obnavljanja, te ćemo dokazati njihovu ekvivalentnost. Upravo pomoću jednog od tih ekvivalentnih oblika ćemo kasnije i dokazati Blackwellov teorem obnavljanja.

Teorem 4.0.1. *Neka je F vjerojatnosna funkcija distribucije takva da je $F(0) < 1$ i $F(0-) = 0$. Kao i ranije definirajmo*

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty, \quad F_0(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y))dy.$$

Neka je $\{S_n = Y_0 + Y_1 + ... + Y_n : n \geqslant 0\}$ niz obnavljanja takav da je F funkcija distribucije slučajnih varijabli $\{Y_n : n \geqslant 1\}$. Neka su U i V pripadne funkcije obnavljanja čistog odnosno odgođenog niza obnavljanja, te $\{B(t) : t \geqslant 0\}, \{A(t) : t \geqslant S_0\}$ pripadni procesi vremena obnavljanja unaprijed odnosno unatrag. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a) (Blackwellov teorem obnavljanja) Ako je G bilo koja vjerojatnosna funkcija distribucije slučajne varijable Y_0, tada vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} V(t, t + b] = \frac{b}{\mu}, \tag{4.1}$$

za $b > 0$.

b) (Ključni teorem obnavljanja) Neka je $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ direktno Riemann integrabilna funkcija. Tada vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} U * z(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty z(s)ds.$$

c) Za svaku vjerojatnosnu funkciju distribucije G slučajne varijable Y_0 vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x) = F_0(x),$$

za svaki $x > 0$.

d) Za svaku vjerojatnosnu funkciju distribucije G slučajne varijable Y_0 vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leqslant x) = F_0(x),$$

za svaki $x > 0$.

Dokaz. Zbog (2.1) vrijedi

$$\begin{aligned} P(B(t) \leqslant x) &= P(S_{N(t)} - t \leqslant x) = P(S_{N(t)} \leqslant x + t) = P(N(x + t) > N(t)) \\ &= P(N(t + x) - N(t) > 0) = P(N(t, t + x] \geqslant 1), \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} P(A(t + x) < x) &= P(t + x - S_{N(t+x)-1} < x) = P(S_{N(t+x)-1} > t) \\ &= P(N(t) \leqslant N(t + x) - 1) = P(N(t + x) - N(t) \geqslant 1) \\ &= P(N(t, t + x] \geqslant 1), \end{aligned}$$

tj. $P(B(t) \leqslant x) = P(A(t + x) < x)$. Iz ovoga slijedi ekvivalentnost tvrdnji c) i d).

Dokažimo sada da ključni teorem obnavljanja povlači tvrdnju d). Po (2.13) znamo da za čisti niz obnavljanja vrijedi

$$P(A(t) \leqslant x) = U * ((1 - F(\cdot))1_{[0,x]}(\cdot))(t) = U * z(t) = Z(t),$$

pri čemu je $z(t) = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t)$. Budući da funkcija z ima kompaktni nosač te je Riemann integrabilna iz Propozicije 3.0.3 slijedi da je ona i direktno Riemann integrabilna. Primjenom ključnog teorema obnavljanja slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} U * z(t) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)ds = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1 - F(s))1_{[0,x]}(s)ds \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^x (1 - F(s))ds = F_0(x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Neka je $x > 0$. Budući da je niz obnavljanja odgođen s funkcijom distribucije G slučajne varijable Y_0, slijedi

$$\begin{aligned}P(A(t) \leqslant x) &= P(A(t) \leqslant x, S_0 > t) + P(A(t) \leqslant x, S_0 \leqslant t)\\ &= P(A(t) \leqslant x, S_0 > t) + \int_0^t Z(t-y)dG(y),\end{aligned}$$

gdje se zadnja jednakost dobije na analogan način kao i (2.12). Primijetimo

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leqslant x, S_0 > t) \leqslant \lim_{t\to\infty} P(S_0 > t) = \lim_{t\to\infty} P(Y_0 > t) = \lim_{t\to\infty}(1 - G(t)) = 0.$$

Definirajmo funkciju $f_t : (0, \infty) \to [0, 1]$ sa

$$f_t(y) := Z(t-y)1_{[0,t]}(y).$$

Iz definicije slijedi $f_t(y) \leqslant 1$ za svaki $t > 0$, $y > 0$. Budući da iz (4.2) vrijedi $\lim_{t\to\infty} Z(t) = F_0(x)$ slijedi

$$\lim_{t\to\infty} f_t(y) = \lim_{t\to\infty}(Z(t-y)1_{[0,t]}(y)) = F_0(x),$$

za svaki $y > 0$. Stoga, iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leqslant x) &= \lim_{t\to\infty}\left(P(A(t) \leqslant x, S_0 > t) + \int_0^t Z(t-y)dG(y)\right) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t Z(t-y)dG(y)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty f_t(y)dG(y) = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} f_t(y)dG(y) = \int_0^\infty F_0(x)dG(y) = F_0(x).\end{aligned}$$

Sada ćemo dokazati da c) povlači Blackwellov teorem obnavljanja. Definirajmo za $x > 0$

$$G_t(x) := P(B(t) \leqslant x).$$

Za svaki $x > 0$ vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} G_t(x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x) = F_0(x).$$

Iz Propozicije 4.0.2 slijedi $V(t, t+b] = G_t * U(b)$. Budući da je $G_t(b-s) \leqslant 1$ te $\lim_{t\to\infty} G_t(b-s) = F_0(b-s)$ za svaki $s > 0$, iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V(t, t+b] &= \lim_{t\to\infty} G_t * U(b) = \lim_{t\to\infty}\int_0^b G_t(b-s)dU(s) = \int_0^b \lim_{t\to\infty} G_t(b-s)dU(s)\\ &= \int_0^b F_0(b-s)dU(s) = F_0 * U(b) = \frac{b}{\mu},\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz Propozicije 2.2.8.

