Model dvostrukog smanjenja

Bartoluci, Kruno

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kruno Bartoluci

MODEL DVOSTRUKOG SMANJENJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U stvaranju financijskih, aktuarskih i medicinskih modela ponekad nije dovoljno promatrati samo vrijeme do završetka određenog stanja, već je bitno spoznati i koji uzrok je doveo do završetka tog stanja. Kako bismo uvidjeli važnost spoznaje, koji uzrok je doveo do završetka određenog stanja, promotrimo tri primjera modela iz navedenih područja, respektivno.

Primjer 0.0.1. [1] Pri izračunavanju iznosa financijskih sredstava koja će biti potrebna u budućnosti za naknade zaposlenicima koje se isplaćuju nakon prestanka radnog odnosa, uz vrijeme završetka radnog odnosa, važno je znati i što je uzrok prestanka radnog odnosa jer visina naknade ovisi o uzroku prestanka radnog odnosa pri čemu je naknada pri odlasku u mirovinu znatno niža u odnosu na naknadu zbog tjelesnog oštećenja koje je nastalo zbog ozljede na radu.

Primjer 0.0.2. [2] Većina polica životnog osiguranja prvenstveno se odnosi na slučaj smrti, a isplata osiguranog iznosa za slučaj smrti ne ovisi o uzroku smrti. Postoje police koje sadrže dopunske klauzule o isplati većeg iznosa nakon smrti osiguranika ako do smrti nije došlo prirodnim putem, već je smrt posljedica određenog nesretnog slučaja, npr. posljedica prometne nezgode. U takvim policama struktura isplata i premije ovise o vremenu do smrti i uzroku smrti.

Primjer 0.0.3. [1] Rukovoditelji javnog zdravstva zainteresirani su za analizu smrtnosti i preživljavanja pojedinih bolesti. Uočavanje povezanosti vremena do smrti i uzroka smrti poput tumora ili kardiovaskularnih bolesti dovodi do oblikovanja politike javnog zdravstva kojom će se produžiti životni vijek i smanjiti broj oboljelih.

U aktuarstvu se završetak određenog stanja naziva ***smanjenje*** (engl. *decrement*) pa se posljedično model koji uključuje dvije slučajne varijable, vrijeme do završetka određenog stanja i uzrok završetka tog stanja, naziva ***model višestrukog smanjenja*** (engl. *multiple decrement model*). Model višestrukog smanjenja koji razmatra samo dva uzroka završetka nekog stanja zovemo ***model dvostrukog smanjenja*** (engl. *double decrement model*).

U ovom radu je obrađen model dvostrukog smanjenja jer se svi dobiveni rezultati lako mogu poopćiti na model višestrukog smanjenja. Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju su definirani i objašnjeni osnovni pojmovi modela dvostrukog smanjenja te su navedene međunarodno prihvaćene aktuarske oznake koje su korištene u ovom radu. Analiza modela kroz primjere je provedena u drugom poglavlju. U trećem poglavlju su iznesene osnovne činjenice o strukturi i konstrukciji tablica dvostrukog smanjenja te je prikazana konstrukcija tablica dvostrukog smanjenja kroz nekoliko primjera. U četvrtom poglavlju modelu dvostrukog smanjenja je pridružen model jednostrukog smanjenja, koji ovisi samo o određenom uzroku smanjenja, kako bi se proučio utjecaj jednog uzroka smanjenja neovisno o drugom uzroku te su dane veze između funkcija modela dvostrukog smanjenja i pridruženog mu modela jednostrukog smanjenja.

Sve formule i definicije navedene u diplomskom radu preuzete su iz [2] i [1], ukoliko nije drugačije navedeno.

Poglavlje 1

Preliminarije

1.1 Slučajne varijable Vrijeme do smanjenja i Uzrok smanjenja

Promotrimo pojedinca starosti x godina za kojeg kažemo da se nalazi u *životnoj dobi* x i označimo ga s (x). Preostalo vrijeme do završetka određenog stanja u kojem se (x) nalazi označavamo s T_x i tu slučajnu varijablu nazivamo *Vrijeme do smanjenja*. U primjeru 0.0.1 T_x je vrijeme do završetka radnog odnosa od (x), a u primjerima 0.0.2 i 0.0.3 je T_x preostala duljina života do smrti pojedinca dobi x. Pretpostavljamo da je T_x neprekidna slučajna varijabla s vrijednostima u $[0, \infty\rangle$. Funkciju gustoće vjerojatnosti od T_x označavamo s $f_{T_x}(t)$. Diskretnu slučajnu varijablu koja predstavlja uzrok završetka stanja u kojem se (x) nalazio označavamo s J_x i zovemo *Uzrok smanjenja*. U primjeru 0.0.1 J_x može poprimiti vrijednosti 1, 2, 3 ili 4 ovisno o tome da li je do završetka radnog odnosa došlo zbog invalidnosti, smrti, odlaska u mirovinu ili dobrovoljnog napuštanja radnog mjesta, respektivno. U primjeru 0.0.2 J_x poprima vrijednost 1 ako je do smrti osiguranika došlo prirodnim putem, a vrijednost 2 ako je smrt posljedica nesretnog slučaja. Slučajna varijabla J_x u primjeru 0.0.3 poprima vrijednosti 1, 2 i 3 ovisno o tome da li je smrt uzrokovana kardiovaskularnom bolesti, tumorom ili nekom drugom bolesti. Budući da u ovom radu razmatramo samo model dvostrukog smanjenja, nadalje pretpostavljamo da diskretna slučajna varijabla Uzrok smanjenja J_x poprima vrijednosti u skupu $\{1, 2\}$. Funkciju vjerojatnosti od J_x označavamo s $f_{J_x}(j)$ pri čemu je $f_{J_x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f_{J_x}(j) = \begin{cases} \mathbb{P}(J_x = j), & j \in \{1, 2\} \\ 0, & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Odredimo sada zajedničku distribuciju slučajnih varijabli T_x i J_x tj. razdiobu slučajnog vektora (T_x, J_x).

Definicija 1.1.1. *[3] Generalizirana zajednička funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable Vrijeme do smanjenja T_x i diskretne slučajne varijable Uzrok smanjenja J_x je funkcija $f_{T_x,J_x}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takva da za sve događaje $\{(T_x, J_x)\in A\}$, gdje je $A\subset\mathbb{R}^2$, vrijedi*

$$\mathbb{P}((T_x, J_x)\in A) = \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(s,\,j)\,\in A\}} f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds\,.$$

Napomena 1.1.2. Generalizirana zajednička funkcija gustoće slučajnih varijabli T_x i J_x određena je s

$$f_{T_x,J_x}(t, j) = f_{T_x|J_x}(t \mid j)\mathbb{P}(J_x = j) = \mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = t) f_{T_x}(t)\,. \tag{1.1}$$

Dokaz. Primjenom Bayesovog pravila na neprekidnu slučajnu varijablu T_x i diskretnu slučajnu varijablu J_x dobivamo

$$f_{T_x|J_x}(t \mid j) = \frac{\mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = t) f_{T_x}(t)}{\mathbb{P}(J_x = j)}\,. \tag{1.2}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x \le t, J_x = j) &= \mathbb{P}(J_x = j)\mathbb{P}(T_x \le t \mid J_x = j)\\
&= \mathbb{P}(J_x = j)\int_{-\infty}^{t} \frac{\mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = s) f_{T_x}(s)}{\mathbb{P}(J_x = j)}\, ds\\
&= \int_{-\infty}^{t} \mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = s) f_{T_x}(s)\, ds\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili 1.2.

$$\Rightarrow f_{T_x,J_x}(t, j) = \mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = t) f_{T_x}(t) \tag{1.3}$$

Iz 1.3 i 1.2 slijedi 1.1.

Za više detalja vidi [5], poglavlje 15.3, Uvjetne funkcije distribucije i uvjetne gustoće.

□

Primijetimo da iz definicije 1.1.1 slijedi da su vjerojatnost smanjenja u intervalu $[a, b]$ zbog uzroka j i vjerojatnost smanjenja u intervalu $[a, b]$ zbog bilo kojeg uzroka respektivno dane s

$$\mathbb{P}(a \leq T_x \leq b, J_x = j) = \int_a^b f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds \tag{1.4}$$

$$\mathbb{P}(a \leq T_x \leq b) = \sum_{j=1}^{2} \int_a^b f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds\,, \tag{1.5}$$

te da su funkcija vjerojatnosti $f_{J_x}(j)$ i funkcija gustoće $f_{T_x}(t)$ povezane s generaliziranom zajedničkom funkcijom gustoće $f_{T_x,J_x}(t, j)$ na sljedeći način:

$$f_{J_x}(j) = \mathbb{P}(J_x = j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds, \quad j = 1, 2$$

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T_x,J_x}(t, j) \tag{1.6}$$

Integrirajući 1.6 dobijemo da je funkcija distribucije od T_x

$$F_{T_x}(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{j=1}^{2} f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds\,.$$

Napomena 1.1.3. Budući da je T_x neprekidna slučajna varijabla s vrijednostima u $[0, \infty\rangle$ slijedi da je $f_{T_x}(t) = 0, f_{T_x,J_x}(t, j) = 0, \forall t < 0$ pa stoga vrijedi

$$\int_{-\infty}^{t} f_{T_x}(s)\, ds = \int_{0}^{t} f_{T_x}(s)\, ds \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{t} f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds = \int_{0}^{t} f_{T_x,J_x}(s, j)\, ds,$$

što ćemo prešutno koristiti u nastavku rada.

1.2 Međunarodne aktuarske oznake

Međunarodno prihvaćene aktuarske oznake:

$$ {}_tq_x^{(j)} = \mathbb{P}(T_x \le t, J_x = j) \tag{1.7}$$
$$ {}_\infty q_x^{(j)} = \mathbb{P}(J_x = j),\ j = 1,2 \tag{1.8}$$
$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \mathbb{P}(T_x \le t) \tag{1.9}$$
$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \mathbb{P}(T_x > t) = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \tag{1.10}$$
$$ {}_{n|m}q_x^{(j)} = \mathbb{P}(n < T_x \le n+m, J_x = j),\ j = 1,2. \tag{1.11}$$

Ako je $t = 1$, može se izostaviti, pa pišemo $q_x^{(j)} = {}_1q_x^{(j)}$, $q_x^{(\tau)} = {}_1q_x^{(\tau)}$ i $p_x^{(\tau)} = {}_1p_x^{(\tau)}$. Ako je $m = 1$, pišemo ${}_{n|}q_x^{(j)} = {}_{n|1}q_x^{(j)}$.

Propozicija 1.2.1. *Vrijedi*

$$ {}_{t+u}p_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{(\tau)}\,{}_up_{x+t}^{(\tau)}. $$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x > t) &= 1 - \mathbb{P}(T_x \le t) = 1 - \mathbb{P}(T_0 \le x+t \mid T_0 > x) = 1 - \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \le x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(T_0 \le x+t) - \mathbb{P}(T_0 \le x)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(T_x > t) = \frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
{}_{t+u}p_x^{(\tau)} &= \mathbb{P}(T_x > t+u) \overset{1.12}{=} \frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t+u)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)}\frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t+u)}{\mathbb{P}(T_0 > x+t)} \\
&\overset{1.12}{=} \mathbb{P}(T_x > t)\mathbb{P}(T_{x+t} > u) \\
&= {}_tp_x^{(\tau)}\,{}_up_{x+t}^{(\tau)}
\end{aligned}$$

□

1.3 Intenzitet smanjenja

Definicija 1.3.1. *Intenzitet smanjenja neprekidne slučajne varijable T_x u trenutku t zbog bilo kojeg uzroka smanjenja definiramo kao*

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)},$$

za sve t za koje je $1 - F_{T_x}(t) > 0$.

