Elementarni aspekti integrabilnosti

Curman, Andreja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Andreja Curman

ELEMENTARNI ASPEKTI INTEGRABILNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Neizmjerno hvala mom mentoru izv. prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću za velik trud, pruženu pomoć te provedeno vrijeme jer bez njega bi sve ovo bilo nemoguće.
Hvala mojoj obitelji, prijateljima i svima koji su me bodrili na ovome putu i bili uz mene.
Na kraju, najveća hvala dragome Bogu.

Sadržaj

Uvod

U ovome diplomskome radu proučavaju se aspekti integrabilnosti. Rad je podijeljen na 3 poglavlja.
U prvom poglavlju definira se pojam neprekidnosti te se navode primjeri neprekidnih funkcija. Također, promatraju se i dokazuju razne činjenice vezane uz gornju i donju Darbouxovu sumu funkcije te Riemmanov integral.
U drugom poglavlju definira se pojam niza, limesa funkcije, derivacije funkcije i promatra se integrabilnost neprekidnih funkcija.
U trećem poglavlju također se proučava integrabilnost i derivabilnost funkcija te se navodi dokaz Langrangeovog teorema.
U ovome diplomskome radu svi pojmovi su precizno definirani i uvedeni raznim matematičkim metodama.

Poglavlje 1

Integrabilne funkcije

1.1 Neprekidne funkcije

Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ te $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Tada je $|y - x| < r$ ako i samo ako je $y \in \langle x - r, x + r\rangle$. Naime, vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$|y - x| < r \Leftrightarrow -r < y - x < r \Leftrightarrow x - r < y < x + r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle .$$

Definicija 1.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:*

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle, \text{ onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle .$$

Dakle, f je neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Primjer 1.1.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 3 \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

Tvrdimo da f nije neprekidna u točki 3. Neka je $\epsilon = \frac{1}{2}$. Pretpostavimo da postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } x \in \langle 3 - \delta, 3 + \delta\rangle, \text{ onda je } f(x) \in \langle f(3) - \epsilon, f(3) + \epsilon\rangle . \tag{1.1}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\text{ako je } x \in \langle 3-\delta, 3+\delta\rangle, \text{ onda je } f(x) \in \left\langle \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{1.2}$$

Odredimo $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $3 - \delta < x < 3$.
Slijedi da je $x \in \langle 3-\delta, 3+\delta\rangle$ *pa iz (1.2) slijedi da je* $f(x) \in \left\langle \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$. *No, prema odabiru broja* x *i definiciji funkcije* f *vrijedi* $f(x) = -1$. *Dakle,* $-1 \in \left\langle \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, *kontradikcija.*
Prema tome, ne postoji $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi (1.1).*
Zaključak: funkcija f *nije neprekidna u točki 3.*

Primjer 1.1.3. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ *te* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa* $f(x) = c$ *za svaki* $x \in S$.
Neka je $x_0 \in S$. *Tada je* f *neprekidna u točki* x_0.
To slijedi iz činjenice da za svaki $\epsilon > 0$ *i za svaki* $x \in S$ *vrijedi*

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$$

jer je $f(x) = c = f(x_0)$ *pa posebno to vrijedi i za svaki* $x \in S$ *takav da je*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$$

za bilo koji $\delta > 0$.

Primjer 1.1.4. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa* $f(x) = x$ *za svaki* $x \in S$.
Neka je $x_0 \in S$. *Tvrdimo da je funkcija* f *neprekidna u točki* x_0.
Neka je $\epsilon > 0$. *Definirajmo* $\delta = \epsilon$. *Uzmimo* $x \in S$ *takav da vrijedi* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.
Imamo $f(x) = x$, $f(x_0) = x_0$ *i* $\delta = \epsilon$ *pa je očito* $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$.
Prema tome, funkcija f *je neprekidna u* x_0.

Definicija 1.1.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija.*
Kažemo da je f *neprekidna funkcija ako je* f *neprekidna u* x_0 *za svaki* $x_0 \in S$.

1.2 Omeđene funkcije

Definicija 1.2.1. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te* $a \in \mathbb{R}$. *Za* a *kažemo da je gornja međa skupa* S *ako za svaki* $x \in S$ *vrijedi* $x \leq a$.

Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako postoji barem jedna gornja međa skupa S.
Analogno definiramo pojmove donje međe skupa i odozdo omeđenog skupa.

Definicija 1.2.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $x_0 \in S$. Za x_0 kažemo da je maksimum skupa S ako je $x \leq x_0$ za svaki $x \in S$.*

Za x_0 kažemo da je minimum skupa S ako je $x_0 \leq x$ za svaki $x \in S$.
Uočimo da je maksimum skupa, ako postoji, jedinstven. Naime, pretpostavimo da su x_0 i x_1 maksimumi skupa S. Tada je $x_0 \leq x_1$ (jer je $x_0 \in S$) i $x_1 \leq x_0$ (jer je $x_1 \in S$). Stoga je $x_0 = x_1$.
Analogno zaključujemo da je minimum skupa, ako postoji, jedinstven.

Definicija 1.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

1. *a je gornja međa skupa S*
2. *za svaku gornju među b skupa S vrijedi $a \leq b$*

Tada za a kažemo da je supremum skupa S (umjesto 1. *i* 2. *kraće kažemo da je a najmanja gornja međa skupa S).*

Pretpostavimo da je x_0 maksimum skupa S. Tada je x_0 supremum skupa S. Naime, očito je x_0 gornja međa skupa S. Pretpostavimo da je b gornja međa skupa S. Tada je $x_0 \leq b$ jer je $x_0 \in S$. Prema tome x_0 je supremum skupa S.

Pretpostavimo da su a_1 i a_2 supremumi skupa S. Iz činjenice da je a_1 supremum od S te da je a_2 gornja međa od S slijedi da je $a_1 \leq a_2$. Analogno zaključujemo da je $a_2 \leq a_1$. Prema tome $a_1 = a_2$.

Definicija 1.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

1. *a je donja međa skupa S*
2. *za svaku donju među b skupa S vrijedi $b \leq a$*

Tada za a kažemo da je infimum skupa S (umjesto 1. *i* 2. *kraće kažemo da je a najveća donja međa skupa S).*

Pretpostavimo da je x_0 minimum skupa S. Tada je x_0 infimum skupa S. Naime, očito je x_0 donja međa skupa S. Pretpostavimo da je b donja međa skupa S. Tada je $b \leq x_0$ jer je $x_0 \in S$. Dakle, x_0 je infimum skupa S. Analogno kao u slučaju supremuma zaključujemo da je infimum skupa, ako postoji, jedinstven. Supremum skupa S označavamo sa $\sup S$, a infimum sa $\inf S$.
Dokazat ćemo da svaki neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima supremum. U tu svrhu navodimo prvo jedno važno svojstvo realnih brojeva, tzv. Aksiom potpunosti.

Aksiom potpunosti. *Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq z \leq y$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđen neprazan skup. Tada postoji supremum skupa S.*

Dokaz. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Budući da je S odozgo omeđen, postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gornja međa od S. Slijedi da je $a \in T$, stoga je $T \neq \emptyset$. Prema pretpostavci propozicije imamo $S \neq \emptyset$. Za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$ očito vrijedi $x \leq y$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq z \leq y$. Iz ovoga slijedi da je z gornja međa skupa S. Nadalje, ako je y gornja međa skupa S, onda je $y \in T$ pa je $z \leq y$. Prema tome, z je supremum skupa S. □

Napomena 1.2.6. *Tvrdnja prethodne propozicije ne vrijedi ako izostavimo pretpostavku da je S neprazan skup. Naime, za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi da je a gornja međa od $\emptyset$. Dakle, prazan skup je odozgo omeđen no nema supremuma (jer bi supremum morao biti manji ili jednak od svakog realnog broja, što je očito nemoguće).*
Analogno zaključujemo da prazan skup nema infimuma.

Propozicija 1.2.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen neprazan skup. Tada postoji infimum skupa S.*

Dokaz. Neka je T skup svih donjih međa skupa S. Skup T je neprazan jer je S odozdo omeđen. Za svaki $y \in T$ i za svaki $x \in S$ očito vrijedi $y \leq x$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $y \in T$ i za svaki $x \in S$ vrijedi $y \leq z \leq x$. Iz navedenog zaključujemo da je z infimum skupa S. □

Definicija 1.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S omeđen skup ako je S omeđen odozgo i odozdo.*

Definicija 1.2.9. *Neka je S skup te neka je $A \subseteq S$. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je funkcija f omeđena na skupu A ako je $f(A)$ omeđen skup.*
Ako je S skup i $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija, onda za f kažemo da je omeđena funkcija ako je f omeđena na skupu S.

Napomena 1.2.10. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na skupu A. Neka je $B \subseteq A$. Tada je f omeđena na skupu B. Naime, iz $B \subseteq A$ slijedi $f(B) \subseteq f(A)$ pa je $f(B)$ omeđen skup kao podskup omeđenog skupa $f(A)$.*

1.3 Integral

Definicija 1.3.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Za konačan niz $x_0, \dots, x_n$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je subdivizija segmenta $[a, b]$ ako je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.*

Definicija 1.3.2. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na skupu $[a, b]$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pretpostavimo da je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$.*
Neka je $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Imamo $[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a, b]$ pa je funkcija f omeđena na $[x_i, x_{i+1}]$. Dakle, $\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ je omeđen podskup od $\mathbb{R}$ pa prema propozicijama 1.2.5 i 1.2.7 taj skup ima infimum i supremum.
Definiramo, $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ i $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$
Definirajmo:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \text{ i } S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Za s kažemo da je donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ (s obzirom na subdiviziju $x_0, \dots, x_n$), a za S kažemo da je gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ (s obzirom na subdiviziju $x_0, \dots, x_n$).

Propozicija 1.3.3. *Neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada je skup svih donjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$ odozgo omeđen.*
Nadalje, skup svih gornjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$ je odozdo omeđen.

Dokaz. Znamo da je skup $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ omeđen pa odaberimo $M \in \mathbb{R}$ takav da je M gornja međa ovog skupa.
Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Neka je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ s obzirom na subdiviziju $x_0, \dots, x_n$.
Znamo da je $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$ pri čemu za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi
$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$.

Neka je $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Tada je $m_i \leq f(x_i)$, a $f(x_i) \leq M$ jer je M gornja međa skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Prema tome $m_i \leq M$ za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$.
Stoga je:

$$\begin{aligned} s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M \cdot (x_{i+1} - x_i) = M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= M \cdot ((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})) \\ &= M \cdot (x_n - x_0) \\ &= M \cdot (b - a)\,. \end{aligned}$$

Dakle, $s \leq M \cdot (b - a)$.
Zaključak: $M \cdot (b - a)$ je gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$.
Odaberimo $m \in \mathbb{R}$ takav da je m donja međa skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ te neka je $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i)$ gdje je $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$.
Za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi $m \leq f(x_i) \leq M_i$, dakle $m \leq M_i$.
Imamo:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} m \cdot (x_{i+1} - x_i) = m \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = m \cdot (b - a)\,.$$

Dakle, $S \geq m \cdot (b - a)$.
Zaključujemo da je $m \cdot (b - a)$ donja međa skupa svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na segmentu $[a, b]$. □

Definicija 1.3.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Definirajmo $I_*(f; a, b)$ kao supremum skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$ (uočimo da taj supremum postoji prema propozicijama 1.3.3 i 1.2.5).*
Dakle, $I_*(f; a, b) = \sup\{s \mid s \text{ donja Darbouxova suma od } f \text{ na } [a, b]\}$.
Za $I_*(f; a, b)$ kažemo da je donji integral funkcije f na $[a, b]$.
Nadalje, definiramo $I^*(f; a, b) = \inf\{s \mid s \text{ gornja Darbouxova suma od } f \text{ na } [a, b]\}$.
Za $I^*(f; a, b)$ kažemo da je gornji integral funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Definicija 1.3.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Pretpostavimo da je $I_*(f; a, b) = I^*(f; a, b)$. Tada za funkciju f kažemo da je integrabilna na segmentu $[a, b]$, a za broj $I_*(f; a, b)$ kažemo da je integral funkcije f na $[a, b]$. Integral funkcije f na $[a, b]$ označavamo sa $\int_a^b f$ ili $\int_a^b f(x)dx$.*

Primjer 1.3.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $c \in \mathbb{R}$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$ za svaki $x \in [a, b]$.*
Dokažimo da je f integrabilna na $[a, b]$.
Očito je $f([a, b]) = \{c\}$, dakle f je omeđena na $[a, b]$.
Neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$.
Za $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ neka je $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Očito je $\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \{c\}$.
Stoga je $m_i = c$. Neka je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$.
Imamo sljedeće:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot (x_{i+1} - x_i) = c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 \\ &= b - a\end{aligned}$$

Dakle, $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = b - a$.
Stoga je $s = c \cdot (b - a)$.
Zaključujemo da je skup svih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$ jednak $\{c \cdot (b - a)\}$.
Slijedi da je $I_*(f; a, b) = \sup\{c \cdot (b - a)\} = c \cdot (b - a)$.
Analogno zaključujemo da je $I^*(f; a, b) = c \cdot (b - a)$. Prema tome, $I_*(f; a, b) = I^*(f; a, b)$, dakle funkcija f je integrabilna na $[a, b]$.
Vrijedi $\int_a^b f = c \cdot (b - a)$.