Dokažimo sada da Blackwellov teorem obnavljanja povlači ključni teorem obnavljanja.
1) Neka je prvo funkcija z sljedećeg oblika

$$z(t) := 1_{[(n-1)h,nh)}(t).$$

Slijedi $z(t-y) = 1$ ako i samo ako $t - nh < y \leqslant t - (n-1)h$. Stoga,

$$U * z(t) = \int_0^t z(t-y)dU(y) = \int_{(t-nh,t-(n-1)h]} dU(y) = U(t-nh, t-(n-1)h].$$

Slijedi

$$\lim_{t\to\infty} U * z(t) = \lim_{t\to\infty} U(t-nh, t-(n-1)h] = \frac{h}{\mu} = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)ds.$$

2) Neka je funkcija z sada dana sa

$$z(t) := \sum_{n=1}^\infty a_n 1_{[(n-1)h,nh)}(t),$$

pri čemu je $a_n \geqslant 0$ za svaki $n \geqslant 1$, $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$ te neka je h takav da vrijedi $F(h) < 1$. Slijedi,

$$U * z(t) = \int_0^t z(t-y)dU(y) = \sum_{n=1}^\infty a_n U(t-nh, t-(n-1)h].$$

Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi $\lim\limits_{t\to\infty} U(t-nh, t-(n-1)h] = \frac{h}{\mu}$, te $\sup\limits_{t,n} U(t-nh, t-(n-1)h] \leqslant c(h) < \infty$ po Lemi 4.0.3. Iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} U * z(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n U(t-nh, t-(n-1)h]\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n \lim_{t\to\infty} U(t-nh, t-(n-1)h] \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{h}{\mu} = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)ds.\end{aligned}$$

3) Neka je sada $z \geqslant 0$ direktno Riemann integrabilna funkcija. Definirajmo za $h > 0$ i $t > 0$

$$M_n(h) := \sup_{(n-1)h\leqslant t<nh} z(t),$$

$$m_n(h) := \inf_{(n-1)h\leqslant t<nh} z(t),$$

$$z^*(t) := \sum_{n=1}^{\infty} M_n(h) \cdot 1_{[(n-1)h,nh)}(t),$$

$$z_*(t) := \sum_{n=1}^{\infty} m_n(h) \cdot 1_{[(n-1)h,nh)}(t).$$

Iz direktne Riemann integrabilnosti funkcije z slijedi $\sum_{n=1}^{\infty} m_n(h) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M_n(h) < \infty$, odnosno funkcije z^* i z_* su funkcije istog oblika kao i funkcija u 2). Iz 2) slijedi

$$\lim_{t\to\infty} U * z^*(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} M_n(h)h =: \frac{1}{\mu}\sigma^*(h),$$

te

$$\lim_{t\to\infty} U * z_*(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} m_n(h)h =: \frac{1}{\mu}\sigma_*(h).$$

Budući da je $z_* \leqslant z \leqslant z^*$ za svaki $h > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\sigma_*(h) &= \liminf_{t\to\infty} U * z_*(t) \leqslant \liminf_{t\to\infty} U * z(t) \leqslant \limsup_{t\to\infty} U * z(t) \\ &\leqslant \limsup_{t\to\infty} U * z^*(t) = \frac{1}{\mu}\sigma^*(h). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pustimo $h \searrow 0$. Iz direktne Riemann integrabilnosti funkcije z slijedi

$$\lim_{h\searrow 0}(\sigma^*(h) - \sigma_*(h)) = 0,$$

te

$$\lim_{h\searrow 0} \sigma^*(h) = \int_0^{\infty} z(s)ds.$$

Iz (4.3) tada slijedi

$$\lim_{t\to\infty} U * z(t) = \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{\mu}\sigma^*(h) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} z(s)ds.$$

4) Neka je z sada direktno Riemann integrabilna funkcija. Definirajmo

$$z^+ := \max\{z, 0\}, \quad z^- := \max\{-z, 0\}.$$

Vrijedi $z = z^+ - z^-$. Koristeći 3) slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} U * z(t) &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t z(t-y)dU(y) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t (z^+(t-y) - z^-(t-y))dU(y)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t z^+(t-y)dU(y) - \lim_{t\to\infty}\int_0^t z^-(t-y)dU(y)\\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z^+(s)ds - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z^-(s)ds\\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)ds.\end{aligned}$$

□

Sljedeća propozicija i lema su pomoćni rezultati koje smo koristili u dokazu prethodnog teorema. Za dokaz propozicije vidi [1, str. 113].

Propozicija 4.0.2. *Neka je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ niz obnvljanja, U pripadna funkcija obnavljanja, $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ pripadni proces vremena obnavljanja unaprijed, $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ pripadni proces obnavljanja, te funkcija G_t dana sa*

$$G_t(x) = P(B(t) \leqslant x),$$

za $x > 0$. Tada vrijedi

$$E(N(t+b) - N(t)) = \int_0^b U(b-x)dG_t(x) = G_t * U(b),$$

za svaki $b > 0$.