Napomena 1.3.2.

1. Intuitivno, za malo dt je

$$\mu_x^{(\tau)}(t)dt = \frac{f_{T_x}(t)dt}{1 - F_{T_x}(t)} \approx \frac{\mathbb{P}(t < T_x \leq t + dt)}{\mathbb{P}(T_x > t)} = \mathbb{P}(T_x \leq t + dt \mid T_x > t),$$

   tj. vjerojatnost smanjenja odnosno vjerojatnost završetka stanja u kojem se nalazi osoba starosti x godina zbog bilo kojeg uzroka smanjenja u intervalu duljine dt nakon t godina od danas je proporcionalna dt, a faktor proporcionalnosti je intenzitet smanjenja.

2. U daljnjem tekstu za intenzitet smanjenja slučajne varijable T_0 koristimo međunarodno prihvaćenu aktuarsku oznaku

$$\mu_t^{(\tau)} = \mu_0^{(\tau)}(t).$$

   Primijetimo da T_0 predstavlja (preostalu) duljinu života novorođenog pojedinca.

3. Uočimo da je

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{d}{dt}\Big(-log\big(1 - F_{T_x}(t)\big)\Big) \tag{1.13}$$

   pa integrirajući 1.13 dobijemo

$$F_{T_x}(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)\,ds}. \tag{1.14}$$

Propozicija 1.3.3. *Intenzitet smanjenja slučajne varijable T_x u trenutku t zbog bilo kojeg uzroka smanjenja jednak je intenzitetu smanjenja slučajne varijable T_0 u trenutku $x + t$, tj.*

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \mu_{x+t}^{(\tau)}. \tag{1.15}$$

Dokaz.

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{\frac{d}{dt}F_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = (*)$$

$$\begin{aligned} F_{T_x}(t) &= \mathbb{P}(T_x \leq t) = \mathbb{P}(T_0 \leq x + t \mid T_0 > x) = \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \leq x + t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\ &= \frac{F_{T_0}(x + t) - F_{T_0}(x)}{1 - F_{T_0}(x)} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Uvrštavanjem 1.16 u $(*)$ dobivamo

$$(*) = \frac{\frac{f_{T_0}(x+t)}{1-F_{T_0}(x)}}{\frac{1-F_{T_0}(x+t)}{1-F_{T_0}(x)}} = \frac{f_{T_0}(x + t)}{1 - F_{T_0}(x + t)} = \mu_0^{(\tau)}(x + t) = \mu_{x+t}^{(\tau)}.$$

□

Primijetimo da iz 1.14 i 1.15 slijedi da ${}_tp_x^{(\tau)}$ možemo izraziti preko intenziteta smanjenja

$${}_tp_x^{(\tau)} = \mathbb{P}(T_x > t) = 1 - F_{T_x}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)\, ds} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds}. \tag{1.17}$$

Definicija 1.3.4. *Intenzitet smanjenja neprekidne slučajne varijable T_x u trenutku t zbog uzroka smanjenja j je*

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{T_x,J_x}(t, j)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{f_{T_x,J_x}(t, j)}{{}_tp_x^{(\tau)}},$$

za sve t za koje je $1 - F_{T_x}(t) > 0$.

Propozicija 1.3.5. *Intenzitet smanjenja slučajne varijable T_x u trenutku t zbog uzroka smanjenja j jednak je intenzitetu smanjenja slučajne varijable T_0 u trenutku $x + t$ zbog uzroka smanjenja j, tj.*

$$\mu_x^{(j)}(t) = \mu_0^{(j)}(x + t) \coloneqq \mu_{x+t}^{(j)}. \tag{1.18}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \mu_x^{(j)}(t) &= \frac{f_{T_x,J_x}(t, j)}{1 - F_{T_x}(t)} \overset{1.1}{=} \frac{\mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = t) f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{\mathbb{P}(J_x = j \mid T_x = t)\frac{d}{dt}F_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} \\ &\overset{1.16}{=} \frac{\mathbb{P}(J_0 = j \mid T_0 = x + t)\frac{f_{T_0}(x+t)}{1-F_{T_0}(x)}}{\frac{1-F_{T_0}(x+t)}{1-F_{T_0}(x)}} = \frac{\mathbb{P}(J_0 = j \mid T_0 = x + t) f_{T_0}(x + t)}{1 - F_{T_0}(x + t)} \\ &\overset{1.1}{=} \frac{f_{T_0,J_0}(x + t, j)}{1 - F_{T_0}(x + t)} = \mu_0^{(j)}(x + t) = \mu_{x+t}^{(j)} \end{aligned}$$

□

Napomena 1.3.6. Primijetimo da iz definicije 1.3.4 i propozicije 1.3.5 $f_{T_x,J_x}(t,j)$ možemo izraziti pomoću ${}_tp_x^{(\tau)}$ i intenziteta smanjenja zbog uzroka smanjenja j kao

$$f_{T_x,J_x}(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}. \tag{1.19}$$

Teorem 1.3.7. *Ukupan intenzitet smanjenja jednak je zbroju intenziteta smanjenja obzirom na dva uzroka smanjenja, odnosno*

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \sum_{j=1}^{2} \mu_x^{(j)}(t)\,.$$

Dokaz.
Vrijedi,

$$\begin{aligned}
{}_tq_x^{(\tau)} &\overset{1.9}{=} \mathbb{P}(T_x \leq t) = \int_0^t f_{T_x}(s)\,ds \overset{1.6}{=} \int_0^t \sum_{j=1}^{2} f_{T_x,J_x}(s,j)\,ds \\
&= \sum_{j=1}^{2} \int_0^t f_{T_x,J_x}(s,j)\,ds \overset{1.4}{=} \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}(T_x \leq t, J_x = j) \\
&\overset{1.7}{=} \sum_{j=1}^{2} {}_tq_x^{(j)}\,.
\end{aligned}$$

Nadalje,

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J_x}(s,j)\,ds \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)} = f_{T_x,J_x}(t,j).$$

Stoga,

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)}(t) &= \frac{f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(\tau)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{2} {}_tq_x^{(j)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\sum_{j=1}^{2} f_{T_x,J_x}(t,j) = \sum_{j=1}^{2} \frac{f_{T_x,J_x}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \sum_{j=1}^{2} \mu_x^{(j)}(t).
\end{aligned}$$

□

Napomena 1.3.8.

1. Ako nam je poznato $\mu_{x+t}^{(j)}$, $j = 1, 2$ tada možemo odrediti:

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} \mu_{x+t}^{(j)} \qquad \text{(vidi teorem 1.3.7)} \tag{1.20}$$

$$_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds} \qquad \text{(vidi 1.17)} \tag{1.21}$$

$$f_{T_x,J_x}(t,j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} \qquad \text{(napomena 1.3.6)} \tag{1.22}$$

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T_x,J_x}(t,j) \overset{1.6}{=} \sum_{j=1}^{2} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} = {}_t p_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{2} \mu_{x+t}^{(j)} \overset{\substack{\text{Tm.}\\ 1.3.7}}{=} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} \tag{1.23}$$

$$_t q_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J_x}(s,j)\, ds = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)}\, ds \tag{1.24}$$

$$_t q_x^{(\tau)} = \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds \tag{1.25}$$

$$f_{J_x}(j) = {}_\infty q_x^{(j)} \tag{1.26}$$

Uvjetna funkcija vjerojatnosti od J_x za dano $T_x = t$ dana je s

$$f_{J_x|T_x}(j \mid T_x = t) = \frac{f_{T_x,J_x}(t,j)}{f_{T_x}(t)} = \frac{{}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}}{{}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)}} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{2} \mu_{x+t}^{(j)}}. \tag{1.27}$$

2. Iz 1.24 slijedi da vjerojatnost smanjenja od (x) u intervalu $[x, x+t]$ zbog uzroka smanjenja j ovisi o $_s p_x^{(\tau)}, 0 \le s \le t$, a time i o svim komponentama intenziteta smanjenja zbog bilo kojeg uzroka (tj. ovisi o $\mu_{x+s}^{(1)}$ i $\mu_{x+s}^{(2)}$). Stoga, kada povećamo intenzitet smanjenja različit od intenziteta smanjenja zbog uzroka smanjenja j,

$$_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)} = 1 - \sum_{j=1}^{2} {}_t q_x^{(j)}$$

se smanji, što posljedično dovodi do smanjenja $_t q_x^{(j)}$. S obzirom na ovaj fenomen, model dvostrukog smanjenja je poznat i kao *teorija konkurentnih rizika* u analizi preživljavanja.

1.4 Cjelobrojno vrijeme do smanjenja

U nekim modelima dvostrukog smanjenja neprekidna slučajna varijabla Vrijeme do smanjenja T_x je neadekvatna jer postoji strogo pozitivna vjerojatnost smanjenja u određeno vrijeme t, npr. u mirovinskom sustavu svake države postoji obvezna dob u kojoj svi aktivni zaposlenici moraju otići u mirovinu. Zbog toga promatramo diskretiziranu verziju neprekidne slučajna varijable T_x.

Definicija 1.4.1. *Cjelobrojno vrijeme do smanjenja od* (x) *je diskretna slučajna varijabla definirana s*

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor.$$

Zajednička funkcija vjerojatnosti diskretnih slučajnih varijabli K_x i J_x, $f_{K_x,J_x}(k, j)$ dana je s

$$f_{K_x,J_x}(k, j) = \mathbb{P}(K_x = k, J_x = j) = \mathbb{P}(k \le T_x < k + 1, J_x = j) = \int_k^{k+1} f_{T_x,J_x}(t, j)\, dt$$
$$\overset{1.22}{=} \int_k^{k+1} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}\, dt.$$

Supstitucijom $t = k + s$ gornji integral postaje

$$= \int_0^1 {}_{k+s}p_x^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(j)}\, ds \overset{\text{Prop. } 1.2.1}{=} \int_0^1 {}_k p_x^{(\tau)}\, {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(j)}\, ds = {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(j)}\, ds$$
$$\overset{1.24}{=} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}.$$

Kad nam je poznata zajednička funkcija vjerojatnosti diskretnih slučajnih varijabli K_x i J_x, možemo odrediti marginalne funkcije vjerojatnosti od K_x, J_x te uvjetno očekivanje od K_x uz dano $J_x = j$.

$$f_{K_x}(k) = \mathbb{P}(K_x = k) = \sum_{j=1}^{2} f_{K_x,J_x}(k, j) = \sum_{j=1}^{2} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} = {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)}$$

$$f_{J_x}(j) = \mathbb{P}(J_x = j) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{K_x,J_x}(k, j) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}$$

$$\mathbb{E}\,(K_x \mid J_x = j) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(K_x = k \mid J_x = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k f_{K_x,J_x}(k, j)}{\mathbb{P}(J_x = j)} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{{}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}}{f_{J_x}(j)}$$

Poglavlje 2

Analiza parametarskog modela kroz primjere

U prethodnom poglavlju smo uveli parametarski model dvostrukog smanjenja te smo u napomeni 1.3.8 vidjeli da jednom kad znamo $\mu_{x+t}^{(1)}$ i $\mu_{x+t}^{(2)}$ da je onda u potpunosti određen model pa možemo izračunati sve vjerojatnosti koje su nam potrebne u praksi. Možemo izračunati ${}_tp_x^{(\tau)}$, vjerojatnost da (x) doživi dob $x+t$, vjerojatnost da završi stanje u kojem se (x) trenutno nalazi u predstojećem intervalu duljine t zbog uzroka j, tj. ${}_tq_x^{(j)}$ i vjerojatnost smanjenja od (x) zbog bilo kojeg uzroka u predstojećem intervalu duljine t, ${}_tq_x^{(\tau)}$. Kroz nekoliko primjera demonstrirat ćemo kako odrediti i izračunati navedeno.