Primjer 1.3.7. *Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \langle 0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tvrdimo da funkcija f nije omeđena na $[0, 1]$.
Pretpostavimo suprotno.
Tada je skup $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$ omeđen pa postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je M gornja međa ovog

skupa. Slijedi da je $f(x) \leq M$ *za svaki* $x \in [0,1]$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $M < n$. *Imamo* $\frac{1}{n} \in [0,1]$ *pa je* $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq M$. *No,* $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ *pa slijedi da je* $n \leq M$. *Kontradikcija.*
Zaključak: funkcija f nije omeđena.
Posebno, funkcija f *nije integrabilna na* $[0,1]$.

Primjer 1.3.8. *Neka je* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Vrijedi $\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = \{0,1\}$ *pa je očito funkcija* f *omeđena na* $[0,1]$.
Tvrdimo da funkcija f *nije integrabilna na* $[0,1]$.
Neka je $x_0, \ldots, x_n$ *subdivizija segmenta* $[0,1]$ *te neka je* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.
Očito je $\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} \subseteq \{0,1\}$. *S druge strane postoji* $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *takav da je* x *iracionalan broj pa je* $f(x) = 0$ *te također postoji* $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *takav da je* x *racionalan broj pa je* $f(x) = 1$. *Stoga je* $\{0,1\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$.
Prema tome $\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \{0,1\}$.
Neka je $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ *te neka je* $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$.
Očito je $m_i = 0$ *i* $M_i = 1$.
Neka je

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \text{ i } S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Vrijedi $s = 0$ *i* $S = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1 - 0$, *dakle* $S = 1$.
Zaključak: svaka donja Darbouxova suma funkcije f *na* $[0,1]$ *je jednaka* 0, *a svaka gornja Darbouxova suma funkcije* f *na* $[0,1]$ *je jednaka* 1.
Stoga je $I_*(f;0,1) = 0$ *i* $I^*(f;0,1) = 1$, *pa funkcija* f *nije integrabilna.*

Definicija 1.3.9. *Ako je f funkcija omeđena na* $[c,d]$ *gdje su* $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, *onda definiramo* $m(f;c,d) = \inf\{f(x) \mid x \in [c,d]\}$ *i* $M(f;c,d) = \sup\{f(x) \mid x \in [c,d]\}$.

Napomena 1.3.10. *Neka su* S *i* T *neprazni odozdo omeđeni podskupovi od* $\mathbb{R}$ *takvi da je* $S \subseteq T$. *Tada je* $\inf T \leq \inf S$.
Naime, $\inf T$ *je donja međa skupa* T *pa je i donja međa skupa* S *iz čega slijedi da je* $\inf T \leq \inf S$.

Lema 1.3.11. *Neka su* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a \leq c < d \leq b$. *Pretpostavimo da je funkcija* f *omeđena na* $[a,b]$. *Tada je* $m(f;a,b) \leq m(f;c,d)$.

Dokaz. Imamo $m(f;a,b) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ i $m(f;c,d) = \inf\{f(x) \mid x \in [c,d]\}$. Zbog $[c,d] \subseteq [a,b]$ vrijedi $\{f(x) \mid x \in [c,d]\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ pa tvrdnja leme slijedi iz napomene 1.3.10. □

1.4 Svojstva integrala

Teorem 1.4.1. *Neka su $a,b,c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b < c$ te neka je f funkcija omeđena na $[a,c]$.*
Tada je

$$I_*(f;a,c) = I_*(f;a,b) + I_*(f;b,c).$$

Dokaz. Neka je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a,b]$ te neka je s' donja Darbouxova suma funkcije f na $[b,c]$. Tada je $s = \sum_{i=0}^{n-1} m(f;x_i,x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)$ gdje je $x_0,\ldots,x_n$ subdivizija od $[a,b]$ te $s' = \sum_{i=0}^{m-1} m(f;y_i,y_{i+1})(y_{i+1}-y_i)$, gdje je $y_0,...,y_m$ subdivizija od $[b,c]$.
Imamo $x_0 < \ldots < x_n = b = y_0 < y_1 < \ldots < y_m$ pa je $x_0,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ subdivizija segmenta $[a,c]$.
Neka je s'' donja Darbouxova suma funkcije f na $[a,c]$ određena ovom subdivizijom. Tada je

$$\begin{aligned}
s'' &= \sum_{i=0}^{n-1} m(f;x_i,x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) + m(f;x_n,y_1)(y_1-x_n) + \sum_{i=1}^{m-1} m(f;y_i,y_{i+1})(y_{i+1}-y_i)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (f;x_i,x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) + m(f;y_0,y_1)(y_1-y_0) + \sum_{i=1}^{m-1} m(f;y_i,y_{i+1})(y_{i+1}-y_i)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (f;x_i,x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=0}^{m-1} m(f;y_i,y_{i+1})(y_{i+1}-y_i)\\
&= s + s'.
\end{aligned}$$

Dakle, $s'' = s + s'$. Prema definiciji donjeg integrala vrijedi $s'' \leq I_*(f;a,c)$.
Prema tome $s + s' \leq I_*(f;a,c)$.
Zaključak:
Za svaku donju Darbouxovu sumu s funkcije f na $[a,b]$ i za svaku donju Darbouxovu sumu s' funkcije f na $[b,c]$ vrijedi:

$$s + s' \leq I_*(f;a,c). \tag{1.3}$$

Fiksirajmo neku donju Darbouxovu sumu s funkcije f na segmentu $[a, b]$. Iz (1.3) slijedi da za svaku donju Darbouxovu sumu s' funkcije f na $[b, c]$ vrijedi $s' \leq I_* (f; a, c) - s$. Ovo znači da je $I_* (f; a, c) - s$ gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[b, c]$. Iz definicije supremuma skupa slijedi da je $I_* (f; b, c) \leq I_* (f; a, c) - s$. Dakle, $s \leq I_* (f; a, c) - I_* (f; b, c)$ za svaku donju Darbouxovu sumu funkcije f na $[a, b]$. Slijedi da je $I_* (f; a, c) - I_* (f; b, c)$ gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$.
Stoga je

$$I_* (f; a, b) \leq I_* (f; a, c) - I_* (f; b, c) .$$

Prema tome vrijedi:

$$I_* (f; a, b) + I_* (f; b, c) \leq I_* (f; a, c) . \tag{1.4}$$

Neka je s'' donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$. Tada postoji subdivizija $z_0, \dots, z_k$ od $[a, c]$ takva da je $s'' = \sum_{i=0}^{k-1} (f; z_i, z_{i+1}) (z_{i+1} - z_i)$.

1. slučaj:
Postoji $n \in \{0, \dots, k\}$ takav da je $z_n = b$. Očito je $n \neq 0$, $n \neq k$, dakle $0 < n < k$. Tada je $z_0, \dots, z_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ te je $z_n, \dots, z_k$ subdivizija segmenta $[b, c]$. Označimo sa s i s' pripadne donje Darbouxove sume određene ovim subdivizijama. Prema dokazanom $s + s'$ je donja Darbouxova suma od funkcije f na segmentu $[a, c]$ određena „zajedničkom subdivizijom“ $z_0, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_k$, a to je upravo polazna subdivizija $z_0, \dots, z_k$. Prema tome $s + s' = s''$.
Stoga je

$$s'' \leq I_* (f; a, b) + I_* (f; b, c) .$$

2.slučaj:
$b \neq z_i$ za svaki $i \in \{0, \dots, k\}$.
Tada postoji $n \in \{0, \dots, k - 1\}$ takav da je $z_n < b < z_{n+1}$. Promotrimo subdiviziju $z_0, \dots, z_n, b, z_{n+1}, \dots, z_k$ segmenta $[a, c]$.
Neka je s''' donja Darbouxova suma od funkcije f na segmentu $[a, c]$ određena ovom subdivizijom. Prema prvom slučaju vrijedi:

$$s''' \leq I_* (f; a, b) + I_* (f; b, c) . \tag{1.5}$$

Želimo dokazati da je

$$s'' \leq s'''. \tag{1.6}$$

Imamo da je

$$
\begin{aligned}
s'' &= \sum_{i=0}^{k-1} m\left(f; z_i, z_{i+1}\right)\left(z_{i+1} - z_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} m\left(f; z_i, z_{i+1}\right)\left(z_{i+1} - z_i\right) + m\left(f; z_n, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - z_n\right) + \\
&\quad \sum_{i=n+1}^{k-1} m\left(f; z_i, z_{i+1}\right)\left(z_{i+1} - z_i\right)
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
s''' &= \sum_{i=0}^{n-1} m\left(f; z_i, z_{i+1}\right)\left(z_{i+1} - z_i\right) + m\left(f; z_n, b\right)\left(b - z_n\right) + m\left(f; b, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - b\right) + \\
&\quad \sum_{i=n+1}^{k-1} m\left(f; z_i, z_{i+1}\right)\left(z_{i+1} - z_i\right).
\end{aligned}
$$

Stoga je, da bismo dokazali (1.6), dovoljno dokazati da je:

$$
m\left(f; z_n, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - z_n\right) \leq m\left(f; z_n, b\right)\left(b - z_n\right) + m\left(f; b, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - b\right). \tag{1.7}
$$

Prema lemi 1.3.11 vrijedi

$$
m\left(f; z_n, z_{n+1}\right) \leq m\left(f; b, z_{n+1}\right) \text{ i } m\left(f; z_n, z_{n+1}\right) \leq m\left(f; z_n, b\right).
$$

Imamo:

$$
\begin{aligned}
m\left(f; z_n, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - z_n\right) &= m\left(f; z_n, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - b + b - z_n\right) \\
&= m\left(f; z_n, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - b\right) + m\left(f; z_n, z_{n+1}\right)\left(b - z_n\right) \\
&\leq m\left(f; b, z_{n+1}\right)\left(z_{n+1} - b\right) + m\left(f; z_n, b\right)\left(b - z_n\right).
\end{aligned}
$$

Time smo dokazali da vrijedi (1.7).
Prema tome vrijedi $s'' \leq s'''$.
Iz (1.5) slijedi da je $s'' \leq I_*\left(f; a, b\right) + I_*\left(f; b, c\right)$.
U oba slučaja smo dobili da je $s'' \leq I_*\left(f; a, b\right) + I_*\left(f; b, c\right)$. Dakle, ovo vrijedi za svaku donju Darbouxovu sumu s'' funkcije f na segmentu $[a, c]$. Slijedi da je

$$
I_*\left(f; a, c\right) \leq I_*\left(f; a, b\right) + I_*\left(f; b, c\right). \tag{1.8}
$$

Iz (1.4) i (1.8) slijedi tvrdnja teorema. □

Napomena 1.4.2. *Neka su S i T neprazni odozgo omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $S \subseteq T$. Tada je* $\sup S \leq \sup T$.
Naime, $\sup T$ *je gornja međa skupa T pa je i gornja međa skupa S iz čega slijedi da je* $\sup S \leq \sup T$.