Lema 4.0.3. *Neka je F međudolazna funkcija distribucije niza obnavljanja, te neka je $F(b) < 1$ za neki $b > 0$. Neka je U pripadna funkcija obnavljanja. Tada je*

$$U(t-b, t] \leqslant \frac{1}{1-F(b)},$$

za svaki $t \geqslant b$. Stoga za svaki $t \geqslant b$ vrijedi

$$\sup_t U(t, t+b] \leqslant \frac{1}{1-F(b)} = c(b) < \infty.$$

Dokaz. Iz Primjera 2.2.1 znamo da vrijedi relacija

$$U = F^{0*} + F * U,$$

odnosno

$$U - F * U = F^{0*}.$$

Slijedi

$$1 = \int_0^t (1 - F(t-x))dU(x) \geqslant \int_{t-b}^t (1 - F(t-x))dU(x) \geqslant (1 - F(b))U(t-b, t].$$

Odnosno vrijedi

$$U(t-b, t] \leqslant \frac{1}{1 - F(b)}.$$

□

Sada ćemo dokazati već prije spomenutu tvrdnju da Blackwellov teorem obnavljanja povlači elementarni teorem obnavljanja. No prvo pokažimo jedan pomoćni rezultat.

Propozicija 4.0.4. *Neka je $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ niz realnih brojeva takvih da vrijedi $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k = S.$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}\Big|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right) - S\Big| &= \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k - S)\Big| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}(s_k - S)\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k - S| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}|s_k - S| + \frac{1}{n}\sum_{k=k_0+1}^{n}|s_k - S|.\end{aligned}$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Izaberimo k_0 takav da za svaki $k > k_0$ vrijedi $|s_k - S| < \epsilon/2$ (takav postoji zbog konvergencije niza $(s_n)_{n=1}^{\infty}$). Sada za fiksni k_0 odaberemo dovoljno velik N takav da za svaki $n > N$ vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}|s_k - S| < \epsilon/2.$$

Slijedi da za svaki $n > \max\{N, k_0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\Big|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right) - S\Big| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}|s_k - S| + \frac{1}{n}\sum_{k=k_0+1}^{n}|s_k - S| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}|s_k - S| + \frac{1}{n}(n - k_0)\frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Slijedi tvrdnja propozicije. □

Teorem 4.0.5. *Blackwellov teorem obnavljanja* (4.1) *povlači elementarni teorem obnavljanja (Teorem 2.1.11).*

Dokaz. Iz Blackwellovog teorema obnavljanja za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} V(n-1,n] = \frac{1}{\mu}$. Stoga iz Propozicije 4.0.4 slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V(k-1,k] = \lim_{n\to\infty} \frac{V(0,n]}{n} = \frac{1}{\mu}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)-V(0)}{t} &\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{V(\lfloor t\rfloor+1)-V(0)}{\lfloor t\rfloor} = \limsup_{t\to\infty} \frac{V(\lfloor t\rfloor+1)-V(0)}{\lfloor t\rfloor+1} \cdot \frac{\lfloor t\rfloor+1}{\lfloor t\rfloor} \\ &= \limsup_{t\to\infty} \frac{V(0,\lfloor t\rfloor+1]}{\lfloor t\rfloor+1} \cdot \frac{\lfloor t\rfloor+1}{\lfloor t\rfloor} = \frac{1}{\mu},\end{aligned}$$

te

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)-V(0)}{t} \geqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{V(\lceil t\rceil-1)-V(0)}{\lceil t\rceil} = \liminf_{t\to\infty} \frac{V(0,\lceil t\rceil-1]}{\lceil t\rceil-1} \cdot \frac{\lceil t\rceil-1}{\lceil t\rceil} = \frac{1}{\mu}.$$

Slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(0,t]}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Odnosno

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{V(0)+V(0,t]}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

□

Poglavlje 5

Dokaz Blackwellovog teorema obnavljanja

Budući da smo u prethodnom poglavlju dokazali ekvivalentnost različitih oblika teorema obnavljanja, možemo dokazati bilo koji od tih oblika da bi dokazali Blackwellov teorem obnavljanja. Dokazat ćemo da za bilo koju vjerojatnosnu funkciju distribucije G slučajne varijable Y_0 i proizvoljnu nearitmetičku međudolaznu funkciju distribucije F niza obnavljanja $\{S_n : n \geqslant 0\}$ vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x) = F_0(x), \tag{5.1}$$

za svaki $x > 0$, pri čemu je $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ pripadni proces vremena obnavljanja unaprijed, funkcija F_0 dana sa $F_0(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1 - F(y))dy$ te $\mu = \int_0^\infty xdF(x)$. Nadalje, dokazat ćemo tu tvrdnju samo za čisti niz obnavljanja, jer tada tvrdnja lako slijedi i za odgođeni niz obnavljanja. Naime

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x, S_0 > t) + \lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x, S_0 \leqslant t).$$

Budući da je $\lim\limits_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x, S_0 > t) \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} P(S_0 > t) = \lim\limits_{t\to\infty}(1 - G(t)) = 0$, slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x) &= \lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x, S_0 \leqslant t) \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t P(B(t-y) \leqslant x | B(0) = 0) dG(y) \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty P(B(t-y) \leqslant x | B(0) = 0) 1_{[0,t]}(y) dG(y) \\
&= \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} P(B(t-y) \leqslant x | B(0) = 0) 1_{[0,t]}(y) dG(y) \\
&= F_0(x),
\end{aligned}$$

pri čemu predzadnja jednakost slijedi korištenjem Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Neka je funkcija G rastuća i neprekidna zdesna. Definirajmo skup

$$pi(G) := \{x \in \mathbb{R} : G(x+\epsilon) - G(x-\epsilon) > 0, \text{ za svaki } \epsilon > 0\}.$$

Ako je F nearitmetička funkcija distribucije, tada $pi(F)$ nije podskup skupa

$$L(h) := \{0, h, 2h, ...\},$$

ni za jedan $h > 0$. Označimo

$$\Pi := \cup_{n=0}^{\infty} pi(F^{n*}).$$

Za funkciju $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$ tada vrijedi $\Pi \subseteq pi(U)$.