2.1 Nezavisnost slučajnih varijabli Vrijeme do smanjenja i Uzrok smanjenja

Primjer 2.1.1. [1] Model dvostrukog smanjenja zadan je intenzitetima smanjenja

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^{(1)} &= \frac{1}{100-(x+t)} \\ \mu_{x+t}^{(2)} &= \frac{2}{100-(x+t)}, \quad t < 100-x. \end{aligned}$$

1. Za navedeni model izračunajte ${}_tp_x^{(\tau)}, {}_tq_x^{(j)}, f_{T_x,J_x}(t,j),\ j=1,2$ i $f_{T_x}(t)$.

2. Nacrtajte ${}_tp_x^{(\tau)}, {}_tq_x^{(j)}, f_{T_x,J_x}(t,j),\ j=1,2$ i $f_{T_x}(t)$ za $x = 30, 40, 50$ i 60.

3. Odredite marginalnu distribuciju od J_x i uvjetnu distribuciju od J_x za dano $T_x = t$.

Rješenje:

1. Prema teoremu 1.3.7,

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{1}{100-(x+t)} + \frac{2}{100-(x+t)} = \frac{3}{100-(x+t)}, \quad t < 100-x.$$

Stoga, ${}_tp_x^{(\tau)}$ je dana s

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &\overset{1.17}{=} exp\left(-\int_0^t \frac{3}{100-(x+s)}\,ds\right) = exp\left(log\left(\frac{100-x}{100-(x+t)}\right)^{-3}\right) \\ &= \left(\frac{100-(x+t)}{100-x}\right)^3, \quad t < 100-x, \end{aligned}$$

pri čemu je $exp(x) \coloneqq e^x$ i $log(x) \coloneqq log_e(x)$.

Zajednička distribucija slučajnih varijabli T_x i J_x određena je s

$$f_{T_x,J_x}(t,j) \overset{1.19}{=} {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{j\big(100-(x+t)\big)^2}{(100-x)^3}, \quad t < 100-x,\ j = 1,2.$$

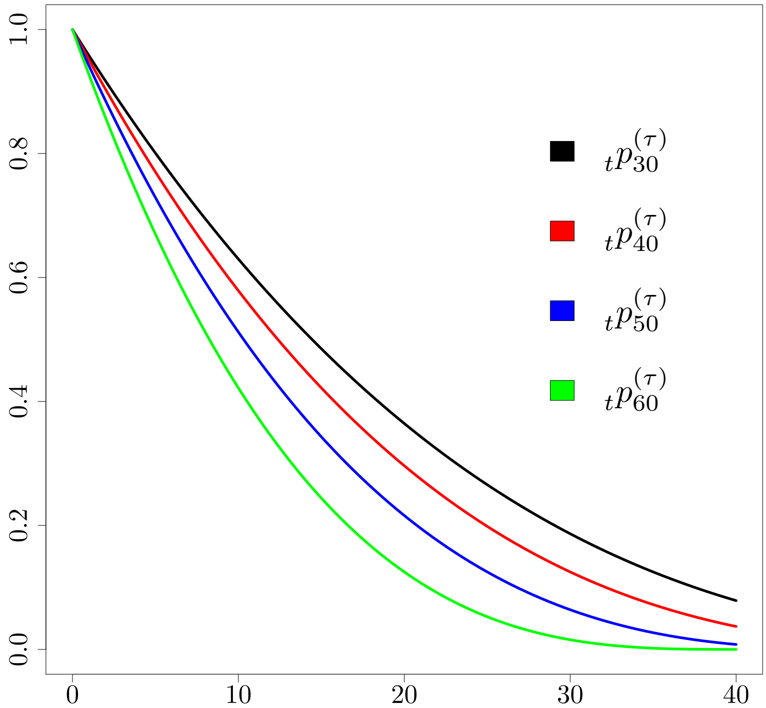
Po 1.24 je

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= \int_0^t f_{T_x,J_x}(s,j)\,ds = \int_0^t \frac{j\big(100-(x+s)\big)^2}{(100-x)^3}\,ds \\ &= \frac{j}{3}\left(1 - \frac{\big(100-(x+t)\big)^3}{(100-x)^3}\right), \quad t < 100-x,\ j = 1,2. \end{aligned}$$

Funkcija gustoće od T_x je

$$f_{T_x}(t) \overset{1.23}{=} {}_tp_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{2} \mu_{x+t}^{(j)} = \frac{3\big(100-(x+t)\big)^2}{(100-x)^3}, \quad t < 100-x.$$

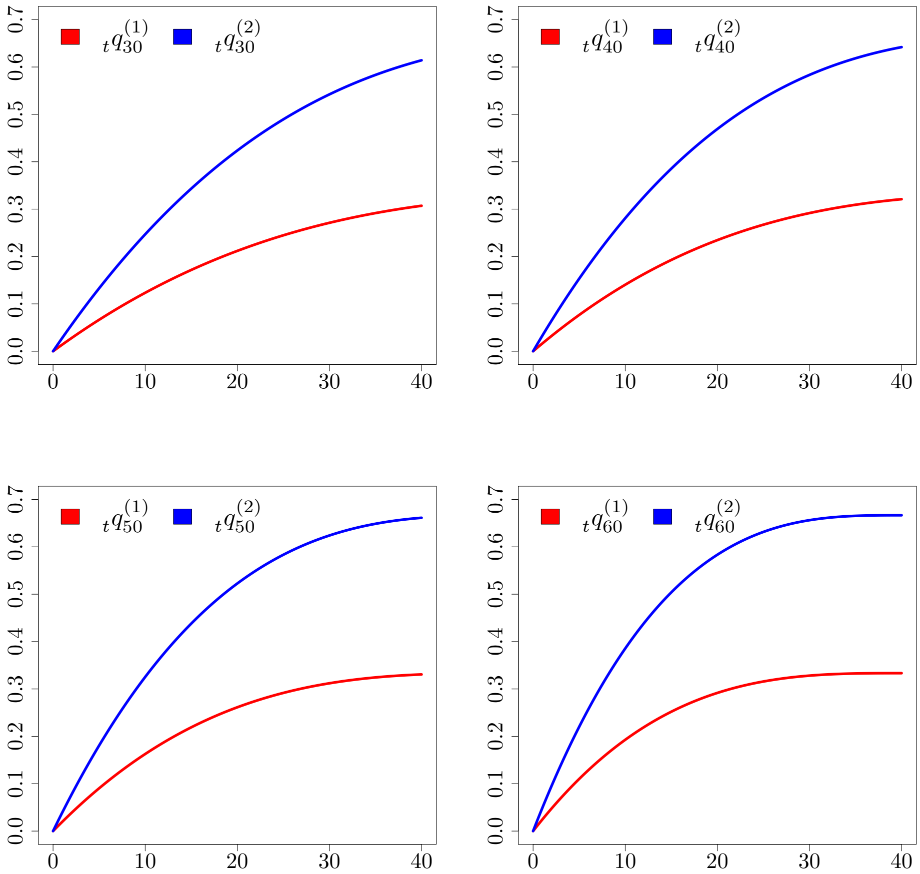
2. Na slici 2.1 prikazani su grafovi od ${}_tp_x^{(\tau)}$ za četiri dobi $30, 40, 50$ i 60. Za sve dobi ${}_tp_x^{(\tau)}$ je padajuća funkcija. Najstrmiji je graf of ${}_tp_{60}^{(\tau)}$ što je i očekivano budući da je ${}_tp_x^{(\tau)}$ vjerojatnost da (x) doživi dob $x+t$. Vrijednosti od ${}_tp_{60}^{(\tau)}$ su približno 0 za $t \geq 30$.



Slika 2.1: Graf od ${}_tp_x^{(\tau)}$ za $x = 30, 40, 50$ i 60

Slika 2.2 na stranici 15 prikazuje grafove od ${}_tq_x^{(1)}$ i ${}_tq_x^{(2)}$ za dobi $30, 40, 50$ i 60. Za sve dobi ${}_tq_x^{(1)}$ i ${}_tq_x^{(2)}$ su rastuće funkcije. Primijetimo da se nagib, tj. 'brzina rasta' od ${}_tq_x^{(1)}$ i ${}_tq_x^{(2)}$ povećava kako se dob povećava od 30 do 60 godina, tj. vjerojatnost da završi stanje u kojem se (x) trenutno nalazi u predstojećem intervalu duljine t zbog uzroka j je veća za osobu starosti 60 nego za osobu koja ima 30 godina.

Na slici 2.3 na stranici 16 prikazani su grafovi od $f_{T_x}(t)$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$ i $f_{T_x,J_x}(t,2)$ za četiri dobi $30, 40, 50$ i 60. Primijetimo da je oblik krivulja za $f_{T_x}(t)$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$ i $f_{T_x,J_x}(t,2)$ isti za sve dobi te da grafovi funkcija $f_{T_x}(t)$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$ i $f_{T_x,J_x}(t,2)$ postaju strmiji kako x raste.



Slika 2.2: Grafovi od $_tq_x^{(1)}$ i $_tq_x^{(2)}$ za $x = 30, 40, 50$ i 60

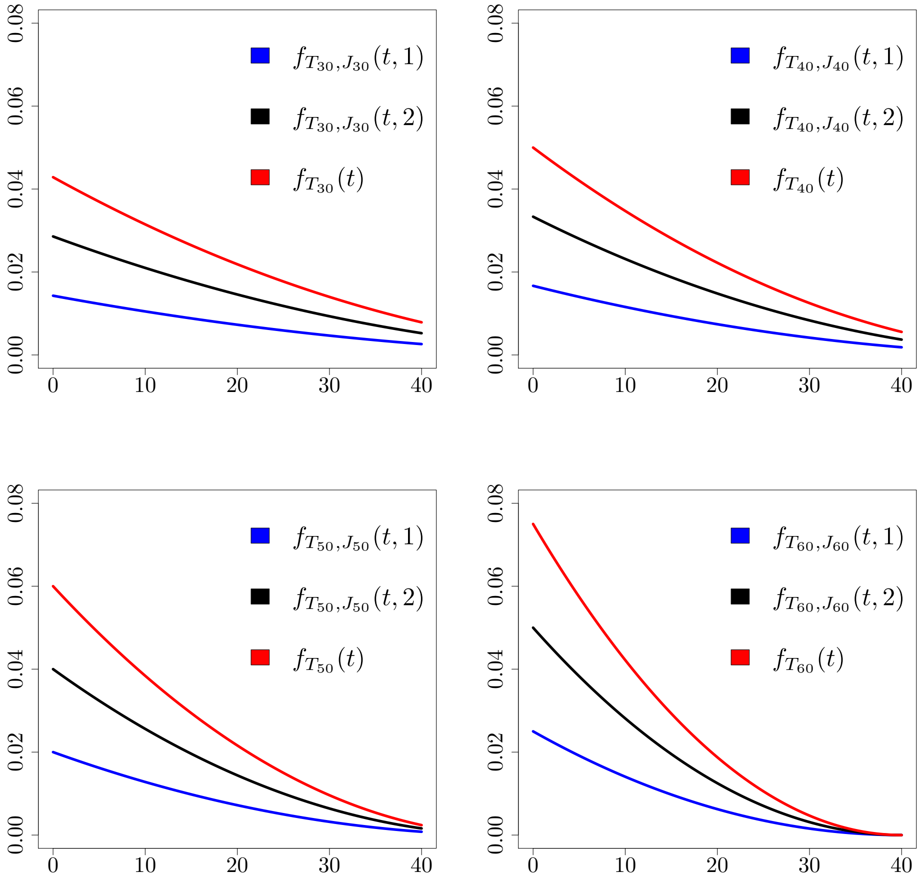
3. Funkcija vjerojatnosti od J_x dana je s

$$f_{J_x}(j) \overset{1.26}{=} \int_0^{100-x} \frac{j\big(100-(x+s)\big)^2}{(100-x)^3}\,ds = \frac{j}{3}, \; j = 1, 2.$$

Naposljetku, uvjetna funkcija vjerojatnosti od J_x za dano $T_x = t$ je

$$f_{J_x|T_x}(j \mid T_x = t) \overset{1.27}{=} \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{2} \mu_{x+t}^{(j)}} = \frac{j}{3}, \quad t < 100 - x, \; j = 1, 2.$$

Primijetimo da je uvjetna distribucija od J_x jednaka marginalnoj distribuciji od J_x, pa su T_x i J_x nezavisne slučajne varijable.