Lema 1.4.3. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq c < d \leq b$. Pretpostavimo da je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Tada je $M(f; c, d) \leq M(f; a, b)$.*

Dokaz. Imamo $M(f; a, b) = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ i $M(f; c, d) = \sup \{f(x) \mid x \in [c, d]\}$. Zbog $[c, d] \subseteq [a, b]$ vrijedi $\{f(x) \mid x \in [c, d]\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ pa tvrdnja leme slijedi iz napomene 1.4.2. □

Teorem 1.4.4. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b < c$ te neka je f funkcija omeđena na segmentu $[a, c]$. Tada je*

$$I^*(f; a, c) = I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c).$$

Dokaz. Neka je S gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ te neka je S' gornja Darbouxova suma funkcije f na $[b, c]$. Posve analogno kao u dokazu prethodnog teorema zaključujemo da je $S + S'$ gornja Darbouxova suma funkcije f na segmentu $[a, c]$.
Stoga je

$$I^*(f; a, c) \leq S + S' \tag{1.9}$$

Fiksirajmo jednu gornju Darbouxovu sumu S funkcije f na segmentu $[a, b]$. Tada iz (1.9) slijedi $I^*(f; a, c) - S \leq S'$ za svaku gornju Darbouxovu sumu S' funkcije f na $[b, c]$. Ovo znači da je $I^*(f; a, c) - S$ donja međa skupa svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na $[b, c]$.
Slijedi da je $I^*(f; a, c) - S \leq I^*(f; b, c)$. Stoga je $I^*(f; a, c) - I^*(f; b, c) \leq S$. Dakle, navedeno vrijedi za svaku gornju Darbouxovu sumu funkcije f na segmentu $[a, b]$. Stoga je $I^*(f; a, c) - I^*(f; b, c)$ donja međa skupa svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$. Zaključujemo da je

$$I^*(f; a, c) - I^*(f; b, c) \leq I^*(f; a, b).$$

Prema tome vrijedi

$$I^*(f; a, c) \leq I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c). \tag{1.10}$$

Neka je S'' gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$. Tada postoji subdivizija $z_0, \ldots, z_k$ od $[a, c]$ takva da je $S'' = \sum_{i=0}^{k-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i)$.
1.slučaj:
Postoji $n \in \{0, \ldots, k\}$ takav da je $z_n = b$.

Analogno kao u dokazu prethodnog teorema dobivamo da postoje gornja Darbouxova suma S od funkcije f na $[a, b]$ i gornja Darbouxova suma S' od funkcije f na $[b, c]$ tako da je $S'' = S + S'$. Vrijedi da je $I^*(f; a, b) \leq S$ i $I^*(f; b, c) \leq S'$ pa je $I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \leq S''$.
2.slučaj:
$b \neq z_i$ za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$.
Tada postoji $n \in \{0, \ldots, k-1\}$ takav da je $z_n < b < z_{n+1}$. Promotrimo subdiviziju $z_0, \ldots, z_n, b, z_{n+1}, \ldots, z_k$ segmenta $[a, c]$. Neka je s''' gornja Darbouxova suma funkcije f na segmentu $[a, c]$ određena subdivizijom $z_0, \ldots, z_n, b, z_{n+1}, \ldots, z_k$. Prema prvom slučaju zaključujemo da je $I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \leq S'''$. Koristeći lemu 1.4.3 dobivamo

$$S''' = \sum_{i=0}^{n-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i) + M(f; z_n, b)(b - z_n) + M(f; b, z_{n+1})(z_{n+1} - b) + \sum_{i=n+1}^{k-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i) + M(f; z_n, z_{n+1})(b - z_n) + M(f; z_n, z_{n+1})(z_{n+1} - b) + \sum_{i=n+1}^{k-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i) = \sum_{i=0}^{n-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i) + M(f; z_n, z_{n+1})(b - z_n + z_{n+1} - b) + \sum_{i=n+1}^{k-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} M(f; z_i, z_{i+1})(z_{i+1} - z_i) = S''$$

Dakle, $S''' \leq S''$ pa slijedi da je

$$I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \leq S''.$$

U oba slučaja dobili smo da je $I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \leq S''$.
Prema tome $I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c)$ je donja međa skupa svih gornjih Darbouxovih suma na $[a, c]$. Slijedi da je

$$I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \leq I^*(f; a, c). \tag{1.11}$$

Iz (1.10) i (1.11) slijedi tvrdnja teorema. □

Korolar 1.4.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Pretpostavimo da je f funkcija omeđena na $[a, b]$.*
Tada je

$$I_*(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} I_*(f; x_i, x_{i+1}). \tag{1.12}$$

Dokaz. Dokažimo navedenu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ (1.12) očito vrijedi.

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da (1.12) vrijedi za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ za bilo koju subdiviziju $x_0, \ldots, x_n$ od $[a, b]$ i bilo koju funkciju f koja je omeđena na $[a, b]$. Neka je $x_0, \ldots, x_{n+1}$ subdivizija segmenta $[a, b]$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Koristeći teorem 1.4.1, induktivnu pretpostavku i činjenicu da je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[x_0, x_n]$ dobivamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
I_* (f; a, b) &= I_* (f; a, x_n) + I_* (f; x_n, b) \\
&= I_* (f; x_0, x_n) + I_* (f; x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} I_* (f; x_i, x_{i+1}) + I_* (f; x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} I_* (f; x_i, x_{i+1})
\end{aligned}
$$

Dakle, $I_* (f; a, b) = \sum_{i=0}^{n} I_* (f; x_i, x_{i+1})$.
Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Napomena 1.4.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. U dokazu propozicije 1.3.3 smo vidjeli sljedeće: ako je M gornja međa skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, onda je $s \leq M \cdot (b - a)$ za svaku donju Darbouxovu sumu s funkcije f na segmentu $[a, b]$. Stoga za svaku gornju među M skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ vrijedi da je $M \cdot (b - a)$ gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$ pa slijedi da je $I_* (f; a, b) \leq M \cdot (b - a)$. Posebno vrijedi $I_* (f; a, b) \leq M (f; a, b) (b - a)$.*

Propozicija 1.4.7. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je f funkcija omeđena na $[a, b]$. Tada je $I_* (f; a, b) \leq I^* (f; a, b)$.*

Dokaz. Neka je S gornja Darbouxova suma funkcije f na segmentu $[a, b]$. Tada postoji subdivizija $x_0, \ldots, x_n$ segmenta $[a, b]$ takva da je

$$
S = \sum_{i=0}^{n-1} M (f; x_i, x_{i+1}) (x_{i+1} - x_i) .
$$

Koristeći korolar 1.4.5 i napomenu 1.4.6 dobivamo :

$$
\begin{aligned}
I_*(f;a,b) &= \sum_{i=0}^{n-1} I_*(f;x_i,x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} M(f;x_i,x_{i+1})(x_{i+1}-x_i) = S
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$I_*(f;a,b) \leq S.$$

Zaključujemo da je $I_*(f;a,b)$ donja međa skupa svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na segmentu $[a,b]$.
Iz ovoga slijedi da je $I_*(f;a,b) \leq I^*(f;a,b)$. □

Napomena 1.4.8. *Neka su $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i neka je f funkcija omeđena na segmentu $[a,b]$. Neka je s donja Darbouxova suma funkcije f na segmentu $[a,b]$ te neka je S gornja Darbouxova suma funkcije f na segmentu $[a,b]$. Tada je $s \leq S$.*
Naime, to je posljedica sljedećih nejednakosti:

$$s \leq I_*(f;a,b) \leq I^*(f;a,b) \leq S.$$

Teorem 1.4.9. *Neka su $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ te neka je f funkcija omeđena na segmentu $[a,c]$.*
1.) Pretpostavimo da je f funkcija integrabilna na $[a,b]$ i $[b,c]$. Tada je f integrabilna na $[a,c]$ i vrijedi

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{1.13}$$

2.) Pretpostavimo da je f integrabilna na $[a,c]$. Tada je f integrabilna i na $[a,b]$ i na $[b,c]$.

Dokaz. 1.) Koristeći teoreme 1.4.1 i 1.4.4 i činjenicu da je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i $[b,c]$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
I_*(f;a,c) &= I_*(f;a,b) + I_*(f;b,c) \\
&= I^*(f;a,b) + I^*(f;b,c) = I^*(f;a,c).
\end{aligned}
$$

Dakle, $I_*(f;a,c) = I^*(f;a,c)$ pa zaključujemo da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,c]$.
Imamo:

$$\begin{aligned}\int_a^c f &= I_*(f;a,c) = I_*(f;a,b) + I_*(f;b,c)\\ &= \int_a^b f + \int_b^c f.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi (1.13).
2.) Uočimo prije svega sljedeće:
ako su $s,t,S,T \in \mathbb{R}$ takvi da je $s \leq S$ i $t \leq T$ te $s+t = S+T$, onda je $s = S$ i $t = T$. Naime, kada bi vrijedilo $s \neq S$, onda bismo imali $s < S$ što bi zajedno s $t \leq T$ dalo $s+t < S+T$. Analogno vidimo da $t \neq T$ vodi na kontradikciju. Prema tome vrijedi $s = S$ i $t = T$. Koristeći teoreme 1.4.1 i 1.4.4 i činjenicu da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,c]$ dobivamo da je

$$I_*(f;a,b) + I_*(f;b,c) = I_*(f;a,c) = I^*(f;a,c) = I^*(f;a,b) + I^*(f;b,c).$$

Dakle, $I_*(f;a,b) + I_*(f;b,c) = I^*(f;a,b) + I^*(f;b,c)$, a prema propoziciji 1.3.3 vrijedi da je $I_*(f;a,b) \leq I^*(f;a,b)$ i $I_*(f;b,c) \leq I^*(f;b,c)$.
Stoga je

$$I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b) \text{ i } I_*(f;b,c) = I^*(f;b,c).$$

Prema tome, funkcija f je integrabilna i na $[a,b]$ i na $[b,c]$. $\square$

Poglavlje 2

Neprekidnost i integrabilnost

2.1 Limes funkcije i konvergencija nizova

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f : S \to \mathbb{R}$ te neka su $a, L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L limes funkcije f u točki a ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq a$ vrijedi sljedeće:*

$$\textit{ako je } |x - a| < \delta, \textit{ onda je } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Primjer 2.1.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki $x_0 \in S$. Tada je $f(x_0)$ limes funkcije f u točki x_0. Naime, neka je $\epsilon > 0$. Tada zbog neprekidnosti funkcije f u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:*

$$\textit{ako je } |x - x_0| < \delta, \textit{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Navedena implikacija (2.1) vrijedi za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq x_0$.
Zaključujemo da je $f(x_0)$ limes funkcije f u točki x_0.

Primjer 2.1.3. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Tvrdimo da 1 nije limes funkcije f u točki 0.
Pretpostavimo suprotno. Neka je $\epsilon = \frac{1}{2}$.
Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ vrijedi:

$$\textit{ako je } |x - 0| < \delta, \textit{ onda je } |f(x) - 1| < \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Definirajmo $x = \frac{\delta}{2}$. *Tada je* $x \neq 0$ *i* $|x - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ *pa iz (2.2) slijedi da je* $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$.
Očito je $f(x) \neq 0$. *S druge strane iz* $x \neq 0$ *i definicije funkcije* f *slijedi da je* $f(x) = 0$.
Kontradikcija.
Dakle, 1 *nije limes funkcije* f *u točki* 0.
Prema tome, $f(0)$ *nije limes od* f *u točki* 0.

Propozicija 2.1.4. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, *neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *te neka je* $x_0 \in S$. *Tada je funkcija* f *neprekidna u točki* x_0 *ako i samo ako je* $f(x_0)$ *limes funkcije* f *u točki* x_0.

Dokaz. Ako je f neprekidna u x_0, onda je $f(x_0)$ limes od f u x_0 što slijedi iz primjera 2.1.2.
Obratno, pretpostavimo da je $f(x_0)$ limes funkcije f u x_0. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{2.3}$$

Očito (2.3) vrijedi i za $x = x_0$.
Zaključujemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0. □

Definicija 2.1.5. *Neka je* S *skup. Za funkciju sa* $\mathbb{N}$ *u* S *kažemo da je niz u* S. *Ako je* x *niz u* S, *dakle* $x : \mathbb{N} \to S$, *onda sa* x_n *označavamo* $x(n)$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Niz* x *označavamo i sa* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ili* (x_n).

Definicija 2.1.6. *Za niz u* $\mathbb{R}$ *kažemo da je niz realnih brojeva.*

Definicija 2.1.7. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te neka je* $a \in \mathbb{R}$. *Kažemo da niz* (x_n) *teži prema* a *i pišemo* $x_n \to a$ *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$, *tj.* $|x_n - a| < \epsilon$.

Primjer 2.1.8. *Neka je* $c \in \mathbb{R}$ *te neka je* (x_n) *niz realnih brojeva definiran sa* $x_n = c$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada* $x_n \to c$.
Neka je $\epsilon > 0$. *Vrijedi* $|x_n - c| = 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *pa je* $|x_n - c| < \epsilon$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.
Uzmimo bilo koji $n_0 \in \mathbb{N}$. *Tada za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $|x_n - c| < \epsilon$.

Primjer 2.1.9. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva definiran sa* $x_n = \frac{1}{n}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.
Tada $x_n \to 0$.
Neka je $\epsilon > 0$. *Odaberimo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n \geq n_0$. *Tada je* $n > \frac{1}{\epsilon}$ *pa je* $\epsilon > \frac{1}{n}$ *te slijedi da je* $|x_n - 0| < \epsilon$.
Dakle, za svaki $n \geq n_0$ *vrijedi* $|x_n - 0| < \epsilon$.
Prema tome, $x_n \to 0$.