Sljedeće dvije leme ćemo koristiti u dokazu (5.1).

Lema 5.0.1. *Neka je F nearitmetička funkcija distribucije takva da je $F(0-) = 0$ i $F(0) < 1$, $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$, te $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ pripadni proces obnavljanja. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $T \geqslant 0$ takav da za svaki $t \geqslant T$ vrijedi*

$$U(t, t+\epsilon) > 0. \tag{5.2}$$

Za čisti niz obnavljanja to je ekvivalentno sa

$$P(N(t, t+\epsilon) > 0) > 0,$$

za svaki $t \geqslant T$.

Dokaz. Neka su F_1, F_2 funkcije distribucije te neka su $a \in pi(F_1), b \in pi(F_2)$. Neka su X_1, X_2 nezavisne slučajne varijable s funkcijama distribucije F_1, F_2. Tada

$$\begin{aligned}(F_1 * F_2)(a+b+\epsilon) - (F_1 * F_2)(a+b-\epsilon) &= P(X_1 + X_2 \in (a+b-\epsilon, a+b+\epsilon]) \\ &\geqslant P(X_1 \in (a-\epsilon/2, a+\epsilon/2], X_2 \in (b-\epsilon/2, b+\epsilon/2]) \\ &= P(X_1 \in (a-\epsilon/2, a+\epsilon/2])P(X_2 \in (b-\epsilon/2, b+\epsilon/2]) > 0,\end{aligned}$$

tj. $a + b \in pi(F_1 * F_2)$. Iz ovoga lako slijedi

$$a, b \in \Pi, a < b, h := b - a > 0 \Rightarrow na + mh \in \Pi, \text{ za svaki } 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{5.3}$$

Neka je $t \in [na, na + nh]$. Iz (5.3) slijedi da je t najviše za h udaljen od neke točke iz skupa Π.
Pronađimo n_0 za koji se susjedni intervali $[na, na + nh]$ preklapaju:

$$(n+1)a \leqslant na + nh \Leftrightarrow a \leqslant nh \Leftrightarrow n \geqslant \frac{a}{h},$$

tj. $n_0 = \lceil \frac{a}{h} \rceil$. Stoga je za svaki $t \geqslant n_0 a =: T$ točka t za najviše h udaljena od neke točke iz skupa Π. Zbog $\Pi \subseteq pi(U)$ slijedi da svaki za $\epsilon > h$ vrijedi $U(t, t+\epsilon) > 0$, za $t \geqslant T$. Pokažimo sada da možemo odabrati proizvoljno mali h, tj.

$$\inf\{|b-a| : a, b \in \Pi\} = 0. \tag{5.4}$$

Pretpostavimo suprotno

$$\inf\{|b-a| : a, b \in \Pi\} = h_0 > 0.$$

Tada postoje $a, b \in \Pi$ takvi da je $h_0 \leqslant b - a \leqslant 2h_0$.

Pokažimo

$$[na, na+nh] \cap \Pi = \{na + mh : m = 0, ..., n\}. \tag{5.5}$$

Neka je $x \in [na, na+nh] \cap \Pi$, te pretpostavimo $x \notin \{na + mh : m = 0, ..., n\}$. Tada je x udaljen za manje od $h/2 \leqslant h_0$ od neke točke iz Π što je kontradikcija sa definicijom od h_0. Slijedi $[na, na+nh] \cap \Pi \subseteq \{na+mh : m = 0, ..., n\}$. Relacija $[na, na+nh] \cap \Pi \supseteq \{na+mh : m = 0, ..., n\}$ slijedi iz (5.3). Stoga vrijedi (5.5).

Neka je $n \geqslant \frac{a}{h}$. Tada je $(n+1)a \in [na, na+nh]$, te je $(n+1)a \in \Pi$. Iz (5.5) slijedi $(n+1)a \in \{na+mh : m = 0, ..., n\}$, odnosno

$$(n+1)a = na + mh,$$

za neki $m \in \{0, 1, ..., n\}$. Slijedi $a = mh$, odnosno $a \in L(h) = \{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$. Stoga

$$[na, na+nh] \cap \Pi \subseteq L(h). \tag{5.6}$$

Neka je $y \in pi(F)$. Pošto se intervali $[na, na+nh]$ preklapaju za $n \geqslant \frac{a}{h}$, postoje k i n takvi da $y + ka \in [na, na+nh]$. Pošto je $y \in pi(F)$ i $a \in \Pi$ slijedi $y + ka \in \Pi$. Iz prethodnog korištenjem (5.6) slijedi $y + ka \in L(h)$. Pošto je $a \in L(h)$ slijedi $y \in L(h)$. Odnosno, $pi(F) \subseteq L(h)$ što je kontradikcija s pretpostavkom da je funkcija distribucije F nearitmetička. Stoga vrijedi (5.4), odnosno dokazali smo (5.2).