Slika 2.3: Grafovi od $f_{T_x}(t)$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$ i $f_{T_x,J_x}(t,2)$

2.2 Zavisnost slučajnih varijabli Vrijeme do smanjenja i Uzrok smanjenja

Primjer 2.2.1. [1] Razmotrite model dvostrukog smanjenja zadan s intenzitetima smanjenja

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{4}{81}, \quad t \geq 0,$$
$$\mu_{x+t}^{(2)} = \frac{2t}{81}, \quad t \geq 0.$$

1. Izračunajte ${}_tp_x^{(\tau)}$, $f_{T_x}(t)$ i $f_{T_x,J_x}(t,j)$, $j = 1, 2$.

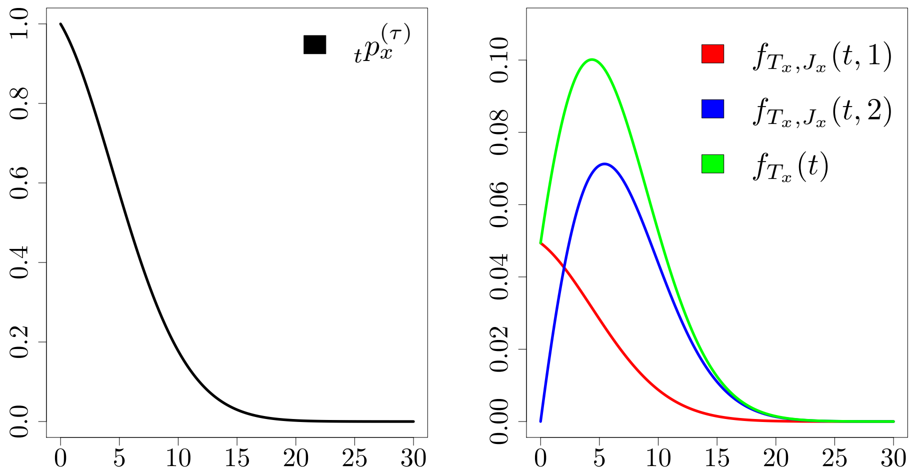
2. Nacrtajte ${}_tp_x^{(\tau)}$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$, $f_{T_x,J_x}(t,2)$ i $f_{T_x}(t)$.

3. Izračunajte $f_{J_x}(j)$ i $f_{J_x|T_x}(j \mid T_x = t),\ j = 1,2$.

Rješenje:

1. Prema 1.20 je
$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{2t+4}{81},$$
pa je vjerojatnost da (x) doživi dob $x+t$
$${}_tp_x^{(\tau)} \overset{1.17}{=} exp\left(-\int_0^t \frac{2s+4}{81}\,ds\right) = exp\left(-\frac{t^2+4t}{81}\right), \quad t \geq 0.$$
Generalizirana zajednička funkcija gustoće od T_x i J_x je prema 1.19
$$f_{T_x,J_x}(t,j) = \begin{cases} \frac{4}{81}exp\left(-\frac{t^2+4t}{81}\right), & t \geq 0,\ j = 1 \\ \frac{2t}{81}exp\left(-\frac{t^2+4t}{81}\right), & t \geq 0,\ j = 2 \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$
Funkcija gustoće od T_x je
$$f_{T_x}(t) \overset{1.23}{=} \frac{2t+4}{81}exp\left(-\frac{t^2+4t}{81}\right), \quad t \geq 0.$$

2. Uočimo da model ne ovisi eksplicitno o životnoj dobi x pa slika 2.4 na stranici 18 prikazuje grafove funkcija ${}_tp_x^{(\tau)}$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$, $f_{T_x,J_x}(t,2)$ i $f_{T_x}(t)$ za bilo koju životnu dob x. Primijetimo da je u ovom modelu ${}_tp_x^{(\tau)} \approx 0$ već za $t \geq 20$, dok je u primjeru 2.1.1 ${}_tp_x^{(\tau)} \approx 0$ za $t \geq 30,\ x = 60$, a za dobi $x \leq 40$ u primjeru 2.1.1 je ${}_tp_x^{(\tau)}$ znatno veća od nule. Također, vidimo da funkcija ${}_tp_x^{(\tau)}$ iz ovog primjera brže pada od funkcije ${}_tp_x^{(\tau)}$ iz primjera 2.1.1 za bilo koju životnu dob x. Krivulje od $f_{T_x}(t)$ i $f_{T_x,J_x}(t,2)$ su istog oblika dok se oblik krivulje od $f_{T_x,J_x}(t,1)$ razlikuje.



Slika 2.4: Grafovi od $_tp_x^{(\tau)}$, $f_{T_x,J_x}(t,1)$, $f_{T_x,J_x}(t,2)$ i $f_{T_x}(t)$

3. Prema 1.26 funkcija vjerojatnosti od J_x je

$$f_{J_x}(j) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{4}{81} exp\Big(-\frac{s^2+4s}{81}\Big)ds, & j=1 \\ \int_0^\infty \frac{2s}{81} exp\Big(-\frac{s^2+4s}{81}\Big)ds, & j=2 \\ 0, & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Primijetimo da je lakše izračunati $f_{J_x}(1)$.

$$\begin{aligned} f_{J_x}(1) &= \frac{4}{81}e^{\frac{4}{81}} \int_0^\infty exp\Big(-\frac{(s+2)^2}{81}\Big)ds \\ &= \frac{4}{81}e^{\frac{4}{81}}\sqrt{2\pi}\,\frac{9}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{9}{\sqrt{2}}} exp\left(-\frac{(s+2)^2}{2\Big(\frac{9}{\sqrt{2}}\Big)^2}\right)ds \end{aligned}$$

Supstitucijom $z = \frac{s+2}{\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)}$ gornji integral postaje

$$= \frac{4}{9} e^{\frac{4}{81}} \sqrt{\pi} \int_{\frac{2\sqrt{2}}{9}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{4}{9} e^{\frac{4}{81}} \sqrt{\pi}\left(1 - \Phi\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)\right)$$
$$\approx 0.3117356,$$

gdje je $\Phi(x)$ funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe $\mathcal{N}(0,1)$.
Slijedi da je

$$f_{J_x}(2) = 1 - f_{J_x}(1) = 0.6882644.$$

Iz 1.27 slijedi da je uvjetna funkcija vjerojatnosti od J_x za dano $T_x = t$

$$f_{J_x|T_x}(1 \mid T_x = t) = \frac{2}{t+2}$$
$$f_{J_x|T_x}(2 \mid T_x = t) = \frac{t}{t+2}.$$

Primijetimo da je uvjetna distribucija od J_x različita od marginalne distribucije od J_x, pa su T_x i J_x nezavisne slučajne varijable.

Poglavlje 3

Tablice dvostrukog smanjenja

Parametarski modeli nam nisu nužni ako postoji dovoljno kvalitetnih empirijskih podataka o intenzitetima smanjenja neprekidne slučajne varijable T_x u trenutku t zbog uzroka smanjenja j, $j = 1, 2$. Tada zajedničku distribuciju slučajnih varijabli T_x i J_x možemo izraziti i tablicama dvostrukog smanjenja. Tablice dvostrukog smanjenja konstruiramo koristeći koncept slučajnog broja doživjelih smanjenja ili koncept determinističkog broja doživjelih smanjenja na promatranoj grupi pojedinaca.

3.1 Koncept slučajnog broja doživjelih smanjenja

Neka je dana skupina od $l_a^{(\tau)}$ pojedinaca u životnoj dobi a koji se nalaze u nekom stanju. Pretpostavljamo da svi pojedinci imaju istu generaliziranu zajedničku funkciju gustoće neprekidne slučajne varijable Vrijeme do smanjenja T_x i diskretne slučajne varijable Uzrok smanjenja J_x. Neka je $\mathcal{L}_x^{(\tau)}$ slučajna varijabla koja predstavlja broj pojedinaca koji nisu doživjeli smanjenje do životne dobi x od $l_a^{(\tau)}$ pojedinaca iz početne skupine. Kad kažemo da pojedinac nije doživio smanjenje, mislimo da nije završilo stanje u kojem se pojedinac nalazio u životnoj dobi a kad smo ga počeli promatrati. Uz pojedinac nije doživio smanjenje do životne dobi x, također se govori da pojedinac nije napustio početnu skupinu do životne dobi x. $\mathcal{L}_x^{(\tau)}$ se može izraziti kao

$$\mathcal{L}_x^{(\tau)} = \sum_{i=1}^{l_a^{(\tau)}} Z_i,$$

gdje je Z_i Bernoullijeva slučajna varijabla

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{ako pojedinac } i \text{ iz početne skupine nije doživio smanjenje do dobi } x, x \geq a \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je

$$\mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(T_a \geq x - a) = {}_{x-a}p_a^{(\tau)}, \forall i = 1, \dots, l_a^{(\tau)}. \tag{3.1}$$

Stoga,

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &:= \mathbb{E}\left(\mathcal{L}_x^{(\tau)}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{l_a^{(\tau)}} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{l_a^{(\tau)}} \mathbb{E}(Z_i) = l_a^{(\tau)}\mathbb{E}(Z_1) \\ &\overset{3.1}{=} l_a^{(\tau)}\,{}_{x-a}p_a^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Primijetimo da je $l_x^{(\tau)}$ očekivani broj pojedinaca koji neće doživjeti smanjenje do životne dobi x iz početne skupine od $l_a^{(\tau)}$ pojedinaca.
Vrijedi

$$l_{x+1}^{(\tau)} \overset{3.2}{=} l_a^{(\tau)} \cdot {}_{x+1-a}p_a^{(\tau)} \overset{\text{Prop. } 1.2.1}{=} l_a^{(\tau)} \cdot {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \cdot p_x^{(\tau)} \overset{3.2}{=} l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)}. \tag{3.3}$$