Definicija 2.1.10. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te neka je* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$.
Tada kažemo da je a *limes niza* (x_n).

Sljedeća propozicija kaže da je limes niza, ako postoji, jedinstven.

Propozicija 2.1.11. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $a \neq b$.
1.slučaj:
$a < b$.
Tada je $\frac{b-a}{2} > 0$ pa odaberimo $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$. Slijedi da je $2\epsilon < b - a$ pa je $a + \epsilon < b - \epsilon$. Iz ovoga slijedi da je:

$$\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle \cap \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle = \emptyset. \tag{2.4}$$

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$.
Budući da $x_n \to b$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $x_n \in \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$.
Tada je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$ i $x_n \in \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle$ pa je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle \cap \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle$.
No, to je u kontradikciji sa (2.4).
2.slučaj:
$b < a$.
Analogno kao i u prethodnom slučaju dolazimo do kontradikcije.
Zaključak: $a = b$. □

Propozicija 2.1.12. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$.*
Tada niz $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a + b$, tj. $x_n + y_n \to a + b$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$.
Nadalje, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$.
Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq k_0$.
Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ pa je $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ i $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$.
Vrijedi:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$.
Prema tome, za svaki $n \geq k_0$ vrijedi

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.1.13. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.*

1. *Vrijedi $|x_n| \to |a|$.*

2. *Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada niz $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema ca, tj. $cx_n \to ca$.*

Dokaz.

1. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$. Koristeći činjenicu da za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi $||u| - |v|| \leq |u - v|$, dobivamo da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi
$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon, \text{ tj. } ||x_n| - |a|| < \epsilon.$$

   Prema tome, $|x_n| \to |a|$.

2. Ako je $c = 0$, tvrdnja slijedi iz primjera 2.1.8.
   Pretpostavimo da je $c \neq 0$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$.
   Stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|c||x_n - a| < \epsilon$, tj. $|cx_n - ca| < \epsilon$.
   Prema tome, $cx_n \to ca$. □

Propozicija 2.1.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in \mathbb{R}$ te $L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u točki a.*
Nadalje, pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$.
Tada $f(x_n) \to L$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq a$ vrijedi sljedeće:
$$\text{ako je } x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle\,, \text{ onda je } f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle\,. \tag{2.5}$$
Pošto $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $x_n \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$. Za svaki $n \geq n_0$ prema pretpostavci propozicije vrijedi $x_n \in S$ i $x_n \neq a$ pa iz (2.5) slijedi da je $f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$.
Prema tome, $f(x_n) \to L$. □

Lema 2.1.15. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*
Tada $x_n \to a$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n_0} < \epsilon$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Tada je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ pa je $\frac{1}{n} < \epsilon$. Iz pretpostavke leme slijedi da je $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ pa iz toga slijedi $|x_n - a| < \epsilon$.
Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Prema tome, $x_n \to a$. □

Teorem 2.1.16. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da za svaki niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$ vrijedi $f(x_n) \to L$.
Tada je L limes funkcije f u točki a.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da L nije limes funkcije f u točki a.
Tada postoji $\epsilon > 0$ za kojeg ne postoji δ sa svojstvima iz definicije limesa funkcije.
Dakle, postoji $\epsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S \setminus \{a\}$ takav da je

$$x \in \langle a - \delta, a + \delta\rangle \text{ ali } f(x_n) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle . \tag{2.6}$$

Slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in S \setminus \{a\}$ takav da je $x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right\rangle$ ali $f(x_n) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle$. (Ovdje smo prethodnu tvrdnju (2.6) primjenili za $\delta = \frac{1}{n}$).
Na ovaj način smo dobili niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je

$$x_n \in S \setminus \{a\}, x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right\rangle \text{ i } f(x_n) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle \tag{2.7}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz leme 2.1.15 slijedi da $x_n \to a$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to L$. Iz ovoga slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi :

$$f(x_n) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle .$$

Ovo je kontradikcija sa (2.7). □

Primjer 2.1.17. *Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Neka je $L \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan broj. Tvrdimo da je L limes funckije f u točki 2.*

*Neka je $\epsilon > 0$. Definirajmo $\delta = \frac{1}{2}$.
Tada je $\langle 2 - \delta, 2 + \delta\rangle = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$ pa ne postoji $x \in [0, 1]$ takav da je $x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta\rangle$.
Stoga je za svaki $x \in [0, 1] \setminus \{2\}$ implikacija*

$$x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle$$

trivijalno zadovoljena.
Dakle, L je limes funkcije f u točki 2*. Ovo pokazuje da limes funkcije u točki ne mora biti jedinstven.*

Definicija 2.1.18. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a gomilište skupa S ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $|x - a| < \epsilon$, $x \neq a$.*
Dakle, a je gomilište skupa S ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S \setminus \{a\}$ takav da je $x \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.

Primjer 2.1.19. 1 *je gomilište skupa* $[0, 1]$.

Naime, neka je $\epsilon > 0$.
Vrijedi da je $max\{1 - \epsilon, 0\} < 1$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $max\{1 - \epsilon, 0\} < x < 1$. Iz ovoga slijedi da je $1 - \epsilon < x$, $0 < x$ i $x < 1$.
Zaključujemo da je $x \in [0, 1]$, $x \neq 1$ i $x \in \langle 1 - \epsilon, 1 + \epsilon \rangle$.
Dakle, 1 *je gomilište skupa* $[0, 1]$.

Napomena 2.1.20. *Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ i x gomilište skupa S te $T \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $S \subseteq T$, onda je x gomilište skupa T.*
Naime, ako je $\epsilon > 0$, onda postoji $y \in S$ takav da je $y \neq x$ i $y \in \langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle$. Budući da je $S \subseteq T$ vrijedi da je $y \in T$.

Propozicija 2.1.21. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada su a i b gomilišta skupa $\langle a, b \rangle$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Vrijedi da je $a < min\{a + \epsilon, b\}$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $a < x < min\{a + \epsilon, b\}$. Iz ovoga slijedi da je $a < x$, $x < a + \epsilon$ i $x < b$.
Stoga je $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq a$ i $x \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Zaključak: a je gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.
Neka je $\epsilon > 0$. Vrijedi da je $max\{a, b - \epsilon\} < b$. Iz toga slijedi da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $max\{a, b - \epsilon\} < x < b$. Zaključujemo da je $a < x$ i $b - \epsilon < x$.
Stoga je $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq b$ i $x \in \langle b - \epsilon, b + \epsilon \rangle$.
Dakle, b je gomilište skupa $\langle a, b \rangle$. □

Korolar 2.1.22. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $x \in \langle a, b \rangle$. Tada je x gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.*

Dokaz. Vrijedi $a < x < b$ pa je $\langle x, b \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. Prema propoziciji 2.1.21 vrijedi da je x gomilište skupa $\langle x, b \rangle$ pa iz napomene 2.1.20 slijedi da je x gomilište skupa $\langle a, b \rangle$. □

Propozicija 2.1.23. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je a gomilište skupa S ako i samo ako postoji niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a gomilište skupa S.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\frac{1}{n} > 0$ pa postoji $x_n \in S$ takav da je $x_n \neq a$ i $x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle$.
Na ovaj način smo dobili niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ i $x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz leme 2.1.15 slijedi da $x_n \to a$.
Obratno, pretpostavimo da postoji niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$.
Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Odaberimo bilo koji $n \geq n_0$.
Imamo $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ i $x_n \in S \setminus \{a\}$.
Zaključujemo da je a gomilište skupa S. □

Propozicija 2.1.24. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je L_1 limes funkcije f u točki a te L_2 limes funckije f u točki a.
Nadalje, pretpostavimo da je a gomilište skupa S. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Budući da je a gomilište skupa S iz propozicije 2.1.23 slijedi da postoji niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$. Prema propoziciji 2.1.11 vrijedi da $f(x_n) \to L_1$ i $f(x_n) \to L_2$.
Također, prema propoziciji 2.1.11 vrijedi $L_1 = L_2$. □

Napomena 2.1.25. *Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$ te da je a gomilište skupa S. Tada je a gomilište skupa $S \setminus \{a\}$.
Naime, ako je $\epsilon > 0$, onda postoji $x \in S$ takav da je $x \neq a$ i $x \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ pa očito imamo $x_n \in S \setminus \{a\}$, $x \neq a$ i $x \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.*

2.2 Derivacija funkcije

Definicija 2.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je x_0 gomilište od S.
Nadalje, neka je $D : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ za svaki $S \setminus \{x_0\}$.
Pretpostavimo da je L limes funkcije D u točki x_0. Tada za L kažemo da je derivacija funkcije f u točki x_0.*

Napomena 2.2.2. *Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, $f : S \to \mathbb{R}$ te da su L_1 i L_2 derivacije funkcije f u točki x_0. Tada je $L_1 = L_2$.*

Naime, vrijedi da su L_1 i L_2 limesi funkcije D, gdje je $D : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Prema definiciji derivacije vrijedi da je x_0 gomilište skupa S. Tada je, prema napomeni 2.1.25, x_0 gomilište skupa $S \setminus \{x_0\}$. Iz propozicije 2.1.24 slijedi da je $L_1 = L_2$.

Definicija 2.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je derivabilna u u točki x_0 ako postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je L derivacija funkcije f u točki x_0.*

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ i $f : S \to \mathbb{R}$. Derivaciju funkcije f u točki x_0, ako postoji, označavamo sa $f'(x_0)$.

Definicija 2.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je derivabilna ako je f derivabilna u x_0 za svaki $x_0 \in S$. U tome slučaju sa f' označavamo funkciju sa S u $\mathbb{R}$ koja broju $x \in S$ pridružuje derivaciju funkcije f u točki x.*
Dakle, za $x \in S$ na $f'(x)$ gledamo kao na derivaciju funkcije f u točki x te ujedno kao na vrijednost funkcije f' u točki x.

Primjer 2.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{R}$. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = k$ za svaki $x \in S$. Tada je k limes od funkcije f u a.*

Naime, neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo bilo koji $\delta > 0$. Neka je $x \in S \setminus \{a\}$ takav da je $x \in \langle a - \delta, a + \delta\rangle$.
Tada je $f(x) \in \langle k - \epsilon, k + \epsilon\rangle$ jer je $f(x) = k$.

Primjer 2.2.6. *Neka je $k \in \mathbb{R}$ te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = k$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je f derivabilna funkcija te za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f'(x) = 0$*

Naime, neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Imamo da je x_0 gomilište od $\langle x_0, x_0 + 1\rangle$ što slijedi iz propozicije 2.1.21 pa je prema napomeni 2.1.20 x_0 gomilište od $\mathbb{R}$.
Definirajmo funkciju $D : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ sa $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ vrijedi da je $D(x) = 0$. Prema primjeru 2.2.5 vrijedi da je 0 limes funkcije D u x_0.
Stoga je 0 derivacija funkcije f u točki x_0.

Primjer 2.2.7. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je f derivabilna funkcija i $f'(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Imamo da je x_0 gomilište od $\mathbb{R}$.
Definirajmo funkciju $D : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ sa $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ vrijedi da je $D(x) = 1$. Prema primjeru 2.2.5 vrijedi da je 1 limes funkcije D u x_0.
Stoga je 1 derivacija funkcije f u točki x_0.

Propozicija 2.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u točki a. Neka je $T \subseteq S$, $T \neq \emptyset$. Tada je L limes funkcije $f|_T : T \to \mathbb{R}$ u točki a.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S \setminus \{a\}$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$x \in \langle a - \delta, a + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle\,. \tag{2.8}$$

Budući da je $T \subseteq S$, imamo $T \setminus \{a\} \subseteq S \setminus \{a\}$ pa za svaki $x \in T \setminus \{a\}$ također vrijedi (2.8). Za svaki $x \in T \setminus \{a\}$ vrijedi $f(x) = f|_T(x)$. Stoga za svaki $x \in T \setminus \{a\}$ vrijedi sljedeće:

$$x \in \langle a - \delta, a + \delta\rangle \Rightarrow f|_T(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon\rangle\,.$$

Prema tome, L je limes funkcije $f|_T$ u a. □

Korolar 2.2.9. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u točki x_0. Pretpostavimo da je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$ te da je x_0 gomilište od T. Tada je funkcija $f|_T : T \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki x_0 i vrijedi $(f|_T)'(x_0) = f'(x_0)$.*

Dokaz. Neka je $D : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Znamo da je $f'(x_0)$ limes od D u x_0.
Definirajmo funkciju $E : T \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ sa $E(x) = \frac{(f|_T)(x)-(f|_T)(x_0)}{x-x_0}$. Za svaki $x \in T \setminus \{x_0\}$ vrijedi $E(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = D(x)$. Dakle, $E(x) = D(x)$ za svaki $x \in T \setminus \{x_0\}$ pa zaključujemo da je $E = D|_{T\setminus\{x_0\}}$.
Iz propozicije 2.2.8 slijedi da je $f'(x_0)$ limes funkcije $D|_{T\setminus\{x_0\}}$ odnosno funkcije E u točki x_0.
Po definiciji derivacije imamo da je $f|_T$ derivabilna u točki x_0 te da je $(f|_T)'(x_0) = f'(x_0)$. □

Propozicija 2.2.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ gomilište skupa S te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je f derivabilna u x_0.*
Nadalje, pretpostavimo da je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Tada $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to f'(x_0)$.