Dokažimo sada drugi dio leme. Iz definicije funkcije U znamo da je $U(t, t+\epsilon) > 0$ ako i samo ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $F^{n_0 *}(t, t+\epsilon) > 0$. Iz relacije

$$\begin{aligned} P(N(t, t+\epsilon) > 0) &= P(\cup_{n=0}^{\infty}\{S_n \in (t, t+\epsilon)\}) \\ &\geqslant P(S_{n_0} \in (t, t+\epsilon)) = F^{n_0 *}(t, t+\epsilon) > 0, \end{aligned}$$

slijedi ekvivalencija.

□

Kažemo da je skup $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ invarijantan ako vrijedi sljedeće

$$(x_1, ..., x_n, ...) \in A \text{ ako i samo ako } (x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}, ...) \in A,$$

za svaki $n \geqslant 1$ i svaku permutaciju $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

Lema 5.0.2. *Neka je $X = \{X_n : n \geqslant 1\}$ niz nezavisno jednako distribuiranih slučajnih vektora. Tada za bilo koji invarijantan skup A vrijedi*

$$P(X \in A) \in \{0, 1\}.$$

Nakon što smo iskazali dvije pomoćne leme možemo dokazati (5.1).

Dokaz. Neka je $\{S_n : n \geqslant 0\}$ čisti niz obnavljanja, F pripadna međudolazna funkcija distribucije, pri čemu je F nearitmetička te $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$. Neka je $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$ stacionarni niz obnavljanja, sa međudolaznom funkcijom distribucije F, nezavisan od $\{S_n : n \geqslant 0\}$. Konstruirat ćemo novi niz obnavljanja $\{S^*_n : n \geqslant 0\}$ tako da promatramo niz $\{S_n : n \geqslant 0\}$ do prvog vremena obnavljanja S_T takvog da postoji neko vrijeme obnavljanja niza $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$ koje se od S_T razlikuje za najviše ϵ ($\epsilon > 0$ proizvoljan). Od tog trenutka nadalje promatramo niz $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$.

Prvo ćemo pokazati da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji vrijeme obnavljanja niza $\{S_n : n \geqslant 0\}$ dovoljno blizu nekog vremena obnavljanja niza $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$.

Neka je $\epsilon > 0$. Neka je $\tilde{B}(S_i)$ vrijeme od vremena obnavljanja S_i do idućeg obnavljanja niza $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$. Pokazat ćemo da vrijedi

$$P(\tilde{B}(S_i) < \epsilon \text{ za beskonačno mnogo indeksa } i) = 1,$$

tj. da postoji i više nego dovoljno vremena prebačaja u kojima nizovi $\{S_n : n \geqslant 0\}$ i $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$ dolaze dovoljno blizu. Definirajmo

$$A_i := \cup_{j=i}^\infty \{\tilde{B}(S_j) < \epsilon\}, \quad \text{za } i \geqslant 0,$$

$$A_\infty := \cap_{i=0}^\infty A_i = \cap_{i=0}^\infty \cup_{j=i}^\infty \{\tilde{B}(S_j) < \epsilon\} = \{\tilde{B}(S_j) < \epsilon \text{ za beskonačno mnogo indeksa } j\}.$$

Pokažimo

$$(\tilde{B}(S_j) : j \geqslant i) \stackrel{d}{=} (\tilde{B}(S_j) : j \geqslant 0). \tag{5.7}$$

Neka je $k > 0$ te neka su $\mathscr{B}_0, ..., \mathscr{B}_k$ Borelovi skupovi. Fiksirajmo i. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
P(\tilde{B}(S_i) \in \mathscr{B}_0, \tilde{B}(S_{i+1}) \in \mathscr{B}_1, ..., \tilde{B}(S_{i+k}) \in \mathscr{B}_k) &= P(\tilde{B}(S_{i+j}) \in \mathscr{B}_j : 0 \leqslant j \leqslant k) = \\
&= \int P(\tilde{B}(s_{i+j}) \in \mathscr{B}_j : 0 \leqslant j \leqslant k) P(S_{i+j} \in ds_{i+j} : 0 \leqslant j \leqslant k) \\
&= \int P(\tilde{B}(s_{i+j} - s_i) \in \mathscr{B}_j : 0 \leqslant j \leqslant k) P(S_{i+j} \in ds_{i+j} : 0 \leqslant j \leqslant k) \\
&= P(\tilde{B}(0) \in \mathscr{B}_0, \tilde{B}(S_{i+1} - S_i) \in \mathscr{B}_1, ..., \tilde{B}(S_{i+k} - S_i) \in \mathscr{B}_k) \\
&= P(\tilde{B}(0) \in \mathscr{B}_0, \tilde{B}(Y_{i+1}) \in \mathscr{B}_1, ..., \tilde{B}(Y_{i+1} + ... + Y_{i+k}) \in \mathscr{B}_k) \\
&= P(\tilde{B}(0) \in \mathscr{B}_0, \tilde{B}(Y_1) \in \mathscr{B}_1, ..., \tilde{B}(Y_1 + ... + Y_k) \in \mathscr{B}_k) \\
&= P(\tilde{B}(S_0) \in \mathscr{B}_0, \tilde{B}(S_1) \in \mathscr{B}_1, ..., \tilde{B}(S_k) \in \mathscr{B}_k),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti iskoristili striktnu stacionarnost procesa $\tilde{B}$, a u predzadnjoj jednakosti nezavisnost i jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $\{Y_n : n \geqslant 1\}$. Dokazali smo (5.7).