Neka je ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$ slučajna varijabla koja predstavlja broj pojedinaca koji su napustili početnu skupinu pojedinaca, odnosno doživjeli su smanjenje u životnoj dobi iz intervala $(x,\ x+n)$, $x \geq a$ zbog uzroka j. Definiramo Bernoullijeve slučajne varijable $Y_{j_i}, i = 1, \dots, l_a^{(\tau)}$ s

$$Y_{j_i} = \begin{cases} 1, & \text{ako pojedinac } i \text{ napusti početnu skupinu u životnoj dobi iz} \\ & \text{intervala } (x, x+n), x \geq a \text{ zbog uzroka } j \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je

$${}_n\mathcal{D}_x^{(j)} = \sum_{i=1}^{l_a^{(\tau)}} Y_{j_i}.$$

Očekivanje slučajne varijable Y_{j_i} je

$$\mathbb{E}(Y_{j_i}) = \mathbb{P}(Y_{j_i} = 1) = \mathbb{P}(x - a \leq T_a \leq x + n - a, J_a = j) = \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)}\mu_{a+t}^{(j)}\,dt$$

Supstitucijom $t - (x - a) = u$ gornji integral postaje

$$\begin{aligned} &= \int_0^n {}_{u+(x-a)}p_a^{(\tau)}\mu_{u+x}^{(j)}\,du = \int_0^n {}_{x-a}p_a^{(\tau)}\,{}_up_x^{(\tau)}\mu_{u+x}^{(j)}\,du = {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \int_0^n {}_up_x^{(\tau)}\mu_{u+x}^{(j)}\,du \\ &= {}_{x-a}p_a^{(\tau)}\,{}_nq_x^{(j)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

pa je

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(j)} &:= \mathbb{E}({}_n\mathcal{D}_x^{(j)}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{l_a^{(\tau)}} Y_{j_i}\right) = l_a^{(\tau)}\mathbb{E}\left(Y_{j_1}\right) \overset{3.4}{=} l_a^{(\tau)}\,{}_{x-a}p_a^{(\tau)}\,{}_nq_x^{(j)} \\ &= l_x^{(\tau)}\,{}_nq_x^{(j)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Uočimo da je ${}_nd_x^{(j)}$ očekivani broj pojedinaca koji će napustiti početnu skupinu u životnoj dobi iz intervala $(x, x+n), x \geq a$ zbog uzroka j. Slučajna varijabla ${}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)}$ predstavlja broj pojedinaca koji su napustili početnu skupinu u životnoj dobi iz intervala $(x, x+n), x \geq a$ zbog bilo kojeg uzroka. Tada je

$${}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} {}_n\mathcal{D}_x^{(j)}.$$

Stoga,

$${}_nd_x^{(\tau)} := \mathbb{E}({}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)}) = \sum_{j=1}^{2} {}_nd_x^{(j)} \overset{3.5}{=} \sum_{j=1}^{2} l_x^{(\tau)}\,{}_nq_x^{(j)} = l_x^{(\tau)}\,{}_nq_x^{(\tau)}. \tag{3.6}$$

Nadalje,

$$l_{x+1}^{(\tau)} \overset{3.3}{=} l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}\left(1 - \sum_{j=1}^{2} q_x^{(j)}\right) \overset{3.5}{=} l_x^{(\tau)} - \sum_{j=1}^{2} d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)}. \tag{3.7}$$

Ako je $n = 1$, može se izostaviti, pa pišemo $d_x^{(j)}$ i $d_x^{(\tau)}$. Dobiveni rezultati omogućuju nam da dobijemo $l_x^{(\tau)}$ i $d_x^{(j)}$ pomoću $p_x^{(\tau)}$ i $q_x^{(j)}$. Tablica koja prikazuje vrijednosti $p_x^{(\tau)}$ i $q_x^{(j)}$ ili $l_x^{(\tau)}$ i $d_x^{(j)}$, $j = 1, 2$ za cjelobrojne x, naziva se *tablica dvostrukog smanjenja*.

3.2 Koncept determinističkog broja doživjelih smanjenja

Neka je dana skupina od $l_a^{(\tau)}$ pojedinaca u životnoj dobi a koja je podvrgnuta determinističkom intenzitetu smanjenja $\mu_y^{(\tau)}, y \geq a$. Tada je broj pojedinaca koji nisu napustili početnu skupinu do životne dobi $x, x \geq a$ dan s

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} exp\left(-\int_a^x \mu_y^{(\tau)}\,dy\right), \tag{3.8}$$

dok je broj pojedinaca koji su napustili početnu skupinu u životnoj dobi iz intervala $(x, x+1)$, $x \geq a$ zbog bilo kojeg uzroka određen s

$$\begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \left(1 - \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right) \overset{3.8}{=} l_x^{(\tau)} \left(1 - exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_y^{(\tau)}\, dy\right)\right) \\ &= l_x^{(\tau)} \left(1 - p_x^{(\tau)}\right) = l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$q_x^{(\tau)}$ interpretiramo kao efektivnu godišnju ukupnu stopu smanjenja u dobnom intervalu $(x, x+1)$ određenu intenzitetom $\mu_y^{(\tau)}, x \leq y \leq x+1$. Primijetimo da je $l_x^{(\tau)}$ derivabilna funkcija po x kada dob x promatramo kao neprekidnu varijablu pa vrijedi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} exp\left(-\int_a^x \mu_y^{(\tau)}\, dy\right) \left(-\mu_x^{(\tau)}\right) = -\mu_x^{(\tau)} l_a^{(\tau)}{}_{x-a}p_a^{(\tau)} = -\mu_x^{(\tau)} l_x^{(\tau)} \\ \Rightarrow \quad & \mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} l_x^{(\tau)} = -\frac{d}{dx} log\left(l_x^{(\tau)}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Stoga, $\mu_x^{(\tau)}$ interpretiramo kao stopu smanjenja $log\left(l_x^{(\tau)}\right)$. $l_x^{(\tau)}$ pojedinaca koji nisu doživjeli smanjenje do životne dobi x će doživjeti smanjenje u budućim godinama zbog jednog od dva uzroka, pa skupinu od $l_x^{(\tau)}$ pojedinaca razvrstavamo u dvije podskupine ovisno o uzroku zbog kojeg će pojedinci doživjeti smanjenje. $l_x^{(j)}$ je broj pojedinaca od njih $l_x^{(\tau)}$ koji će doživjeti smanjenje u budućim godinama zbog uzroka j, $j = 1, 2$.
Vrijedi

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} l_x^{(j)}. \tag{3.11}$$

Definicija 3.2.1. *Intenzitet smanjenja u dobi x zbog uzroka smanjenja j je*

$$\mu_x^{(j)} = \lim_{h \to 0} \frac{l_x^{(j)} - l_{x+h}^{(j)}}{h l_x^{(\tau)}} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} l_x^{(j)}.$$

Imamo

$$\mu_x^{(\tau)} \overset{3.10}{=} -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} l_x^{(\tau)} \overset{3.11}{=} -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{2} l_x^{(j)} \overset{\substack{\text{Def.}\\ 3.2.1}}{=} -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \sum_{j=1}^{2} -\mu_x^{(j)} l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} \mu_x^{(j)},$$

pa vidimo da smo i ovim pristupom dobili da je ukupan intenzitet smanjenja jednak zbroju intenziteta smanjenja obzirom na dva uzroka smanjenja.

Neka $q_x^{(j)}$ označava udio od $l_x^{(\tau)}$ pojedinaca koji nisu napustili početnu skupinu do dobi x, ali će napustiti skupinu u dobi iz intervala $(x, x+1)$ zbog uzroka j. Izvedimo formulu za $q_x^{(j)}$.
Prema definiciji 3.2.1 je

$$\mu_y^{(j)} = -\frac{1}{l_y^{(\tau)}}\frac{d}{dy}l_y^{(j)} \quad \Rightarrow \quad -dl_y^{(j)} = \mu_y^{(j)} l_y^{(\tau)} dy.$$

Integriranjem gornjeg izraza dobivamo

$$\int_x^{x+1} -dl_y^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)} dy \quad \Leftrightarrow \quad l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = d_x^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)} dy.$$

Dijeljenjem gornje jednakosti s $l_x^{(\tau)}$ dobivamo

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_x^{x+1} \frac{l_y^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\mu_y^{(j)} dy = \int_x^{x+1} {}_{y-x}p_x^{(\tau)}\mu_y^{(j)} dy = \int_0^1 {}_u p_x^{(\tau)}\mu_{x+u}^{(j)} du \overset{1.24}{=} q_x^{(j)}.$$

Primijetimo da smo dobili istu formulu za $q_x^{(j)}$ kao i u konceptu slučajnog broja doživjelih smanjenja.

Tablicu dvostrukog smanjenja na temelju ovog pristupa možemo konstruirati tako da iz zadanih vrijednosti $q_x^{(j)}$, $j = 1, 2$ i $l_x^{(\tau)}$ za neke cjelobrojne x izračunamo

$$p_x^{(\tau)} = 1 - \sum_{j=1}^{2} q_x^{(j)}, \quad d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}.$$

Ako su nam dani $d_x^{(j)}$, $j = 1, 2$ i $l_x^{(\tau)}$ za neke cjelobrojne x, onda možemo izračunati

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}},\ j = 1, 2 \text{ i } p_x^{(\tau)} = 1 - \sum_{j=1}^{2} q_x^{(j)}.$$

3.3 Primjeri

Primjer 3.3.1. [1] Prvu godinu fakulteta koji traje 4 godine upisalo je 1000 studenata. U tablici 3.1 dane su vjerojatnosti smanjenja zbog dva uzroka. Uzrok $j = 1$ je pad godine zbog akademskog neuspjeha, a uzrok $j = 2$ je odustajanje zbog bilo kojeg drugog razloga.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
0	0.15	0.25
1	0.10	0.20
2	0.05	0.15
3	0.00	0.10

Tablica 3.1: Vjerojatnosti smanjenja

1. Izračunajte očekivani broj studenata koji će diplomirati.
2. Izračunajte očekivani broj studenata koji će pasti godinu tijekom četverogodišnjeg programa.

Rješenje:
Da bismo izračunali očekivani broj studenata koji će diplomirati $l_4^{(\tau)}$ i očekivani broj studenata koji će pasti godinu tijekom četverogodišnjeg programa moramo konstruirati tablicu dvostrukog smanjenja.
Koristeći formule

$$\begin{aligned} q_x^{(\tau)} &= q_x^{(1)} + q_x^{(2)} \\ p_x^{(\tau)} &= 1 - q_x^{(\tau)} \\ l_0^{(\tau)} &= 1000, \quad l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)},\ x = 1, 2, 3 \\ d_x^{(j)} &= l_x^{(\tau)} q_x^{(j)},\ j = 1, 2, \end{aligned}$$

dobivamo tablicu dvostrukog smanjenja 3.2 koja se nalazi na stranici 26.