Dokaz. Znamo da je $f'(x_0)$ limes funkcije D u točki x_0, pri čemu je $D : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $D(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Iz propozicije 2.1.14 slijedi da $D(x_n) \to f'(x_0)$.
Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.2.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $x_0 \in S$ gomilište skupa S. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ te $L \in \mathbb{R}$.*
Pretpostavimo da za svaki niz (x_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$, vrijedi $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to L$.
Tada je f derivabilna u x_0 i vrijedi $f'(x_0) = L$.

Dokaz. Neka je $D : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $D(x) = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$.
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Tada $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to L$, tj. $D(x_n) \to L$.

Iz teorema 2.1.16 slijedi da je L limes funkcije D u točki x_0. To znači da je f derivabilna u x_0 te da je $f'(x_0) = L$. □

Propozicija 2.2.12. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te neka je $x_0 \in S$. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \text{ onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle\,. \tag{2.9}$$

Budući da $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.
Iz (2.4.4) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $f(x_n) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$.
Prema tome, $f(x_n) \to f(x_0)$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$, vrijedi $f(x_n) \to f(x_0)$.
Dokažimo da je f neprekidna u x_0.
Posebno, za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi $f(x_n) \to f(x_0)$. Iz teorema 2.1.16 slijedi da je $f(x_0)$ limes funkcije f u točki x_0.
Iz propozicije 2.1.4 slijedi da je f neprekidna u x_0.
Time je tvrdnja dokazana. □

2.3 Omeđeni nizovi i gomilišta

Definicija 2.3.1. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je omeđen ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen.*

Propozicija 2.3.2. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$.*

1. *Pretpostavimo da su S i T odozgo omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ odozgo omeđen skup.*
2. *Pretpostavimo da su S i T odozdo omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ odozdo omeđen skup.*
3. *Pretpostavimo da su S i T omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ omeđen skup.*

Dokaz.

1. Neka je a gornja međa skupa S te neka je b gornja međa skupa T.
   Neka je $x \in S \cup T$. Tada je $x \in S$ ili $x \in T$ pa je $x \leq a$ ili $x \leq b$.
   Budući da je $a \leq max\{a, b\}$ i $b \leq max\{a, b\}$ vrijedi da je $x \leq max\{a, b\}$.
   Dakle, zaključujemo da je $max\{a, b\}$ gornja međa skupa $S \cup T$.
   Prema tome, skup $S \cup T$ je odozgo omeđen.
2. Ova tvrdnja dokazuje se analogno kao i prethodna.
3. Budući da su S i T omeđeni, vrijedi da su S i T omeđeni i odozgo i odozdo. Iz tvrdnji 1. i 2. slijedi da je $S \cup T$ omeđen odozgo i odozdo.
   Prema tome, $S \cup T$ je omeđen skup.

□

Korolar 2.3.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi u $\mathbb{R}$.*
Tada je $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ omeđen skup.

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$.
Neka su $S_1, \ldots, S_{n+1}$ omeđeni skupovi. Vrijedi $S_1 \cup \ldots \cup S_{n+1} = (S_1 \cup \ldots \cup S_n) \cup S_{n+1}$.
Prema induktivnoj pretpostavci skup $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ je omeđen, a znamo da je S_{n+1} omeđen skup pa je $(S_1 \cup \ldots \cup S_n) \cup S_{n+1}$ omeđen skup prema propoziciji 2.3.2. Prema tome, $S_1 \cup \ldots \cup S_{n+1}$ je omeđen skup.
Time smo dokazali tvrdnju korolara. □

Definicija 2.3.4. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.*

Propozicija 2.3.5. *Svaki konvergentan niz je omeđen.*

Dokaz. Neka je (x_n) konvergentan niz. Tada postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Odaberimo bilo koji $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Prema tome $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subseteq \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Skup $\langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ je omeđen iz čega slijedi da je i $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ omeđen skup. Vrijedi da je:

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \mid n \geq n_0\} \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_n\}. \tag{2.10}$$

Svaki jednočlan podskup od $\mathbb{R}$ je očito omeđen. Stoga iz (2.10) te iz korolara 2.3.3 slijedi da je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup. Dakle, niz (x_n) je omeđen. □

Lema 2.3.6. *Neka je S omeđen skup. Tada je skup $\{|x| \mid x \in S\}$ omeđen.*

Dokaz. Očito je 0 donja međa skupa $\{|x| \mid x \in S\}$. Prema tome skup $\{|x| \mid x \in S\}$ je odozdo omeđen. Budući da je S omeđen, postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq x \leq b$ za svaki $x \in S$. Neka je $x \in S$. Iz $a \leq x$ slijedi da je $-x \leq -a$ pa je $-x \leq max\{-a, b\}$.
S druge strane iz $x \leq b$ slijedi da je $x \leq max\{-a, b\}$.
Znamo da je $|x| = x$ ili $|x| = -x$. Stoga je $|x| \leq max\{-a, b\}$. Ovime smo dokazali da je $max\{-a, b\}$ gornja međa skupa $\{|x| \mid x \in S\}$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.3.7. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$, tj. niz $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a \cdot b$.*

Dokaz. Niz (x_n) je konvergentan pa je prema propoziciji 2.4.5 (x_n) omeđen niz. Dakle, skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen pa iz leme 2.3.6 slijedi da je $\{|x_n \mid n \in \mathbb{N}\}|$ omeđen skup. Stoga postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Možemo pretpostaviti da je $M > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b| \\
&= |x_n \cdot (y_n - b) + (x_n - a) \cdot b| \\
&\leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \\
&\leq M \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b|.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq M|y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b|. \tag{2.11}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $y_n \to b$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_1$ vrijedi:

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{2.12}$$

Iz činjenice da $x_n \to a$ slijedi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_2$ vrijedi :

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}. \tag{2.13}$$

Definirajmo $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi (2.12) i (2.13). Neka je $n \geq n_0$. Koristeći (2.11), (2.12) i (2.13) dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - a \cdot b| &\leq M|y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \\
&< M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)} \cdot |b| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{|b| + 1} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Dakle, $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$.
Time smo dokazali da $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$. □

Definicija 2.3.8. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a gomilište niza (x_n) ako za svaki $\epsilon > 0$ i za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.*

Napomena 2.3.9. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada je a gomilište niza (x_n).*

Naime, neka su $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq N$. Prema tome $n \geq N$ i $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Zaključujemo da je a gomilište niza (x_n).

Primjer 2.3.10. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = (-1)^n$. Tada je 1 gomilište navedenog niza.*

Naime, neka su $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Odaberimo neki paran broj n takav da je $n \geq N$. Tada je očito $x_n = 1$ pa je $x_n \in \langle 1 - \epsilon, 1 + \epsilon \rangle$. Analogno dobivamo da je i -1 gomilište niza (x_n).
No, ni -1 ni 1 nisu limesi ovog niza. Čak štoviše, niz (x_n) nije konvergentan.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.
Neka je $\epsilon = \frac{1}{2}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$. Odaberimo paran broj n takav da je $n \geq n_0$. Vrijedi

$$|x_n - x_{n+1}| = |1 - (-1)| = 2.$$

S druge strane imamo:

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| &= |x_n - a + a - x_{n+1}| \\ &\leq |x_n - a| + |a - x_{n+1}| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Dakle, $|x_n - x_{n+1}| < 1$, kontradikcija.

Teorem 2.3.11. *Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}$ ima gomilište.*

Dokaz. Neka je (x_n) omeđen niz u $\mathbb{R}$. Tada postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq x_n \leq b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S dobar za niz (x_n) ako za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in S$.
Uočimo sljedeće: ako su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je S dobar za (x_n) i $S \subseteq T$, onda je i T dobar za (x_n).

Nadalje, ako su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je S dobar za (x_n) te da T nije dobar za (x_n), onda je $S \setminus T$ dobar za (x_n).
Naime, budući da T nije dobar za (x_n), postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_0$ vrijedi $x_n \notin T$.
Neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada postoji $n \geq max\{N, N_0\}$ takav da je $x_n \in S$. Slijedi da je $n \geq N$ i $n \geq N_0$, a zadnja navedena nejednakost povlači da $x_n \notin T$. Stoga je $x_n \in S \setminus T$.
Prema tome, postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in S \setminus T$.
Uočimo da je $[a, b]$ dobar za (x_n).
Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $x_n \in [a, b]$. Nadalje, $\langle b, +\infty\rangle$ nije dobar za (x_n) jer $x_n \notin \langle b, +\infty\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $S = \{z \in \mathbb{R} \mid [z, +\infty\rangle \text{ dobar za } (x_n)\}$.
Očito je $[a, b] \subseteq [a, +\infty\rangle$ pa je $[a, +\infty\rangle$ dobar za (x_n). Stoga je $a \in S$.
Pretpostavimo da je $z \in S$. Tvrdimo da je $z \leq b$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $b < z$ pa je:

$$[z, +\infty\rangle \subseteq \langle b, +\infty\rangle . \tag{2.14}$$

Budući da je $z \in S$ vrijedi da je $[z, +\infty\rangle$ dobar za (x_n) pa iz prethodne inkluzije (2.14) slijedi da je $\langle b, +\infty\rangle$ dobar za (x_n), što je nemoguće.
Prema tome, $z \leq b$ za svaki $z \in S$.
Stoga je b gornja međa skupa S.

Zaključujemo da je skup S odozgo omeđen. Nadalje, S je neprazan jer je $a \in S$.
Iz propozicije 1.2.5 slijedi da skup S ima supremum. Označimo taj supremum sa c.
Iz definicije supremuma slijedi da je

$$c \leq b.$$

Pošto je $a \in S$ vrijedi da je

$$a \leq c.$$

Dakle,

$$a \leq c \leq b, \text{ tj. } c \in [a, b] .$$

Tvrdimo da je c gomilište niza (x_n).
Neka je $\epsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $z \in S$ takav da je $c - \epsilon < z$.
Pretpostavimo suprotno, odnosno da za svaki $z \in S$ vrijedi da je $z \leq c - \epsilon$.
To znači da je $c - \epsilon$ gornja međa skupa S, što je nemoguće jer je c najmanja gornja međa

skupa S.
Dakle, postoji $z \in S$ takav da je

$$c - \epsilon < z.$$

Znamo da je $z \leq c$ jer je $z \in S$. Budući da je c gornja međa skupa S te da je $c < c + \epsilon$, imamo da $c + \epsilon \notin S$.
Stoga, $[c + \epsilon, +\infty\rangle$ nije dobar za (x_n).

S druge strane iz $z \in S$ slijedi da je $[z, +\infty\rangle$ dobar za (x_n).
Slijedi da je $[z, +\infty\rangle \setminus [c + \epsilon, +\infty\rangle$ dobar za (x_n), tj. $[z, c + \epsilon\rangle$ je dobar za (x_n).
Iz $[z, c + \epsilon\rangle \subseteq \langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ slijedi da je $\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ dobar za (x_n).
Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ skup $\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ je dobar za (x_n) pa zaključujemo da je c gomilište niza (x_n). □

Napomena 2.3.12. *Dokaz prethodnog teorema 2.3.11 pokazuje sljedeće:*
ako je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te ako su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq x_n \leq b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda postoji gomilište c niza (x_n) takvo da je $c \in [a, b]$.