Slijedi

$$P(A_i) = P(\cup_{j=i}^{\infty}\{\tilde{B}(S_j) < \epsilon\}) = P(\cup_{j=0}^{\infty}\{\tilde{B}(S_j) < \epsilon\}) = P(A_0),$$

iz čega slijedi

$$P(A_\infty) = P(\cap_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(A_0),$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja.

Sada ćemo dokazati

$$P(A_0|\tilde{Y}_0 = t) > 0, \text{ za svaki } t \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Uvjetujemo na $\tilde{Y}_0$ jer će nam to koristiti kasnije, pri primjeni Leme 5.0.2 na niz nezavisno jednako distribuiranih vektora $\{(Y_n, \tilde{Y}_n) : n \geqslant 1\}$.

Fiksirajmo $t \geqslant 0$. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
P(A_0|\tilde{Y}_0 = t) &= P(\cup_{j=0}^{\infty}\{\tilde{B}(S_j) < \epsilon\}|\tilde{Y}_0 = t) \\
&= P(\cup_{j=0}^{\infty}\{0 \leqslant \tilde{S}_{\tilde{N}(S_j)} - S_j < \epsilon\}|\tilde{Y}_0 = t) \\
&= P(\cup_{j=0}^{\infty}\{t + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i \in [S_j, S_j + \epsilon), n = \tilde{N}(S_j)\}) \\
&\geqslant P(t + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i \in (S_j, S_j + \epsilon), n = \tilde{N}(S_j)) \\
&= \int_0^{\infty} P(\cup_{n=1}^{\infty}\{t + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i \in (s, s + \epsilon)\}) P_{S_j}(ds) \\
&\geqslant \int_{T+t}^{\infty} P\left(\cup_{n=1}^{\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i \in (s - t, s + \epsilon - t)\right\}\right) P_{S_j}(ds) \\
&= \int_{T+t}^{\infty} P(N(s - t, s + \epsilon - t) > 0) P_{S_j}(ds),
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

pri čemu je T kao u Lemi 5.0.1. Iz iste leme slijedi da je $P(N(s - t, s - t + \epsilon) > 0) > 0$ za svaki $s \geqslant T + t$. Budući da $S_n \to \infty$ kada $n \to \infty$, postoji $j_0 \geqslant 0$ takav da vrijedi $P(S_{j_0} > T + t) > 0$. Budući da je j u (5.9) bio proizvoljan odaberemo upravo j_0. Slijedi

$$
P(A_0|\tilde{Y}_0 = t) \geqslant \int_{T+t}^{\infty} P(N(s - t, s + \epsilon - t) > 0) P_{S_{j_0}}(ds) > 0,
$$

odnosno dokazali smo (5.8).

Primijetimo

$$
\begin{aligned}
P(A_\infty|\tilde{Y}_0 = t) &= P(\cap_{i=0}^{\infty} \cup_{j=i}^{\infty} \{\tilde{B}(S_j) < \epsilon\}|\tilde{Y}_0 = t) \\
&= P(\cap_{i=0}^{\infty} \cup_{j=i}^{\infty} (\cup_{n=1}^{\infty}\{t + \sum_{k=1}^{n} \tilde{Y}_k \in [S_j, S_j + \epsilon)\})).
\end{aligned}
$$

Primjenom Leme 5.0.2 na niz nezavisno jednako distribuiranih slučajnih vektora $\{(Y_n, \tilde{Y}_n) : n \geqslant 1\}$ slijedi

$$
P(A_\infty|\tilde{Y}_0 = t) \in \{0, 1\}, \text{ za svaki } t \geqslant 0. \tag{5.10}
$$

Definirajmo skup $I := \{t \geqslant 0 : P(A_\infty|\tilde{Y}_0 = t) = 1\}$. Pokažimo

$$
\mu_{F_0}(I) = 1, \tag{5.11}
$$

gdje je μ_{F_0} pripadna mjera pridružena funkciji distribucije F_0. Vrijedi

$$P(A_0) = P(A_\infty) = \int P(A_\infty|\tilde{Y}_0 = t)dF_0(t) = \int_I 1dF_0(t) + \int_{I^c} 0dF_0(t) = \mu_{F_0}(I). \tag{5.12}$$

Budući da je $A_\infty \subseteq A_0$ slijedi

$$1 = P(A_\infty|\tilde{Y}_0 = t) \leqslant P(A_0|\tilde{Y}_0 = t) \leqslant 1, \text{ za } t \in I,$$

odnosno $P(A_0|\tilde{Y}_0 = t) = 1$, za $t \in I$. Sada iz (5.12) slijedi

$$\mu_{F_0}(I) = P(A_0) = \int P(A_0|\tilde{Y}_0 = t)dF_0(t) = \int_I 1dF_0(t) + \int_{I^c} P(A_0|\tilde{Y}_0 = t)dF_0(t),$$

odnosno

$$\int_{I^c} P(A_0|\tilde{Y}_0 = t)dF_0(t) = 0. \tag{5.13}$$

Pretpostavimo $\mu_{F_0}(I) < 1$. Tada bi vrijedilo $\mu_{F_0}(I^c) > 0$ te korištenjem (5.8) dobili bi kontradikciju s (5.13). Stoga vrijedi (5.11) odnosno $\mu_{F_0}(I) = 1$. Iz (5.12) sada slijedi $P(A_\infty) = 1$. Odnosno zbog definicije od A_∞ slijedi da postoji i više nego dovoljno mogućnosti prebačaja s niza $\{S_n : n \geqslant 0\}$ na niz $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$.