1. Sada je očekivani broj studenata koji će diplomirati

$$l_4^{(\tau)} = l_3^{(\tau)} - d_3^{(1)} - d_3^{(2)} = 336 - 0 - 33.6 = 302.4,$$

2. a očekivani broj studenata koji će pasti godinu tijekom četverogodišnjeg programa je

$$\sum_{x=0}^{3} d_x^{(1)} = 150 + 60 + 21 + 0 = 231.0.$$

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
0	0.15	0.25	0.60	1000.00	150.00	250.00
1	0.10	0.20	0.70	600.00	60.00	120.00
2	0.05	0.15	0.80	420.00	21.00	63.00
3	0.00	0.10	0.90	336.00	0.00	33.60

Tablica 3.2: Tablica dvostrukog smanjenja

Primjer 3.3.2. [4] Prema podacima danim u dijelu tablice dvostrukog smanjenja 3.3 izračunajte vjerojatnost da (50) doživi smanjenje zbog uzroka $j = 2$ između 51. i 53. godine. Podatke koji se nalaze na mjestu povlaka morate izračunati sami iz preostalih podataka u tablici ukoliko vam trebaju.

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
50	-	100	300
51	700	50	-
52	470	40	-
53	320	-	-

Tablica 3.3: Tablica dvostrukog smanjenja

Rješenje:
Vjerojatnost da (50) doživi smanjenje zbog uzroka $j = 2$ između 51. i 53. godine je

$$_{1|2}q_{50}^{(2)} = p_{50}^{(\tau)}\,{}_2q_{51}^{(2)}. \tag{3.12}$$

Prema formuli 3.3 je

$$p_{50}^{(\tau)} = \frac{l_{51}^{(\tau)}}{l_{50}^{(\tau)}}.$$

Uočimo da $l_{51}^{(\tau)}$ možemo iščitati iz tablice 3.3, a $l_{50}^{(\tau)}$ računamo iz danih podataka pomoću formule 3.7

$$l_{50}^{(\tau)} = l_{51}^{(\tau)} + d_{50}^{(1)} + d_{50}^{(2)} = 700 + 100 + 300 = 1100.$$

Slijedi da je

$$p_{50}^{(\tau)} = \frac{l_{51}^{(\tau)}}{l_{50}^{(\tau)}} = \frac{700}{1100} = \frac{7}{11}. \tag{3.13}$$

Izračunajmo ${}_2q_{51}^{(2)}$.

$$ {}_2q_{51}^{(2)} = q_{51}^{(2)} + p_{51}^{(\tau)} q_{52}^{(2)} \tag{3.14} $$

Prema formuli 3.5

$$ q_{51}^{(2)} = \frac{d_{51}^{(2)}}{l_{51}^{(\tau)}} = \frac{180}{700} = \frac{9}{35}, \tag{3.15} $$

pri čemu je

$$ d_{51}^{(2)} \overset{3.7}{=} l_{51}^{(\tau)} - d_{51}^{(1)} - l_{52}^{(\tau)} = 700 - 50 - 470 = 180 $$

izračunato iz preostalih podataka u tablici dvostrukog smanjenja 3.3.

$$ p_{51}^{(\tau)} \overset{3.3}{=} \frac{l_{52}^{(\tau)}}{l_{51}^{(\tau)}} = \frac{470}{700} = \frac{47}{70} \tag{3.16} $$

$$ q_{52}^{(2)} \overset{3.5}{=} \frac{d_{52}^{(2)}}{l_{52}^{(\tau)}} = \frac{110}{470} = \frac{11}{47}, \tag{3.17} $$

gdje je

$$ d_{52}^{(2)} \overset{3.7}{=} l_{52}^{(\tau)} - d_{52}^{(1)} - l_{53}^{(\tau)} = 470 - 40 - 320 = 110. $$

Uvrštavanjem 3.15, 3.16 i 3.17 u 3.14 dobivamo

$$ {}_2q_{51}^{(2)} = \frac{29}{70}. \tag{3.18} $$

Slijedi da je

$$ {}_{1|2}q_{50}^{(2)} \overset{3.12}{=} p_{50}^{(\tau)}\,{}_2q_{51}^{(2)} \overset{\substack{3.13\\3.18}}{=} \frac{7}{11}\frac{29}{70} = \frac{29}{110}. $$

Poglavlje 4

Pridruženi model jednostrukog smanjenja

Za svaki od uzroka smanjenja $j \in \{1, 2\}$ u modelu dvostrukog smanjenja možemo definirati model jednostrukog smanjenja koji ovisi samo o određenom uzroku smanjenja kako bismo proučili utjecaj jednog uzroka smanjenja neovisno o drugom uzroku. Takav model nazivamo *pridruženi model jednostrukog smanjenja*, a pripadajući uzrok smanjenja j zovemo *aktivni uzrok smanjenja*.

4.1 Funkcije pridruženog modela jednostrukog smanjenja

Definicija 4.1.1. *Vjerojatnost da* (x) *neće doživjeti smanjenje u predstojećem intervalu duljine* t *zbog aktivnog uzroka smanjenja* j *je*

$$ {}_tp_x'^{(j)} = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)}\, ds \right). \tag{4.1}$$

Vjerojatnost smanjenja od (x) *u predstojećem intervalu duljine* t *zbog aktivnog uzroka smanjenja* j *je*

$$ {}_tq_x'^{(j)} = 1 - {}_tp_x'^{(j)}. \tag{4.2}$$

${}_tq_x'^{(j)}$ zovemo *apsolutna stopa smanjenja*, gdje riječ stopa koristimo u svrhu razlikovanja ${}_tq_x^{(j)}$ i ${}_tq_x'^{(j)}$. U napomeni 1.3.8 vidjeli smo da ${}_tq_x^{(j)}$ ovisi o svim komponentama intenziteta smanjenja zbog bilo kojeg uzroka pa posljedično ovisi o svim uzrocima smanjenja (tj. ovisi o uzroku 1 i 2), a ${}_tq_x'^{(j)}$ ovisi isključivo o aktivnom uzroku smanjenja j. Također, uočimo da je

$$\lim_{t\to\infty} {}_tp_x^{(\tau)} = \lim_{t\to\infty} exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds\right) = 0 \tag{4.3}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds = \infty \quad \overset{\substack{\text{Tm.}\\ 1.3.7}}{\Rightarrow} \int_0^\infty \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \mu_{x+s}^{(j)}\, ds = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \mu_{x+s}^{(j)}\, ds = \infty \text{ bar za jedan uzrok } j\text{, ali ne nužno za svaki } j.$$

Stoga može postojati j takav da je $\int_0^\infty \mu_{x+s}^{(j)}\, ds$ konačan i za taj j

$$\lim_{t\to\infty} {}_tp_x'^{(j)} = \lim_{t\to\infty} exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)}\, ds\right) \neq 0. \tag{4.4}$$

Iz formule 4.3 slijedi da je ${}_tp_x^{(\tau)}$ prava funkcija doživljenja jer u dugom roku ne postoji pojedinac koji nije doživio smanjenje, a iz formule 4.4 slijedi da ${}_tp_x'^{(j)}$ nije prava funkcija doživljenja poput ${}_tp_x^{(\tau)}$ jer u dugom roku može postojati pozitivan broj pojedinaca koji nisu doživjeli smanjenje zbog uzroka j, što je razumna pretpostavka.

4.2 Veze između funkcija modela dvostrukog smanjenja i pridruženog modela jednostrukog smanjenja

Vrijedi

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &\overset{1.21}{=} exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds\right) \overset{\substack{\text{Tm.}\\ 1.3.7}}{=} exp\left(-\int_0^t \sum_{j=1}^2 \mu_{x+s}^{(j)}\, ds\right) = \prod_{j=1}^2 exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)}\, ds\right) \\ &= \prod_{j=1}^2 {}_tp_x'^{(j)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Budući da je ${}_tp_x'^{(j)} \in (0,1)$ iz formule 4.5 slijedi

$${}_tp_x^{(\tau)} \leq {}_tp_x'^{(j)} \text{ za svaki } j. \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow \quad {}_tp_x'^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)} \text{ za svaki } j$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)}\,dt \geq \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}\,dt = q_x^{(j)}$$

Uočimo da je

$$\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)}\,dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}{}_tp_x'^{(j)}\,dt = \left(-{}_tp_x'^{(j)}\right)\Big|_0^1 = 1 - p_x'^{(j)} = q_x'^{(j)},$$

pa smo pokazali da je

$$q_x'^{(j)} \geq q_x^{(j)}. \tag{4.7}$$

Iz nejednakosti 4.6 slijedi

$${}_tq_x^{(\tau)} \geq {}_tq_x'^{(j)} \tag{4.8}$$

pa dobivamo

$$q_x^{(j)} \leq q_x'^{(j)} \leq {}_tq_x^{(\tau)} \tag{4.9}$$

Primjer 4.2.1. [1] U modelu je $q_{40}'^{(1)} = 0.02$ i $q_{40}'^{(2)} = 0.04$. Izračunajte $q_{40}^{(\tau)}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} q_{40}'^{(1)} = 0.02 \quad &\overset{4.2}{\Rightarrow} \quad p_{40}'^{(1)} = 1 - q_{40}'^{(1)} = 0.98 \\ q_{40}'^{(2)} = 0.04 \quad &\overset{4.2}{\Rightarrow} \quad p_{40}'^{(2)} = 1 - q_{40}'^{(2)} = 0.96 \end{aligned}$$

Sada iz formule 4.5 slijedi da je

$$\begin{aligned} & p_{40}^{(\tau)} = 0.98 \cdot 0.96 = 0.9408 \\ \Rightarrow \quad & q_{40}^{(\tau)} = 1 - p_{40}^{(\tau)} = 0.0592 \end{aligned}$$

Primjer 4.2.2. [2] U modelu je dano $q_x'^{(2)} = 0.008$, ${}_{1|}q_x^{(1)} = 0.0025$ i $q_{x+1}^{(1)} = 0.0067$. Izračunajte $q_x'^{(1)}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} {}_{1|}q_x^{(1)} = p_x^{(\tau)}q_{x+1}^{(1)} \quad &\Rightarrow \quad p_x^{(\tau)} = 0.3731 \\ p_x^{(\tau)} \overset{4.5}{=} p_x'^{(1)} \cdot p_x'^{(2)} &\overset{4.2}{=} (1 - q_x'^{(1)})(1 - q_x'^{(2)}) \end{aligned}$$

pa je

$$p_x^{(\tau)} = 0.3731 = (1 - q_x'^{(1)})(0.992) \quad \Rightarrow \quad q_x'^{(1)} = 0.6239.$$

Napomena 4.2.3. Ako znamo $\mu_x^{(j)}$ za svaki x onda pomoću formula 4.1 i 4.2 možemo izračunati ${}_tp_x'^{(j)}$ i ${}_tq_x'^{(j)}$ za sve x i t i konstruirati tablicu jednostrukog smanjenja koju zovemo *pridružena tablica jednostrukog smanjenja*. U nekim slučajevima nemamo informacije o $\mu_x^{(j)}$, ali imamo informacije o $q_x^{(j)}$. Tada nismo u mogućnosti izračunati $q_x'^{(j)}$ direktno, ali uz određene pretpostavke na intenzitet smanjenja postoji veza između $q_x'^{(j)}$ i $q_x^{(j)}$. Dvije najuobičajenije pretpostavke su:

1. konstantan intenzitet smanjenja na jediničnom dobnom intervalu
2. uniformna razdioba smanjenja na jediničnom dobnom intervalu

4.3 Konstantan intenzitet smanjenja na jediničnom dobnom intervalu

Pretpostavljamo da su intenzitet smanjenja zbog uzroka j i ukupan intenzitet smanjenja konstantni na intervalu $(x, x+1)$ za cijeli broj $x, x \geq 0$, tj.