2.4 Uniformno neprekidne funkcije

Definicija 2.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f uniformno neprekidna ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi sljedeće:*

$$\text{ako je } |x - y| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Propozicija 2.4.2. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna funkcija. Tada je funkcija f neprekidna.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in S$ te neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x, y \in S$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } |x - y| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{2.15}$$

Neka je $x \in S$. Pretpostavimo da je $|x - x_0| < \delta$. Tada iz (2.15) slijedi da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Zaključak: funkcija f je neprekidna u točki x_0.
Dakle, f je neprekidna. □

Teorem 2.4.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f uniformno neprekidna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da funkcija f nije uniformno neprekidna. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoje $x, y \in [a, b]$ takvi da je $|x-y| < \delta$, ali $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$. Stoga, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $x_n, y_n \in [a, b]$ takvi da je

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ i } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon. \tag{2.16}$$

Prema napomeni 2.3.12 postoji $c \in [a, b]$ takav da je c gomilište niza (x_n).
Budući da je f neprekidna funkcija, neprekidna je u točki c pa postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $z \in [a, b]$ vrijedi:

$$|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.17}$$

Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}$. Budući da je c gomilište niza (x_n), postoji $n \geq N$ takav da je $|x_n - c| < \frac{\delta}{2}$.
Znamo da je $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, a iz $n \geq N$ slijedi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ pa je $|y_n - x_n| < \frac{1}{N}$, što prema odabiru broja N povlači

$$|y_n - x_n| < \frac{\delta}{2}.$$

Stoga je:

$$\begin{aligned}|y_n - c| &= |y_n - x_n + x_n - c| \\ &\leq |y_n - x_n| + |x_n - c| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.\end{aligned}$$

Dakle, $|y_n - c| < \delta$. Prema tome vrijedi $|x_n - c| < \frac{\delta}{2}$ i $|y_n - c| < \delta$ pa iz (2.17) slijedi da je

$$|f(x_n) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ } i \text{ } |f(y_n) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dobivamo da je

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(y_n)| &= |f(x_n) - f(c) + f(c) - f(y_n)| \\ &\leq |f(x_n) - f(c)| + |f(c) - f(y_n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Dakle, $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$, što je u kontradikciji s (2.16).
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Lema 2.4.4. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \to T$ funkcija. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da su $A_0, \ldots, A_n$ podskupovi od S. Tada je $f(A_0 \cup \ldots \cup A_n) = f(A_0) \cup \ldots \cup f(A_n)$.*

Dokaz. Neka je $y \in f(A_0 \cup \ldots \cup A_n)$. Tada je $y = f(x)$ za neki $x \in A_0 \cup \ldots \cup A_n$. Slijedi da postoji $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $x \in A_i$. Stoga je $f(x) \in f(A_i)$, tj. $y \in f(A_i)$ pa je $y \in f(A_0) \cup \ldots \cup f(A_n)$.
Obratno, neka je $y \in f(A_0) \cup \ldots \cup f(A_n)$. Tada je $y \in f(A_i)$ za neki $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Stoga je $y = f(x)$ za neki $x \in A_i$. Slijedi da je $x \in A_0 \cup \ldots \cup A_n$.
Stoga je $f(x) \in f(A_0 \cup \ldots \cup A_n)$, tj. $y \in f(A_0 \cup \ldots \cup A_n)$. □

Lema 2.4.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka su $x, y \in [a, b]$. Tada je $|x - y| \leq b - a$.*

Dokaz.

1.slučaj:
$x \leq y$.
Tada je $a \leq x \leq y \leq b$. Slijedi $-x \leq -a$ što zajedno sa $y \leq b$ daje $y - x \leq b - a$.
Uočimo da je $y - x \geq 0$ pa je $|y - x| = y - x \leq b - a$.
No, $|x - y| = |y - x|$.

2.slučaj:
$y \leq x$.
Tada je $a \leq y \leq x \leq b$ pa analogno kao u prvom slučaju dobivamo da je $|x - y| \leq b - a$. □

2.5 Integrabilnost neprekidnih funkcija

Teorem 2.5.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f omeđena.*

Dokaz. Odaberimo neki $\epsilon > 0$. Prema teoremu 2.4.3 funkcija f je uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi implikacija:

$$\text{ako je } |x - y| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{2.18}$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{n} < \delta$. Za $i \in \{0, \ldots, n\}$ definirajmo $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
Tada vrijedi $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Prema tome, $t_0, \ldots, t_n$ je subdivizija segmenta $[a, b]$.
Neka je $i \in \{0, \ldots, n\}$ i neka je $x \in [t_i, t_{i+1}]$. Iz leme 2.4.5 slijedi da je $|x - t_i| \leq t_{i+1} - t_i$.
No,

$$t_{i+1} - t_i = a + (i + 1)\frac{b - a}{n} - (a + i\frac{b - a}{n}) = \frac{b - a}{n}.$$

Znamo da je $\frac{b-a}{n} < \delta$ pa slijedi da je $t_{i+1} - t_i < \delta$.

Stoga je $|x-t_i| < \delta$. Iz (2.18) slijedi da je $|f(x)-f(t_i)| < \epsilon$. Stoga je $f(x) \in \langle f(t_i) - \epsilon, f(t_i) + \epsilon\rangle$ za svaki $x \in [t_i, t_{i+1}]$.
Time smo dokazali da je

$$f([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \langle f(t_i) - \epsilon, f(t_i) + \epsilon\rangle ,$$

iz čega slijedi da je $f([t_i, t_{i+1}])$ omeđen skup. Dakle, za svaki $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ skup $f([t_i, t_{i+1}])$ je omeđen.
Vrijedi

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n]$$

pa koristeći lemu 2.4.4 dobivamo:

$$\begin{aligned} f([a, b]) &= f([t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n]) \\ &= f([t_0, t_1]) \cup \ldots \cup f([t_{n-1}, t_n]) \end{aligned}$$

Dakle, $f([a, b]) = f([t_0, t_1]) \cup \ldots \cup f([t_{n-1}, t_n])$.
Sada iz korolara 2.3.3 slijedi da je $f([a, b])$ omeđen skup. Prema tome, f je omeđena funkcija. □

Napomena 2.5.2. *Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija integrabilna na $[a, b]$, onda za f naprosto kažemo da je integrabilna.*

Propozicija 2.5.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoje gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[a, b]$ i donja Darbouxova suma s od f na $[a, b]$ tako da je $S - s < \epsilon$. Tada je f integrabilna.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoje gornja Darbouxova suma S od f na $[a, b]$ i donja Darbouxova suma s od f na $[a, b]$ tako da je $S - s < \epsilon$.
Iz definicije gornjeg i donjeg integrala te propozicije 1.4.7 slijedi da je

$$s \leq I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b) \leq S.$$

Iz leme 2.4.5 slijedi da je

$$|I^*(f; a, b) - I_*(f; a, b)| \leq S - s.$$

Stoga, zbog $S - s < \epsilon$ vrijedi da je

$$|I^*(f; a, b) - I_*(f; a, b)| < \epsilon.$$

Dakle, ova nejednakost vrijedi za svaki $\epsilon > 0$. Iz toga zaključujemo da je

$$|I^*(f;a,b) - I_*(f;a,b)| \leq 0.$$

Očito je $|I^*(f;a,b) - I_*(f;a,b)| \geq 0$ pa slijedi da je

$$|I^*(f;a,b) - I_*(f;a,b)| = 0.$$

Dakle, $I^*(f;a,b) = I_*(f;a,b)$ čime je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 2.5.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f integrabilna.*

Dokaz. Prema teoremu 2.5.1 funkcija f je omeđena na $[a,b]$. Neka je $\epsilon > 0$. Prema teoremu 2.4.3 funkcija f je uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in [a,b]$ vrijedi implikacija:

$$\text{ako je } |x-y| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{n} < \delta$. Za $i \in \{0,\dots,n\}$ definirajmo $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
Tada je $t_0, \dots, t_n$ subdivizija segmenta $[a,b]$. Neka je $i \in \{0,\dots,n-1\}$. U dokazu teorema 2.5.1 vidjeli smo da je tada

$$f([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \langle f(t_i) - \epsilon, f(t_i) + \epsilon \rangle\,. \tag{2.19}$$

Neka je s donja Darbouxova suma od f određena subdivizijom $t_0, \dots, t_n$ te neka je S gornja Darbouxova suma od f određena subdivizijom $t_0, \dots, t_n$. Tada je
$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$ i $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i)$
pri čemu je $m_i = \inf f([t_i, t_{i+1}])$ i $M_i = \sup f([t_i, t_{i+1}])$
za svaki $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Neka je $i \in \{0,\dots,n-1\}$.
Iz (2.19) slijedi da je $f(t_i) - \epsilon$ donja međa od $f([t_i, t_{i+1}])$. Stoga je $f(t_i) - \epsilon \leq \inf f([t_i, t_{i+1}])$.
Nadalje, iz (2.19) slijedi da je $f(t_i) + \epsilon$ gornja međa od $f([t_i, t_{i+1}])$.
Stoga je $\sup f([t_i, t_{i+1}]) \leq f(t_i) + \epsilon$.
Dakle, imamo:

$$f(t_i) - \epsilon \leq m_i \leq M_i \leq f(t_i) + \epsilon.$$

Koristeći lemu 2.4.5 dobivamo:

$$M_i - m_i = |M_i - m_i| \leq (f(t_i) + \epsilon) - (f(t_i) - \epsilon) = 2\epsilon.$$

Dakle, $M_i - m_i \leq 2\epsilon$. Budući da je $x_{i+1} - x_i > 0$, imamo sljedeće:

$$(M_i - m_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 2\epsilon \cdot (x_{i+1} - x_i) \tag{2.20}$$

za svaki $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Koristeći (2.20) dobivamo:

$$\begin{aligned}
S - s &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i(x_{i+1} - x_i) - m_i(x_{i+1} - x_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\epsilon(x_{i+1} - x_i) = 2\epsilon \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = 2\epsilon(b - a).
\end{aligned}$$

Dakle, $S - s \leq 2\epsilon \cdot (b - a)$.
Zaključak: za svaki $\epsilon > 0$ postoje donja Darbouxova suma s i gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[a, b]$ takve da je $S - s \leq 2\epsilon \cdot (b - a)$.
Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $\frac{\epsilon}{4(b-a)} > 0$ pa prema dokazanom postoje donja Darbouxova suma s i gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[a, b]$ takve da je

$$S - s \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{4(b - a)} \cdot (b - a) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dakle, $S - s < \epsilon$. Iz propozicije 2.5.3 slijedi da je funkcija f integrabilna. □

Poglavlje 3

Derivabilnost i integrabilnost

3.1 Neprekidne funkcije na otvorenim intervalima

Definicija 3.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Za I kažemo da je otvoreni interval ako je $I = \mathbb{R}$ ili postoje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, takvi da je $I = \langle a, b\rangle$ ili $I = \langle a, +\infty\rangle$ ili $I = \langle -\infty, b\rangle$.*

Napomena 3.1.2. *Neka je I otvoreni interval te neka su $c, d \in I$ takvi da je $c < d$. Tada je $[c, d] \subseteq I$. Naime, ako je $I = \langle a, b\rangle$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, onda imamo $a < c < d < b$ pa za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $c \leq x \leq d$, vrijedi $a < x < b$. Analogno, vidimo da tvrdnja vrijedi i u preostalim slučajevima.*

Napomena 3.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je $[a, b] \subseteq S$. Tada je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je funkcija $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna.*

Naime, očito je da funkcije f i $f|_{[a,b]}$ imaju iste donje i gornje Darbouxove sume na segmentu $[a, b]$. Stoga su donji i gornji integrali ovih funkcija na $[a, b]$ jednaki pa tvrdnja slijedi.

Propozicija 3.1.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Pretpostavimo da je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$. Tada je funkcija $f|_T$ neprekidna u točki x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Pošto je $T \subseteq S$ (3.1) vrijedi za svaki $x \in T$. Prema tome, za svaki $x \in T$ vrijedi implikacija:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f|_T(x) - f|_T(x_0)| < \epsilon.$$

Dakle, $f|_T$ je neprekidna u točki x_0. □

Korolar 3.1.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je $T \subseteq S$, $T \neq \emptyset$. Tada je $f|_T$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in T$. Tada je $x_0 \in S$ pa prema pretpostavci korolara vrijedi da je f neprekidna u točki x_0. Iz propozicije 3.1.4 slijedi da je $f|_T$ neprekidna u točki x_0.
Zaključak: $f|_T$ je neprekidna funkcija. □

Korolar 3.1.6. *Neka je I otvoreni interval te neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka su $a, b \in I$, $a < b$. Tada je f integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Prema korolaru 3.1.5 funkcija $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neprekidna. Iz teorema 2.5.4 slijedi da je ta funkcija integrabilna. Sada iz napomene 3.1.3 slijedi da je f integrabilna na $[a, b]$. □

Definicija 3.1.7. *Neka je I otvoreni interval, $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te $a, b \in I$ takvi da je $a \geq b$.*
Definirajmo

$$\int_a^b f = \begin{cases} 0, \ a = b \\ -\int_b^a f, \ a > b. \end{cases}$$

Uočimo da navedena definicija ima smisla prema korolaru 3.1.6.