Sada kada smo pokazali da za svaki $\epsilon > 0$ postoji vrijeme obnavljanja niza $\{S_n : n \geqslant 0\}$ udaljeno za manje od ϵ od nekog vremena obnavljanja niza $\{\tilde{S}_n : n \geqslant 0\}$, definirajmo

$$T := \inf\{n \geqslant 0 : \tilde{B}(S_n) < \epsilon\},$$

$$\tilde{T} := \inf\{n \geqslant 0 : \tilde{S}_n \geqslant S_T\},$$

te novi niz obnavljanja

$$\{S^*_n : n \geqslant 0\} := \{S_0, S_1, ..., S_T, \tilde{S}_{\tilde{T}+1} - \tilde{B}(S_T), \tilde{S}_{\tilde{T}+2} - \tilde{B}(S_T), ...\}.$$

Definirajmo

$$Y^*_n := S^*_n - S^*_{n-1},\ n \geqslant 1.$$

Dokazat ćemo da su nizovi obnavljanja $\{S^*_n : n \geqslant 0\}$ i $\{S_n : n \geqslant 0\}$ jednako distribuirani. Zapravo je dovoljno pokazati da niz $\{Y^*_n : n \geqslant 1\}$ ima jednaku distribuciju kao i niz $\{Y_n : n \geqslant 1\}$. Neka su $k \geqslant 0$ i $x_i \geqslant 0$ za svaki $i = 1, ..., k$. Vrijedi

$$\begin{aligned} P(Y^*_i \leqslant x_i, i \leqslant k) &= \sum_{n_1 \geqslant 0, n_2 \geqslant 0} P(Y^*_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T = n_1, \tilde{T} = n_2) \\ &= \sum_{n_1 \leqslant k, n_2 \geqslant 0} P(Y^*_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T = n_1, \tilde{T} = n_2) \\ &+ \sum_{n_1 > k, n_2 \geqslant 0} P(Y^*_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T = n_1, \tilde{T} = n_2). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Za $n_1 \geqslant 0, n_2 \geqslant 0$ vrijedi

$$\{T = n_1, \tilde{T} = n_2\} \in \sigma(S_0, ..., S_{n_1}, \tilde{S}_0, ..., \tilde{S}_{n_2}) = \sigma(Y_0, ..., Y_{n_1}, \tilde{Y}_0, ..., \tilde{Y}_{n_2}). \tag{5.15}$$

Za prvi sumand iz (5.14) vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1 \leqslant k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i^* \leqslant x_i, i \leqslant k, T = n_1, \tilde{T} = n_2) \\
&= \sum_{n_1 \leqslant k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant n_1, T = n_1, \tilde{T} = n_2, \tilde{Y}_{n_2+1} \leqslant x_{n_1+1}, ..., \tilde{Y}_{n_2+k-n_1} \leqslant x_k) \\
&= \sum_{n_1 \leqslant k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant n_1, T = n_1, \tilde{T} = n_2) P(\tilde{Y}_{n_2+1} \leqslant x_{n_1+1}, ..., \tilde{Y}_{n_2+k-n_1} \leqslant x_k) \\
&= \sum_{n_1 \leqslant k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant n_1, T = n_1, \tilde{T} = n_2) P(Y_{n_1+1} \leqslant x_{n_1+1}, ..., Y_k \leqslant x_k) \qquad (5.16)\\
&= \sum_{n_1 \leqslant k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant n_1, T = n_1, \tilde{T} = n_2, Y_{n_1+1} \leqslant x_{n_1+1}, ..., Y_k \leqslant x_k) \\
&= P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T \leqslant k),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili nezavisnost događaja $\{Y_i \leqslant x_i, i \leqslant n_i, T = n_1, \tilde{T} = n_2\}$ i $\{\tilde{Y}_{n_2+1} \leqslant x_{n_1+1}, ..., \tilde{Y}_{n_2+k-n_1} \leqslant x_k\}$ koja slijedi iz (5.15), u trećoj jednakosti smo iskoristili jednaku distribuiranost nizova $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ i $\{\tilde{Y}_n : n \geqslant 1\}$, a u predzadnjoj jednakosti smo opet iskoristili (5.15).
Za drugi sumand iz (5.14) vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1 > k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i^* \leqslant x_i, i \leqslant k, T = n_1, \tilde{T} = n_2) &= \sum_{n_1 > k, n_2 \geqslant 0} P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T = n_1, \tilde{T} = n_2) \\
&= P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T > k).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Zbrajanjem (5.16) i (5.17) slijedi

$$P(Y_i^* \leqslant x_i, i \leqslant k) = P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T \leqslant k) + P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant k, T > k) = P(Y_i \leqslant x_i, i \leqslant k),$$

odnosno $\{Y_n^* : n \geqslant 1\}$ i $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ su jednako distribuirani, a time su i $\{S_n^* : n \geqslant 0\}$ i $\{S_n : n \geqslant 0\}$ jednako distribuirani.