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)} \tag{4.10}$$

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)}, \quad 0 \leq t < 1,\ x \text{ cijeli broj}, x \geq 0. \tag{4.11}$$

Tada je

$$\begin{aligned} q_x^{(j)} &\overset{1.24}{=} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)}\, ds \overset{4.10}{=} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}\, ds = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}\, ds \\ &\overset{1.25}{=} \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} & p_x^{(\tau)} \overset{1.21}{=} exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds\right) \overset{4.11}{=} exp\left(-\int_0^1 \mu_x^{(\tau)}\, ds\right) = exp\left(-\mu_x^{(\tau)}\right). \\ \Rightarrow \quad & \mu_x^{(\tau)} = -log\, p_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Analogno,

$$\mu_x^{(j)} = -log\, p_x'^{(j)}. \tag{4.14}$$

Sada iz formula 4.12, 4.13 i 4.14 slijedi

$$q_x^{(j)} = q_x^{(\tau)} \frac{log p_x'^{(j)}}{log p_x^{(\tau)}}. \tag{4.15}$$

Napomena 4.3.1. Ako znamo $q_x'^{(j)}, j = 1, 2$ onda koristeći formule 4.2, 4.5 i 1.10 možemo izračunati $p_x'^{(j)}, j = 1, 2, p_x^{(\tau)}$ i $q_x^{(\tau)}$ pa znamo sve izraze koji se pojavljuju u formuli 4.15. Dakle, ako znamo $q_x'^{(j)}, j = 1, 2$, onda znamo izračunati $q_x^{(j)}$.

Formulu 4.15 možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} log p_x'^{(j)} &= \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} log p_x^{(\tau)} = log\left(\left(p_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}\right). \\ \Rightarrow \quad p_x'^{(j)} &= \left(p_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \\ \Rightarrow \quad q_x'^{(j)} &= 1 - \left(1 - q_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Napomena 4.3.2. Ako znamo $q_x^{(j)}, j = 1, 2$, onda možemo dobiti $q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} q_x^{(j)}$. Sada pomoću formule 4.16 možemo izračunati $q_x'^{(j)}$. Dakle, ako znamo $q_x^{(j)}, j = 1, 2$, onda znamo izračunati $q_x'^{(j)}, j = 1, 2$.

Primjer 4.3.3. [4] U modelu dvostrukog smanjenja je konstantan intenzitet smanjenja za svaki uzrok smanjenja tijekom životne dobi 50, 51 i 52. Detaljnije informacije o modelu dane su tablicom dvostrukog smanjenja 4.1.

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
50	1200	100	300
51	-	200	-
52	300	-	-

Tablica 4.1: Tablica dvostrukog smanjenja

Izračunajte $q_{51}'^{(1)}$ i $q_{51}'^{(2)}$. Podatke koji se nalaze na mjestu povlaka morate izračunati sami iz preostalih podataka u tablici, ukoliko vam trebaju.

Rješenje:

$$q_{51}'^{(j)} \overset{4.16}{=} 1 - \left(1 - q_{51}^{(\tau)}\right)^{\frac{q_{51}^{(j)}}{q_{51}^{(\tau)}}}, j = 1, 2 \tag{4.17}$$

Prema formuli 3.5

$$q_{51}^{(1)} = \frac{d_{51}^{(1)}}{l_{51}^{(\tau)}} = \frac{200}{800} = \frac{1}{4}, \tag{4.18}$$

$$q_{51}^{(2)} = \frac{d_{51}^{(2)}}{l_{51}^{(\tau)}} = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}, \tag{4.19}$$

pri čemu smo $d_{51}^{(1)}$ iščitali iz tablice 4.1, $l_{51}^{(\tau)} \overset{3.7}{=} l_{50}^{(\tau)} - \sum_{j=1}^{2} d_{50}^{(j)} = 1200 - 100 - 300 = 800$ i $d_{51}^{(2)} \overset{3.7}{=} l_{51}^{(\tau)} - l_{52}^{(\tau)} - d_{51}^{(1)} = 800 - 300 - 200 = 300$.
Sada je

$$q_{51}^{(\tau)} = q_{51}^{(1)} + q_{51}^{(2)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \tag{4.20}$$

Uvrštavanjem 4.18, 4.20 u 4.17 dobivamo

$$q_{51}^{\prime(1)} = 0.3245,$$

a uvrštavanjem 4.19, 4.20 u 4.17 dobivamo

$$q_{51}^{\prime(2)} = 0.4448.$$

4.4 Uniformna razdioba smanjenja na jediničnom dobnom intervalu

Pretpostavljamo da svaki uzrok smanjenja j u modelu dvostrukog smanjenja ima uniformnu razdiobu na intervalu $(x, x+1)$ za cijeli broj $x, x \geq 0$, tj.

$${}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)}, \ j = 1, 2, \quad 0 \leq t < 1, \ x \text{ cijeli broj}, \ x \geq 0. \tag{4.21}$$

Posljedično,

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} {}_tq_x^{(j)} \overset{4.21}{=} t \sum_{j=1}^{2} q_x^{(j)} = tq_x^{(\tau)}. \tag{4.22}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^{(j)} &\overset{1.19}{=} \frac{f_{T_x,J_x}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_tq_x^{(j)} \overset{4.21}{=} \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} tq_x^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} q_x^{(j)} \\ &= \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Stoga,

$$
\begin{aligned}
q_x'^{(j)} &= 1 - p_x'^{(j)} = 1 - exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s}^{(j)}\,ds\right) \\
&\overset{4.23}{=} 1 - exp\left(-\int_0^1 \frac{q_x^{(j)}}{1 - sq_x^{(\tau)}}\,ds\right) \\
&= 1 - exp\left(\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}\left(log\left(1 - sq_x^{(\tau)}\right)\right)\Big|_0^1\right) \\
&= 1 - exp\left(\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} log\left(1 - q_x^{(\tau)}\right)\right) \\
&= 1 - \left(1 - q_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Uočimo da je relacija 4.24 između $q_x'^{(j)}$ i $q_x^{(j)}$ jednaka relaciji 4.16 dobivenoj pod pretpostavkom konstantnog intenziteta smanjenja na jediničnom dobnom intervalu. Dakle, veza između $q_x'^{(j)}$ i $q_x^{(j)}$ ne ovisi o tome da li pretpostavljamo da je konstantan intenzitet smanjenja ili uniformna razdioba smanjenja na jediničnom dobnom intervalu.

Primjer 4.4.1. [4] Pretpostavljamo da u danom modelu dvostrukog smanjenja svaki uzrok smanjenja ima uniformnu razdiobu tijekom svake životne dobi, tj. ima uniformnu razdiobu na intervalu $(x, x+1)$ za svaki pozitivan cijeli broj x. Nadalje, $q_x'^{(1)} = 0.3, q_x'^{(2)} = 0.51$. Izračunajte $q_x^{(1)}$ i $q_x^{(2)}$.

Rješenje:
Iz formule 4.24 slijedi

$$q_x^{(j)} = q_x^{(\tau)} \frac{log\, p_x'^{(j)}}{log\, p_x^{(\tau)}}, \; j = 1, 2. \qquad (4.25)$$

Nadalje,

$$p_x'^{(1)} \overset{4.2}{=} 1 - q_x'^{(1)} = 1 - 0.3 = 0.7 \qquad (4.26)$$

$$p_x'^{(2)} \overset{4.2}{=} 1 - q_x'^{(2)} = 1 - 0.51 = 0.49. \qquad (4.27)$$

Sada je

$$p_x^{(\tau)} \overset{4.5}{=} p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} = 0.7 \cdot 0.49 = 0.343 \qquad (4.28)$$

$$q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 0.657. \qquad (4.29)$$

Uvrštavanjem 4.26, 4.28, 4.29 u 4.25 dobivamo

$$q_x^{(1)} = 0.219,$$

a uvrštavanjem 4.27, 4.28, 4.29 u 4.25 dobivamo

$$q_x^{(2)} = 0.438.$$

4.5 Srednja stopa dvostrukog smanjenja

Alternativna metoda računanja $q_x^{(j)}$ iz $q_x'^{(j)}$, $j = 1, 2$ i obratno je preko srednje stope smanjenja koja je pogodna, ali aproksimativna metoda.

Definicija 4.5.1. *Srednja stopa smanjenja zbog bilo kojeg uzroka smanjenja je*

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds}{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds}, \tag{4.30}$$

te predstavlja težinski prosjek od $\mu_{x+t}^{(\tau)}$, $0 \leq t < 1$, *gdje je težinska funkcija* ${}_tp_x^{(\tau)}$.

Srednja stopa smanjenja zbog uzroka smanjenja j *je*

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)}\, ds}{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds}, \tag{4.31}$$

te predstavlja težinski prosjek od $\mu_{x+t}^{(j)}$, $0 \leq t < 1$.

Odgovarajuća srednja stopa za pridruženi model jednostrukog smanjenja je

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_sp_x'^{(j)} \mu_{x+s}^{(j)}\, ds}{\int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\, ds}, \tag{4.32}$$

te predstavlja težinski prosjek od $\mu_{x+t}^{(j)}$, $0 \leq t < 1$, *pri čemu je težinska funkcija* ${}_tp_x'^{(j)}$.

Napomena 4.5.2.

1. Ako je intenzitet smanjenja $\mu_{x+t}^{(j)}$ konstantan za $0 \leq t < 1$ iz definicije 4.5.1 slijedi da je
$$m_x^{(j)} = m_x'^{(j)} = \mu_x^{(j)}.$$

2. Ako je $\mu_{x+t}^{(j)}$ rastuća funkcija od t, onda je $m_x'^{(j)} > m_x^{(j)}$. Slijedi iz relacija 4.6, 4.31 i 4.32.

3. Kada je $\mu_{x+t}^{(j)}$ padajuća funkcija od t, tada je $m_x'^{(j)} < m_x^{(j)}$.

Propozicija 4.5.3. *Vrijedi*

$$m_x^{(\tau)} = \frac{l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)}}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds} = \frac{d_x^{(\tau)}}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds}, \tag{4.33}$$

$$m_x^{(j)} = \frac{l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds} = \frac{d_x^{(j)}}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds}. \tag{4.34}$$

Dokaz. Iz formule 3.3 slijedi

$$l_{x+t}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}\,{}_t p_x^{(\tau)}. \tag{4.35}$$

Prema definiciji 4.5.1 je

$$\begin{aligned} m_x^{(\tau)} &= \frac{\int_0^1 {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds}{\int_0^1 {}_s p_x^{(\tau)}\, ds} \overset{4.35}{=} \frac{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds} \overset{4.35}{=} \frac{l_x^{(\tau)} \int_0^1 {}_s p_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds} \\ &\overset{1.25}{=} \frac{l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)}}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds} \overset{3.6}{=} \frac{d_x^{(\tau)}}{\int_0^1 l_{x+s}^{(\tau)}\, ds}. \end{aligned}$$

Analogno se pokaže formula 4.34.