Lema 3.1.8. *Neka je I otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*

1. *Neka su $a, b, c \in I$ takvi da je $a \leq b \leq c$. Tada je:*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{3.2}$$

2. *Neka su $a, b \in I$. Tada je:*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \tag{3.3}$$

Dokaz.

1. a) $a = c$.
   Tada je $a = b = c$ pa (3.2) očito vrijedi.

   b) $a < c$

   - $a < b < c$.
     Tada (3.2) vrijedi prema teoremu 1.4.9.

- $a = b < c$
  Tada je $\int_a^b f = 0$ pa (3.2) očito vrijedi.

- $a < b = c$
  Analogno kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da (3.2) vrijedi.

2. Ako je $a > b$, onda (3.3) vrijedi prema definiciji.

   Ako je $a = b$, onda (3.3) vrijedi jer je

$$\int_a^b f = \int_b^a f = 0.$$

   Ako je $a < b$, onda je

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

   pa slijedi (3.3).

□

Propozicija 3.1.9. *Neka je I otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka su $a, b, c \in I$. Tada je:*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{3.4}$$

Dokaz.

1. $a \le c$.
   a) $a \le b \le c$.
      Tada (3.4) slijedi iz leme 3.1.8.
   b) $b \le a \le c$.
      Tada iz leme 3.1.8 slijedi da je

$$\int_b^c f = \int_b^a f + \int_a^c f.$$

      Stoga je, koristeći lemu 3.1.8

$$\int_a^c f = \int_b^c f - \int_b^a f = \int_b^c f + \int_a^b f.$$

Dakle,

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

pa vrijedi (3.4).

c) $a \leq c \leq b$.
Prema lemi 3.1.8 vrijedi

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

pa je

$$\int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dakle, (3.4) vrijedi.

2. $c \leq a$.
Prema dokazanom dobivamo :

$$\int_c^a f = \int_c^b f + \int_b^a f.$$

Navedeni izraz pomnožimo sa -1 pa dobivamo sljedeće:

$$-\int_c^a f = -\int_c^b f - \int_b^a f,$$

tj.

$$\int_a^c f = \int_b^c f + \int_a^b f.$$

Dakle, (3.4) vrijedi.

□

3.2 Neprekidnost i primitivne funkcije

Propozicija 3.2.1. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je funkcija f integrabilna na $[a, b]$.*
Tada je

$$m(f; a, b)(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(f; a, b)(b - a).$$

Dokaz. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Neka je

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Prema lemi 1.3.11 za svaki $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ vrijedi $m(f; a, b) \leq m(f; x_i, x_{i+1})$. Stoga je :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m(f; a, b)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} m(f; x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Prema tome, $m(f; a, b) \cdot (b - a) \leq s$.
Budući da je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ vrijedi:

$$s \leq I_*(f; a, b) = \int_a^b f.$$

Prema tome, $m(f; a, b)(b - a) \leq \int_a^b f$.
Koristeći lemu 1.4.3 dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_a^b f = I^*(f; a, b) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} M(f; x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} M(f; a, b)(x_{i+1} - x_i) = M(f; a, b)(b - a).\end{aligned}$$

Dakle, $\int_a^b f \leq M(f; a, b)(b - a)$. □

Lema 3.2.2. *Neka je I otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je $x_0 \in I$. Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.*
Nadalje, pretpostavimo da je (t_n) niz realnih brojeva takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$m(f; x_0, x_n) \leq t_n \leq M(f; x_0, x_n) \text{ ako je } x_0 < x_n$$

$$m(f; x_n, x_0) \leq t_n \leq M(f; x_n, x_0) \text{ ako je } x_n < x_0$$

Tada $t_n \to f(x_0)$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u točki x_0, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $y \in I$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$\text{ako je } y \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle, \text{ onda je } f(y) \in \left\langle f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \right\rangle. \tag{3.5}$$

Budući da $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle .$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$.
1.slučaj
$x_0 < x_n$.
Budući da je $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ imamo
$[x_0, x_n] \subseteq \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.
Iz ovoga te iz (3.5) slijedi:

$$f([x_0, x_n]) \subseteq \left\langle f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \right\rangle.$$

Stoga je $f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}$ donja, a $f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}$ gornja međa skupa $f([x_0, x_n])$.
Prema tome,

$$f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} \leq m(f; x_0, x_n) \leq M(f; x_0, x_n) < f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Iz pretpostavke leme slijedi:

$$f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} \leq t_n \leq f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Stoga je $f(x_0) - \epsilon < t_n < f(x_0) + \epsilon$ tj. $t_n \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$.

2.slučaj:
$x_n < x_0$.
Analogno kao u prethodnom slučaju zaključujemo da je $[x_n, x_0] \subseteq \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ te da je $f([x_n, x_0]) \subseteq \left\langle f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \right\rangle$, a što povlači

$$f(x_0) - \epsilon < t_n < f(x_0) + \epsilon$$

tj.

$$t_n \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle .$$

Zaključak: za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$t_n \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle .$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Napomena 3.2.3. *Neka je I otvoreni interval te neka je $x \in I$. Tada je x gomilište skupa I.*

Naime, to slijedi iz korolara 2.1.22 ako je $I = \langle a, b \rangle$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Ako je $I = \mathbb{R}$ onda lako zaključujemo da je x gomilište skupa I. Pretpostavimo da je $I = \langle a, +\infty \rangle$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Iz $x \in I$ slijedi da je $\langle a, x \rangle \subseteq I$ pa iz propozicije 2.1.21 i napomene 2.1.20 slijedi da je x gomilište skupa I. Analogno zaključujemo da je x gomilište skupa I ako je $I = \langle -\infty, a \rangle$ za neki $a \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.2.4. *Neka je I otvoreni interval te neka je $a \in I$. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te neka je $F : I \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$F(x) = \int_a^x f$$

za svaki $x \in I$. Tada je F derivabilna funkcija te je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in I$. Prema napomeni 2.1.20 x_0 je gomilište skupa I. Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$t_n = \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći propoziciju 3.1.9 dobivamo :

$$t_n = \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\int_a^{x_n} f - \int_a^{x_0} f}{x_n - x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f}{x_n - x_0}.$$

Dakle,

$$t_n = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f}{x_n - x_0}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $x_0 < x_n$.

Prema propoziciji 3.2.1 vrijedi:

$$m(f; x_0, x_n)(x_n - x_0) \leq \int_{x_0}^{x_n} f \leq M(f; x_0, x_n)(x_n - x_0)$$

pa je

$$m(f; x_0, x_n) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_n} f}{x_n - x_0} \leq M(f; x_0, x_n)$$

dakle,

$$m(f; x_0, x_n) \leq t_n \leq M(f; x_0, x_n). \tag{3.6}$$

Pretpostavimo sada da je $x_n < x_0$.
Tada je:

$$m(f; x_n, x_0)(x_0 - x_n) \leq \int_{x_n}^{x_0} f \leq M(f; x_n, x_0)(x_0 - x_n)$$

pa je

$$m(f; x_n, x_0) \leq \frac{\int_{x_n}^{x_0} f}{x_0 - x_n} \leq M(f; x_n, x_0).$$

No,

$$\frac{\int_{x_n}^{x_0} f}{x_0 - x_n} = \frac{-\int_{x_0}^{x_n} f}{-(x_n - x_0)} = \frac{\int_{x_0}^{x_n} f}{x_n - x_0} = t_n.$$

Prema tome,

$$m(f; x_n, x_0) \leq t_n \leq M(f; x_n, x_0). \tag{3.7}$$

Iz leme 3.2.2 slijedi da $t_n \to f(x_0)$.
Dakle,

$$\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} \to f(x_0).$$

Iz propozicije 2.2.11 slijedi da je funkcija F derivabilna u x_0 te da je $f(x_0)$ derivacija od F u točki x_0.
Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Definicija 3.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, F : S \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je F derivabilna te da je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in S$.*
Tada za F kažemo da je primitivna funkcija od f.

Prethodni teorem pokazuje da svaka neprekidna funkcija na intervalu ima primitivnu funkciju.

3.3 Minimumi i maksimumi funkcija

Propozicija 3.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Tada je funkcija $-f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Prema propoziciji 2.2.12 vrijedi $f(x_n) \to f(x_0)$. Iz propozicije 2.1.13 (za $c = -1$) slijedi da

$$-f(x_n) \to -f(x_0) \text{ tj. } (-f)(x_n) \to (-f)(x_0).$$

Iz propozicije 2.2.12 slijedi da je $-f$ neprekidna u x_0. □

Teorem 3.3.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \text{ za svaki } \ x \in [a, b] .$$

Dokaz. Prema teoremu 2.5.1 funkcija f je omeđena. Dakle, skup $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ je omeđen pa prema propoziciji 1.2.5 ima supremum.
Neka je $M = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada $M - \frac{1}{n}$ nije gornja međa skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ (jer je M najmanja gornja međa tog skupa) pa postoji $x_n \in [a, b]$ takav da je $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$.
Dakle, imamo niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in [a, b]$ te

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \tag{3.8}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Iz činjenice da je $a \leq x_n \leq b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi da je a donja, a b gornja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dakle, niz (x_n) je omeđen.
Prema teoremu 2.3.11 i napomeni 2.3.12 postoji $c \in [a, b]$ takav da je c gomilište niza (x_n).
Vrijedi $f(c) \leq M$ prema definiciji broja M. Tvrdimo da je $f(c) = M$.
Pretpostavimo suprotno.

Tada je $f(c) < M$. Stoga je $\frac{M-f(c)}{2} > 0$.
Odaberimo $\epsilon > 0$ takav da je

$$\epsilon < \frac{M - f(c)}{2}.$$

Slijedi $2\epsilon < M - f(c)$ pa je $f(c) + 2\epsilon < M$, što povlači sljedeće:

$$f(c) + \epsilon < M - \epsilon. \tag{3.9}$$

Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{N} < \epsilon. \tag{3.10}$$

Budući da je f neprekidna u c, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi implikacija:

$$\text{ako je } x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle, \text{ onda je } f(x) \in \langle f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon\rangle. \tag{3.11}$$

Budući da je c gomilište niza (x_n), postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle$. Iz (3.11) slijedi da je

$$f(x_n) \in \langle f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon\rangle.$$

Posebno, vrijedi

$$f(x_n) < f(c) + \epsilon. \tag{3.12}$$

Iz $n \geq N$ slijedi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ pa iz (3.10) slijedi da je $\frac{1}{n} < \epsilon$. Stoga je $-\epsilon < \frac{-1}{n}$ pa je

$$M - \epsilon < M - \frac{1}{n}. \tag{3.13}$$

Iz (3.9), (3.8) i (3.11) slijedi da je

$$f(c) + \epsilon < f(x_n).$$

Ovo je u kontradikciji sa (3.12).
Dakle,

$$f(c) = M.$$

Slijedi da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$f(x) \leq f(c).$$

Promotrimo sada funkciju $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Znamo da je $-f$ neprekidna što slijedi iz propozicije 3.3.1 pa prema dokazanom postoji $d \in [a, b]$ takav da je

$$-f(x) \leq -f(d)$$

za svaki $x \in [a, b]$.
Slijedi $f(d) \leq f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$.
Dakle,

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c)$$

za svaki $x \in [a, b]$.
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Definicija 3.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te $x_0 \in S$. Kažemo da funkcija f ima u točki x_0 lokalni minimum ako postoji $r > 0$ takav da je $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subseteq S$ te $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$.*

Analogno definirajmo pojam da funkcija f u točki x_0 ima lokalni maksimum.

Definicija 3.3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te $x_0 \in S$. Kažemo da funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstrem ako f u x_0 ima lokalni minimum ili lokalni maksimum.*

Lema 3.3.5. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.*

1. *Pretpostavimo da je $b \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \leq b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \leq b$.*
2. *Pretpostavimo da je $b \in \mathbb{R}$ takav da je $b \leq x_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $b \leq a$.*

Dokaz.

1. Pretpostavimo suprotno. Tada je $b < a$.
   Definirajmo $\epsilon = a - b$. Tada je $\epsilon > 0$ i vrijedi $b = a - \epsilon$.
   Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$.
   Odaberimo bilo koji $n \geq n_0$. Tada je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$ pa je $a - \epsilon < x_n$.
   Dakle, $b < x_n$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom.
   Prema tome, $a \leq b$.
2. Prema pretpostavci vrijedi $-x_n \leq -b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, prema propoziciji 2.1.13 (za $c = -1$) vrijedi

   $$-x_n \to -a.$$

   Prema prvoj tvrdnji ove leme vrijedi $-a \leq -b$.
   Stoga je $b \leq a$.