Budući da su $\{S_n^* : n \geqslant 0\}$ i $\{S_n : n \geqslant 0\}$ jednako distribuirani vrijedi

$$P(B(t) > x) = P(S_{N(t)} > t + x) = P(S^*_{N^*(t)} > t + x) = P(B^*(t) > x),$$

odnosno slijedi da bi dokazali da vrijedi $\lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = 1 - F_0(x)$ dovoljno je dokazati da vrijedi $\lim_{t\to\infty} P(B^*(t) > x) = 1 - F_0(x)$.
Neka je $t > S_T$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\{\tilde{B}(t+\epsilon) > x+\epsilon\} &= \{\tilde{S}_{\tilde{N}(t+\epsilon)} - (t+\epsilon) > x+\epsilon\} = \{\tilde{N}(t+x+2\epsilon) \leqslant \tilde{N}(t+\epsilon)\} \\
&= \{\tilde{N}(t+\epsilon, t+x+2\epsilon] = 0\} = \{N^*(t+\epsilon-\tilde{B}(S_T), t+x+2\epsilon-\tilde{B}(S_T)] = 0\} \\
&\subseteq \{N^*(t+\epsilon, t+\epsilon+x] = 0\} = \{N^*(t+\epsilon+x) \leqslant N^*(t+\epsilon)\} \\
&= \{S^*_{N^*(t+\epsilon)} > t+\epsilon+x\} = \{B^*(t+\epsilon) > x\},
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili (2.1) te $\epsilon > \tilde{B}(S_T)$. Također vrijedi i

$$\begin{aligned}
\{B^*(t) > x\} &= \{S^*_{N^*(t)} > t+x\} = \{N^*(t+x) \leqslant N^*(t)\} \\
&= \{N^*(t, t+x] = 0\} = \{\tilde{N}(t+\tilde{B}(S_T), t+x+\tilde{B}(S_T)] = 0\} \\
&\subseteq \{\tilde{N}(t+\epsilon, t+x] = 0\} = \{\tilde{N}(t+x) \leqslant \tilde{N}(t+\epsilon)\} \\
&= \{\tilde{S}_{\tilde{N}(t+\epsilon)} > t+x\} = \{\tilde{B}(t+\epsilon) > x-\epsilon\}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Iz (5.18) slijedi

$$\begin{aligned}
P(B^*(t) > x) &= P(B^*(t) > x, S_T \geqslant t) + P(B^*(t) > x, S_T < t) \\
&\leqslant P(S_T \geqslant t) + P(\tilde{B}(t+\epsilon) > x-\epsilon, S_T < t) \\
&\leqslant P(S_T \geqslant t) + P(\tilde{B}(t+\epsilon) > x-\epsilon),
\end{aligned}$$

stoga koristeći striktnu stacionarnost procesa $\tilde{B}$, odnosno činjenicu da slučajna varijabla $\tilde{B}(t)$ ima distribuciju F_0 slijedi

$$\limsup_{t\to\infty} P(B^*(t) > x) \leqslant \limsup_{t\to\infty}(P(S_T \geqslant t) + P(\tilde{B}(t+\epsilon) > x-\epsilon)) = 1 - F_0(x-\epsilon).$$

Vrijedi i

$$\begin{aligned}
P(B^*(t+\epsilon) > x) \geqslant P(B^*(t+\epsilon) > x, t > S_T) &\geqslant P(\tilde{B}(t+\epsilon) > x+\epsilon, t > S_T) \\
&= P(\tilde{B}(t+\epsilon) > x+\epsilon) - P(\tilde{B}(t+\epsilon) > x+\epsilon, t \leqslant S_T),
\end{aligned}$$

odnosno

$$\liminf_{t\to\infty} P(B^*(t) > x) \geqslant 1 - F_0(x+\epsilon).$$

Pustimo $\epsilon \searrow 0$. Iz neprekidnosti funkcije F_0 slijedi

$$1 - F_0(x) \leqslant \liminf_{t\to\infty} P(B^*(t) > x) \leqslant \limsup_{t\to\infty} P(B^*(t) > x) \leqslant 1 - F_0(x),$$

odnosno

$$1 - F_0(x) = \lim_{t\to\infty} P(B^*(t) > x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) > x).$$

Dokazali smo $F_0(x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) \leqslant x)$. □

Bibliografija

[1] S. Asmussen, *Applied probability and queues*, John Wiley Sons, 1987.

[2] S. I. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, 1992.

[3] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 2003.

[4] Z. Vondraček, *Slučajni procesi (predavanja)*, 2010, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp18-predavanja.html` (kolovoz 2019.).

Sažetak

Cilj ovog rada je bio navesti neke osnovne pojmove i rezultate teorije obnavljanja te prezentirati dokaz Blackwellovog teorema obnavljanja. U prvom poglavlju smo se prisjetili nekih definicija i rezultata koji su korišteni u ostatku rada. U drugom poglavlju smo uveli neke osnovne pojmove i iskazali neke osnovne rezultate teorije obnavljanja. Zatim je objašnjena direktna Riemann integrabilnost te su iskazani neki uvjeti kada je ona ekvivalentna s Riemann integrabilnošću. Nakon toga smo iskazali ekvivalentne oblike teorema obnavljanja te pokazali njihovu ekvivalenciju. Na kraju smo pokazali da vrijedi Blackwellov teorem obnavljanja tako da smo prezentirali dokaz jednog od njemu ekvivalentnih oblika.

Summary

The goal of this report was to list some basic renewal theory results and present a proof of Blackwell's renewal theorem. In the first chapter we listed some definitions and results used in the rest of the report. In the second chapter we introduced some basic renewal theory definitions and results. Next, we introduced the concept of direct Riemann integrability and conditions under which it is equivalent to Riemann integrability. After that we listed equivalent forms of renewal theorem and showed their equivalence. In the end we showed that Blackwell's renewal theorem holds by presenting the proof of one of the equivalent forms of the renewal theorem.

Životopis

Rođena sam 31. siječnja 1996. godine u Zadru. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Gimnaziju Franje Petrića. Godine 2014. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija 2017. godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.