□

Propozicija 4.5.4. *Uz pretpostavku uniformne distribucije smanjenja u modelu dvostrukog smanjenja vrijedi*

$$m_x^{(\tau)} = \frac{q_x^{(\tau)}}{1 - \frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}, \tag{4.36}$$

$$m_x^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}, \tag{4.37}$$

$$q_x^{(\tau)} = \frac{m_x^{(\tau)}}{1 + \frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}, \tag{4.38}$$

$$q_x^{(j)} = \frac{m_x^{(j)}}{1 + \frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}. \tag{4.39}$$

Uz pretpostavku uniformne distribucije smanjenja u pridruženom modelu jednostrukog smanjenja vrijedi

$$m_x'^{(j)} = \frac{q_x'^{(j)}}{1 - \frac{1}{2}q_x'^{(j)}}, \tag{4.40}$$

$$q_x'^{(j)} = \frac{m_x'^{(j)}}{1 + \frac{1}{2}m_x'^{(j)}}. \tag{4.41}$$

Dokaz. Uz pretpostavku uniformne distribucije smanjenja u modelu dvostrukog smanjenja imamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds &= \int_0^1 \left(1 - {}_sq_x^{(\tau)}\right) ds \overset{4.22}{=} \int_0^1 \left(1 - sq_x^{(\tau)}\right) ds \\ &= 1 - \frac{1}{2}q_x^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Stoga,

$$m_x^{(\tau)} \overset{\substack{\text{Def.}\\ 4.5.1}}{=} \frac{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\mu_{x+s}^{(\tau)}\, ds}{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds} \overset{\substack{1.25\\ 4.42}}{=} \frac{q_x^{(\tau)}}{1 - \frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}$$

$$m_x^{(j)} \overset{\substack{\text{Def.}\\ 4.5.1}}{=} \frac{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\mu_{x+s}^{(j)}\, ds}{\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds} \overset{\substack{1.24\\ 4.42}}{=} \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}.$$

Dokazali smo formule 4.36 i 4.37.
Sada,

$$m_x^{(\tau)} \overset{4.36}{=} \frac{q_x^{(\tau)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}} \quad \Rightarrow \quad \left(1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}\right)m_x^{(\tau)} - q_x^{(\tau)} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_x^{(\tau)} = \frac{m_x^{(\tau)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}},$$
$$m_x^{(j)} \overset{4.37}{=} \frac{q_x^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}} \quad \Rightarrow \quad q_x^{(j)} = m_x^{(j)}\left(1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}\right) \overset{4.38}{=} m_x^{(j)}\left(1-\frac{\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}\right) = \frac{m_x^{(j)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}.$$

Dokazali smo i formule 4.38 i 4.39.

Uz pretpostavku uniformne distribucije smanjenja u pridruženom modelu jednostrukog smanjenja

$${}_tq_x'^{(j)} = tq_x'^{(j)}$$

pa je

$$\begin{aligned}\int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\,ds &= \int_0^1 \left(1-{}_sq_x'^{(j)}\right)ds = \int_0^1 \left(1-sq_x'^{(j)}\right)ds\\ &= 1-\frac{1}{2}q_x'^{(j)}.\end{aligned}$$

Sada imamo,

$$m_x'^{(j)} \overset{\substack{\text{Def.}\\ 4.5.1}}{=} \frac{\int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\mu_{x+s}^{(j)}\,ds}{\int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\,ds} = \frac{q_x'^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q_x'^{(j)}},$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili $q_x'^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\mu_{x+s}^{(j)}\,ds$.
Dokazali smo formulu 4.40. Primijetimo da iz formule 4.40 slijedi formula 4.41.

□

Propozicija 4.5.5. *Uz pretpostavku konstantnog intenziteta smanjenja u modelu dvostrukog smanjenja vrijedi*

$$q_x^{(j)} = \frac{m_x^{(j)}\left(1 - e^{-m_x^{(\tau)}}\right)}{m_x^{(\tau)}}, \tag{4.43}$$

$$q_x^{(\tau)} = 1 - e^{-m_x^{(\tau)}}, \tag{4.44}$$

$$q_x'^{(j)} = 1 - e^{-m_x'^{(j)}}. \tag{4.45}$$

Dokaz.

$$q_x^{(j)} \overset{1.24}{=} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)}\, ds \overset{4.10}{=} \mu_x^{(j)} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, ds &\overset{1.21}{=} \int_0^1 exp\left(-\int_0^s \mu_{x+t}^{(\tau)}\, dt\right) ds \overset{4.11}{=} \int_0^1 exp\left(-\int_0^s \mu_x^{(\tau)}\, dt\right) ds \\ &= \int_0^1 exp\left(-s\mu_x^{(\tau)}\right) ds = \frac{1 - exp\left(-\mu_x^{(\tau)}\right)}{\mu_x^{(\tau)}}.\end{aligned}$$

Prema napomeni 4.5.2 vrijedi $\mu_x^{(j)} = m_x^{(j)}$ i $\mu_x^{(\tau)} = m_x^{(\tau)}$ pa je

$$q_x^{(j)} = \mu_x^{(j)} \frac{1 - exp\left(-\mu_x^{(\tau)}\right)}{\mu_x^{(\tau)}} = \frac{m_x^{(j)}\left(1 - e^{-m_x^{(\tau)}}\right)}{m_x^{(\tau)}}.$$

Dokazali smo formulu 4.43.
Sada je,

$$q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} q_x^{(j)} \overset{4.43}{=} \frac{1 - e^{-m_x^{(\tau)}}}{m_x^{(\tau)}} \sum_{j=1}^{2} m_x^{(j)} = \frac{1 - e^{-m_x^{(\tau)}}}{m_x^{(\tau)}} m_x^{(\tau)} = 1 - e^{-m_x^{(\tau)}}.$$

Pokazali smo formulu 4.44. Preostaje nam još dokazati formulu 4.45.

$$q_x'^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_x'^{(j)} \mu_{x+s}^{(j)}\, ds \overset{4.10}{=} \mu_x^{(j)} \int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\, ds$$

Nadalje,

$$\int_0^1 {}_sp_x'^{(j)}\,ds \overset{4.1}{=} \int_0^1 exp\left(-\int_0^s \mu_{x+t}^{(j)}\,dt\right)ds \overset{4.10}{=} \int_0^1 exp\left(-\int_0^s \mu_x^{(j)}\,dt\right)ds$$
$$= \int_0^1 exp\left(-s\mu_x^{(j)}\right)ds = \frac{1-exp\left(-\mu_x^{(j)}\right)}{\mu_x^{(j)}}.$$

Prema napomeni 4.5.2 vrijedi $\mu_x^{(j)} = m_x'^{(j)}$ pa je

$$q_x'^{(j)} = \mu_x^{(j)}\frac{1-exp\left(-\mu_x^{(j)}\right)}{\mu_x^{(j)}} = 1-e^{-m_x'^{(j)}}.$$

□

Primjer 4.5.6. [1] U modelu dvostrukog smanjenja je $m_{40}^{(\tau)} = 0.2$ i $q_{40}'^{(1)} = 0.1$. Izračunajte $q_{40}'^{(2)}$ pretpostavljajući uniformnu razdiobu smanjenja na jediničnom dobnom intervalu.

Rješenje:

$$q_{40}'^{(2)} \overset{4.24}{=} 1-\left(1-q_{40}^{(\tau)}\right)^{\frac{q_{40}^{(2)}}{q_{40}^{(\tau)}}} \tag{4.46}$$

Iz formule 4.38 slijedi

$$q_{40}^{(\tau)} = \frac{m_{40}^{(\tau)}}{1+\frac{1}{2}m_{40}^{(\tau)}} = \frac{\frac{2}{10}}{1+\frac{1}{2}\frac{2}{10}} = \frac{2}{11}. \tag{4.47}$$

Sada je

$$p_{40}^{(\tau)} = 1-q_{40}^{(\tau)} = 1-\frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$
$$p_{40}'^{(1)} = 1-q_{40}'^{(1)} = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Stoga je

$$q_{40}^{(1)} = q_{40}^{(\tau)}\frac{log p_{40}'^{(1)}}{log p_{40}^{(\tau)}} = \frac{2}{11}\frac{log\frac{9}{10}}{log\frac{9}{11}} = 0.0955,$$
$$q_{40}^{(2)} = q_{40}^{(\tau)} - q_{40}^{(1)} = 0.0863. \tag{4.48}$$

Uvrštavanjem 4.47 i 4.48 u 4.46 dobivamo

$$q_{40}'^{(2)} = 0.0909. \tag{4.49}$$

Bibliografija

[1] N. L. Bowers, Jr., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones i C. J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics, Second Edition*, Society of Actuaries, 1997.

[2] S. R. Deshmukh, *Multiple Decrement Models in Insurance: An Introduction Using R*, Springer India, New Delhi, 2012.

[3] D. P. Kroese i J. C. C. Chan, *Statistical Modeling and Computation*, Springer New York, 2014.

[4] S. D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics, Third Edition*, Wiley, Chichester, 2015.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti, Treće izdanje*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

Sažetak

U stvaranju financijskih, aktuarskih i medicinskih modela ponekad nije dovoljno promatrati samo vrijeme do završetka određenog stanja već je bitno spoznati i koji je uzrok doveo do završetka tog stanja. Model koji uključuje dvije slučajne varijable, vrijeme do završetka određenog stanja i uzrok završetka tog stanja, naziva se model višestrukog smanjenja. U ovom radu definirani su i objašnjeni osnovni pojmovi modela dvostrukog smanjenja te je analizirano nekoliko modela dvostrukog smanjenja. Ako postoji dovoljno kvalitetnih empirijskih podataka o intenzitetima smanjenja, onda se model dvostrukog smanjenja može predstaviti tablicom dvostrukog smanjenja. U primjeni su modeli dvostrukog smanjenja najčešće dani tablicom dvostrukog smanjenja. U radu je prikazana konstrukcija tablica dvostrukog smanjenja kroz nekoliko primjera. Za svaki od uzroka smanjenja u modelu dvostrukog smanjenja definiran je model jednostrukog smanjenja koji ovisi samo o određenom uzroku smanjenja kako bi se detaljno proučio utjecaj jednog uzroka smanjenja neovisno o drugom uzroku te su pronađene veze između funkcija modela dvostrukog smanjenja i pridruženog mu modela jednostrukog smanjenja.

Summary

In creating financial, actuarial and medical models, sometimes it's not enough to pay attention only at the time until the end of a particular condition, but it is important to find out the cause of termination. A model that incorporates two random variables, time to termination and cause of termination, is known as multiple decrement model. In this master's thesis, the basic concepts of a double decrement model are defined and explained, and several double decrement models are analyzed. If there is sufficient empirical data quality on the forces of decrement, then a double decrement model can be represented with a double decrement table. In practise, double decrement models are usually given by a double decrement table. The paper presents the construction of double decrement tables through several examples. For each of the causes of decrement in a double decrement model, a single decrement model is defined that depends only on a particular cause of decrement in order to study in detail the impact of one cause of decrement independently of the other cause, and the relationships between the functions of the double decrement model and its associated single decrement model are found.

Životopis

Rođen sam 28. 2. 1994. g. u Zagrebu. Osnovnu školu sam pohađao u Osnovnoj školi braće Radića Pakrac, a zatim opću gimnaziju u Srednjoj školi Pakrac. Tijekom osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike, fizike, kemije i informatike-kategorija osnove informatike. Iz matematike sam u školskoj godini 2008./2009. bio sudionik državnog natjecanja, dok sam iz kemije u školskoj godini 2010./2011. osvojio prvo mjesto na županijskom natjecanju Požeško-slavonske županije. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu sam upisao 2012. godine i isti sam završio 2017. godine. Time sam stekao titulu sveučilišni prvostupnik matematike (univ. bacc. math.). Iste godine sam upisao Diplomski sveučilišni studij Poslovna i financijska matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, a koji završavam obranom ovog diplomskog rada.