□

Propozicija 3.3.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Pretpostavimo da f u x_0 ima lokalni ekstrem. Nadalje, pretpostavimo da je f u x_0 derivabilna. Tada je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da f u točki x_0 ima lokalni minimum. Tada postoji $r > 0$ takav da je $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subseteq S$ te
$$f(x_0) \leq f(x) \tag{3.14}$$
za svaki $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$. Prema 2.1.21, x_0 je gomilište skupa $\langle x_0 - r, x_0\rangle$. Prema propoziciji 2.1.23 postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je

$$x_n \in \langle x_0 - r, x_0\rangle \tag{3.15}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Iz propozicije 2.2.10 slijedi da

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0). \tag{3.16}$$

Iz (3.14) slijedi da je $f(x_n) - f(x_0) \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Iz (3.15) slijedi da je $x_n - x_0 < 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Stoga je

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leq 0$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Iz (3.16) i prethodne leme 3.3.5 slijedi da je

$$f'(x_0) \leq 0. \tag{3.17}$$

Također, iz činjenice da je x_0 gomilište od $\langle x_0, x_0 + r\rangle$, slijedi da postoji niz realnih brojeva (y_n) takav da je $y_n \in \langle x_0, x_0 + r\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $y_n \to x_0$.
Slijedi:
$$\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \to f'(x_0).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je
$$\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \geq 0,$$
pa iz leme 3.3.5 slijedi $f'(x_0) \geq 0$. Iz navedenog te iz (3.17) slijedi da je $f'(x_0) = 0$.
Posve analogno dobivamo da je $f'(x_0) = 0$ ako funkcija f u točki x_0 ima lokalni maksimum.

□

Lema 3.3.7. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $x \in \langle a, b\rangle$. Tada postoji $r > 0$ takav da je*

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \langle a, b\rangle . \tag{3.18}$$

Dokaz. Definirajmo $r = \min\{x - a, b - x\}$. Uočimo da je $r > 0$.
Iz $r \leq x - a$ slijedi $a \leq x - r$, a iz $r \leq b - x$ slijedi $x + r \leq b$.
Dakle,

$$a \leq x - r \text{ i } x + r \leq b$$

pa slijedi (3.18). □

3.4 Lagrangeov teorem

Teorem 3.4.1 (Rolleov teorem)**.** *Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.
Pretpostavimo da je $f(a) = f(b)$ te da je f derivabilna u točki x za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Tada postoji $x \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(x) = 0$.

Dokaz. Prema teoremu 3.3.2 postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takav da je

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \tag{3.19}$$

za svaki $x \in [a, b]$.
Očito je tada

$$f(x_1) \leq f(a) \leq f(x_2).$$

1. $f(x_1) < f(a)$.
   Tada je $f(x_1) < f(b)$ pa je $x_1 \neq a$ i $x_1 \neq b$.
   Slijedi $x_1 \in \langle a, b\rangle$.
   Prema lemi 3.3.5 postoji $r > 0$ takav da je

   $$\langle x_1 - r, x_1 + r\rangle \subseteq \langle a, b\rangle .$$

   Za svaki $x \in \langle x_1 - r, x_1 + r\rangle$ zbog (3.19) vrijedi $f(x_1) \leq f(x)$. Prema tome, funkcija f u točki x_1 ima lokalni minimum. Iz propozicije 3.3.6 slijedi da je

   $$f'(x_1) = 0.$$

2. $f(a) < f(x_2)$.
   Analogno kao u prethodnom slučaju dolazimo do zaključka da je $x_2 \in \langle a, b\rangle$ te da f u x_2 ima lokalni maksimum.
   Slijedi da je

   $$f'(x_2) = 0.$$

3. $f(x_1) = f(a) = f(x_2)$.
   Iz ovoga slijedi da je $f(x) = f(a)$ za svaki $x \in [a, b]$. Odaberimo bilo koju točku $x \in \langle a, b\rangle$.
   Tada lako zaključujemo da f u x ima lokalni minimum i lokalni maksimum.
   Stoga je
   $$f'(x) = 0.$$

$\square$

Propozicija 3.4.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki x_0. Tada je funkcija $f + g$ derivabilna u x_0 te je*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \longrightarrow x_0$.
Želimo dokazati da vrijedi

$$\frac{(f + g)(x_n) - (f + g)(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0).$$

Ako to dokažemo onda će iz propozicije 2.2.11 slijediti tvrdnja navedene propozicije. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{(f + g)(x_n) - (f + g)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{f(x_n) + g(x_n) - f(x_0) - g(x_0)}{x_n - x_0} \\ &= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{(f + g)(x_n) - (f + g)(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \tag{3.20}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.2.10 vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \text{ i } \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to g'(x_0).$$

Iz (3.20) i propozicije 2.1.12 slijedi da

$$\frac{(f + g)(x_n) - (f + g)(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0).$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Propozicija 3.4.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u x_0. Neka je $c \in \mathbb{R}$ i neka je $g : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(x) = c \cdot f(x)$ za svaki $x \in S$.*
Tada je g derivabilna u x_0 te je $g'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{cf(x_n) - cf(x_0)}{x_n - x_0} = c \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Iz propozicija 2.2.10 i 2.1.13 slijedi da

$$c \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to c \cdot f'(x_0),$$

dakle

$$\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to c \cdot f'(x_0).$$

Tvrdnja propozicije sada slijedi iz propozicije 2.2.11. □

Propozicija 3.4.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u x_0. Tada je $f + g$ funkcija neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Iz propozicije 2.2.12 slijedi da

$$f(x_n) \to f(x_0) \text{ i } g(x_n) \to g(x_0).$$

Stoga $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$. Dakle,

$$(f + g)(x_n) \to (f + g)(x_0).$$

Iz propozicije 2.2.12 slijedi da je funkcija $f + g$ neprekidna u x_0. □

Propozicija 3.4.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u x_0. Neka je $c \in \mathbb{R}$.*
Neka je $g : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(x) = c \cdot f(x)$ za svaki $x \in S$. Tada je g neprekidna u x_0.

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada prema 2.2.12 $f(x_n) \to f(x_0)$ pa

$$c \cdot f(x_n) \to c \cdot f(x_0),$$

tj. $g(x_n) \to g(x_0)$.
Iz propozicije 2.2.12 slijedi da je g neprekidna u x_0. □

Teorem 3.4.6. *Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*
Pretpostavimo da je f derivabilna u točki x za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa

$$g(x) = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a).$$

Uočimo da je svaka točka segmenta $[a, b]$ gomilište od $[a, b]$. Naime, a je gomilište od $\langle a, b\rangle$ prema propoziciji 2.1.21 pa je gomilište i od $[a, b]$.
Analogno vidimo da je i b gomilište od $[a, b]$.
Neka je $x \in \langle a, b\rangle$.
Tada je x gomilište od $\langle a, b\rangle$ prema korolaru 2.1.22. Stoga je x gomilište i od $[a, b]$.
Funkcija $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$u(x) = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

je derivabilna prema primjerima 2.2.6 i 2.2.7 te propozicijama 3.4.2 i 3.4.3, vrijedi

$$u'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz korolara 2.2.9 slijedi da je funkcija g derivabilna te da je

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

za svaki $x \in [a, b]$.
Prema primjerima 1.1.3 i 1.1.4 te propozicijama 3.4.4 i 3.4.5 funkcija u je neprekidna.
Iz korolara 3.1.5 slijedi da je funkcija g neprekidna.
Definirajmo $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa $h(x) = f(x) - g(x)$.
Iz propozicija 3.4.4 i 3.4.5 slijedi da je h neprekidna.
Prema propozicijama 3.4.2 i 3.4.3 funkcija h je derivabilna u x za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Imamo

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

Dakle, $h(a) = 0$.
Analogno dobivamo da je $h(b) = 0$.
Dakle, $h(a) = h(b)$.

Iz teorema 3.4.1 slijedi da postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je $h'(c) = 0$.
Iz propozicija 3.4.2 i 3.4.3 slijedi da je

$$h'(c) = f'(c) - g'(c).$$

Dakle, $f'(c) - g'(c) = 0$, tj. $f'(c) = g'(c)$.
Prema tome

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

3.5 Newton-Leibnizova formula

Propozicija 3.5.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u x_0. Tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Iz propozicije 2.2.10 slijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

Iz $x_n \to x_0$ lako zaključujemo da $x_n - x_0 \to 0$. Iz propozicije 2.3.7 slijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot (x_n - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0,$$

tj. $f(x_n) - f(x_0) \to 0$.
Iz ovoga lako slijedi da

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Iz teorema 2.1.16 slijedi da je $f(x_0)$ limes funkcije f u točki x_0.
Iz propozicije 2.1.4 slijedi da je funkcija f neprekidna u x_0. □

Korolar 3.5.2. *Neka je I otvoreni interval te neka je $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da je*

$$f'(x) = 0$$

za svaki $x \in I$. Tada je f konstantna funkcija.

Dokaz. Odaberimo $a \in I$. Neka je $b \in I$.
Pretpostavimo da je $a < b$.
Promotrimo funkciju $f|_{[a,b]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Prema korolaru 2.2.9 funkcija $f|_{[a,b]}$ je derivabilna i $(f|_{[a,b]})'(x) = f'(x)$ za svaki $x \in [a,b]$.
Iz propozicije 3.5.1 slijedi da je funkcija $f|_{[a,b]}$ neprekidna pa iz teorema 3.4.6 slijedi da postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$(f|_{[a,b]})'(c) = \frac{f|_{[a,b]}(b) - f|_{[a,b]}(a)}{b-a},$$

tj.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

No, $f'(c) = 0$ pa slijedi da je

$$f(a) = f(b).$$

Do istog zaključka analogno dolazimo u slučaju $b < a$.
Dakle, $f(a) = f(b)$ za svaki $b \in I$. Prema tome, funkcija f je konstantna. □

Propozicija 3.5.3. *Neka je I otvoreni interval, neka je $f : I \to \mathbb{R}$ te neka su F i G primitivne funkcije od f.*
Tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in I$.

Dokaz. Neka je $H = G - F$. Iz propozicija 3.4.2 i 3.4.3 slijedi da je H derivabilna funkcija te da je

$$H'(x) = G'(x) - F'(x)$$

za svaki $x \in I$.
No, za svaki $x \in I$ vrijedi

$$F'(x) = f(x) \text{ i } G'(x) = f(x),$$

dakle $F'(x) = G'(x)$ pa je $H'(x) = 0$.
Iz korolara 3.5.2 slijedi da postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da $H(x) = C$ za svaki $x \in I$.
Iz definicije funkcije H slijedi da je $G(x) - F(x) = C$ za svaki $x \in I$, tj.
$G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in I$. □

Teorem 3.5.4 (Newton-Leibnizova formula)**.**
Neka je I otvoreni interval te neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.
Neka je $G : I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija od f. Tada za sve $a, b \in I$ vrijedi

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Dokaz. Neka su $a, b \in I$. Definirajmo funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Prema teoremu 3.2.4 F je primitivna funkcija od f. Iz propozicije 3.5.3 slijedi da postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in I$.
Posebno, za $x = a$ dobivamo

$$G(a) = F(a) + C = 0 + C = C,$$

dakle

$$G(a) = C.$$

Nadalje, za $x = b$ dobivamo

$$G(b) = F(b) + C$$

pa je $G(b) = \int_a^b f + G(a)$, odnosno

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

$\square$

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[3] D. Veljan, B. Pavković, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovome diplomskome radu proučavaju se osnovni aspekti integrabilnosti. Definiraju se neprekidne i integrabilne funkcije uz navođenje istih.
Navode se i dokazuju razne činjenice vezane uz Riemmanov integral. Definira se limes funkcije i konvergencija nizova.
Kroz rad se uglavnom proučava integrabilnost i derivabilnost funkcija.

Summary

This graduate thesis examines the basic aspects of integrability. Continuous and integrable functions are defined with the indication of the same. Various facts concerning Rieman integral are stated and proved. Limits of functions and convergence of sequences are defined. Throughout the work, the integrability and derivability of functions are mainly studied.

Životopis

Rođena sam u Zaboku, 7.9.1993. godine. Živim u Oroslavju, malom mjestu u Hrvatskom zagorju gdje sam pohađala Osnovnu školu. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja 2008. godine upisujem Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku, prirodoslovno-matematički smjer. Zatim 2012. godine na matematičkom odsjeku Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta u Zagrebu upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer. 2017. godine završila sam Prediplomski sveučilišni studij te stekla akademski naziv sveučilišna prvostupnica edukacije matematike. Na istom faklutetu nastavila sam svoje obrazovanje upisavši Diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer.