Topološki prostori izračunljivog tipa

Čelar, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Čelar

TOPOLOŠKI PROSTORI IZRAČUNLJIVOG TIPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija izračunljivosti proučava *odlučive* ili *rješive* probleme, odnosno probleme do čijeg rješenja možemo doći upotrebom nekog *algoritma*. Kako bismo mogli odgovoriti na pitanje je li neki konkretan problem rješiv, najprije moramo dati formalnu definiciju pojma algoritma. Jedan pristup toj problematici je promatranje idealiziranih strojeva koji izvode unaprijed definirane operacije na nekom skupu objekata, kao što su, primjerice, *RAM-stroj* ili *Turingov stroj*.

Nešto drukčiji (i apstraktniji) pristup je pomoću *parcijalno rekurzivnih funkcija*. Klasa parcijalno rekurzivnih funkcija je najmanja klasa brojevnih funkcija koja sadrži *inicijalne funkcije* (nul-funkciju, funkciju sljedbenik i sve koordinatne projekcije), i zatvorena je za kompoziciju, primitivnu rekurziju i minimizaciju. *Rekurzivna* funkcija je totalna parcijalno rekurzivna funkcija. Uočimo da, intuitivno, ova klasa funkcija odgovara operacijama za koje prirodno očekujemo se mogu izvršiti na svakom računalu. Inicijalne funkcije odgovaraju resetiranju izlaznog registra, vraćanju neke od ulaznih vrijednosti i uvećavanju neke vrijednosti za jedan. Zatim, kompozicija odgovara *slijednom* izvršavanju naredbi, primitivna rekurzija odgovara *ograničenim petljama*, a minimizacija *neograničenim petljama*. Stoga ne čudi činjenica da klasa parcijalno rekurzivnih funkcija odgovara klasi funkcija izračunljivih na RAM-stroju ili Turingovom stroju (vidi [1], teorem ekvivalencije za brojevne funkcije). Pretpostavlja se da sve "dovoljno dobre" formalizacije pojma algoritma definiraju istu klasu izračunljivih funkcija, o čemu govori *Church-Turingova teza*.

Dakle, neko preslikavanje smatramo izračunljivim ako ono odgovara djelovanju (parcijalno) rekurzivne funkcije. Odmah uočavamo bitan nedostatak ovog pristupa: izračunljivost je definirana samo za funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, dok u primjenama želimo baratati i s puno općenitijim objektima. Stoga je potrebno proširiti definiciju rekurzivnosti na funkcije s nekim drugim skupovima kao domenama i kodomenama. To je jednostavno učiniti ako imamo prirodno *kodiranje*, odnosno reprezentaciju elemenata novog skupa pomoću prirodnih brojeva. Primjerice, cijeli broj možemo poistovjetiti s uređenim parom predznaka i apsolutne vrijednosti, pa za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$f(x) = (-1)^{b(x)} a(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Slično, reći ćemo da je funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$g(x) = (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sljedeći korak je uvođenje izračunljivosti na skupu realnih brojeva. Najprije se pitamo kako bismo realne brojeve reprezentirali pomoću prirodnih brojeva. Jasno je da to ne možemo jednoznačno učiniti, jer realnih brojeva "ima previše". Ne možemo ih reprezentirati čak ni konačnim nizovima prirodnih brojeva - ali mogli bismo pomoću beskonačnih nizova. Zapravo, imamo vrlo prirodnu reprezentaciju realnih brojeva pomoću nizova racionalnih brojeva, jer realan broj možemo poistovjetiti s Cauchyjevim nizom čiji je on limes. Ta činjenica motivira sljedeću definiciju: realan broj x smatramo izračunljivim ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|x - f(k)| < 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pokazuje se da je skup izračunljivih realnih brojeva zatvoren za osnovne algebarske operacije. Također, može se pokazati da taj skup sadrži sve algebarske realne brojeve, ali i neke transcendentne, poput e ili π.

Sada je jasno i kako bismo definirali izračunljivost funkcije $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Ona će biti izračunljiva ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|f(x) - F(x, k)| < 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dalje bismo htjeli definirati izračunljivost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Promotrimo kako bismo mogli efektivno računati vrijednosti realne funkcije. Kako bismo dobili traženu aproksimaciju broja $f(x)$, stroju koji računa funkciju f kao ulazni podatak moramo dati dovoljno dobru aproksimaciju broja x. To motivira zahtjev *efektivne uniformne neprekidnosti*:

$$(\exists \text{ rekurzivna funkcija } \delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \ (\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad |x-y| < 2^{-\delta(k)} \Rightarrow |f(x)-f(y)| < 2^{-k}.$$

Također, jasno je da rezultat izračunavanja mora biti izračunljiv broj. Zapravo, zahtijevat ćemo i više - da funkcija preslikava izračunljive nizove realnih brojeva u iste takve. Dakle, za funkciju $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je efektivno uniformno neprekidna i preslikava izračunljive nizove u izračunljive nizove kažemo da je izračunljiva. Nultočka izračunljive funkcije općenito ne mora biti izračunljiva. Dapače, moguće je konstruirati izračunljivu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima nultočke, ali nijedna od njih nije izračunljiva.

Može se pokazati da je kompaktan skup S u $\mathbb{R}$ skup nultočaka izračunljive realne funkcije ako i samo ako je *poluizračunljiv*. Kompaktan skup u $\mathbb{R}$ je poluizračunljiv ako možemo efektivno izlistati sve konačne unije otvorenih intervala s racionalnim krajnjim točkama koje ga prekrivaju. *Izračunljiv* skup je kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ kojeg možemo, s danom točnošću, efektivno aproksimirati konačnim skupom racionalnih brojeva. Kao što možemo naslutiti iz terminologije, svaki izračunljiv skup je poluizračunljiv. Međutim, obrat ove tvrdnje općenito ne vrijedi. Stoga se možemo pitati koja dodatna svojstva poluizračunljiv skup mora imati da bi bio izračunljiv.

U ovom diplomskom radu formulirat ćemo ove pojmove u nešto općenitijem kontekstu, za *izračunljive metričke prostore.* Izračunljiv metrički prostor je metrički prostor (X, d) opskrbljen nizom $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čija je slika gusta u (X, d), a funkcija koja paru $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ pridružuje $d(\alpha_i, \alpha_j)$ je izračunljiva. Proučavat ćemo topološka svojstva koja garantiraju izračunljivost poluizračunljivih skupova u izračunljivom metričkom prostoru. Preciznije, pokazat ćemo sljedeće: ako je X kontinuum lančast od a do b te ako su skupovi X i $\{a, b\}$ poluizračunljivi, onda je X izračunljiv. Nadalje, ako je S prostor homeomorfan s $I^2 = [0, 1]^2$ i ako je ∂S slika od $\partial I^2 = ([0, 1] \times \{0, 1\}) \cup (\{0, 1\} \times [0, 1])$ pri tom homeomorfizmu, pokazat ćemo da je S izračunljiv čim su S i ∂S poluizračunljivi.

Za uređen par (Δ, Σ) topološkog prostora Δ i njegovog potprostora Σ kažemo da ima *izračunljiv tip* ako za svako smještenje od Δ u izračunljiv metrički prostor takvo da su slike od Δ i Σ poluizračunljive vrijedi da je slika od Δ izračunljiva. Dakle, možemo reći da (uz oznake kao gore) uređeni parovi $(X, \{a, b\})$ i $(I^2, \partial I^2)$ imaju izračunljiv tip.

Promatrat ćemo i još općenitiji ambijentni prostor - *izračunljiv topološki prostor*, te ćemo pokazati da i u tom slučaju, za Hausdorffov kontinuum X lančast od a do b, par $(X, \{a, b\})$ ima izračunljiv tip.

Pri izradi ovog diplomskog rada od iznimnog značaja bila je pomoć mog mentora, izv. prof. dr. sc. Zvonka Iljazovića, kojem ovim putem zahvaljujem na svim korisnim savjetima te uloženom vremenu i trudu. Također, željela bih zahvaliti svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci tijekom studija.

Poglavlje 1

Izračunljivost u $\mathbb{R}^n$

1.1 Izračunljivost u $\mathbb{N}^n$

Iz klasične teorije izračunljivosti poznajemo rekurzivne funkcije $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. U ovom odjeljku proširit ćemo pojam rekurzivnosti na funkcije s kodomenom $\mathbb{N}^n$.

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Kažemo da je funkcija $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ **rekurzivna** ako su sve njene komponentne funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$ rekurzivne.

Propozicija 1.1.1. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivne funkcije. Tada je i kompozicija $g \circ f$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f i neka su $g_1, g_2, \ldots, g_m$ komponentne funkcije od g. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(g \circ f)(x) = \big(g_1(f(x)),\ g_2(f(x)),\ \ldots,\ g_m(f(x))\big),$$

odnosno, $g_1 \circ f, g_2 \circ f, \ldots, g_m \circ f$ su komponentne funkcije od $g \circ f$.

Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(g_i \circ f)(x) = g_i(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

pa je $g_i \circ f$ kompozicija funkcija g i $f_1, f_2, \ldots, f_n$, i kao takva je rekurzivna. Odavde zaključujemo da je $g \circ f$ rekurzivna funkcija. $\square$

Lema 1.1.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Neka je*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\right\}.$$

Tada je S rekurzivan skup.

Dokaz. Promotrimo najprije slučaj $n = 1$. Tada je

$$\chi_S(x) = \overline{\mathrm{sg}}\,(|f(x) - g(x)|), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pri čemu je $\overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Poznato je da je $\overline{\mathrm{sg}}$ rekurzivna funkcija, a također je poznato da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto |a - b|$ rekurzivna. Iz ovoga zakljkučujemo da je χ_S rekurzivna funkcija. Dakle, S je rekurzivan skup u slučaju $n = 1$.

Promotrimo sada opći slučaj. Neka su $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f i $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Vrijedi:

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f_1(x) = g_1(x)\} \cap \ldots \cap \{x \in \mathbb{N}^k \mid f_n(x) = g_n(x)\}.$$

Prema prethodno dokazanom, S je presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. Dakle, skup S je rekurzivan. □

Primjer 1.1.3. Neka su $p_0, p_1, p_2, \ldots$ svi prosti brojevi redom. Nadalje, neka je $E : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija koja uređenom paru (x, k) pridružuje eksponent kojim p_k ulazi u rastav od x na proste faktore ako je $x \geq 1$, te $E(0, k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Poznato je da je funkcija E rekurzivna.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$f(x) = (E(x, 1), E(x, 2), \ldots, E(x, k)).$$

Tada je f rekurzivna surjekcija. ◀

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za skup S kažemo da je **rekurzivno prebrojiv** ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i odaberimo $s_0 \in S$. Prema primjeru 1.1.3, postoji rekurzivna surjekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$. Definiramo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako } f(x) \in S \\ s_0, & \text{ako } f(x) \notin S. \end{cases}$$

Neka su $g_1, g_2, \ldots, g_k$ komponentne funkcije od g, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ komponentne funkcije od f i neka je $s_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Neka je $T = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in S\}$. Imamo da je $\chi_T = \chi_S \circ f$, pa slijedi da je T rekurzivan skup.

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ vrijedi

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in T \\ a_i, & x \notin T, \end{cases}$$

pa je za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ funkcija g_i rekurzivna kao funkcija definirana po slučajevima iz rekurzivnih grana i rekurzivnih uvjeta. Dakle, g je rekurzivna funkcija, a očito je $g(\mathbb{N}) = S$. Prema tome, S je rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Teorem 1.1.5 (**Teorem o projekciji**). *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup. Neka je*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists y \in \mathbb{N}^n)\ (x, y) \in T\right\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je $p : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k koordinata, tj.

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) = (x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Jasno je da je p rekurzivna funkcija. Iz pretpostavke teorema slijedi $S = p(T)$.

Ako je $T = \emptyset$, onda je $S = \emptyset$ pa je S rekurzivno prebrojiv. Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Tada je $T = f(\mathbb{N})$ za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{n+k}$. Imamo

$$S = p(T) = p(f(\mathbb{N})) = (p \circ f)(\mathbb{N}).$$

Dakle, $S = (p \circ f)(\mathbb{N})$. Kako je prema propoziciji 1.1.1 $p \circ f$ rekurzivna funkcija, slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Propozicija 1.1.6. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je i skup $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je S prazan, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada je $S = g(\mathbb{N})$ za neku rekurzivnu funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi:

$$x \in f^{-1}(S) \ \Leftrightarrow\ f(x) \in S \ \Leftrightarrow\ (\exists i \in \mathbb{N})\ f(x) = g(i). \tag{1.1}$$

Definirajmo skup $T \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ sa

$$T = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(x) = g(i)\right\}.$$

Iz leme 1.1.2 lako slijedi da je T rekurzivan skup. Nadalje, iz (1.1) slijedi

$$x \in f^{-1}(S) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in \mathbb{N})\ (x, i) \in T.$$

Sada iz teorema o projekciji slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Propozicija 1.1.7. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su i skupovi $S \cap T$ i $S \cup T$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$, tvrdnje su jasne. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je $S = f(\mathbb{N})$ i $T = g(\mathbb{N})$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi:

$$x \in S \cap T \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i, j \in \mathbb{N}) \quad x = f(i) \text{ i } x = g(j). \tag{1.2}$$

Definirajmo skup $\Omega \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$,

$$\Omega = \left\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \;\mid\; x = f(i) \text{ i } x = g(j)\right\}.$$

Korištenjem leme 1.1.2 dobivamo da je Ω rekurzivan kao presjek dva rekurzivna skupa, a zatim iz propozicije 1.1.4 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv. Prema (1.2) vrijedi

$$x \in S \cap T \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists (i, j) \in \mathbb{N}^2\right)\ (x, i, j) \in \Omega.$$

Sada iz teorema o projekciji slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv.

Analogno, promatrajući $\Omega' = \{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = f(i) \text{ ili } x = g(j)\}$, dobivamo da je $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv. $\square$

Za funkciju $f : S \to \mathbb{N}^k$ kažemo da je **parcijalno rekurzivna** ako su sve njene komponentne funkcije parcijalno rekurzivne.

Lema 1.1.8. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivan skup. Nadalje, neka je*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \;\mid\; (\exists y \in \mathbb{N}^n)\ (x, y) \in T\right\}.$$

Tada postoji parcijalno rekurzivna funkcija $f : S \to \mathbb{N}^n$ takva da je $(x, f(x)) \in T$ za svaki $x \in S$.

Dokaz. Neka je E funkcija iz primjera 1.1.3. Definirajmo skup

$$T' = \left\{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \;\mid\; (x, E(i, 1), \ldots, E(i, n)) \in T\right\}.$$

Uočimo da je T' rekurzivan skup. Nadalje, definirajmo k-mjesnu funkciju φ formulom

$$\varphi(x) = \mu i((x, i) \in T').$$

Vidimo da je φ parcijalno rekurzivna funkcija i da je njena domena jednaka S. Također, imamo $(x, \varphi(x)) \in T'$, $\forall x \in S$. Sada je za parcijalno rekurzivnu funkciju $f : S \to \mathbb{N}^k$, danu s

$$f(x) = (E(\varphi(x), 1), \ldots, E(\varphi(x), n)),$$

jasno da ima traženo svojstvo. □

Teorem 1.1.9 (**Single-valuedness**). *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup. Neka su $S_1 \subseteq \mathbb{N}^k$ i $S_2 \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojivi skupovi takvi da za svaki $x \in S_1$ postoji $y \in S_2$ takav da je $(x, y) \in T$. Tada postoji parcijalno rekurzivna funkcija $f : S_1 \to \mathbb{N}^n$ takva da je $f(S_1) \subseteq S_2$ i $(x, f(x)) \in T$ za sve $x \in S_1$.*

Dokaz. Ako je $S_1 = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Ako je $S_1 \neq \emptyset$, onda je $T \neq \emptyset$ i $S_2 \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$, $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takve da je $S_1 = g_1(\mathbb{N})$, $S_2 = g_2(\mathbb{N})$ i $T = h(\mathbb{N})$. Definiramo

$$\Omega = \left\{(x, i, j, l) \in \mathbb{N}^{k+3} \mid x = g_1(i),\ (x, g_2(j)) = h(l)\right\}.$$

Skup Ω je rekurzivan prema lemi 1.1.2.

Za $x \in S_1$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x = g_1(i)$, a po pretpostavci postoje i $j, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, g_2(j)) = h(l)$. Dakle, za svaki $x \in S_1$ postoji $(i, j, l) \in \mathbb{N}^3$ takav da je $(x, i, j, l) \in \Omega$. S druge strane, $(x, i, j, l) \in \Omega$ povlači $x = g_1(i)$, tj. $x \in S_1$. Dakle,

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists (i, j, l) \in \mathbb{N}^3)\ (x, i, j, l) \in \Omega\right\}.$$

Prema lemi 1.1.8 postoji parcijalno rekurzivna funkcija $\varphi : S_1 \to \mathbb{N}^3$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ za svaki $x \in S_1$. Označimo sa φ_1, φ_2 i φ_3 komponentne funkcije od φ. Imamo

$$(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) \in \Omega \qquad \forall x \in S_1,$$

pa iz definicije skupa Ω slijedi

$$(x, g_2(\varphi_2(x))) \in T \qquad \forall x \in S_1.$$

Označimo $f = g_2 \circ \varphi_2$. Imamo da je domena od f jednaka domeni od φ, odnosno S_1, i da je $f(S_1) \subseteq S_2$ jer je $f(S_1) \subseteq g_2(\mathbb{N}) = S_2$. Prema tome, f je tražena parcijalno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.1.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan rekurzivno prebrojiv skup. Tada postoji rekurzivna injekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(\mathbb{N}) = S$.*

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivno na sljedeći način:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0, \\ h(x+1) &= \min\left\{ y \mid g(y) \notin \{g(0), g(1), \dots, g(h(x))\}\right\}. \end{aligned}$$

Definirajmo skup $T = \{(l, y) \mid g(y) \notin \{g(0), g(1), \dots, g(l)\}\}$. T je rekurzivan jer je

$$\chi_T(l, y) = \operatorname{sg}\left(\prod_{i=0}^{l} |g(y) - g(i)|\right)$$

što je rekurzivna funkcija.

Definirajmo sada funkciju G formulom $G(l) = \min\left\{y \mid g(y) \notin \{g(0), \dots, g(l)\}\right\}$. Imamo $G(l) = \mu y((l, y) \in T)$, pa je G parcijalno rekurzivna. Također, G je totalna jer je S po pretpostavci beskonačan. Odavde vidimo da je h rekurzivna funkcija. Tvrdimo:

(1) $g \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je injekcija;

(2) $\operatorname{Im}(g \circ h) = \operatorname{Im} g$.

Očito je h strogo rastuća. Neka je $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Tada je

$$h(j) = \min\left\{ y \mid g(y) \notin \{g(0), g(1), \dots, g(h(j-1))\}\right\},$$

pa posebno $g(h(j)) \notin \{g(0), g(1), \dots g(h(j-1))\}$. Zbog $i < j$ imamo $i \leq j - 1$, pa je $h(i) \leq h(j-1)$. Odavde slijedi $g(h(i)) \in \{g(0), g(1), \dots g(h(j-1))\}$. Dakle, $g(h(i)) \neq g(h(j))$. Time je dokazano (1).

Očito je $\operatorname{Im}(g \circ h) \subseteq \operatorname{Im}(g)$. Indukcijom po n dokazujemo

$$\{g(0), g(1), \dots, g(h(n))\} = \{(g \circ h)(0), (g \circ h)(1), \dots, (g \circ h)(n)\}.$$

Za $n = 0$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $0 \leq i \leq h(n+1)$. Ako je $0 \leq i < h(n+1)$, iz definicije od h vidimo

$$g(i) \in \{g(0), g(1), \dots, g(h(n))\} \subseteq \{(g \circ h)(0), (g \circ h)(1), \dots, (g \circ h)(n)\}.$$

Ako je $i = h(n+1)$, onda je očito $g(h(n+1)) \in \{(g \circ h)(0), \dots, (g \circ h)(n+1)\}$.

Kako je h strogo rastuća, slijedi $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im}(g \circ h)$. Time je dokazano (2) i dokaz je završen. □

1.2 Izračunljivost u $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)} a(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Uočimo da je svaka rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, jer možemo uzeti $a = f$ i $b \equiv 0$. Nadalje, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija i $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{N}$, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Naime,

$$f(x) = |f(x)| = |(-1)^{b(x)} a(x)| = a(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa je f rekurzivna jer je a rekurzivna.

Imamo sljedeću karakterizaciju rekurzivnih funkcija s cjelobrojnim vrijednostima:

Lema 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ je rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi $f(x) = u(x) - v(x)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)} a(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} a(x), & b(x) \text{ paran}, \\ -a(x), & \text{inače}; \end{cases} = \begin{cases} a(x) - 0, & b(x) \text{ paran}, \\ 0 - a(x), & \text{inače}. \end{cases}$$

Definiramo

$$u(x) = \begin{cases} a(x), & b(x) \in 2\mathbb{N}, \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad v(x) = \begin{cases} 0, & b(x) \in 2\mathbb{N}, \\ a(x), & \text{inače}. \end{cases}$$

Kako je skup parnih brojeva $2\mathbb{N}$ rekurzivan, funkcije u i v su rekurzivne i vrijedi $f(x) = u(x) - v(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Obratno, pretpostavimo da je $f(x) = u(x) - v(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ za neke rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Stavimo

$$b(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \geq v(x) \\ 1, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad a(x) = |u(x) - v(x)|.$$

Lako se vidi da su ovako definirane funkcije a i b rekurzivne i vrijedi $f(x) = (-1)^{b(x)} a(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. □

Propozicija 1.2.2. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f|$ rekurzivne.*

Dokaz. Prema lemi 1.2.1 postoje rekurzivne funkcije $u, v, u', v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = u(x) - v(x)$ i $g(x) = u'(x) - v'(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$(f+g)(x) = u(x) - v(x) + u'(x) - v'(x) = (u+u')(x) - (v+v')(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Kako su funkcije $u+u'$ i $v+v'$ rekurzivne, prema lemi 1.2.1 funkcija $f+g$ je rekurzivna.

Neka su $a, a', b, b' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)}a(x)$ i $g(x) = (-1)^{b'(x)}a'(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(f \cdot g)(x) = (-1)^{b(x)+b'(x)}a(x)a'(x), \quad (-f)(x) = (-1)^{b(x)+1}a(x) \quad \text{i} \quad |f(x)| = a(x)$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, pa su i funkcije $f \cdot g$, $-f$, $|f|$ rekurzivne. □

Propozicija 1.2.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije i $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ međusobno disjunktni rekurzivni skupovi takvi da je $\bigcup_{i=1}^k S_i = \mathbb{N}^k$. Tada je funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$,*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ f_2(x), & x \in S_2 \\ & \vdots \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}$$

rekurzivna.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F(x) = \chi_{S_1}(x)f_1(x) + \chi_{S_2}(x)f_2(x) + \cdots + \chi_{S_n}(x)f_n(x)$$

pa tvrdnja lako slijedi iz prethodne propozicije. □

Iz klasične teorije izračunljivosti poznata je sljedeća propozicija:

Propozicija 1.2.4. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije h, $h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,*

$$h(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \le \beta(x), \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

i

$$h'(x) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \le \beta(x), \\ 1, & \textit{inače} \end{cases}$$

rekurzivne.

Dokažimo generalizaciju ovog rezultata u slučaju funkcija s cjelobrojnim vrijednostima.

Propozicija 1.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije h, $h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$,*

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leq \beta(x), \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

i

$$h'(x) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leq \beta(x), \\ 1, & \textit{inače} \end{cases}$$

rekurzivne.

Dokaz. Neka su $a, b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)} a(x)$. Imamo:

$$h(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \chi_{2\mathbb{N}}(b(x,i))a(x,i) - \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \chi_{2\mathbb{N}+1}(b(x,i))a(x,i).$$

Kako su po prethodnoj propoziciji gornje funkcije rekurzivne kao funkcije $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, prema lemi 1.2.1 funkcija h je rekurzivna.

Također, imamo:

$$\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i) = (-1)^{\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} b(x,i)} \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} a(x,i)$$

pa prema prethodnoj propoziciji slijedi da je h' rekurzivna. □

Iz klasične teorije izračunljivosti poznajemo i sljedeći rezultat, te njegovu jednostavnu posljedicu:

Lema 1.2.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Tada su i funkcije $g, h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,*

$$g(a, x_1, \ldots, x_k) = \min \{f(0, x_1, \ldots, x_k), \ \ldots, \ f(a, x_1, \ldots, x_k)\} \quad i$$
$$h(a, x_1, \ldots, x_k) = \max \{f(0, x_1, \ldots, x_k), \ \ldots, \ f(a, x_1, \ldots, x_k)\}$$

rekurzivne.

Lema 1.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $g', h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,*

$$g'(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x) \quad i \quad h'(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x)$$

rekurzivne.

Dokaz. Neka su g i $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcije iz prethodne leme. Tada je

$$g'(x) = g(\alpha(x), x) \quad \text{i} \quad h'(x) = h(\alpha(x), x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa vidimo da su g' i h' rekurzivne. $\square$

Dokažimo sada generalizaciju u slučaju rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.2.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ i $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definiramo funkcije $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ formulama*

$$g(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x) \quad i \quad h(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada su g i h rekurzivne funkcije.

Dokaz. Neka su $a, b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$f(i,x) = (-1)^{b(i,x)} a(i,x), \qquad \forall (i,x) \in \mathbb{N}^{k+1}.$$

Definiramo

$$g(x) = \begin{cases} \min\limits_{0 \le i \le \alpha(x)} a(i,x), & b(i,x) \in 2\mathbb{N} \ \forall i \le \alpha(x), \\ -\max\limits_{0 \le i \le \alpha(x)} \Big(a(i,x) \cdot \chi_{2\mathbb{N}+1}(b(i,x)) \Big), & \text{inače.} \end{cases}$$

Skup $\big\{x \in \mathbb{N}^k \mid b(i,x) \in 2\mathbb{N} \ \forall i \le \alpha(x)\big\}$ je rekurzivan jer je njegova karakteristična funkcija

$$x \mapsto \prod_{i=0}^{\alpha(x)} \chi_{2\mathbb{N}}(b(i,x))$$

rekurzivna. Odavde pomoću propozicija 1.2.2, 1.2.3 i leme 1.2.7 zaključujemo da je funkcija g rekurzivna. Rekurzivnost od h pokazuje se potpuno analogno. $\square$

Propozicija 1.2.9. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus 0$ i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. Tada su skupovi $S = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\big\}$ i $T = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\big\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Neka su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)} a(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$. Za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x) = 0$$

pa imamo $\chi_S(x) = \overline{\mathrm{sg}}(a(x))$. Prema tome, skup S je rekurzivan.

Nadalje, imamo

$$x \in T \qquad \Leftrightarrow \qquad a(x) > 0 \quad \text{i} \quad b(x) \in 2\mathbb{N}.$$

Skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid a(x) > 0\}$ je rekurzivan kao komplement rekurzivnog skupa $\{x \in \mathbb{N}^k \mid a(x) = 0\}$, a skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid b(x) \in 2\mathbb{N}\}$ je rekurzivan jer je relacija djeljivosti rekurzivna. Slijedi da je T rekurzivan kao presjek dvaju rekurzivnih skupova. □

Korolar 1.2.10. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su skupovi $S = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\big\}$, $T = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\big\}$ i $V = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \leq g(x)\big\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Očito je h rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$S = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0\big\} \quad \text{i} \quad T = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0\big\}$$

pa su skupovi S i T rekurzivni po prethodnoj propoziciji. Kako je $V = S \cup T$, slijedi da je i V rekurzivan skup. □

Propozicija 1.2.11. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada je i funkcija $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $\forall x \in \mathbb{N}$ rekurzivna.*

Dokaz. Prema korolaru 1.2.10 skup $S = \big\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\big\}$ je rekurzivan. Imamo

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S, \\ g(x), & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada iz propozicije 1.2.3 slijedi da je h rekurzivna funkcija. □

Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Prema lemi 1.2.1, $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija, lako se vidi da je ona rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Obratno, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna i $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{Z}$, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Naime, ako su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$, vrijedi

$$f(x) = \lfloor f(x) \rfloor = (-1)^{c(x)} \left\lfloor \frac{a(x)}{b(x)} \right\rfloor - \chi_{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}} \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right) \cdot \chi_{2\mathbb{N}+1}(c(x)), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Kako je po pretpostavci $\frac{a(x)}{b(x)} \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, posljednji član u gornjoj jednakosti jednak je nuli, pa imamo

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \left\lfloor \frac{a(x)}{b(x)} \right\rfloor, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

a poznato je da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ rekurzivna (pri čemu uzimamo $\lfloor \frac{x}{0} \rfloor = x$).

Primjer 1.2.12. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

$$f(x) = (-1)^{E(x,2)} \frac{E(x,0)}{E(x,1)+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

je rekurzivna surjekcija. Nadalje, funkcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

$$q(x) = \frac{E(x,0)}{E(x,1)+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

je rekurzivna funkcija takva da je $q(\mathbb{N}) = [0, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q}$. ◀

Propozicija 1.2.13. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su funkcije $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne. Tada je i kompozicija $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$. Tada je

$$f(g(x)) = (-1)^{c(g(x))} \frac{a(g(x))}{b(g(x))}$$

pa tvrdnja očito vrijedi. □

Kao što smo to učinili za funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, dokažimo generalizacije poznatih klasičnih rezultata u slučaju funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.

Propozicija 1.2.14. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $f+g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f|$ rekurzivne. Ako je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, tada je i funkcija $\frac{1}{f}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $u, u' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v, v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Imamo:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u(x)v'(x) + u'(x)v(x)}{v(x)v'(x)} \\ f(x) \cdot g(x) &= \frac{u(x)u'(x)}{v(x)v'(x)} \\ -f(x) &= \frac{-u(x)}{v(x)} \\ |f(x)| &= \frac{|u(x)|}{v(x)} \end{aligned}$$

pa iz propozicije 1.2.2 lako zaključujemo da su ovo rekurzivne funkcije.

Neka su sada $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$. Iz $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ slijedi $a(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, pa imamo

$$\frac{1}{f(x)} = (-1)^{c(x)} \frac{b(x)}{a(x)}.$$

Dakle, $\frac{1}{f}$ je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.2.15. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije i $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ međusobno disjunktni rekurzivni skupovi takvi da je $\bigcup_{i=1}^k S_i = \mathbb{N}^k$. Tada je funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$,*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1, \\ f_2(x), & x \in S_2, \\ & \vdots \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}$$

rekurzivna.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F(x) = \chi_{S_1}(x) f_1(x) + \chi_{S_2}(x) f_2(x) + \cdots + \chi_{S_n}(x) f_n(x)$$

pa iz propozicije 1.2.14 slijedi da je F rekurzivna. $\square$

Propozicija 1.2.16. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $h, h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$,*

$$h(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \le \beta(x), \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

i

$$h'(x) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \le \beta(x), \\ 1, & \textit{inače} \end{cases}$$

rekurzivne.

Dokaz. Neka su $u : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Imamo:

$$h(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{u(x,i)}{v(x,i)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x,i) \left\lfloor \frac{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,j)}{v(x,i)} \right\rfloor}{\displaystyle\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,i)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x,i) w(x,i)}{\displaystyle\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,i)}$$

pri čemu je $w : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$w(x,i) = \left\lfloor \frac{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,j)}{v(x,i)} \right\rfloor$$

i vidimo da je to rekurzivna funkcija. Sada prema propoziciji 1.2.5 slijedi da je funkcija h rekurzivna.

Također, kako je

$$h'(x) = \frac{\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x,i)}{\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,i)},$$

zaključujemo da je h' rekurzivna funkcija. $\square$

Propozicija 1.2.17. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definiramo funkcije $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ formulama*

$$g(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x) \quad i \quad h(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i,x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada su g i h rekurzivne funkcije.

Dokaz. Neka su $u : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$f(i,x) = \frac{u(i,x)}{v(i,x)}, \qquad \forall (i,x) \in \mathbb{N}^{k+1}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $(i,x) \to f(i,x) \cdot \prod_{j=0}^{\alpha(x)} v(j,x)$ je rekurzivna i poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}$, pa na nju možemo primijeniti propoziciju 1.2.8. Zbog

$$g(x) = \frac{\min_{0 \le i \le \alpha(x)} \left[f(i,x) \cdot \prod_{j=0}^{\alpha(x)} v(j,x) \right]}{\prod_{j=0}^{\alpha(x)} v(j,x)}$$

slijedi da je g rekurzivna.

Sasvim analogno pokazujemo i rekurzivnost od h. □

Propozicija 1.2.18. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada su skupovi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$ i $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Neka su $u : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Tada za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = 0$$

i

$$x \in T \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) > 0,$$

pa tvrdnja slijedi iz propozicije 1.2.9. □

Korolar 1.2.19. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su skupovi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \le g(x)\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Funkcija h je rekurzivna prema propoziciji 1.2.14. Vrijedi

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0\right\} \quad \text{i} \quad T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0\right\}$$

pa su skupovi S i T rekurzivni po prethodnoj propoziciji. Kako je $V = S \cup T$, slijedi da je i V rekurzivan skup. □

Propozicija 1.2.20. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je i funkcija $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ rekurzivna.*

Dokaz. Prema korolaru 1.2.19 skup $T = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\right\}$ je rekurzivan. Imamo

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in T \\ g(x), & \text{inače,} \end{cases}$$

pa je h rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.2.15. □

1.3 Izračunljivost u $\mathbb{R}$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Kažemo da je x **izračunljiv broj** ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|x - f(k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ako je $x \in \mathbb{Q}$, funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(k) = x$, $\forall k \in \mathbb{N}$ je rekurzivna. Vrijedi $|x - f(x)| = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pa vidimo da je x izračunljiv broj.

Primjer 1.3.1. $\sqrt{2}$ je izračunljiv broj. Dokažimo to.

Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija iz primjera 1.2.12. Za $i \in \mathbb{N}$ označimo $q_i = q(i)$. Uočimo: za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$q_i < \sqrt{2} < q_i + 2^{-k},$$

što je ekvivalentno s

$$q_i^2 < 2 < (q_i + 2^{-k})^2.$$

Definirajmo skup $\Omega = \left\{(k,i) \in \mathbb{N} \mid q_i^2 < 2 < (q_i + 2^{-k})^2\right\}$. Iz korolara 1.2.19 slijedi da je Ω rekurzivan kao presjek dva rekurzivna skupa. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da $(k,i) \in \Omega$. Iz teorema 1.1.9 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, \varphi(k)) \in \Omega$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$q_{\varphi(k)}^2 < 2 < (q_{\varphi(k)} + 2^{-k})^2 \quad \Rightarrow \quad q_{\varphi(k)} < \sqrt{2} < q_{\varphi(k)} + 2^{-k} \quad \Rightarrow \quad \left| q_{\varphi(k)} - \sqrt{2} \right| < 2^{-k}.$$

Dakle, $q \circ \varphi$ je tražena funkcija.

Uočimo da na analogan način dobivamo da je $\sqrt[m]{r}$ izračunljiv za svaki $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ i $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ◀

Primjer 1.3.2. Promotrimo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definiranu formulom

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pokažimo da je g rekurzivna. U tu svrhu, definirajmo funkcije $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha(k) = 0$, $\beta(k) = k$ i $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $F(k, i) = \frac{1}{i!}$. Funkcije α i β su rekurzivne (štoviše, to su inicijalne funkcije), a lako se vidi da je i F rekurzivna funkcija. Imamo $g(k) = \sum_{i=\alpha(k)}^{\beta(k)} F(k, i)$. Iz propozicije 1.2.16 slijedi da je g rekurzivna funkcija.

Znamo da je $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Imamo

$$|e - g(k)| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!}. \tag{1.3}$$

Indukcijom se lako pokaže da je $2^i \leq (i+1)!$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Prema tome, imamo:

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} \cdot 2 = \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{1.4}$$

Sada iz (1.3) i (1.4) slijedi da za funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(k) = g(k+2)$ vrijedi

$$|e - f(k)| = |e - g(k+2)| \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}.$$

Dakle, e je izračunljiv broj. ◀

Sljedeći teorem daje nešto prirodniju karakterizaciju izračunljivih brojeva: realan broj x je izračunljiv ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija koja svakom broju $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pridružuje k-tu znamenku u decimalnom zapisu od x.

Teorem 1.3.3. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ i neka je $\alpha = \overline{b_n \ldots b_0.a_1 a_2 a_3 \ldots}$ decimalni zapis od α koji ne završava s beskonačno mnogo znamenki 9 (primjerice, umjesto $0.999\ldots$ pišemo 1). Tada je α izračunljiv ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(n) = a_n$, $\forall n \geq 1$.*

Dokaz. Označimo $\overline{b_n b_{n-1} \dots b_0} = a_0$.

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(n) = a_n$, $\forall n \geq 1$. Možemo pretpostaviti da je $f(0) = a_0$. Tada vrijedi

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{10^n}.$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\left|\alpha - \sum_{n=0}^{k} \frac{f(n)}{10^n}\right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{10^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{k+1}} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Kako je funkcija $k \mapsto \sum_{n=0}^{k} \frac{f(n)}{10^n}$ rekurzivna, slijedi da je α izračunljiv broj.

Obratno, pretpostavimo da je α izračunljiv. Poznato je da je funkcija $\mathrm{mod} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, koja paru (m, n) pridružuje ostatak pri dijeljenju m sa n, rekurzivna. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo $a_n = \mathrm{mod}(\lfloor 10^n \alpha \rfloor, 10)$, pa je dovoljno pokazati da je funkcija $n \mapsto \lfloor 10^n \alpha \rfloor$ rekurzivna. U tu svrhu, dovoljno je pokazati da je funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = \lfloor n\alpha \rfloor$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rekurzivna.

Ako je $\alpha \in \mathbb{Q}$, lako se vidi da je g rekurzivna. Pretpostavimo da je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Po definiciji izračunljivog broja, postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\left|\alpha - (-1)^{c(k)} \frac{a(k)}{b(k)}\right| < 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$\left|\alpha - \frac{a(k)}{b(k)}\right| = \left| |\alpha| - \left|(-1)^{c(k)} \frac{a(k)}{b(k)}\right| \right| \leq \left|\alpha - (-1)^{c(k)} \frac{a(k)}{b(k)}\right| < 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $u(x) = \min\{|x - z| \mid z \in \mathbb{Z}\} = d(x, \mathbb{Z})$. Uočimo: za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|x - y| < u(y) \quad \Rightarrow \quad \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor. \tag{1.5}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$. Tada je

$$u\left(\frac{x}{y}\right) = \min\left\{\frac{x}{y} - \left\lfloor\frac{x}{y}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{x}{y}\right\rfloor + 1 - \frac{x}{y}\right\}.$$

Neka je $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

te neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ definirana s

$$f(x,y) = \min\left\{\frac{x}{\sigma(y)} - \left\lfloor\frac{x}{\sigma(y)}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{x}{\sigma(y)}\right\rfloor + 1 - \frac{x}{\sigma(y)}\right\}.$$

Prema propoziciji 1.2.20, f je rekurzivna. Također, za sve $x, y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$ vrijedi $f(x,y) = u(\frac{x}{y})$. Uočimo da je u neprekidna funkcija, pa $u\left(n\frac{a(k)}{b(k)}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(n\alpha) > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako $n \cdot 2^{-k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \cdot 2^{-k} < u\left(n\frac{a(k)}{b(k)}\right).$$

Definirajmo skup

$$\begin{aligned} S &= \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \cdot 2^k < u\left(n\frac{a(k)}{b(k)}\right) + \overline{\mathrm{sg}}(n)\right\} \\ &= \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \cdot 2^k < f\left(na(k), b(k)\right) + \overline{\mathrm{sg}}(n)\right\}. \end{aligned}$$

Kako je f rekurzivna, lako zaključujemo da je S rekurzivan. Sada iz gornje diskusije vidimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(n,k) \in S$, pa prema teoremu 1.1.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(n, \varphi(n)) \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n \cdot 2^{-\varphi(n)} \leq u\left(\frac{na(\varphi(n))}{b(\varphi(n))}\right) + \overline{\mathrm{sg}}(n),$$

pa za $n \geq 1$ vrijedi

$$n \cdot 2^{-\varphi(n)} < u\left(\frac{na(\varphi(n))}{b(\varphi(n))}\right).$$

Imamo

$$\left|n\alpha - \frac{na(\varphi(n))}{b(\varphi(n))}\right| < n \cdot 2^{-\varphi(n)} < u\left(\frac{na(\varphi(n))}{b(\varphi(n))}\right),$$

pa iz (1.5) slijedi

$$\lfloor n\alpha \rfloor = \left\lfloor \frac{na(\varphi(n))}{b(\varphi(n))} \right\rfloor$$

za svaki $n \geq 1$, a očito i za $n = 0$. Time je tvrdnja dokazana. □

Primjer 1.3.4. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan (iz teorije izračunljivosti znamo da takav postoji). Neka je $\gamma = \overline{\chi_S(0).\chi_S(1)\chi_S(2)\ldots} \in \mathbb{R}$. Iz teorema 1.3.3 i činjenice da S nije rekurzivan slijedi da γ nije izračunljiv.

Prema propoziciji 1.1.10 postoji rekurzivna injekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(\mathbb{N}) = S$. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ formulom

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{10^{f(i)}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

F je rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.2.14. Uočimo da je F rastuća i za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $F(k) < \gamma$. Naime, za $k \in \mathbb{N}$ možemo pisati

$$\{f(0), f(1), \dots, f(k)\} = \{j_0, j_1, \dots, j_k\} \subseteq S,$$

pri čemu je $j_0 < j_1 < \cdots < j_k$. Sada je

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{10^{f(i)}} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{10^{j_i}} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\chi_S(j_i)}{10^{j_i}} \leq \sum_{i=0}^{j_k} \frac{\chi_S(i)}{10^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_S(i)}{10^i} = \gamma.$$

Pokažimo da $F(k)$ konvergira prema γ. Dovoljno je za svaki $\varepsilon > 0$ naći $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\gamma - \varepsilon < F(k)$. Najprije primijetimo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da $\gamma - \varepsilon < \sum_{i=0}^{N} \frac{\chi_S(i)}{10^i}$. Za taj N, neka je

$$S \cap \{0, 1, \dots, N\} = \{f(i_0), f(i_1), \dots, f(i_m)\}.$$

Odaberimo $k \geq i_0, i_1, \dots, i_m$. Imamo

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{10^{f(i)}} \geq \frac{1}{10^{f(i_0)}} + \frac{1}{10^{f(i_1)}} + \cdots + \frac{1}{10^{f(i_m)}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{\chi_S(i)}{10^i}$$

pa za taj k vrijedi

$$\gamma - \varepsilon < \sum_{i=0}^{N} \frac{\chi_S(i)}{10^i} \leq F(k).$$

Dakle, $F(k)$ konvergira prema γ kad $k \longrightarrow \infty$. ◀

Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f **rekurzivna** ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|f(x) - F(x, k)| < 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

U tom slučaju za F kažemo da je **rekurzivna aproksimacija** od f. Uočimo: ako je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna, onda je $f(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^n$.

Posebno, niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ je rekurzivan ako je rekurzivan kao funkcija $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Napomena 1.3.5. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj. Tada je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija.

Naime, neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je $|\alpha - g(k)| < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Za funkciju $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ definiranu s $F(x,k) = g(k)$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ vrijedi $|f(x) - F(x,k)| = |\alpha - g(k)| < 2^{-k}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ i ona je rekurzivna jer je $F = I^{n+1}_{n+1} \circ g$.

Željeli bismo dokazati analogon propozicija 1.2.2 i 1.2.14 u slučaju realnih funkcija. Za to će nam trebati nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 1.3.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i neka su $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ i $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcije. Ako su F i H rekurzivne i za sve $x \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$|f(x) - F(x,k)| \leq H(x)2^{-k},$$

onda je i f rekurzivna.

Dokaz. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, k + H(x))| \leq H(x) \cdot 2^{-(k+H(x))} = \frac{H(x)}{2^{H(x)}} \cdot 2^{-k} < 2^{-k}.$$

Kako je funkcija $(x,k) \mapsto F(x, k + H(x))$ rekurzivna, vidimo da je to rekurzivna aproksimacija od f, pa je f rekurzivna. □

Lema 1.3.7. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi*

$$|f(x)| < H(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n.$$

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$. Funkcija $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $H(x) = a(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$ je rekurzivna i ima traženo svojstvo. □

Lema 1.3.8. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi*

$$|f(x)| < H(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n.$$

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Iz $|f(x) - F(x,0)| < 1$ slijedi

$$|f(x)| \leq |f(x) - F(x,0)| + |F(x,0)| < 1 + |F(x,0)|.$$

Funkcija $\mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 1 + |F(x,0)|$ je rekurzivna, pa po prethodnoj lemi postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $1 + |F(x,0)| < H(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, i to je upravo tražena funkcija. □

Lema 1.3.9. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija i $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ njena rekurzivna aproksimacija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi*

$$|F(x,k)| < H(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Iz $|f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ slijedi

$$|F(x,k)| \leq |F(x,k) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + |f(x)| < 1 + H'(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n,$$

pri čemu je $H' : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $|f(x)| < H'(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$ (takva postoji po prethodnoj lemi). Sada je tražena funkcija dana s $H(x) = 1 + H'(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$. □

Propozicija 1.3.10. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne.*

Dokaz. Neka je F rekurzivna aproksimacija od f i G rekurzivna aproksimacija od g. Imamo:

$$\begin{aligned}|(f+g)(x)| - (F+G)(x,k)| &= |(f(x) - F(x,k)) + (g(x) - G(x,k))| \\ &\leq |f(x) - F(x,k)| + |g(x) - G(x,k)| < 2 \cdot 2^{-k}\end{aligned}$$

pa je $f + g$ rekurzivna prema lemi 1.3.6. Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned}|(fg)(x) - (FG)(x,k)| &= |f(x)g(x) - F(x,k)g(x) + F(x,k)g(x) - F(x,k)G(x,k)| \\ &\leq |g(x)||f(x) - F(x,k)| + |F(x,k)||g(x) - G(x,k)| \\ &< 2^{-k}(|g(x)| + |F(x,k)|).\end{aligned}$$

Prema lemi 1.3.8 i lemi 1.3.9, postoje rekurzivne funkcije $H, H' : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi $|g(x)| < H(x)$ i $|F(x,k)| < H'(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sada iz leme 1.3.6 slijedi da je funkcija $f \cdot g$ rekurzivna. □

Propozicija 1.3.11. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada su i funkcije $-f$ i $|f|$ rekurzivne. Ako je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, onda je i funkcija $\frac{1}{f}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Imamo:

$$|(-f)(x) - (-F)(x,k)| = |f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

i

$$\big||f(x)| - |F(x,k)|\big| \leq |f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$. Kako je F rekurzivna aproksimacija od f, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ za dovoljno veliki k vrijedi $3 \cdot 2^{-k} < |F(x,k)|$. Definirajmo skup

$$T = \left\{ (x,k) \in \mathbb{N}^{n+1} \;\; | \;\; 3 \cdot 2^{-k} < |F(x,k)| \right\}.$$

Imamo da je T rekurzivan skup i za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $(x,k) \in T$. Stoga prema teoremu 1.1.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in T$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$. Dakle, imamo

$$3 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |F(x, \varphi(x)|, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n. \tag{1.6}$$

Pretpostavimo da su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $3 \cdot 2^{-k_0} < |F(x,k_0)|$. Znamo

$$|F(x,k_0)| \leq |F(x,k_0) - f(x)| + |f(x)| < 2^{-k_0} + |f(x)|,$$

iz čega slijedi

$$3 \cdot 2^{-k_0} < 2^{-k_0} + |f(x)|,$$

odnosno

$$2 \cdot 2^{-k_0} < |f(x)|.$$

Dakle, ako je $3 \cdot 2^{-k_0} < |F(x,k_0)|$, onda je $2 \cdot 2^{-k_0} < |f(x)|$. Uzmimo $k \geq k_0$. Imamo

$$\begin{aligned} & |f(x)| \leq |f(x) - F(x,k)| + |F(x,k)| < 2^{-k} + |F(x,k)| \leq 2^{-k_0} + |F(x,k)| \\ \Rightarrow \quad & 2 \cdot 2^{-k_0} < 2^{-k_0} + |F(x,k)| \\ \Rightarrow \quad & 2^{-k_0} < |F(x,k)|, \qquad \forall k \geq k_0. \end{aligned}$$

Sada iz (1.6) zaključujemo

$$2 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |f(x)| \qquad \text{i} \qquad 2^{-\varphi(x)} < |F(x,k)|, \quad \forall k \geq \varphi(x).$$

Odavde dobivamo

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{2} 2^{\varphi(x)} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{|F(x,k)|} < 2^{\varphi(x)}, \quad \forall k \geq \varphi(x). \tag{1.7}$$

Uzmimo $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, \varphi(x)+k)} \right| &= \frac{|f(x) - F(x, \varphi(x)+k)|}{|f(x)|\,|F(x, \varphi(x)+k)|} \\ &\overset{(1.7)}{<} 2^{-\varphi(x)+k} \cdot \frac{1}{2} 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{\varphi(x)} \\ &\leq 2^{-k} \cdot 2^{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Konačno, iz leme 1.3.6 slijedi da je $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija. $\square$

Korolar 1.3.12. *Neka su α, $\beta \in \mathbb{R}$ izračunljivi brojevi. Tada su i $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $-\alpha$ i $|\alpha|$ izračunljivi. Ako je $\alpha \neq 0$, onda je i $\frac{1}{\alpha}$ izračunljiv.*

Dokaz. Definiramo funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(x) = \alpha \qquad \text{i} \qquad g(x) = \beta, \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Prema napomeni 1.3.5 f i g su rekurzivne funkcije. Sada tvrdnja slijedi iz propozicija 1.3.10 i 1.3.11. □

Vidjeli smo da su za rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ skupovi $\{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) = 0\}$ i $\{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) > 0\}$ rekurzivni. Primjer 1.3.15 u nastavku pokazat će da to ne vrijedi nužno za rekurzivnu funkciju $\mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$.

Prisjetimo se najprije sljedećih teorema klasične teorije izračunljivosti:

Teorem 1.3.13 (Teorem enumeracije). *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) S je rekurzivno prebrojiv;

(ii) S je domena neke parcijalno rekurzivne funkcije;

(iii) postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})\ (x, y) \in T\}$.

Teorem 1.3.14 (Postov teorem). *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Tada je S rekurzivan ako i samo ako su S i $\mathbb{N} \setminus S$ rekurzivno prebrojivi.*

Primjer 1.3.15. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan. Prema teoremu 1.3.13 postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})\ (x, y) \in T\}.$$

Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ formulom

$$F(i, k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\chi_T(i, j)}{10^j}, \qquad \forall i, k \in \mathbb{N}$$

te niz $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_T(i, j)}{10^j}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$|x_i - F(i, k)| = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\chi_T(i, j)}{10^j} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^j} \leq 10^{-k} < 2^{-k},$$

dakle, x je rekurzivan. Vrijedi:

$$x_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_T(i,j) = 0,\ \forall j \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad (i,j) \notin T,\ \forall j \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad i \notin S,$$

odnosno $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 0\} = \mathbb{N} \setminus S$. Prema tome, $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 0\}$ nije rekurzivan. Uočimo da $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i > 0\} = S$, pa ni ovaj skup nije rekurzivan. ◀

Propozicija 1.3.16. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je skup $\{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f i neka je $x \in \mathbb{N}^n$. Pretpostavimo da je $f(x) > 0$. Kako $F(x,k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ i $2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < F(x,k)$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $2^{-k} < F(x,k)$. Tada zbog $|f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}$ imamo

$$f(x) \in \left\langle F(x,k) - 2^{-k}, F(x,k) + 2^{-k} \right\rangle \subseteq \langle 0, +\infty \rangle,$$

pa je $f(x) > 0$.

Dakle, imamo

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\exists k \in \mathbb{N})\ 2^{-k} < F(x,k) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\exists k \in \mathbb{N})\ (x,k) \in T,$$

pri čemu je $T = \left\{(x,k) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid 2^{-k} < F(x,k)\right\}$. Kako je T rekurzivan skup, iz teorema o projekciji slijedi da je $\{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv. □

Uočimo da za rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ skup $\{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) = 0\}$ općenito ne mora biti čak ni rekurzivno prebrojiv. Konkretno, za funkciju x, tj. niz $(x_i)_i$ iz primjera 1.3.15 vrijedi da je x rekurzivna, pa je po prethodnoj propoziciji skup $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i > 0\}$ rekurzivno prebrojiv. Kako je

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 0\} = \mathbb{N} \setminus \{i \in \mathbb{N} \mid x_i > 0\},$$

kad bi S bio rekurzivno prebrojiv, iz teorema 1.3.14 zaključili bismo da je S rekurzivan, što je u kontradikciji s primjerom 1.3.15.

Navedimo još jednu jednostavnu posljedicu prethodne propozicije:

Korolar 1.3.17. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je skup*

$$\{x \in \mathbb{N}^n \mid f(x) < g(x)\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Propozicija 1.3.18. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$. Tada je i funkcija $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da je $q(\mathbb{N}) = [0, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q}$. Neka je $x \in \mathbb{N}^n$. Imamo:

1°

$$f(x) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ takvi da } q_i < \sqrt{f(x)} < q_j \text{ i } q_j - q_i < 2^{-k}$$
$$\Leftrightarrow q_i^2 < f(x) < q_j^2 \text{ i } q_j - q_i < 2^{-k}$$

2°

$$f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da } \sqrt{f(x)} < q_j \text{ i } q_j < 2^{-k}$$
$$\Leftrightarrow f(x) < q_j^2 \text{ i } q_j < 2^{-k}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ postoje $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da

$$\left(q_i^2 < f(x) < q_j^2 \ \text{ i } \ q_j - q_i < 2^{-k}\right) \quad \text{ili} \quad \left(f(x) < q_j^2 \ \text{ i } \ q_j < 2^{-k}\right) \tag{1.8}$$

Definirajmo skup

$$\Omega = \left\{(x, i, j, k) \in \mathbb{N}^{n+3} \ \mid \ \left(q_i^2 < f(x) < q_j^2 \ \text{ i } \ q_j - q_i < 2^{-k}\right) \text{ ili } \left(f(x) < q_j^2 \ \text{ i } \ q_j < 2^{-k}\right)\right\}.$$

Pokažimo da je Ω rekurzivno prebrojiv. Imamo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, pri čemu je

$$\Omega_1 = \left\{(x, i, j, k) \in \mathbb{N}^{n+3} \ \mid \ q_i^2 < f(x) < q_j^2 \ \text{ i } \ q_j - q_i < 2^{-k}\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{(x, i, j, k) \in \mathbb{N}^{n-3} \ \mid \ f(x) < q_j^2 \ \text{ i } \ q_j < 2^{-k}\right\}.$$

Nadalje, imamo $\Omega_1 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, gdje su

$$S_1 = \left\{(x, i, j, k) \in \mathbb{N}^{n+3} \ \mid \ q_i^2 < f(x)\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x, i, j, k) \in \mathbb{N}^{n+3} \ \mid \ f(x) < q_j^2\right\},$$
$$S_3 = \left\{(x, i, j, k) \in \mathbb{N}^{n+3} \ \mid \ q_j - q_i < 2^{-k}\right\}.$$

S_1, S_2 i S_3 su rekurzivno prebrojivi, pa je Ω_1 rekurzivno prebrojiv. Analogno bismo pokazali i da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv. Dakle, Ω je rekurzivno prebrojiv.

Vidjeli smo: za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, k, i, j) \in \Omega$, pa prema teoremu 1.1.9 postoje rekurzivne funkcije $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ takve da je $(x, k, \varphi_1(x, k), \varphi_2(x, k)) \in \Omega$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Uočimo: ako su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k, i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, k, i, j) \in \Omega$, onda je

$$\left|\sqrt{f(x)} - q_j\right| < 2^{-k},$$

pa imamo

$$\left|\sqrt{f(x)} - q_{\varphi_2(x,k)}\right| < 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $g = \sqrt{f}$ je rekurzivna funkcija. $\square$

Definiciju izračunljivosti u $\mathbb{R}$ na standardan način proširujemo na $\mathbb{R}^n$. Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Za x kažemo da je **izračunljiva točka** u $\mathbb{R}^n$ ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izračunljivi brojevi.

Neka je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i^1, \ldots, x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je $(x_i)_i$ izračunljiv ako su svi komponentni nizovi $(x_i^1)_i, (x_i^2)_i, \ldots, (x_i^n)_i$ izračunljivi.

1.4 Rekurzivne rekurzivno omeđene funkcije

U ovom odjeljku razvit ćemo tehnike koje osiguravaju rekurzivnost prilikom rada s konačnim podskupovima od $\mathbb{N}$. Ključnu ulogu imaju *r.r.o. funkcije.*

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivna** ako je skup $\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid x \in \mathbb{N}^k,\ y \in \mathbb{N}^n,\ y \in \Phi(x)\}$ rekurzivan. Uočimo: Φ je rekurzivna funkcija ako i samo ako je funkcija $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$, $\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)$ rekurzivna.

Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivno omeđena** ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{N}^n \mid y_1, y_2, \ldots, y_n \leq \varphi(x)\}.$$

Uz oznaku $\mathbb{N}^k_m := \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{N}^k \mid y_1, \ldots, y_k \leq m\} = \{0, 1, \ldots, m\}^k$, imamo da je Φ rekurzivno omeđena ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ koja je rekurzivna i rekurzivno omeđena kažemo da je **r.r.o. funkcija**.

Propozicija 1.4.1. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su i funkcije $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, dane s*

$$\begin{aligned} \Lambda_1(x) &= \Phi(x) \cup \Psi(x), \\ \Lambda_2(x) &= \Phi(x) \cap \Psi(x), \\ \Lambda_3(x) &= \Phi(x) \setminus \Psi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k \end{aligned}$$

r.r.o. funkcije.

Dokaz. Imamo

$$\overline{\Lambda_1}(x,y) = \chi_{\Lambda_1(x)}(y) = \chi_{\Phi(x)\cup\Psi(x)}(y) = \operatorname{sg}\left(\chi_{\Phi(x)}(y) + \chi_{\Psi(x)}(y)\right),$$

pa je Λ_1 rekurzivna funkcija. Nadalje, postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \quad \text{i} \quad \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\psi(x)},\ \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je $\Lambda_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\max\{\varphi(x),\psi(x)\}}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, pa je Λ_1 rekurzivno omeđena. Dakle, Λ_1 je r.r.o. funkcija.

Za Λ_2 i Λ_3 tvrdnja se dokazuje analogno. □

Lema 1.4.2. *Za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoje rekurzivne funkcije $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $\mathbb{N}^n_m \subseteq \{a(i) \mid 0 \le i \le \zeta(m)\}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Funkcije

$$\begin{aligned} a(i) &= (E(i,1), E(i,2), \ldots, E(i,n)), \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \\ \zeta(m) &= p_1^m p_2^m \cdots p_n^m, \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

zadovoljavaju tražene uvjete. □

Propozicija 1.4.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija. Tada je skup*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k \ \mid\ \Phi(x) = \emptyset\right\}$$

rekurzivan.

Dokaz. Neka su funkcije a i ζ kao u lemi 1.4.2. Za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \{a(i) \ \mid\ 0 \le i \le \zeta(\varphi(x))\}$$

za neku rekurzivnu funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} x \in S \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) = \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{0,1,\ldots,\zeta(\varphi(x))\}\ a(i) \notin \Phi(x) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\zeta(\varphi(x))} \chi_{\Phi(x)}(a(i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\zeta(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, a(i)) = 0, \end{aligned}$$

pa je $\chi_S(x) = \overline{\operatorname{sg}}\left(\sum_{i=0}^{\zeta(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, a(i))\right)$. Dakle, S je rekurzivan skup. □

Korolar 1.4.4. *Neka su* $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcije. Tada su skupovi*

$$\left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\right\} \quad i \quad \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\right\}$$

rekurzivni.

Dokaz. Kako je $\Phi(x) \subseteq \Psi(x)$ ekvivalentno s $\Phi(x) \setminus \Psi(x) = \emptyset$, tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije. $\square$

Propozicija 1.4.5. *Neka su* $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Neka je* $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcija i* $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^k$ *rekurzivna funkcija. Tada je* $\Phi \circ f : \mathbb{N}^m \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Vrijedi

$$\overline{(\Phi \circ f)}(x, y) = \chi_{(\Phi \circ f)(x)}(y) = \chi_{\Phi(f(x))}(y) = \overline{\Phi}(f(x), y)$$

pa je $\overline{\Phi \circ f}$ rekurzivna funkcija. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\Phi(f(x)) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(f(x))}$, $\forall x \in \mathbb{N}^m$. Kako je $\varphi \circ f$ rekurzivna funkcija, slijedi da je $\Phi \circ f$ rekurzivno omeđena. Dakle, $\Phi \circ f$ je r.r.o. funkcija. $\square$

Teorem 1.4.6. *Neka su* $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *i neka su* $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ *r.r.o. funkcije. Tada je i* $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$,

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$$

r.r.o. funkcija.

Dokaz. Za $x, z \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$z \in \Lambda(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists y \in \Phi(x))\ z \in \Psi(y).$$

Neka su funkcije a i ζ kao u lemi 1.4.2. Imamo

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{a(i) \mid 0 \leq i \leq \zeta(\varphi(x))\}$$

za neku rekurzivnu funkciju $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Stoga je

$$\begin{aligned} z \in \Lambda(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{0, \ldots, \zeta(\varphi(x))\} \text{ takav da } a(i) \in \Phi(x) \text{ i } z \in \Psi(a(i)) \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\zeta(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, a(i)) \overline{\Psi}(a(i), z) > 0, \end{aligned}$$

pa je Λ rekurzivna funkcija. Neka je $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$. Definiramo $\lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\lambda(x) = \max \{\psi(a(i)) \mid 0 \leq i \leq \zeta(\varphi(x))\}.$$

Kako je λ prema lemi 1.2.7 rekurzivna funkcija i vrijedi

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y) \subseteq \bigcup_{y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}} \Psi(y) \subseteq \bigcup_{y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}} \mathbb{N}^m_{\psi(y)} \subseteq \bigcup_{0 \leq i \leq \zeta(\varphi(x))} \mathbb{N}^m_{\psi(a(i))} \subseteq \mathbb{N}^m_{\lambda(x)},$$

slijedi da je Λ rekurzivno omeđena. □

Primjer 1.4.7. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Phi(x) = \{f(x)\}$ r.r.o. funkcija.

Naime, imamo

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y = f(x)\right\}$$

što je rekurzivan skup, pa je Φ rekurzivna funkcija. Nadalje, $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\max\{f_1(x),\dots f_n(x)\}}$, pa je Φ i rekurzivno omeđena. ◀

Korolar 1.4.8. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija. Tada je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$, $\Lambda(x) = f(\Phi(x)) = \{f(y) \mid y \in \Phi(x)\}$ također r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 1.4.6 primijenjenog na Φ i funkciju $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$, $\Psi(x) = \{f(x)\}$, za koju smo u primjeru 1.4.7 vidjeli da je r.r.o. □

Primjer 1.4.9. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Phi(k) = \{f(0), \ f(1), \ \dots, \ f(k)\}$ r.r.o. funkcija.

Naime, lako se vidi da je funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Psi(k) = \{0, \ 1, \ \dots, \ k\}$ r.r.o., a vrijedi $\Phi(k) = f(\Psi(k))$. Sada iz prethodnog korolara slijedi da je Φ r.r.o. funkcija. ◀

Teorem 1.4.10. *Neka je $\Phi : (\mathbb{N}^k) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija i neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv. Tada je skup $\Omega = \left\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq S\right\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N}) = S$. Definirajmo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Psi(i) = \{f(0), \ f(1), \ \dots, \ f(i)\}$. Iz prethodnog primjera znamo da je Ψ r.r.o. funkcija. Uočimo da vrijedi

$$x \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) \subseteq S \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in \mathbb{N}) \ \Phi(x) \subseteq \Psi(i).$$

Skup $\Gamma = \{(x, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(i)\}$ je rekurzivan po korolaru 1.4.4. Sada iz ekvivalencije $x \in \Omega \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N}) \ (x, i) \in \Gamma$ i teorema o projekciji zaključujemo da je Ω rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 1.4.11. *Neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Tada je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{n+m})$, $\Lambda(x) = \Phi(x) \times \Psi(x)$ također r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}\big\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^{k+n+m} \ \mid \ (y,z) \in \Lambda(x)\big\} &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^{k+n+m} \ \mid \ y \in \Phi(x) \text{ i } z \in \Psi(x)\big\} \\ &= \{(x,y,z) \mid y \in \Phi(x)\} \cap \{(x,y,z) \mid z \in \Psi(x)\}\,.\end{aligned}$$

Kako su Φ i Ψ r.r.o. funkcije, skupovi

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{N}^{k+n} \ \mid \ y \in \Phi(x)\big\} \quad \text{i} \quad \big\{(x,z) \in \mathbb{N}^{k+m} \ \mid \ z \in \Psi(x)\big\}$$

su rekurzivni, pa lako slijedi da je i $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^{k+n+m} \ \mid \ (y,z) \in \Lambda(x)\big\}$ rekurzivan. Dakle, Λ je rekurzivna funkcija. Ako su $\varphi,\ \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ i $\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, imamo $\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^{m+n}_{\max\{\varphi(x),\ \psi(x)\}}$, pa je Λ rekurzivno omeđena. Dakle, Λ je r.r.o. funkcija. $\square$

Poglavlje 2

Izračunljivi metrički prostori

2.1 Izračunljive točke i izračunljivi nizovi

Neka je (X, d) metrički prostor i $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u X takav da je skup $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gust u X, te takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Tada uređenu trojku (X, d, α) nazivamo **izračunljiv metrički prostor**.

Primjer 2.1.1. Promotrimo euklidski metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$. Definirajmo niz $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ formulom

$$\alpha_i = \left((-1)^{E(i,2)} \frac{E(i,0)}{E(i,1)+1}, \ldots, (-1)^{E(i,3n-1)} \frac{E(i,3n-3)}{E(i,3n-2)+1} \right).$$

Uočimo da je α rekurzivan niz i da je $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}^n$.

Promotrimo funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$. Imamo

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = \sqrt{(\alpha_i^1 - \alpha_j^1)^2 + \cdots + (\alpha_i^n - \alpha_j^n)^2}$$

pa je po propoziciji 1.3.18 funkcija $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna. Dakle, $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor. $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ nazivamo **izračunljiv euklidski prostor**. ◀

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $x \in X$. Kažemo da je x **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Neka je $(x_i)_i$ niz u X. Kažemo da je $(x_i)_i$ **izračunljiv niz** ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$. Uočimo: ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je $(\alpha_{f(i)})_i$ izračunljiv niz u (X, d, α).

Propozicija 2.1.2. *Neka je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada je x_0 izračunljiva točka ako i samo ako je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.*

Dokaz. Neka je $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ izračunljiva točka u $\mathbb{R}^n$. Tada su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izračunljivi brojevi, pa postoje rekurzivne funkcije $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takve da je

$$|x_1 - f_1(k)| < 2^{-k}, \quad \ldots, \quad |x_n - f_n(k)| < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} d\big((x_1, \ldots, x_n), (f_1(k), \ldots, f_n(k))\big) &= \sqrt{(x_1 - f_1(k))^2 + \cdots + (x_n - f_n(k))^2} \\ &< \sqrt{n \cdot (2^{-k})^2} = \sqrt{n} \cdot 2^{-k}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definirajmo skup

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(k,i) \in \mathbb{N}^2 \mid (f_1(k), \ldots, f_n(k)) = \alpha_i\} \\ &= \{(k,i) \in \mathbb{N}^2 \mid f_1(k) = \alpha_i^1\} \cap \cdots \cap \{(k,i) \in \mathbb{N}^2 \mid f_n(k) = \alpha_i^n\}. \end{aligned}$$

Vidimo da je Ω rekurzivan. Kako je $(f_1(k), \ldots, f_n(k)) \in \mathbb{Q}^n$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(f_1(k), \ldots, f_n(k)) = \alpha_i$, pa postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, \varphi(k)) \in \Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sada iz (2.1) imamo

$$d(x_0, \alpha_{\varphi(k)}) < \sqrt{n} \cdot 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k_0} \cdot \sqrt{n} < 1$. Tada za funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(k) = \varphi(k + k_0)$ imamo da je g rekurzivna i vrijedi

$$d(x_0, \alpha_{g(k)}) < \sqrt{n} \cdot 2^{-k_0 + k} < 2^{-k},$$

pa je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.

Obratno, neka je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Za svaki $1 \leq i \leq n$ imamo

$$|x_i - \alpha^i_{f(k)}| \leq d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

pa su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izračunljivi brojevi. Dakle, x_0 je izračunljiva točka. □

Posve analogno dokazuje se i sljedeća propozicija:

Propozicija 2.1.3. *Neka je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}^n$. Tada je $(x_i)_i$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je izračunljiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.*

Lema 2.1.4. *Neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ funkcija i neka je $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $|f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tada je i funkcija f rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $G : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od F. Tada je

$$|F(x,k) - G(x,k,j)| < 2^{-j}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall k, j \in \mathbb{N},$$

pa je posebno

$$|F(x,k) - G(x,k,k)| < 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Imamo

$$|f(x) - G(x,k,k)| < |f(x) - F(x,k)| + |F(x,k) - G(x,k,k)| < 2 \cdot 2^{-k},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Kako je funkcija $\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$, $(x,k) \mapsto G(x,k,k)$ rekurzivna, slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Lema 2.1.5. *Neka je (X,d) metrički prostor i neka su $x, x', y, y' \in X$. Tada vrijedi*

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y').$$

Dokaz. Iz nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \quad \text{i} \quad d(x',y') \leq d(x',x) + d(x,y) + d(y,y'),$$

iz čega slijedi

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y') \quad \text{i} \quad d(x',y') - d(x,y) \leq d(x,x') + d(y,y').$$

Prema tome, vrijedi $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$. □

Propozicija 2.1.6. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i neka su $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljivi nizovi u (X,d,α). Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(x_i,y_j)$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \quad \text{i} \quad d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) < 2^{-k}, \qquad \forall i,j,k \in \mathbb{N}.$$

Prema lemi 2.1.5, imamo

$$\left|d(x_i,y_j) - d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)})\right| \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) + d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) < 2 \cdot 2^{-k},$$

odnosno

$$\left|d(x_i,y_j) - d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)})\right| < 2^{-k}, \qquad \forall i,j,k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i,j,k) \mapsto d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)})$ rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija $(i,j,k) \mapsto (F(i,k+1), G(j,k+1))$ i $(u,v) \mapsto d(\alpha_u, \alpha_v)$, iz leme 2.1.4 slijedi tražena tvrdnja. □

2.2 Izračunljivo prebrojivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Skupove $K(\alpha_i, r)$, pri čemu je $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ i $i \in \mathbb{N}$ nazivamo **racionalne otvorene kugle.**

Neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fiksirane rekurzivne funkcije takve da je $\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ fiksirana rekurzivna funkcija takva da je $q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle$. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je

$$\left\{(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) \mid i \in \mathbb{N}\right\} = \alpha(\mathbb{N}) \times (\mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle)\,.$$

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo $I_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)})$. Tada je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih racionalnih otvorenih kugli u (X, d, α).

Definiramo nizove $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u X i $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle$,

$$\lambda_i = \alpha_{\tau_1(i)} \quad \text{i} \quad \rho_i = q_{\tau_2(i)}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je $I_i = K(\lambda_i, \rho_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ zatvoren skup u (X, d). Kažemo da je S **izračunljivo prebrojiv** (c.e.) skup ako je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv.

Napomena 2.2.1. Definicija izračunljivo prebrojivog skupa ne ovisi o izboru funkcija τ_1, τ_2, q. Dokažimo to.

Neka su τ_1', τ_2' i q' rekurzivne funkcije takve da je $\{(\tau_1'(i), \tau_2'(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$ i $q(\mathbb{N}) = \langle 0, +\infty\rangle$. Definirajmo $I_i' = K(\alpha_{\tau_1'(i)}, q'_{\tau_2'(i)})$ i promotrimo skup

$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \tau_1'(i) = \tau_1(j) \text{ i } q'_{\tau_2'(i)} = q_{\tau_2(j)}\right\}.$$

Vidimo da je Ω rekurzivan. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $q'_{\tau_2'(i)} = q_k$. Nadalje, za taj k postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(\tau_1'(i), k) = (\tau_1(j), \tau_2(j))$. Dakle, za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$, pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, f(i)) \in \Omega$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Uočimo: ako je $(i, j) \in \Omega$, onda $I_i' = I_j$. Posebno, $I_i' = I_{f(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $S \subseteq X$ takav da je skup $\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. Neka je $\Gamma' = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\}$. Imamo

$$\Gamma' = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \in \Gamma\} = f^{-1}(\Gamma),$$

pa je i Γ' rekurzivno prebrojiv. Time je tvrdnja dokazana.

Propozicija 2.2.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u tom prostoru. Definirajmo $S = \overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}} \subseteq X$. Tada je S izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned} I_i \cap S \neq \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad I_i \cap \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da } x_j \in I_i \\ &\Leftrightarrow \quad \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } d(x_j, \lambda_i) < \rho_i. \end{aligned}$$

Definirajmo skup

$$\Omega = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\mid\; d(x_j, \lambda_i) < \rho_i\right\}.$$

Kako su funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(x_j, \lambda_i)$ i $(i,j) \mapsto \rho_i$ rekurzivne, skup Ω je rekurzivno prebrojiv. Sada iz

$$I_i \cap S \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } d(x_j, \lambda_i) < \rho_i$$

prema teoremu o projekciji slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. □

Neka je (X, d) metrički prostor. Lako se provjeri da za $x, y \in X$ i $r, s > 0$ vrijedi

$$d(x,y) + r \leq s \quad \Rightarrow \quad K(x,r) \subseteq K(y,s). \tag{2.2}$$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $i, j \in \mathbb{N}$. Pišemo $I_i \subseteq_F I_j$ i kažemo da je I_i **formalno sadržan** u I_j ako je $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$. Uočimo da je ovo relacija između brojeva i i j, a ne između skupova I_i i I_j. Također, uočimo da prema (2.2) vrijedi $I_i \subseteq_F I_j \Rightarrow I_i \subseteq I_j$.

Propozicija 2.2.3. *Skup $S = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\}$ je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $f(i,j) = d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i$, $g(i,j) = \rho_j$. Kako su ove funkcije rekurzivne i vrijedi

$$S = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\mid\; f(i,j) < g(i,j)\right\},$$

S je rekurzivno prebrojiv. □

Lema 2.2.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in I_i$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $I_k \subseteq_F I_i$, $x \in I_k$ i $\rho_k < \varepsilon$.*

Dokaz. Imamo $x \in K(\lambda_i, \rho_i)$, pa je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$. Stoga postoji $s \in \mathbb{Q}$, $s < \varepsilon$ takav da je $d(x, \lambda_i) + 2s < \rho_i$. Također, kako je $(\alpha_i)_i$ gust u X, postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\alpha_j, x) < s$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_j, s) = (\lambda_k, \rho_k)$. Imamo

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + s \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \alpha_j) + s < d(\lambda_i, x) + 2s < \rho_i$$

iz čega slijedi $d(\lambda_i, \lambda_k) + \rho_k < \rho_i$, odnosno $I_k \subseteq_F I_i$. Konačno, imamo $\rho_k = s < \varepsilon$ i $d(\alpha_j, x) < s$, pa je $x \in K(\alpha_j, s) = I_k$. □

Propozicija 2.2.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ neprazan i potpun izračunljivo prebrojiv skup. Tada S sadrži izračunljivu točku.*

Dokaz. Neka je $\Omega = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$. Ω je po pretpostavci rekurzivno prebrojiv skup. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N}) = \Omega$. Neka je

$$\Gamma = \left\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid I_{f(j)} \subseteq_F I_{f(i)} \text{ i } \rho_{f(j)} < 2^{-k}\right\}.$$

Vidimo da je Γ rekurzivno prebrojiv. Neka su $i, k \in \mathbb{N}$. Kako je $I_{f(i)} \cap S \neq \emptyset$, postoji $x \in S$ takav da je $x \in I_{f(i)}$. Tada prema prethodnoj lemi postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $I_m \subseteq_F I_{f(i)}$, $x \in I_m$ i $\rho_m < 2^{-k}$. Kako je $x \in I_m \cap S \neq \emptyset$, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $m = f(j)$. Sada je $I_{f(j)} \subseteq_F I_{f(i)}$ i $\rho_{f(j)} < 2^{-k}$, pa je $(i, k, j) \in \Gamma$. Dakle, za svaki $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \Gamma$, pa postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, k, \varphi(i, k)) \in \Gamma$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$.

Uzmimo proizvoljan $t \in \mathbb{N}$ i definirajmo niz $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekurzivno sa

$$\begin{aligned} i_0 &= t, \\ i_{n+1} &= \varphi(i_n, n). \end{aligned}$$

Kako je φ rekurzivna, slijedi da je $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekurzivan niz. Imamo $(i_n, n, i_{n+1}) \in \Gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, odnosno

$$I_{f(i_{n+1})} \subseteq_F I_{f(i_n)} \qquad \text{i} \qquad \rho_{f(i_{n+1})} < 2^{-n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odavde lako zaključujemo da je $\left(S \cap \overline{I_{f(i_n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ padajući niz zatvorenih skupova u S čiji dijametri teže nuli. Kako je S potpun, slijedi da postoji $x \in S$ takav da je $x \in \overline{I_{f(i_n)}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$d(x, \lambda_{f(i_{n+1})}) \leq \rho_{f(i_{n+1})} < 2^{-n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \tau_1(f(i_{n+1}))$ rekurzivna, vidimo da je x izračunljiva točka u (X, d, α). □

Teorem 2.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$ neprazan i potpun izračunljivo prebrojiv skup. Tada postoji izračunljiv niz $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ u (X, d, α) takav da je $S = \overline{\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}}$.*

Dokaz. Neka su Ω, f, Γ i φ kao u dokazu prethodne propozicije. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$\begin{aligned} h(j, 0) &= j, \\ h(j, n+1) &= \varphi(h(j, n), n). \end{aligned}$$

Vidimo da je h rekurzivna i $(h(j,n),n,h(j,n+1)) \in \Gamma$, $\forall j,n \in \mathbb{N}$. Prema tome, za $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$I_{f(h(j,n+1))} \subseteq_F I_{f(h(j,n))} \quad \text{i} \quad \rho_{f(h(j,n+1))} < 2^{-n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kao u dokazu prethodne propozicije, uočimo da je $\left(S \cap \overline{I_{f(h(j,n))}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz zatvorenih skupova u S čiji dijametri teže nuli, pa iz potpunosti od S slijedi da postoji $x_j \in S$ takav da je $x_j \in \overline{I_{f(h(j,n))}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$d\left(x_j, \lambda_{f(h(j,n+1))}\right) \leq \rho_{f(h(j,n+1))} < 2^{-n}, \quad \forall j,n \in \mathbb{N},$$

pa je $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X,d,α). Pokažimo da je ovaj niz gust u S. U tu svrhu, odaberimo $y \in S$ i $\varepsilon > 0$. Neka je $s \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < 2s < \varepsilon$. Kako je niz α gust u X, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_m \in K(y,s)$. Tada je $y \in K(\alpha_m, s)$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_m, s) = (\lambda_i, \rho_i)$. Tada je očito $S \cap I_i \neq \emptyset$, pa je $i = f(j)$ za neki $j \in \mathbb{N}$, te imamo $y \in I_{f(j)}$. S druge strane, imamo i $x_j \in \overline{I_{f(h(j,0))}} = \overline{I_{f(j)}}$. Prema tome, vrijedi

$$d(y,x_j) \leq \operatorname{diam} \overline{I_{f(j)}} \leq 2\rho_{f(j)} = 2s < \varepsilon.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

2.3 Izračunljivi skupovi

Propozicija 2.3.1. *Postoje rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$\left\{ \Big(\sigma(i,0), \sigma(i,1), \dots, \sigma(i,\eta(i))\Big) \ \Big| \ i \in \mathbb{N} \right\}$$

skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka su $p_0, p_1, p_2, \dots$ svi prosti brojevi redom. Nadalje, neka je $E : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz primjera 1.1.3 i neka je $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija koja svakom prirodnom broju x pridružuje najveći indeks i takav da p_i dijeli x, pri čemu uzimamo $F(0) = 0$. Iz klasične teorije izračunljivosti poznato je da su E i F rekurzivne funkcije. Definiramo

$$\sigma(i,j) = E(i,j) \dot{-} 1 \quad \text{i} \quad \eta(i) = F(i), \quad \forall i,j \in \mathbb{N}.$$

Neka je $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ konačan niz u $\mathbb{N}$. Za $i = p_0^{a_0+1} p_1^{a_1+1} \cdots p_n^{a_n+1}$ imamo $\eta(i) = n$ i $(\sigma(i,0), \sigma(i,1), \dots, \sigma(i,\eta(i))) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$. □

Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije kao u prethodnoj propoziciji. Za $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ umjesto $\sigma(i,j)$ pisat ćemo $(i)_j$, a umjesto $\eta(i)$ pisat ćemo $\bar{i}$. Dakle, $\{((i)_0, (i)_1, \dots, (i)_{\bar{i}}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$.

Za $i \in \mathbb{N}$ označimo $[i] = \{(i)_0, (i)_1, \dots, (i)_{\bar{i}}\}$. Uočimo: $[i]$ je konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$ i svaki konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$ je oblika $[i]$ za neki $i \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.2. *Skup* $\Gamma = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in [j]\}$ *je rekurzivan.*

Dokaz. Imamo
$$\chi_\Gamma(i,j) = \overline{\text{sg}}\left(\prod_{k=0}^{\bar{j}} |i - (j)_k|\right),$$
pa vidimo da je Γ rekurzivan. $\square$

Napomena 2.3.3. Prethodna lema kaže da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $i \mapsto [i]$ rekurzivna. Zapravo, to je r.r.o. funkcija. Naime, vrijedi
$$\begin{aligned}[i] &= \{(i)_0,\ (i)_1, \dots, (i)_{\bar{i}}\} = \{\sigma(i,0),\ \sigma(i,1), \dots, \sigma(i,\eta(i))\} \\ &= \sigma\left(\{(i,0),\ (i,1), \dots, (i,\eta(i))\}\right) = \sigma\left(\{i\} \times \{0,\ 1,\ \dots,\ \eta(i)\}\right).\end{aligned}$$
Tvrdnja slijedi primjenom propozicije 1.4.11 i korolara 1.4.8.

Lema 2.3.4. *Neka je* $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *r.r.o. funkcija takva da je* $\Phi(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. *Tada postoji rekurzivna funkcija* $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *takva da je* $\Phi(x) = [h(x)]$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Skup
$$\Omega = \left\{(x,m) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \Phi(x) = [m]\right\}$$
je rekurzivan prema korolaru 1.4.4. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Skup $\Phi(x)$ je po pretpostavci neprazan, a kako je Φ rekurzivno omeđena, znamo i da je taj skup konačan. Stoga postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(x) = [m]$. Sada iz teorema 1.1.9 slijedi da postoji funkcija $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi $(x, h(x)) \in \Omega$, odnosno $\Phi(x) = [h(x)]$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. $\square$

Fiksirajmo rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je
$$\{(\sigma(i,0), \sigma(i,1), \dots, \sigma(i,\eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\}$$
skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$, kao u propoziciji 2.3.1.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo
$$\Lambda_i = \left\{\alpha_{(i)_0},\ \alpha_{(i)_1},\ \dots,\ \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\right\}.$$
Dakle, $\Lambda_i = \{\alpha_j \mid j \in [i]\}$. Uočimo: svaki Λ_i je neprazan konačan podskup od $\alpha(\mathbb{N})$ i obratno, svaki neprazan konačan podskup od $\alpha(\mathbb{N})$ je oblika Λ_i za neki $i \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d) metrički prostor. Za $A, B \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$ uvodimo sljedeću relaciju:
$$\begin{aligned} A \approx_\varepsilon B \quad \Leftrightarrow \quad & (\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ d(x,y) < \varepsilon \\ & \text{i } (\forall y \in B)\ (\exists x \in A)\ d(x,y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Neka su sada A i B neprazni kompaktni skupovi u (X,d). Definiramo

$$d_H(A,B) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \;\mid\; A \approx_\varepsilon B\right\}.$$

Za $d_H(A,B)$ kažemo da je **Hausdorffova udaljenost** skupova A i B.

Neka je $\mathcal{K}$ familija svih kompaktnih skupova u (X,d). Može se pokazati da je $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ metrika na $\mathcal{K}$. Također, može se pokazati da vrijedi

$$A \approx_\varepsilon B \quad \Leftrightarrow \quad d_H(A,B) < \varepsilon.$$

Neka je skup A gust u (X,d) i neka je $S \subseteq X$ kompaktan. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $A' \subseteq A$ takav da je $A' \approx_\varepsilon S$. Zaista, kako je $\{K(a,\varepsilon) \mid a \in A\}$ otvoren pokrivač od X (pa i od S), postoje $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ takvi da je

$$S \subseteq K(a_0,\varepsilon) \cup \cdots \cup K(a_n,\varepsilon) \quad \text{i} \quad S \cap K(a_i,\varepsilon) \neq \emptyset,\ \forall i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Tada je $S \approx_\varepsilon \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} =: A'$.

Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i neka je S kompaktan skup u (X,d). Znamo: ako je $S \neq \emptyset$, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_i$. Za S kažemo da je **izračunljiv skup** u (X,d,α) ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Napomena 2.3.5. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Definicija izračunljivog skupa ne ovisi o izboru funkcija σ i η. Dokažimo to.

Neka su $\sigma' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke druge rekurzivne funkcije takve da je

$$\left\{ \left(\sigma'(i,0), \sigma'(i,1), \ldots, \sigma'(i,\eta'(i))\right) \;\mid\; i \in \mathbb{N}\right\}$$

skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Označimo

$$[i]' = \{\sigma'(i,0), \ldots, \sigma'(i,\eta'(i))\}$$

i $\Lambda'_i = \{\alpha_j \mid j \in [i]'\}$.

Neka je S kompaktan skup u (X,d). Pretpostavimo da je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $S \approx_{2^{-k}} \Lambda'_{f(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema napomeni 2.3.3 funkcije $i \mapsto [i]$ i $j \mapsto [j]'$ su r.r.o, pa je prema korolaru 1.4.4 skup

$$\Omega = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid [i]' = [j]\right\}$$

rekurzivan. Nadalje, jasno je da za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $[i]' = [j]$. Stoga, prema teoremu 1.1.9, postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i,\varphi(i)) \in \Omega$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Sada za $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\Lambda'_{f(k)} = \{\alpha_i \mid i \in [f(k)]'\} = \{\alpha_i \mid i \in [\varphi(f(k))]\} = \Lambda_{\varphi(f(k))}.$$

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{\varphi(f(k))}$, pa je S izračunljiv s obzirom na σ i η.

Teorem 2.3.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ izračunljiv skup. Tada je S izračunljivo prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Neka je $S \neq \emptyset$. Za $i \in \mathbb{N}$ takav da $I_i \cap S \neq \emptyset$ postoji $x \in I_i \cap S$. Kako je tada $d(x, \lambda_i) < \rho_i$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $d(x, \lambda_i) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i$. Zbog $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$ znamo da postoji $j \in [f(k)]$ takav da je $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$. Sada je

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \alpha_j) + 2^{-k} < d(x, \lambda_i) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i.$$

Dakle, ako je $x \in \mathbb{N}$ takav da $I_i \cap S \neq \emptyset$, onda postoje $j, k \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i \quad \text{i} \quad j \in [f(k)]. \tag{2.3}$$

Obratno, pretpostavimo da za $i \in \mathbb{N}$ postoje $j, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (2.3). Zbog $j \in [f(k)]$ i $\Lambda_{f(k)} \approx_{2^{-k}} S$ slijedi da postoji $x \in S$ takav da je $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$. Kako je

$$d(x, \lambda_i) \leq d(x, \alpha_j) + d(\alpha_j, \lambda_i) < d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i,$$

slijedi $x \in S \cap I_i$. Dakle, imamo

$$x \in I_i \cap S \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k, j \in \mathbb{N}) \;\; d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i \;\text{ i }\; j \in [f(k)].$$

Neka je

$$\Omega = \left\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \;\mid\; d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i \text{ i } j \in [f(k)]\right\}.$$

Skup

$$\Omega_1 = \left\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \;\mid\; j \in [f(k)]\right\}$$

je rekurzivan po lemi 2.3.2, a skup

$$\Omega_2 = \left\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \;\mid\; d(\lambda_i, \alpha_j) < \rho_i\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv prema korolaru 1.3.17. Kako je $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv. Po teoremu o projekciji i skup $\{i \in \mathbb{N} \mid (\exists k, j \in \mathbb{N})\ (i, k, j) \in \Omega\} = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ je rekurzivno prebrojiv. Dakle, S je izračunljivo prebrojiv. □

Direktno iz prethodnog teorema i teorema 2.2.6 slijedi:

Korolar 2.3.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \neq \emptyset$ izračunljiv skup u (X, d, α). Tada postoji izračunljiv niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u (X, d, α) takav da je $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Propozicija 2.3.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $x_0 \in X$. Tada je skup $\{x_0\}$ izračunljiv ako i samo ako je x_0 izračunljiva točka.*

Dokaz. Ako je skup $\{x_0\}$ izračunljiv, onda iz teorema 2.3.6 i propozicije 2.2.5 slijedi da je x_0 izračunljiva točka.

Obratno, pretpostavimo da je x_0 izračunljiva točka. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tada je $\{x_0\} \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{f(k)}\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Promotrimo skup

$$\Omega = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \;\mid\; i = (j)_0 \;\text{ i }\; \overline{j} = 0\right\}.$$

Skup Ω je rekurzivan i za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$, pa prema teoremu 1.1.9 postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, g(i)) \in \Omega$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Uočimo da, ako je $(i, j) \in \Omega$, vrijedi $\{\alpha_i\} = \Lambda_j$, pa je posebno $\{\alpha_i\} = \Lambda_{g(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Prema tome, $\{x_0\} \approx_{2^{-k}} \Lambda_{g(f(k))}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, odnosno skup $\{x_0\}$ je izračunljiv. $\square$

Propozicija 2.3.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su S i T izračunljivi skupovi u (X, d, α). Tada je $S \cup T$ također izračunljiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje rekurzivne funkcije f i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$ i $T \approx_{2^{-k}} \Lambda_{g(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Odavde lako vidimo da je $S \cup T \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \cup \Lambda_{g(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema tome, dovoljno je dokazati da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $\Lambda_i \cup \Lambda_j = \Lambda_{\varphi(i,j)}$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$. Imamo

$$\begin{aligned}\Lambda_i \cup \Lambda_j &= \{\alpha_u \mid u \in [i]\} \cup \{\alpha_u \mid u \in [j]\}\\ &= \{\alpha_u \mid u \in [i] \cup [j]\}.\end{aligned}$$

Promotrimo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(i, j) = [i] \cup [j]$. Iz korolara 1.4.4 slijedi da je Φ r.r.o. funkcija. Nadalje, uočimo da je za svaki $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ skup $\Phi(i, j)$ neprazan i konačan, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(i, j) = [k]$. Kako je skup $\Omega = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \Phi(i, j) = [k]\}$ rekurzivan, odavde i iz teorema 1.1.9 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, j, \varphi(i, j)) \in \Omega$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. To znači da je

$$\Lambda_i \cup \Lambda_j = \{\alpha_u \mid u \in [i] \cup [j]\} = \{\alpha_u \mid u \in [\varphi(i, j)]\} = \Lambda_{\varphi(i,j)},$$

pa je tvrdnja dokazana. $\square$

2.4 Poluizračunljivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su $B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_n$ racionalne otvorene kugle u (X, d, α). Tada za skup $B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$ kažemo da je **racionalan otvoren skup** u (X, d, α). Uočimo: U je racionalan otvoren skup u (X, d, α) ako i samo ako postoje $i_0,\ i_1, \ldots,\ i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $U = I_{i_0} \cup I_{i_1} \cup \cdots \cup I_{i_n}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i = I_{(j)_0} \cup I_{(j)_1} \cup \cdots \cup I_{(j)_{\overline{j}}}.$$

Tada je $\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ familija svih racionalnih otvorenih skupova u (X, d, α).

Za racionalne otvorene skupove definiramo relaciju **formalne sadržanosti** sa

$$J_u \subseteq_F J_v \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i \in [u])\ (\exists j \in [v])\ I_i \subseteq_F I_j.$$

Uočimo da je ovo zapravo relacija na indeksima u i v, a ne na skupovima J_u i J_v. Pokažimo da je skup $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \subseteq_F J_v\}$ rekurzivno prebrojiv. Promotrimo najprije skupove

$$\Gamma = \left\{(i, v) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists j \in [v])\ I_i \subseteq_F I_j\right\} \quad \text{i} \quad \Gamma' = \left\{(i, v, j) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [v] \text{ i } I_i \subseteq_F I_j\right\}.$$

Lako se vidi da je Γ' rekurzivno prebrojiv, a kako je

$$(i, v) \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad (\exists j \in \mathbb{N})\ (i, v, j) \in \Gamma',$$

iz teorema o projekciji slijedi da je i Γ rekurzivno prebrojiv. Vrijedi

$$(u, v) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in [u])\ (i, v) \in \Gamma.$$

Kako je funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Phi(u, v) = [u] \times \{v\}$ r.r.o., zbog

$$(u, v) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(u, v) \subseteq \Gamma$$

iz teorema 1.4.10 zaključujemo da je Ω rekurzivno prebrojiv.

Za kompaktan skup $S \subseteq X$ kažemo da je **poluizračunljiv** u (X, d, α) ako je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.

Slično kao u napomeni 2.3.5, pokazuje se da definicija poluizračunljivog skupa ne ovisi o izboru funkcija $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Sada nam je cilj dokazati sljedeću karakterizaciju izračunljivosti:

Teorem 2.4.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i S kompaktan skup u (X, d). Tada je S izračunljiv ako i samo ako je S izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv.*

Dokažimo najprije nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 2.4.2. *Neka je S izračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Tada postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $S \subseteq J_{h(k)}$, te vrijedi*

$$(\forall i \in [h(k)])\ I_i \cap S \neq \emptyset \ i \ \rho_i < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Tvrdimo da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(\alpha_i, 2^{-(k+1)}) = (\lambda_{\varphi(i,k)}, \rho_{\varphi(i,k)}) \qquad \forall (i,k) \in \mathbb{N}^2.$$

Naime, skup $\Omega = \left\{(i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid i = \tau_1(j) \text{ i } 2^{-(k+1)} = \rho_j\right\}$ je rekurzivan i za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in \Omega$. Dakle, postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(i,k,\varphi(i,k)) \in \Omega$, $\forall (i,k) \in \mathbb{N}^2$. Uočimo da $(i,k,j) \in \Omega$ povlači $(\alpha_i, 2^{-(k+1)}) = (\lambda_j, \rho_j)$, pa je φ upravo tražena funkcija.

Kako je po pretpostavci S izračunljiv, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$S \subseteq \bigcup_{i \in [f(k+1)]} K(\alpha_i, 2^{-(k+1)}) = \bigcup_{j \in \varphi([f(k+1)] \times \{k\})} I_j, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $k \mapsto \varphi([f(k+1)] \times \{k\})$ r.r.o, a kako je skup $\varphi([f(k+1)] \times \{k\})$ neprazan za sve $k \in \mathbb{N}$, iz leme 2.3.4 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\varphi([f(k+1)] \times \{k\}) = [h(k)]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$S \subseteq \bigcup_{j \in [h(k)]} I_j = J_{h(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Za $j \in [h(k)] = \varphi([f(k+1)] \times \{k\})$ imamo $j = \varphi(i,k)$ za neki $i \in [f(k+1)]$. Stoga je $\rho_j = \rho_{\varphi(i,k)} = 2^{-(k+1)} < 2^{-k}$. Također, imamo

$$I_j = K(\lambda_j, \rho_j) = K\left(\lambda_{\varphi(i,k)}, \rho_{\varphi(i,k)}\right) = K(\alpha_i, 2^{-(k+1)}).$$

Kako je $i \in [f(k+1)]$, slijedi da je $S \cap I_j \neq \emptyset$. Time je tvrdnja dokazana. $\square$

Lema 2.4.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je S kompaktan skup u (X, d). Pretpostavimo da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \subseteq J_{f(k)}$ i*

$$(\forall i \in [f(k)])\ I_i \cap S \neq \emptyset \ i \ \operatorname{diam} I_i < 2^{-k}.$$

Tada je S izračunljiv skup.

Dokaz. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$S \subseteq \bigcup_{i \in [f(k)]} I_i = \bigcup_{i \in [f(k)]} K(\lambda_i, \rho_i).$$

Kako je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \{\tau_1(i) \mid i \in [f(k)]\} = \tau_1([f(k)])$ r.r.o i skup $\tau_1([f(k)])$ je neprazan i konačan za svaki $k \in \mathbb{N}$, prema lemi 2.3.4 postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $[g(k)] = \tau_1([f(k)])$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Jasno je da je S neprazan. Tvrdimo da je

$$S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{g(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Odaberimo $x \in S$. Tada postoji $i \in [f(k)]$ takav da je $x \in K(\lambda_i, \rho_i)$. Zbog $\operatorname{diam} I_i < 2^{-k}$ imamo $d(x, \lambda_i) < 2^{-k}$. Za $j = \tau_1(i)$ vrijedi $j \in \tau_1([f(k)]) = [g(k)]$ i $\lambda_i = \alpha_j$, pa je $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$.

Obratno, neka je $j \in [g(k)]$. Tada postoji $i \in [f(k)]$ takav da je $j = \tau_1(i)$, odnosno $\lambda_i = \alpha_j$. Konačno, zbog $I_i \cap S \neq \emptyset$ postoji $x \in S$ takav da je

$$d(x, \alpha_j) = d(x, \lambda_i) < \operatorname{diam} I_i < 2^{-k}.$$

Dakle, vrijedi $S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{g(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pa je S izračunljiv. □

Lema 2.4.4. *Neka je S kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Pretpostavimo da su $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ i $r_0, r_1, \dots, r_n > 0$ takvi da je*

$$S \subseteq K(a_0, r_0) \cup K(a_1, r_1) \cup \dots \cup K(a_n, r_n).$$

Tada postoji $\mu > 0$ takav da za svaki $x \in S$ postoji $0 \leq i \leq n$ takav da je $d(x, a_i) + \mu < r_i$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x_k \in S$ takav da je

$$d(x_k, a_i) + 2^{-k} \geq r_i, \qquad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Neka je $(x_{k_p})_p$ konvergentan podniz niza $(x_k)_k$ i neka je $\lim_{p \to \infty} x_{k_p} = z \in S$. Prelaskom na limes u gornjoj relaciji dobivamo $d(z, a_i) \geq r_i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$. No, tada $z \notin K(a_i, r_i)$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, pa $z \notin S$, što je kontradikcija. □

Sada smo spremni za dokaz teorema.

Dokaz teorema 2.4.1. Pretpostavimo da je S izračunljiv skup u (X, d, α). U teoremu 2.3.6 vidjeli smo da je S izračunljivo prebrojiv. Pokažimo da je S poluizračunljiv. Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $S \subseteq J_j = \bigcup_{i \in [j]} K(\lambda_i, \rho_i)$. Iz leme 2.4.4 slijedi da postoji

$\mu > 0$ takav da za svaki $x \in S$ postoji $i \in [j]$ za koji vrijedi $d(x, \lambda_i) + \mu < \rho_i$. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija iz leme 2.4.2. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < \frac{\mu}{2}$. Za taj k imamo $S \subseteq J_{h(k)}$ i za svaki $i \in [h(k)]$ vrijedi

$$I_i \cap S \neq \emptyset \quad \text{i} \quad \rho_i < 2^{-k}.$$

Neka je $i \in [h(k)]$ i $x \in S \cap I_i$. Tada je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$. Za taj x, neka je $m \in [j]$ takav da je $d(x, \lambda_m) + \mu < \rho_m$. Imamo

$$d(\lambda_i, \lambda_m) + \rho_i \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \lambda_m) + \rho_i < d(x, \lambda_m) + \underbrace{2\rho_i}_{<2\cdot 2^{-k}} < d(x, \lambda_m) + \mu < \rho_m.$$

Dakle, $d(\lambda_i, \lambda_m) + \rho_i < \rho_m$, odnosno $I_i \subseteq_F I_m$. Pokazali smo: za svaki $i \in [h(k)]$ postoji $m \in [j]$ takav da je $I_i \subseteq_F I_m$. Prema tome, vrijedi $J_{h(k)} \subseteq_F J_j$.

Obratno, ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $J_{h(k)} \subseteq_F J_j$, onda je $J_{h(k)} \subseteq J_j$ pa je i $S \subseteq J_j$. Dakle, za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi ekvivalencija

$$S \subseteq J_j \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N})\ J_{h(k)} \subseteq_F J_j.$$

Lako se vidi da je skup

$$\left\{(j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{h(k)} \subseteq_F J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv, pa po teoremu o projekciji slijedi da je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ također rekurzivno prebrojiv. Dakle, S je poluizračunljiv.

Pretpostavimo sada da je S poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv. To znači da su skupovi

$$\Gamma_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\} \quad \text{i} \quad \Gamma_2 = \{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$$

rekurzivno prebrojivi. Promotrimo skup

$$\Omega = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq J_j \ \text{ i } \ (\forall i \in [j])\left(I_i \cap S \neq \emptyset \ \text{ i } \ \rho_i < 2^{-k}\right)\right\}.$$

Tvrdimo da vrijedi

(1) za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in \Omega$,

(2) Ω je rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo to.

(1) Neka je $k \in \mathbb{N}$. Familija $\left\{K(\alpha_i, r) \mid i \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q},\ 0 < r < 2^{-k}\right\}$ tvori otvoreni pokrivač od S. Kako je S kompaktan, postoje $i_0, i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$ i $r_0, r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Q}$, $0 < r_0, r_1, \ldots, r_m < 2^{-k}$ takvi da je

$$S \subseteq K(\alpha_{i_0}, r_0) \cup \cdots \cup K(\alpha_{i_m}, r_m) \ \text{ i } \ S \cap K(\alpha_{i_t}, r_t) \neq \emptyset,\ \forall t \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Za svaki $t \in \{0, 1, \ldots, m\}$ odaberimo $p_t \in \mathbb{N}$ tako da bude $(\alpha_{i_t}, r_t) = (\lambda_{p_t}, \rho_{p_t})$ i nađimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je $[j] = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$. Imamo $S \subseteq J_j$ i za svaki $i \in [j]$ vrijedi $S \cap I_i \neq \emptyset$ i $\rho_i < 2^{-k}$. Dakle, za taj j vrijedi $(k, j) \in \Omega$.

(2) Imamo $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, pri čemu je

$$\Omega_1 = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq J_j\right\}, \quad \Omega_2 = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \cap S \neq \emptyset,\ \forall i \in [j]\right\}$$
$$\text{i} \quad \Omega_3 = \left\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \rho_i < 2^{-k},\ \forall i \in [j]\right\}.$$

Kako je Γ_2 rekurzivno prebrojiv, jasno je da je Ω_1 rekurzivno prebrojiv. Iz $\Omega_2 = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid [j] \subseteq \Gamma_1\}$ vidimo da je i Ω_2 rekurzivno prebrojiv. Također, skup

$$\Gamma' = \left\{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \rho_i < 2^{-k}\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv, pa je i $\Omega_3 = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid [j] \times \{k\} \subseteq \Gamma'\}$ rekurzivno prebrojiv. Dakle, Ω je rekurzivno prebrojiv.

Iz (1) i (2) po teoremu 1.1.9 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, f(k)) \in \Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$S \subseteq J_{f(k)} \ \text{ i } \ (\forall i \in [f(k)]) \left(I_i \cap S \neq \emptyset \ \text{ i } \ \rho_i < 2^{-k}\right).$$

Kako je $\operatorname{diam} I_i \leq 2\rho_i < 2 \cdot 2^{-k}$, $\forall i \in [f(k)]$, imamo

$$S \subseteq J_{f(k+2)} \ \text{ i } \ (\forall i \in [f(k+2)]) \left(I_i \cap S \neq \emptyset \ \text{ i } \ \operatorname{diam} I_i < 2^{-k}\right),$$

pa iz leme 2.4.3 slijedi da je S izračunljiv skup. □

2.5 Koizračunljivo prebrojivi skupovi

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S **koizračunljivo prebrojiv** (co-c.e.) ako je $S = X$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}$. Ekvivalentno, S je koizračunljivo prebrojiv ako postoji rekurzivno prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $X \setminus S = \bigcup_{i \in A} I_i$.

Neka je $i \in \mathbb{N}$ i $r > 0$ racionalan broj. Za skup $\overline{K}(\alpha_i, r)$ kažemo da je **racionalna zatvorena kugla** u (X, d, α). Primijetimo da je, uz oznaku $\hat{I}_i = \overline{K}(\lambda_i, \rho_i)$, $\left\{\hat{I}_i \mid i \in \mathbb{N}\right\}$ familija svih racionalnih zatvorenih kugli u (X, d, α).

Lema 2.5.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i S zatvoren skup u (X, d). Pretpostavimo da je skup $\left\{i \in \mathbb{N} \mid \hat{I}_i \cap S = \emptyset\right\}$ rekurzivno prebrojiv. Tada je S koizračunljivo prebrojiv.*

Dokaz. Označimo $A = \left\{i \in \mathbb{N} \mid \hat{I}_i \cap S = \emptyset\right\}$. Tvrdimo da je $X \setminus S = \bigcup_{i \in A} I_i$.

Imamo
$$i \in A \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_i \cap A = \emptyset \quad \Rightarrow \quad I_i \subseteq \hat{I}_i \subseteq X \setminus S.$$
Dakle, $\bigcup_{i \in A} I_i \subseteq X \setminus S$.

Neka je $x \in X \setminus S$. Kako je S zatvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq X \setminus S$. Nadalje, postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_j \in K(x, \frac{r}{4})$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{r}{4} < q_k < \frac{r}{2}$. Tada je $x \in K(\alpha_j, \frac{r}{4}) \subseteq K(\alpha_j, q_k)$. Neka je sada $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_j, q_k) = (\lambda_i, \rho_i)$. Imamo $x \in I_i$. Vrijedi
$$\hat{I}_i = \overline{K}(\alpha_j, q_k) \subseteq \overline{K}(\alpha_j, \frac{r}{2}) \subseteq K(x, r) \subseteq X \setminus S.$$
Dakle, $\hat{I}_i \cap S = \emptyset$, odnosno $i \in A$. Stoga je $X \setminus S \subseteq \bigcup_{i \in A} I_i$ i tvrdnja je dokazana. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i, j \in \mathbb{N}$ definiramo
$$I_i \diamond I_j \quad \Leftrightarrow \quad d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j$$
i kažemo da su I_i i I_j **formalno disjunktni**. Uočimo da $I_i \diamond I_j$ povlači $\hat{I}_i \cap I_j = \emptyset$.

Direktno iz definicije slijedi:

Propozicija 2.5.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Skup*
$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_j \diamond I_j\right\}$$
je rekurzivno prebrojiv.

Za $i, u \in \mathbb{N}$ pišemo $I_i \diamond J_u$ ako je $I_i \diamond I_j$, $\forall j \in [u]$. Uočimo da $I_i \diamond J_u$ povlači $\hat{I}_i \cap J_u = \emptyset$.

Propozicija 2.5.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Skup*

$$T = \{(i, u) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond J_u\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Iz prethodne propozicije znamo da je skup $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\}$ rekurzivno prebrojiv. Za $i, u \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$I_i \diamond J_u \quad \Leftrightarrow \quad I_i \diamond I_j,\ \forall j \in [u] \quad \Leftrightarrow \quad \{i\} \times [u] \subseteq S.$$

Prema napomeni 2.3.3 i propoziciji 1.4.11 funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, $(i, u) \mapsto \{i\} \times [u]$ je r.r.o, pa je zbog $(i, u) \in T \Leftrightarrow \{i\} \times [u] \subseteq S$ skup T rekurzivno prebrojiv. □

Za $u, v \in \mathbb{N}$ pišemo $J_u \diamond J_v$ ako za svaki $i \in [u]$ i za svaki $j \in [v]$ vrijedi $I_i \diamond I_j$. Koristeći propoziciju 2.5.3, lako vidimo da vrijedi sljedeće:

Propozicija 2.5.4. *Skup $\Gamma = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \diamond J_b\}$ je rekurzivno prebrojiv.*

Lema 2.5.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $i \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in X$, $x \notin \hat{I}_i$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $i \in I_j$, $I_i \diamond I_j$ i $\rho_j < \varepsilon$.*

Dokaz. Iz $x \notin \hat{I}_i$ slijedi $d(x, \lambda_i) > \rho_i$, pa postoji $s \in \mathbb{Q}$, $0 < s < \varepsilon$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) > \rho_i + 2s. \tag{2.4}$$

Znamo da postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in K(\alpha_u, s)$. Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_u, s) = (\lambda_j, \rho_j)$. Tada je $x \in I_j$.
Pretpostavimo da je $d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \rho_i + \rho_j$. U tom slučaju imamo

$$d(x, \lambda_i) \leq d(x, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_i) \leq \rho_j + \rho_i + \rho_j = \rho_i + 2s,$$

što je u kontradikciji s (2.4). Dakle, $d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j$, pa je $I_i \diamond I_j$. □

Propozicija 2.5.6. *Neka je S poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Tada je S koizračunljivo prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$\hat{I}_i \cap S = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (\exists j \in \mathbb{N})\ S \subseteq J_j \text{ i } I_i \diamond J_j. \tag{2.5}$$

Pretpostavimo da je $\hat{I}_i \cap S = \emptyset$. Prema prethodnoj lemi, za svaki $x \in S$ postoji $j_x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{j_x}$ i $I_i \diamond I_{j_x}$. Kako je $\{I_{j_x} \mid x \in S\}$ otvoreni pokrivač za S, a S je kompaktan, postoje $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$ takvi da je

$$S \subseteq I_{j_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{j_{x_n}}.$$

Neka je $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je $[\ell] = \{j_{x_0}, j_{x_1}, \ldots, j_{x_n}\}$. Tada je $S \subseteq J_\ell$. Također, za svaki $u \in [\ell]$ vrijedi $I_i \diamond I_u$, pa je $I_i \diamond J_\ell$.
Obrat slijedi direktno iz činjenice da $I_i \diamond J_j$ povlači $\hat{I}_i \cap J_j = \emptyset$.

Lako se vidi da je skup

$$\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq J_j \quad \text{i} \quad I_i \diamond J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Odavde pomoću teorema o projekciji zaključujemo da je skup

$$\left\{i \in \mathbb{N} \mid \hat{I}_i \cap S = \emptyset\right\}$$

također rekurzivno prebrojiv. Sada iz leme 2.5.1 slijedi da je S koizračunljivo prebrojiv. $\square$

Primjer 2.5.7. Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Tada je $[a,b]$ izračunljiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.

Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{N} < 1$. Definirajmo funkciju $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ formulom

$$r(i,k) = a + \frac{i(b-a)}{N \cdot 2^k}, \qquad \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

Tada je $[a,b] \approx_{2^{-k}} \left\{r(0,k), r(1,k), \ldots, r(N \cdot 2^k, k)\right\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Za sve $i,k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $r(i,k) = \alpha_j$, pa koristeći teorem 1.1.9 lako zaključujemo da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $r(i,k) = \alpha_{\varphi(i,k)}$, $\forall i,k \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$[a,b] \approx_{2^{-k}} \left\{\alpha_{\varphi(i,k)} \mid 0 \leq i \leq N \cdot 2^k\right\} = \alpha\left(\left\{\varphi(i,k) \mid 0 \leq i \leq N \cdot 2^k\right\}\right).$$

Funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(k) = \left\{\varphi(i,k) \mid 0 \leq i \leq N \cdot 2^k\right\}$ je r.r.o. i $\Phi(k) \neq \emptyset$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa prema lemi 2.3.4 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(k) = [f(k)]$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$[a,b] \approx_{2^{-k}} \alpha(\Phi(k)) = \alpha([f(k)]) = \Lambda_{f(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

pa je $[a,b]$ izračunljiv skup. ◀

Analogni rezultat vrijedi i u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru:

Primjer 2.5.8. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Tada je $[a,b]^n$ izračunljiv skup u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{N} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Definirajmo funkciju $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ formulom

$$r(i,k) = a + \frac{i(b-a)}{N \cdot 2^k}, \qquad \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$[a,b] \approx_{\frac{2^{-k}}{\sqrt{n}}} \left\{ r(i,k) \mid 0 \leq i \leq N \cdot 2^k \right\},$$

odakle slijedi

$$[a,b]^n \approx_{2^{-k}} \left\{ (r(i_1,k), \ldots, r(i_n,k)) \mid 0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq N \cdot 2^k \right\}.$$

Definirajmo funkciju $R : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}^n$, $R(i,k) = (r((i)_1,k), \ldots, r((i)_n,k))$, $\forall i,k \in \mathbb{N}$. Uočimo da za sve $i,k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $R(i,k) = \alpha_j$, pa iz teorema 1.1.9 možemo zaključiti da postoji rekurzivna funkcija $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $R(i,k) = \alpha_{\psi(i,k)}$, $\forall i,k \in \mathbb{N}$. Prema tome, imamo

$$[a,b]^n \approx_{2^{-k}} \left\{ \alpha_{\psi(i,k)} \mid 0 \leq i \leq (p_1 p_2 \cdots p_n)^{N \cdot 2^k} \right\}.$$

Funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Psi(k) = \left\{ \psi(i,k) \mid 0 \leq i \leq (p_1 p_2 \cdots p_n)^{N \cdot 2^k} \right\}$$

je r.r.o i $\Psi(k) \neq \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pa iz leme 2.3.4 znamo da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Psi(k) = [g(k)]$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle, imamo

$$[a,b]^n \approx_{2^{-k}} \alpha(\Psi(k)) = \alpha([g(k)]) = \Lambda_{g(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

odnosno, $[a,b]^n$ je izračunljiv skup u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. ◀

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Kažemo da je (X, d, α) **lokalno izračunljiv** ako za svaki kompaktan skup K u (X, d) postoji izračunljiv skup S u (X, d, α) takav da je $K \subseteq S$.

Uočimo da iz prethodnog primjera slijedi da je izračunljiv euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ lokalno izračunljiv.

Lema 2.5.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \neq X$ koizračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α). Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{f(i)} \quad i \quad J_{f(i)} \subseteq J_{f(i+1)}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Kako je S koizračunljivo prebrojiv, znamo da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \setminus S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{g(i)}$. Označimo sa Φ funkciju $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ koja svakom $i \in \mathbb{N}$ pridružuje skup $\{g(0), g(1), \ldots, g(i)\}$. Jasno, Φ je r.r.o. funkcija. Kako je za svaki $i \in \mathbb{N}$ skup $\Phi(i)$ neprazan, prema lemi 2.3.4 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvda da je

$$\Phi(i) = \{g(0), g(1), \ldots, g(i)\} = [f(i)], \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Za $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$J_{f(i)} = \bigcup_{v\in[f(i)]} I_v = I_{g(0)} \cup I_{g(1)} \cup \cdots \cup I_{g(i)},$$

pa vrijedi $J_{f(i)} \subseteq J_{f(i+1)}$ i $X \setminus S = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} I_{g(i)} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} J_{f(i)}$. □

Lema 2.5.10. *Postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_a \cup J_b = J_{f(a,b)}$.*

Dokaz. Imamo

$$J_a \cup J_b = \bigcup_{i\in[a]} I_i \cup \bigcup_{j\in[b]} I_j = \bigcup_{i\in[a]\cup[b]} I_i.$$

Funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\Phi(a, b) = [a] \cup [b]$ je r.r.o. i $\Phi(a, b) \neq \emptyset$ za sve $a, b \in \mathbb{N}$, pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(a, b) = [f(a, b)]$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$. Sada je

$$J_a \cup J_b = \bigcup_{i\in[a]\cup[b]} I_i = \bigcup_{i\in[f(a,b)]} I_i = J_{f(a,b)},$$

pa je f upravo tražena funkcija. □

Propozicija 2.5.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pretpostavimo da je (X, d, α) lokalno izračunljiv. Ako je $S \subseteq X$ kompaktan skup u (X, d) i koizračunljivo prebrojiv u (X, d, α), onda je S poluizračunljiv.*

Dokaz. Kako je S koizračunljivo prebrojiv, iz leme 2.5.10 znamo da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$X \setminus S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{f(i)} \quad \text{i} \quad J_{f(i)} \subseteq J_{f(i+1)},\ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Neka je $A \subseteq X$ izračunljiv skup takav da je $S \subseteq A$. Pretpostavimo da je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $S \subseteq J_j$. Kako je A izračunljiv, A je kompaktan skup u (X, d), pa je tada i $A \setminus J_j$ kompaktan. Kako je $A \setminus J_j \subseteq X \setminus S$, iz (2.6) vidimo da je

$$\left\{J_{f(i)} \mid i \in \mathbb{N}\right\}$$

otvoren pokrivač od $A \setminus J_j$. Prema tome, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $A \setminus J_j \subseteq J_{f(i)}$, odnosno $A \subseteq J_j \cup J_{f(i)}$.

Obratno, ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $A \subseteq J_j \cup J_{f(i)}$, onda je $S \subseteq J_j$ zbog $J_{f(i)} \subseteq X \setminus S$. Dakle, za $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $A \subseteq J_j \cup J_{f(i)}$.

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_a \cup J_b = J_{g(a,b)}$, kao u prethodnoj lemi. Sada za $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$S \subseteq J_j \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in \mathbb{N})\ A \subseteq J_{g(j,f(i))}.$$

Neka je

$$\Omega = \left\{(j,i) \in \mathbb{N}^2 \mid A \subseteq J_{g(j,f(i))}\right\}.$$

Kako je skup $\Omega' = \{n \in \mathbb{N} \mid A \subseteq J_n\}$ rekurzivno prebrojiv (jer izračunljivost od A povlači poluizračunljivost od A), iz

$$\Omega = \left\{(j,i) \in \mathbb{N}^2 \mid g(j,f(i)) \in \Omega'\right\}$$

vidimo da je i Ω rekurzivno prebrojiv. Stoga je

$$S \subseteq J_j \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in \mathbb{N})\ (j,i) \in \Omega,$$

pa iz teorema o projekciji zaključujemo da je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. Dakle, S je poluizračunljiv. $\square$

Poglavlje 3

Izračunljivost poluizračunljivih skupova

3.1 Preliminarni rezultati

Primjer 3.1.1. Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i a, b izračunljive točke u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ takve da je $a < b$. Tada je segment $[a, b]$ izračunljiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Dokažimo to.

Neka su $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekurzivni nizovi u $\mathbb{R}$ takvi da je

$$|a - a_k| < 2^{-(k+3)} \quad , |b - b_k| < 2^{-(k+3)} \quad \text{i} \quad a_k \le b_k$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $[a, b] \approx_{2^{-(k+3)}} [a_k, b_k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{N} < \frac{1}{2}$. Tada za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\frac{b_k - a_k}{N} \le \left|\frac{b_k - b}{N}\right| + \left|\frac{b - a}{N}\right| + \left|\frac{a - a_k}{N}\right| < \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} < 1.$$

Definiramo funkciju $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ formulom

$$r(i, k) = a_k + \frac{i(b_k - a_k)}{N \cdot 2^k}, \qquad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je tada $[a_k, b_k] \approx_{2^{-k}} \left\{r(0, k), r(1, k), \dots, r(N \cdot 2^k, k)\right\}$. Sada analogno kao u primjeru 2.5.7 možemo zaključiti da je $[a, b]$ izračunljiv. ◀

U prethodnom primjeru vidjeli smo da je segment u $\mathbb{R}$ s izračunljivim krajnjim točkama izračunljiv skup u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Prirodno je pitanje vrijedi li i obrat, tj. vrijedi li

$$[a, b] \text{ izračunljiv skup} \quad \Rightarrow \quad a \text{ i } b \text{ izračunljive točke.}$$

Sljedeća propozicija pokazat će da je odgovor na to pitanje potvrdan.

Propozicija 3.1.2. *Neka je* $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ *izračunljiv euklidski prostor. Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *takve da je* $a < b$ *i segment* $[a, b]$ *je izračunljiv skup u* $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. *Tada su* a *i* b *izračunljive točke.*

Dokaz. Kako je $[a, b]$ izračunljiv skup, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$[a, b] \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\left|a - \min \Lambda_{f(k)}\right| < 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Naime, za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1° Ako je $a \leq \min \Lambda_{f(k)}$, znamo da postoji $i \in [f(k)]$ takav da je $|a - \alpha_i| < 2^{-k}$, pa iz $a \leq \min \Lambda_{f(k)} \leq \alpha_i$ slijedi $|a - \min \Lambda_{f(k)}| < 2^{-k}$.

2° Ako je $a \geq \min \Lambda_{f(k)}$, znamo da postoji $x \in [a, b]$ takav da je $|\min \Lambda_{f(k)} - x| < 2^{-k}$, pa iz $\min \Lambda_{f(k)} \leq a \leq x$ slijedi $|a - \min \Lambda_{f(k)}| < 2^{-k}$.

Promotrimo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(k) = \min \Lambda_{f(k)}$. Ona zadovoljava

$$|a - g(k)| < 2^{-k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Vrijedi

$$g(k) = \min \{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\} = \min \left\{\alpha_{(f(k))_i} \mid 0 \leq i \leq \overline{f(k)}\right\}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Znamo da je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, pa je i funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $\varphi(i, k) = \alpha_{(f(k))_i}$, $\forall (i, k) \in \mathbb{N}^2$ rekurzivna. Sada iz

$$g(k) = \min_{0 \leq i \leq \overline{f(k)}} \varphi(i, k), \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

prema propoziciji 1.2.17 zaključujemo da je g rekurzivna funkcija, pa iz (3.1) slijedi da je a izračunljiva točka.

Na sličan način pokazuje se i izračunljivost od b. □

Primjer 3.1.3. Neka su $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ kao u primjeru 1.3.4. Uočimo da je funkcija F strogo rastuća, tj. $0 < F(k) < F(k+1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ i $F(k) \to \gamma < 2$. Tvrdimo da je skup $[\gamma, 2]$ koizračunljivo prebrojiv u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.

Imamo

$$\mathbb{R} \setminus [\gamma, 2] = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle -\gamma, \gamma\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle.$$

Uočimo da je
$$\langle -\infty, 0\rangle = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K(-(i+1), i+1).$$
Budući da za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(-(i+1), i+1) = (\lambda_j, \rho_j)$, primjenom teorema 1.1.9 možemo zaključiti da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(-(i+1), i+1) = (\lambda_{f(i)}, \rho_{f(i)})$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Tada je skup $A = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ rekurzivno prebrojiv i vrijedi $\langle -\infty, 0\rangle = \bigcup_{i\in A} I_i$. Analogno, možemo naći rekurzivno prebrojiv skup $B \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $\langle 2, +\infty\rangle = \bigcup_{i\in B} I_i$.

Nadalje, vrijedi
$$\langle -\gamma, \gamma\rangle = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K(0, F(i)).$$
Kako za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(0, F(i)) = (\lambda_j, \rho_j)$, ponovno primjenom teorema 1.1.9 dobivamo rekurzivnu funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi $(0, F(i)) = (\lambda_{g(i)}, \rho_{g(i)})$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Tada je skup $C = \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ rekurzivno prebrojiv i vrijedi
$$\langle -\gamma, \gamma\rangle = \bigcup_{i\in C} I_i.$$
Konačno, imamo
$$\begin{aligned}\mathbb{R} \setminus [\gamma, 2] &= \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle -x, x\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle\\ &= \bigcup_{i\in A} I_i \cup \bigcup_{i\in C} I_i \cup \bigcup_{i\in B} I_i\\ &= \bigcup_{i\in A\cup B\cup C} I_i.\end{aligned}$$
Kako je $A \cup B \cup C$ rekurzivno prebrojiv skup, slijedi da je $[x, 2]$ koizračunljivo prebrojiv.

Uočimo još sljedeće: budući da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ lokalno izračunljiv i da je $[\gamma, 2]$ kompaktan, propozicija 2.5.11 povlači da je $[\gamma, 2]$ poluizračunljiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. No, taj skup nije izračunljiv jer bi u suprotnom iz prethodne propozicije slijedilo da je γ izračunljiva točka. ◀

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$. Prema teoremu 2.4.1, vrijedi implikacija
$$S \text{ izračunljiv} \quad \Rightarrow \quad S \text{ poluizračunljiv}.$$

Primjer 3.1.3 pokazuje da obrat ne vrijedi nužno, tj. da postoji poluizračunljiv skup koji nije izračunljiv.

Rezultati koje navodimo u nastavku daju neke dovoljne uvjete uz koje obratna implikacija ipak vrijedi. Primjerice, ona vrijedi za konačne skupove.

Lema 3.1.4. *Postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $I_i = J_{f(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Općenito, vrijedi

$$J_j = I_{(j)_0} \cup I_{(j)_1} \cup \cdots \cup I_{(j)_{\overline{j}}}, \qquad \forall j \in N.$$

Kako za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(j)_0 = i$ i $\overline{j} = 0$, iz teorema 1.1.9 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$i = (f(i))_0 \quad \text{i} \quad \overline{f(i)} = 0, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je $J_{f(i)} = I_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, odnosno f je upravo tražena funkcija. □

Propozicija 3.1.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ jednočlan skup. Pretpostavimo da je S poluizračunljiv u (X, d, α). Tada je S izračunljiv u (X, d, α).*

Dokaz. Kako je po pretpostavci S poluizračunljiv, znamo da je skup

$$\Omega = \{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$$

rekurzivno prebrojiv. Prema teoremu 2.4.1, dovoljno je pokazati da je S izračunljivo prebrojiv u (X, d, α).

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Kako je S jednočlan, vrijedi

$$I_i \cap S \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq I_i.$$

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija iz prethodne leme. Imamo

$$I_i \cap S \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq J_{f(i)} \quad \Leftrightarrow \quad f(i) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad i \in f^{-1}(\Omega).$$

Dakle, skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\} = f^{-1}(\Omega)$ je rekurzivno prebrojiv, pa je S izračunljivo prebrojiv. □

Lema 3.1.6. *Neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) i neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada je skup $S \setminus J_m$ poluizračunljiv u (X, d, α).*

Dokaz. Kako je S po pretpostavci poluizračunljiv, skup $\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_i\}$ je rekurzivno prebrojiv. Prema lemi 2.5.10, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$J_a \cup J_b = J_{f(a,b)}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Za $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$S \setminus J_m \subseteq J_j \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq J_m \cup J_j \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq J_{f(m,j)}.$$

Odavde slijedi da je $\{j \in \mathbb{N} \mid S \setminus J_m \subseteq J_j\} = \{j \in \mathbb{N} \mid f(m,j) \in \Gamma\}$, pa je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \setminus J_m \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. Dakle, $S \setminus J_m$ je poluizračunljiv. □

Propozicija 3.1.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ konačan skup. Ako je S poluizračunljiv u (X, d, α), onda je S izračunljiv u (X, d, α).*

Dokaz. Neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Označimo

$$D = \min \{d(x_1, x_i) \mid i \in \{2, \ldots, n\}\}$$

i neka je $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon < \frac{D}{2}$. Sada za svaki $i \in \{2, \ldots, n\}$ odaberimo $\alpha_i \in K(x_i, \varepsilon)$. Imamo

$$d(x_1, \alpha_i) \geq d(x_1, x_i) - d(x_i, \alpha_i) > D - \varepsilon > \frac{D}{2} > \varepsilon,$$

pa $x_1 \notin K(\alpha_i, \varepsilon)$, za sve $2 \leq i \leq n$.
Za $i \in \{2, \ldots, n\}$ postoji $j_i \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_i, \varepsilon) = (\lambda_{j_i}, \rho_{j_i})$. Jasno, tada je $x_i \in I_{j_i}$ i $x_1 \notin I_{j_i}$.
Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $[m] = \{j_2, j_3, \ldots, j_n\}$. Tada je $J_m = I_{j_2} \cup \cdots \cup I_{j_n}$. Kako je

$$\{x_1\} = S \setminus J_m,$$

skup $\{x_1\}$ je po lemi 3.1.6 poluizračunljiv, pa iz propozicije 3.1.5 slijedi da je izračunljiv.

Analogno dobivamo da su svi skupovi $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\ldots$, $\{x_n\}$ izračunljivi. Sada primjenom propozicije 2.3.9 zaključujemo da je S izračunljiv. □

3.2 Lančasti kontinuumi

Za metrički prostor (X, d) koji je povezan i kompaktan kažemo da je **kontinuum**.

Neka je X skup te $C_0, C_1, \ldots, C_n$ konačan niz podskupova od X. Za $C_0, C_1, \ldots, C_n$ kažemo da je **lanac** u X ako za sve $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad |i - j| \leq 1.$$

Skupove $C_0, \dots, C_n$ nazivamo **karikama** lanca.

Ako je $C_0, C_1, \dots, C_n$ konačan niz skupova i S skup takav da je

$$S \subseteq C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n,$$

kažemo da niz $C_0, C_1, \dots, C_n$ **pokriva** S.

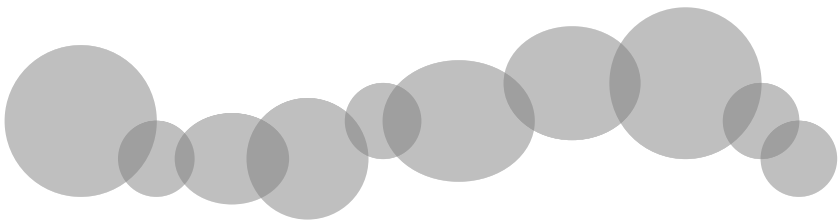
Neka je (X, d) metrički prostor te $C_0, C_1, \dots, C_n$ lanac u X. Kažemo da je $C_0, C_1, \dots, C_n$

(i) **otvoren lanac** u (X, d), ako su $C_0, C_1, \dots, C_n$ otvoreni skupovi;

(ii) **kompaktan lanac** u (X, d), ako su $C_0, C_1, \dots, C_n$ kompaktni skupovi;

(iii) ε**-lanac** u (X, d), ako je $\operatorname{diam} C_i < \varepsilon$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Neka je (X, d) kontinuum. Kažemo da je (X, d) **lančast kontinuum** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε-lanac u (X, d) koji pokriva X.



Slika 3.1: primjer lanca

Za lančaste kontinuume vrijedi sljedeća karakterizacija:

Teorem 3.2.1. *Neka je (X, d) kontinuum. Tada je (X, d) lančast kontinuum ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan ε-lanac koji pokriva X.*

Najprije ćemo dokazati nekoliko tehničkih lema:

Lema 3.2.2. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje kompaktni skupovi $K_0, K_1, \dots, K_n$ u (X, d) takvi da je $\operatorname{diam} K_i < \varepsilon$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ i $X = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$.*

Dokaz. Budući da je (X, d) kompaktan, on je i potpuno omeđen, pa postoje točke $x_0, x_1, \dots x_n \in X$ takve da je

$$X = K(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup K(x_n, \frac{\varepsilon}{3}).$$

No, tada je i

$$X = \overline{K}(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup \overline{K}(x_n, \frac{\varepsilon}{3})$$

i vrijedi $\operatorname{diam} \overline{K}(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dakle, vrijedi tvrdnja. $\square$

Neka je (X, d) metrički prostor. Za $A \subseteq X$ i $r > 0$ definiramo

$$N(A, r) = \bigcup_{x \in A} K(x, r).$$

Jasno, $N(A, r)$ je otvoren skup.

Ako je A neprazan i omeđen, onda je i $N(A, r)$ neprazan i omeđen i vrijedi $\operatorname{diam} N(A, r) < \operatorname{diam} A + 2r$. Nadalje, za $r_1 \leq r$ vrijedi $N(A, r_1) \subseteq N(A, r)$.

Lema 3.2.3. *Neka su A i B neprazni kompaktni skupovi u metričkom prostoru (X, d). Pretpostavimo da je $A \cap B = \emptyset$. Tada postoji $r_0 > 0$ takav da je*

$$N(A, r_0) \cap N(B, r_0) = \emptyset.$$

Dokaz. Imamo

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Kako su A i B kompaktni i disjunktni, vrijedi $d(A, B) > 0$. Stavimo $r_0 = \dfrac{d(A, B)}{2}$.

Pretpostavimo da postoji $y \in N(A, r_0) \cap N(B, r_0)$. Tada postoje $x_1 \in A$ i $x_2 \in B$ takvi da je $d(x_1, y) < r_0$ i $d(x_2, y) < r_0$. No, odavde slijedi

$$d(x_1, x_2) < 2r_0 = d(A, B),$$

što je kontradikcija s definicijom udaljenosti skupova A i B. $\square$

Lema 3.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor i $\mathcal{K}$ konačna familija nepraznih kompaktnih skupova u (X, d). Tada postoji $r_0 > 0$ takav da za svaki $r \leq r_0$ vrijedi:*

$$\textit{ako su } K, L \in \mathcal{K} \textit{ takvi da } K \cap L = \emptyset, \textit{ onda je } N(K, r) \cap N(L, r) = \emptyset.$$

Dokaz. Označimo

$$\mathcal{F} = \{(A, B) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid A \cap B = \emptyset\}.$$

Ako je $\mathcal{F} = \emptyset$, tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Jasno, $\mathcal{F}$ je konačan skup. Za svaki par $(K, L) \in \mathcal{F}$ prema prethodnoj lemi postoji $r_{(K,L)} > 0$ takav da je $N(K, r_{(K,L)}) \cap N(L, r_{(K,L)}) = \emptyset$.

Definirajmo $r_0 = \min \left\{ r_{(K,L)} \mid (K, L) \in \mathcal{F} \right\}$. Ako je $r \leq r_0$, onda je $r \leq r_{(K,L)}$ za sve $(K, L) \in \mathcal{F}$, pa je

$$N(K, r) \cap N(L, r) = \emptyset.$$

$\square$

Dokaz teorema 3.2.1. Neka je (X,d) kontinuum. Dokazujemo ekvivalenciju

$$(X,d) \text{ lančast} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \text{ postoji kompaktan } \varepsilon\text{-lanac koji pokriva } X.$$

Pretpostavimo da je (X,d) lančast kontinuum. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji otvoreni ε-lanac $C_0, \dots C_n$ u (X,d) takav da je $X = C_0 \cup \dots \cup C_n$.

$\{C_0, \dots C_n\}$ je otvoreni pokrivač od X. Označimo s $\lambda > 0$ njegov Lebesgueov broj. Iz leme 3.2.2 slijedi da postoje kompaktni skupovi $K_0, \dots, K_m$ takvi da je $X = K_0 \cup \dots \cup K_m$ i $\operatorname{diam} K_i < \lambda$, $\forall i \in \{0, \dots, m\}$.

Za $i \in \{0, \dots, n\}$ fiksirajmo $x_i \in C_i$ i definiramo

$$C_i' = \left(\bigcup_{\substack{j \\ K_j \subseteq C_i}} K_j \right) \cup \{x_i\}.$$

Skupovi $C_0', \dots, C_n'$ su kompaktni, vrijedi $C_i' \subseteq C_i$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ i $X = C_0' \cup \dots \cup C_n'$. Da bismo pokazali da oni čine kompaktan ε-lanac, još treba vidjeti da je

$$C_i' \cap C_j' \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad |i - j| \leq 1.$$

Ako je $C_i' \cap C_j' \neq \emptyset$, onda je i $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, pa je $|i-j| \leq 1$. Obratno, ako je $i = j$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $j = i + 1$ i $C_i' \cap C_{i+1}' = \emptyset$. Znamo da za $p, q \in \{0, \dots, n\}$ $|p - q| \geq 2$ povlači $C_p' \cap C_q' = \emptyset$, pa su u tom slučaju skupovi

$$C_0' \cup \dots \cup C_i' \quad \text{i} \quad C_{i+1}' \cup \dots \cup C_n'$$

disjunktni, neprazni, zatvoreni i u uniji daju X. No, to je u kontradikciji s povezanosti od X.

Dokažimo sada obrat. Neka je $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci, postoji kompaktan $\frac{\varepsilon}{2}$-lanac $K_0, \dots, K_n$ koji pokriva X. Iz leme 3.2.4 slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $N(K_i, r) \cap N(K_j, r) = \emptyset$ za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je $|i - j| \geq 2$. Možemo pretpostaviti da je $r < \frac{\varepsilon}{4}$.
Dakle, za $|i-j| \geq 2$ je $N(K_i, r) \cap N(K_j, r) = \emptyset$, a za $|i - j| \leq 1$ je $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, pa je i $N(K_i, r) \cap N(K_j, r) \neq \emptyset$. Također, vrijedi $\operatorname{diam} N(K_i, r) < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$, pa je $N(K_0, r), \dots, N(K_n, r)$ otvoreni ε-lanac koji pokriva X. $\square$

Neka je $C_0, C_1, \dots, C_n$ lanac u skupu X i neka su $a, b \in X$ takvi da je $a \in C_0$ i $b \in C_n$. Tada kažemo da je $C_0, C_1, \dots, C_n$ **lanac u X od a do b**.
Ako je (X,d) metrički prostor, govorimo o **otvorenim**, **kompaktnim** i **ε-lancima u X od a do b**.

Neka je (X, d) kontinuum te neka su $a, b \in X$. Kažemo da je (X, d) **kontinuum lančast od** a **do** b ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε-lanac u (X, d) od a do b koji pokriva X.

Iz dokaza teorema 3.2.1 lako se vidi da vrijedi sljedeće:

Teorem 3.2.5. *Neka je (X, d) kontinuum i $a, b \in X$. Tada je (X, d) lančast od a do b ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan ε-lanac od a do b koji prekriva X.*

Primjer 3.2.6. Segment $[0, 1]$ je kontinuum lančast od 0 do 1. Zaista, za $\varepsilon > 0$ možemo odabrati $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, i tada je

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \ \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{n-1}{1}, n\right]$$

kompaktan ε-lanac od 0 do 1 u $[0, 1]$. Tvrdnja sada slijedi prema teoremu 3.2.5. ◀

Propozicija 3.2.7. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam.*

(i) Ako je (X, d) lančast kontinuum, onda je i (Y, d') lančast kontinuum.

(ii) Ako je (X, d) kontinuum lančast od a do b, onda je (Y, d') kontinuum lančast od $f(a)$ do $f(b)$.

Dokaz.

(i) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Kako je X kompaktan i $f : X \to Y$ neprekidna, znamo da je funkcija f uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takav da za $x, y \in X$ $d(x, y) < \delta$ povlači $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Neka je $C_0, C_1, \ldots, C_n$ otvoreni δ-lanac u (X, d) koji pokriva X. Jasno, tada je

$$f(C_0) \cup f(C_1) \cup \cdots \cup f(C_n) = f(C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n) = f(X) = Y,$$

skup $f(C_i)$ je otvoren i $\operatorname{diam} f(C_i) < \varepsilon$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Nadalje, kako je f bijekcija, vrijedi $f(C_i) \cap f(C_j) = f(C_i \cap C_j)$, pa imamo

$$f(C_i) \cap f(C_j) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad f(C_i \cap C_j) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad |i - j| \leq 1.$$

Prema tome, $f(C_0), f(C_1), \ldots, f(C_n)$ je otvoreni ε-lanac u (X, d) koji pokriva X.

(ii) Dokaz provodimo analogno. Uočimo da $a \in C_0$ i $b \in C_n$ povlači $f(a) \in f(C_0)$ i $f(b) \in f(C_n)$.

$\square$

Odavde lako slijedi:

Korolar 3.2.8. *Neka je L luk s krajnjim točkama a i b. Tada je L kontinuum lančast od a do b.*

Lema 3.2.9. *Postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\alpha_{g(j)} \subseteq J_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Imamo $J_j = I_{(j)_0} \cup I_{(j)_1} \cup \cdots \cup I_{(j)_{\overline{j}}}$. Kako je

$$I_{(j)_0} = K\left(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}\right) = K\left(\alpha_{\tau_1((j)_0)}, q_{\tau_2((j)_0)}\right),$$

slijedi $\alpha_{\tau_1((j)_0)} \in J_j$. Kako je funkcija $j \mapsto \tau_1((j)_0)$ rekurzivna, to je upravo tražena funkcija. $\square$

Za $\ell \in \mathbb{N}$ označimo $\mathcal{H}_\ell = \left(J_{(\ell)_0}, \ \ldots, \ J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}\right)$ i $\bigcup \mathcal{H}_\ell = \bigcup_{j \in [\ell]} J_j$.

Propozicija 3.2.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S kompaktan neprazan skup u (X, d). Pretpostavimo da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

(1) $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_{f(k)}$;

(2) $J_j \cap S \neq \emptyset$, $\forall j \in [f(k)]$;

(3) $\operatorname{diam} J_j < 2^{-k}$, $\forall j \in [f(k)]$.

Tada je S izračunljiv skup u (X, d, α).

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Imamo $S \subseteq \bigcup_{j \in [f(k)]} J_j$. Iz pretpostavki (2) i (3) slijedi da je

$$S \approx_{2^{-k}} \{x_j \mid j \in [f(k)]\}$$

za bilo koji izbor $x_j \in J_j$, $j \in [f(k)]$. Iz leme 3.2.9 znamo da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\alpha_{g(i)} \in J_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$S \approx_{2^{-k}} \left\{\alpha_{g(j)} \mid j \in [f(k)]\right\} = \{\alpha_i \mid i \in g([f(k)])\}.$$

Funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ koja svakom $k \in \mathbb{N}$ pridružuje skup $g([f(k)])$ je r.r.o. i $\Phi(k) \neq \emptyset$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa znamo da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(k) = [\varphi(k)]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema tome, za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$S \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in \Phi(k)\} = \{\alpha_i \mid i \in [\varphi(k)]\} = \Lambda_{\varphi(k)},$$

odnosno, S je izračunljiv skup. □

Lema 3.2.11. *Postoji rekurzivna funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\bigcup \mathcal{H}_\ell = J_{\zeta(\ell)}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Imamo

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell = \bigcup_{j \in [\ell]} J_j = \bigcup_{j \in [\ell]} \left(\bigcup_{i \in [j]} I_i \right) = \bigcup_{i \in \bigcup_{j \in [\ell]} [j]} I_i.$$

Prema teoremu 1.4.6, funkcija $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Lambda(\ell) = \bigcup_{j \in [\ell]} [j]$$

je r.r.o. Kako je za svaki $\ell \in \mathbb{N}$ skup $\Lambda(\ell)$ neprazan, postoji rekurzivna funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Lambda(\ell) = [\zeta(\ell)]$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Sada iz

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell = \bigcup_{i \in \Lambda(\ell)} I_i = \bigcup_{i \in [\zeta(\ell)]} I_i = J_{\zeta(\ell)}$$

vidimo da je ζ tražena funkcija. □

Propozicija 3.2.12. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup. Tada je skup $\Omega = \{\ell \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Kako je S poluizračunljiv, znamo da je skup $\Gamma = \{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. Neka je ζ funkcija iz prethodne leme. Za $\ell \in \mathbb{N}$ imamo

$$\ell \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq \mathcal{H}_\ell \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq J_{\zeta(\ell)} \quad \Leftrightarrow \quad \zeta(\ell) \in \Gamma.$$

Dakle, $\Omega = \zeta^{-1}(\Gamma)$ je rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.2.13. *Neka su $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ brojevi takvi da je*

$$|x_i - y_i| < \varepsilon, \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

za neki $\varepsilon > 0$. Tada je

$$|\max\{x_0, \ldots, x_n\} - \max\{y_0, \ldots, y_n\}| < \varepsilon$$

i

$$|\min\{x_0, \ldots, x_n\} - \min\{y_0, \ldots, y_n\}| < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka je $\max\{x_0, \ldots, x_n\} = x_i$ i $\max\{y_0, \ldots, y_n\} = y_j$. Znamo da je tada $x_j \le x_i$ i $y_i \le y_j$. Ako je $x_i \le y_j$, onda je $x_j \le x_i \le y_j$ pa je $|x_i - y_j| < \varepsilon$. Ako je $y_j < x_i$, onda je $y_i \le y_j < x_i$ pa je ponovno $|x_i - y_j| < \varepsilon$.

Tvrdnja za minimum se dokazuje analogno. □

Propozicija 3.2.14. *Neka su* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *i* $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije* $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \max\{f(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

i

$$h(x) = \min\{f(i,k) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

rekurzivne.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Fiksirajmo $x \in \mathbb{N}^k$ i $j \in \mathbb{N}$. Znamo da je tada

$$|f(i,x) - F(i,x,j)| < 2^{-j}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Stoga je prema lemi 3.2.13

$$\Big| \max\{f(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\} - \max\{F(i,x,j) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\} \Big| < 2^{-j}.$$

Dakle, imamo $|g(x) - G(x,j)| < 2^{-j}$, pri čemu je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$,

$$G(x,j) = \max\{F(i,x,j) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\}$$

rekurzivna funkcija. Dakle, g je rekurzivna.

Rekurzivnost od h pokazuje se analogno. □

Neka je (X,d) metrički prostor. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ i $r_0, r_1, \ldots, r_n > 0$. Definiramo

$$D = \left(\max_{0 \le i,j \le n} d(x_i, x_j) \right) + 2 \max_{0 \le i \le n} r_i.$$

Za D kažemo da je **formalni dijametar** pridružen nizu $(x_0, r_0), \ldots, (x_n, r_n)$.

Uočimo da je $\operatorname{diam}(K(x_0, r_0) \cup \cdots \cup K(x_n, r_n)) \le D$. Zaista, ako su $a \in K(x_i, r_i)$ i $b \in K(x_j, r_j)$ za neke (ne nužno različite) $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, imamo

$$d(a,b) \le d(a,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,b) < d(x_i,x_j) + r_i + r_j \le D.$$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$J_j = I_{(j)_0} \cup \cdots \cup I_{(j)_{\bar{j}}} = K(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}) \cup \cdots \cup K(\lambda_{(j)_{\bar{j}}}, \rho_{(j)_{\bar{j}}}).$$

Definiramo realan broj $\operatorname{fdiam}(j)$ kao formalni dijametar pridružen nizu

$$\left((\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}), \dots, (\lambda_{(j)_{\bar{j}}}, \rho_{(j)_{\bar{j}}})\right).$$

Uočimo: $\operatorname{diam} J_j \leq \operatorname{fdiam}(j)$.

Propozicija 3.2.15. *Funkcija* $\operatorname{fdiam} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *je rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\operatorname{fdiam}(j) = \max_{0 \leq u \leq \bar{j}} \left(\max_{0 \leq v \leq \bar{j}} d(\lambda_{(j)_u}, \lambda_{(j)_v}) \right) + 2 \max_{0 \leq u \leq \bar{j}} \rho_{(j)_u}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(j, u, v) \mapsto d(\lambda_{(j)_u}, \lambda_{(j)_v})$ je rekurzivna, pa primjenom propozicije 3.2.14 zaključujemo da su i funkcije

$$(j, u) \mapsto \max_{0 \leq v \leq \bar{j}} d(\lambda_{(j)_u}, \lambda_{(j)_v}) \quad \text{ i } \quad j \mapsto \max_{0 \leq u \leq \bar{j}} \left(\max_{0 \leq v \leq \bar{j}} d(\lambda_{(j)_u}, \lambda_{(j)_v}) \right)$$

rekurzivne. Na sličan način zaključujemo i da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $j \mapsto \max_{0 \leq u \leq \bar{j}} \rho_{(j)_u}$ rekurzivna. Prema tome, funkcija fdiam je rekurzivna. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $A \subseteq X$, $j \in \mathbb{N}$ i $r > 0$. Pišemo $A \subseteq_r J_j$ ako vrijedi:

(i) $A \subseteq J_j$,

(ii) $I_i \cap A \neq \emptyset$, $\forall i \in [j]$,

(iii) $\rho_i < r$, $\forall i \in [j]$.

Uočimo da za $r' < r$ vrijedi $A \subseteq_{r'} J_j \;\Rightarrow\; A \subseteq_r J_j$.

Propozicija 3.2.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $A \neq \emptyset$ kompaktan skup u (X, d) i $r > 0$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $A \subseteq_r J_j$.*

Dokaz. Odaberimo $q \in \mathbb{Q}$, $q < r$. Kako je $\{(\alpha_i, q) \mid i \in \mathbb{N}\}$ otvoreni pokrivač od A, postoje $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$A \subseteq K(\alpha_{i_0}, q) \cup \dots \cup K(\alpha_{i_n}, q) \quad \text{i} \quad A \cap K(\alpha_{i_j}, q) \neq \emptyset,\ \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Za svaki $j \in \{0, \dots, n\}$ postoji $t_j \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_{i_j}, q) = (\lambda_{t_j}, \rho_{t_j})$. Tada je $K(\alpha_{i_j}, q) = I_{t_j}$.
Kako je $A \neq \emptyset$, $\{t_0, \dots, t_n\}$ je neprazan konačan podskup od $\mathbb{N}$, pa postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\{t_0, \dots, t_n\} = [j]$. Po konstrukciji je $A \subseteq_r J_j$. □

Propozicija 3.2.17. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B disjunktni neprazni kompaktni skupovi u (X, d). Tada postoji $r > 0$ takav da za $u, v \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(A \subseteq_r J_u \quad i \quad B \subseteq_r J_v) \quad \Rightarrow \quad J_u \diamond J_v.$$

Dokaz. Budući da su A i B disjunktni i kompaktni, znamo da je $d(A, B) > 0$. Označimo

$$r = \frac{d(A, B)}{4} > 0.$$

Pretpostavimo da je $A \subseteq_r J_u$ i $B \subseteq_r J_v$ za neke $u, v \in \mathbb{N}$. Neka su $i \in [u]$ i $j \in [v]$. Tvrdimo da je $I_i \diamond I_j$. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \rho_i + \rho_j.$$

Znamo da je $I_i \cap A \neq \emptyset$, pa postoji $a \in I_i \cap A$. Također, zbog $I_j \cap B \neq \emptyset$ postoji $b \in I_j \cap B$. Za takve a i b vrijedi

$$d(a, b) \leq d(a, \lambda_i) + d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, b) < \rho_i + \rho_i + \rho_j + \rho_j < 4r = d(A, B),$$

što je u kontradikciji s definicijom broja $d(A, B)$. Dakle, za sve $i \in [u]$ i $j \in [v]$ vrijedi $I_i \diamond I_j$, pa je $J_u \diamond J_v$. □

Korolar 3.2.18. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $\mathcal{F}$ konačna familija nepraznih kompaktnih skupova u (X, d). Tada postoji $r > 0$ takav da za sve međusobno disjunktne $K, L \in \mathcal{F}$ i $u, v \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(K \subseteq_r J_u \quad i \quad L \subseteq_r J_v) \quad \Rightarrow \quad J_u \diamond J_v.$$

Dokaz. Označimo

$$\mathcal{A} = \{(K, L) \mid K, L \in \mathcal{F},\ K \cap L = \emptyset\}.$$

Jasno, familija $\mathcal{A}$ je konačna. Ako je $\mathcal{A} = \emptyset$ tvrdnja trivijalno vrijedi, pa pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ neprazna. Prema prethodnoj propoziciji, za svaki $(K, L) \in \mathcal{A}$ postoji $r_{(K,L)} > 0$ takav da $K \subseteq_{r_{(K,L)}} J_u$ i $L \subseteq_{r_{(K,L)}} J_v$ povlači $J_u \diamond J_v$.
Neka je $r = \min\left\{r_{(K,L)} \mid (K, L) \in \mathcal{A}\right\}$. Sada za sve disjunktne $K, L \in \mathcal{F}$ i $u, v \in \mathbb{N}$ takve da je $K \subseteq_r J_u$ i $L \subseteq_r J_v$ vrijedi i $K \subseteq_{r_{(K,L)}} J_u$ i $L \subseteq_{r_{(K,L)}} J_v$, pa je $J_u \diamond J_v$. □

Propozicija 3.2.19. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $A \subseteq X$ i $r > 0$. Ako je $A \subseteq_r J_j$, onda je* $\operatorname{fdiam}(j) < \operatorname{diam} A + 4r$.

Dokaz. Vrijedi

$$\operatorname{fdiam}(j) = d(\lambda_u, \lambda_v) + 2\rho_w$$

za neke $u, v, w \in [j]$. Kako I_u i I_v sijeku A, znamo da postoje $x \in A \cap I_u$ i $y \in A \cap I_v$. Sada je

$$d(\lambda_u, \lambda_v) \leq d(\lambda_u, x) + d(x, y) + d(y, \lambda_v) < \rho_u + \operatorname{diam} A + \rho_v < 2r + \operatorname{diam} A,$$

pa imamo $\operatorname{fdiam}(j) < 2r + \operatorname{diam} A + 2\rho_w < \operatorname{diam} A + 4r$. □

Neka je $\ell \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathcal{H}_\ell$ **formalni lanac** ako za sve $u, v \in \{0, 1, \ldots, \overline{\ell}\}$ takve da je $|u - v| > 1$ vrijedi $J_{(\ell)_u} \diamond J_{(\ell)_v}$.

Propozicija 3.2.20. *Skup $\Omega = \{\ell \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_\ell$ je formalni lanac$\}$ je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Iz propozicije 2.5.4 znamo da je skup

$$\Gamma = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \diamond J_b\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Vrijedi

$$\begin{aligned} \ell \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\forall u, v \in \{0, \ldots, \overline{\ell}\}\right) \ |u - v| > 1 \ \Rightarrow \ ((\ell)_u, (\ell)_v) \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{((\ell)_u, (\ell)_v) \mid u, v \in \{0, \ldots, \overline{\ell}\}, \ |u - v| > 1\right\} \subseteq \Gamma. \end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati da je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(\ell) = \left\{((\ell)_u, (\ell)_v) \mid u, v \in \{0, \ldots, \overline{\ell}\}, \ |u - v| > 1\right\}$$

r.r.o., jer je $\Omega = \{\ell \in \mathbb{N} \mid \Phi(\ell) \subseteq \Gamma\}$.

Lako se vidi da je funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$,

$$\Psi(\ell) = \left\{(\ell, u, v) \mid u, v \in \{0, \ldots, \overline{\ell}\}, \ |u - v| > 1\right\}$$

r.r.o. Također, funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$, $g(\ell, u, v) = ((\ell)_u, (\ell)_v)$ je rekurzivna. Sada iz $\Phi(\ell) = g(\Psi(\ell))$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$ slijedi da je Φ r.r.o. funkcija. □

Lema 3.2.21. *Neka je x izračunljiva točka u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Tada su skupovi*

$$\left\{\ell \in \mathbb{N} \mid x \in J_{(\ell)_0}\right\} \quad i \quad \left\{\ell \in \mathbb{N} \mid x \in J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}\right\}$$

rekurzivno prebrojivi.

Dokaz. Kako je x izračunljiva točka, iz propozicije 2.3.8 znamo da je $\{x\}$ izračunljiv skup, pa je prema teoremu 2.4.1 i poluizračunljiv. To znači da je skup

$$\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in J_i\}$$

rekurzivno prebrojiv. Sada tvrdnja slijedi iz

$$\left\{\ell \in \mathbb{N} \mid x \in J_{(\ell)_0}\right\} = \{\ell \in \mathbb{N} \mid (\ell)_0 \in \Gamma\}$$

i

$$\left\{\ell \in \mathbb{N} \mid x \in J_{(\ell)_{\bar{\ell}}}\right\} = \{\ell \in \mathbb{N} \mid (\ell)_{\bar{\ell}} \in \Gamma\}.$$

□

Za $\ell \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\operatorname{fmesh}(\ell) = \max\{\operatorname{fdiam}(j) \mid j \in [\ell]\}.$$

Uočimo da je funkcija $\operatorname{fmesh} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna.

Teorem 3.2.22. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup. Pretpostavimo da je S, kao potprostor od (X, d), kontinuum lančast od a do b, pri čemu su a i b izračunljive točke u (X, d, α). Tada je S izračunljiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon = \frac{2^{-k}}{8}$ i neka je $K_0, K_1, \ldots, K_m$ kompaktan ε-lanac od a do b koji prekriva S. Prema korolaru 3.2.18, postoji $r > 0$ takav da, ako su $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ takvi da je $|i - j| > 1$, vrijedi

$$(K_i \subseteq_r J_u \ \text{ i } \ K_j \subseteq_r J_v) \quad \Rightarrow \quad J_u \diamond J_v, \qquad \forall u, v \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Možemo pretpostaviti da je $r \leq \varepsilon$. Prema propoziciji 3.2.16, za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ postoji $u_i \in \mathbb{N}$ takav da je $K_i \subseteq_r J_{u_i}$. Odaberimo $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je $(u_0, \ldots, u_m) = ((\ell)_0, \ldots, (\ell)_{\bar{\ell}})$. Tada za $\mathcal{H}_\ell = (J_{u_0}, \ldots, J_{u_m})$ vrijedi

$$S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$$

i

$$a \in K_0 \subseteq J_{(\ell)_0} \ \text{ i } \ b \in K_m \subseteq J_{(\ell)_{\bar{\ell}}}.$$

Nadalje, iz (3.2) vidimo da je $\mathcal{H}_\ell$ formalni lanac. Također, za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ prema propoziciji 3.2.19 vrijedi

$$\operatorname{fdiam}(u_i) < \varepsilon + 4r \leq 5\varepsilon < 2^{-k},$$

pa je $\text{fmesh}(\ell) < 2^{-k}$.

Promotrimo skup

$$\Omega = \Big\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_\ell \text{ je formalni lanac, } S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell,\ a \in J_{(\ell)_0},\ b \in J_{(\ell)_{\overline{\ell}}} \\ \text{ i } \text{fmesh}(\ell) < 2^{-k}\Big\}.$$

Skupovi

$$\Omega_1 = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_\ell \text{ je formalni lanac}\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell\right\} \quad \text{i} \quad \Omega_3 = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid a \in J_{(\ell)_0} \text{ i } b \in J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}\right\}$$

su rekurzivno prebrojivi redom prema propozicijama 3.2.20, 3.2.12 i lemi 3.2.21, a kako je funkcija $\text{fmesh} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna, i skup $\Omega_4 = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{fmesh}(\ell) < 2^{-k}\right\}$ je rekurzivno prebrojiv. Stoga je, zbog $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$ i Ω rekurzivno prebrojiv.

U gornjem razmatranju vidjeli smo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je $(k,\ell) \in \Omega$. Stoga prema teoremu 1.1.9 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $(k, \varphi(k)) \in \Omega$. Za dokaz teorema dovoljno je još vidjeti da funkcija φ zadovoljava uvjete

(1) $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_{\varphi(k)}$,

(2) $J_j \cap S \neq \emptyset,\ \forall j \in [\varphi(k)]$,

(3) $\operatorname{diam} J_j < 2^{-k},\ \forall j \in [\varphi(k)]$

iz propozicije 3.2.10.

Iz $(k, \varphi(k)) \in \Omega$ jasno je da vrijedi (1) i (3). Dokažimo (2). Radi jednostavnosti, označimo $t = \overline{\varphi(k)}$ i

$$C_0 = J_{(\varphi(k))_0},\ C_1 = J_{(\varphi(k))_1}, \ldots,\ C_t = J_{(\varphi(k))_t}$$

i pretpostavimo da je $C_i \cap S = \emptyset$ za neki $i \in \{0, \ldots, t\}$. Znamo da je $a \in C_0$ i $b \in C_t$, pa je $0 < i < t$. Kako je $\mathcal{H}_{\varphi(k)}$ formalni lanac, imamo

$$|i - j| > 1 \quad \Rightarrow \quad C_i \cap C_j = \emptyset,$$

pa je

$$S \subseteq (C_0 \cup \cdots \cup C_{i-1}) \cup (C_{i+1} \cup \cdots \cup C_t).$$

Ovime je inducirana separacija od S, što je u kontradikciji s povezanosti od S. Dakle, vrijedi (2). Prema propoziciji 3.2.10, S je izračunljiv skup. $\square$

Korolar 3.2.23. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup. Ako je S luk s izračunljivim krajnjim točkama, onda je S izračunljiv.*

3.3 Dvodimenzionalne ćelije

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $U \subseteq X$. Kažemo da je X **c.e. otvoren** skup ako postoji rekurzivno prebrojiv $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $U = \bigcup_{i \in A} I_i$.

Uočimo: skup $S \subseteq X$ je koizračunljivo prebrojiv ako i samo ako je $X \setminus S$ c.e. otvoren. Također, ako su U i V c.e. otvoreni skupovi, onda je i $U \cup V$ c.e. otvoren.

Lema 3.3.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$ c.e. otvoren skup u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}, d', \alpha')$. Tada su skupovi $U \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times U$ c.e. otvoreni u dvodimenzionalnom izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^2, d, \alpha)$.*

Dokaz. Znamo da je

$$U = \bigcup_{i \in A} I'_i = \bigcup_{i \in A} K(\lambda'_i, \rho'_i)$$

za neki rekurzivno prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$. Stoga je

$$U \times \mathbb{R} = \bigcup_{i \in A} \left(K(\lambda'_i, \rho'_i) \times \mathbb{R} \right).$$

Uz oznaku $\lambda_j = (\lambda^1_j, \lambda^2_j)$, definiramo skup

$$\Omega = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \mid |\lambda'_i - \lambda^1_j| + \rho_j < \rho'_i \right\}.$$

Za $(i, j) \in \Omega$ vrijedi $\langle \lambda^1_j - \rho_j, \lambda^1_j + \rho_j \rangle \subseteq \langle \lambda'_i - \rho'_i, \lambda'_i + \rho'_i \rangle$, pa je $K((\lambda^1_j, \lambda^2_j), \rho_j) \subseteq \langle \lambda'_i - \rho'_i, \lambda'_i + \rho'_i \rangle \times \mathbb{R}$. Prema tome, vrijedi

$$\bigcup_{\substack{j \\ (i,j) \in \Omega}} K(\lambda_j, \rho_j) \subseteq \langle \lambda'_i - \rho'_i, \lambda'_i + \rho'_i \rangle \times \mathbb{R}.$$

Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $(x, y) \in \langle \lambda'_i - \rho'_i, \lambda'_i + \rho'_i \rangle \times \mathbb{R}$. Odaberimo $r_1, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ takve da je

$$x \in \langle r_1 - \frac{\varepsilon}{2}, r_1 + \frac{\varepsilon}{2} \rangle \quad \text{i} \quad |\lambda'_i - r_1| + \varepsilon < \rho'_i.$$

Nadalje, odaberimo $r_2 \in \mathbb{Q}$ takav da je $y \in \langle r_2 - \frac{\varepsilon}{2}, r_2 + \frac{\varepsilon}{2} \rangle$. Tada je

$$(x, y) \in K\left((r_1, r_2), \varepsilon\right)$$

Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $((r_1, r_2), \varepsilon) = (\lambda_j, \rho_j)$. Tada je $(i, j) \in \Omega$ i $(x, y) \in K(\lambda_j, \rho_j)$. Dakle, pokazali smo

$$\bigcup_{\substack{j \\ (i,j) \in \Omega}} K(\lambda_j, \rho_j) = \langle \lambda'_i - \rho'_i, \lambda'_i + \rho'_i \rangle \times \mathbb{R} = K(\lambda'_i, \rho'_i) \times \mathbb{R}.$$

Sada je

$$U \times \mathbb{R} = \bigcup_{i \in A} (K(\lambda_i', \rho_i') \times \mathbb{R}) = \bigcup_{i \in A} \Bigg(\bigcup_{\substack{j \\ (i,j) \in \Omega}} K(\lambda_j, \rho_j) \Bigg) = \bigcup_{j \in \Gamma} K(\lambda_j, \rho_j),$$

pri čemu je $\Gamma = \{j \in \mathbb{N} \mid (\exists i \in A)\ (i,j) \in \Omega\}$. Iz oblika funkcije α (primjer 2.1.1) lako zaključujemo da je Ω rekurzivno prebrojiv, pa je i Γ rekurzivno prebrojiv. Dakle, $U \times \mathbb{R}$ je c.e. otvoren.

Analogno dobivamo i da je $\mathbb{R} \times U$ c.e. otvoren. □

Primjer 3.3.2. Neka su $(\mathbb{R}, d, \alpha')$ i $(\mathbb{R}^2, d, \alpha)$ izračunljivi euklidski prostori i neka je γ iz primjera 1.3.4. U primjeru 3.1.3 vidjeli smo da su skupovi $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle -\gamma, \gamma\rangle$ i $\langle 2, +\infty\rangle$ c.e. otvoreni u $(\mathbb{R}, d, \alpha')$. Tada je i $\langle -\infty, \gamma\rangle$ c.e. otvoren. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \setminus ([\gamma, 2] \times [0,1]) = &(\langle -\infty, \gamma\rangle \times \mathbb{R}) \ \cup \ (\langle 2, +\infty\rangle \times \mathbb{R}) \ \cup \\ &\cup \ (\mathbb{R} \times \langle -\infty, 0\rangle) \ \cup \ (\mathbb{R} \times \langle 1, +\infty\rangle)\,.\end{aligned}$$

Prema prethodnoj lemi, $\mathbb{R}^2 \setminus ([\gamma, 2] \times [0,1])$ je c.e. otvoren, pa je $[\gamma, 2] \times [0,1]$ koizračunljivo prebrojiv. Kako je $(\mathbb{R}^2, d, \alpha)$ lokalno izračunljiv i $[\gamma, 2] \times [0,1]$ je kompaktan, slijedi da je $[\gamma, 2] \times [0,1]$ poluizračunljiv skup.

Pretpostavimo da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$[\gamma, 2] \times [0,1] \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} = \left\{ (\alpha_i^1, \alpha_i^2) \mid i \in [f(k)] \right\}.$$

Funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

$$g(k) = \min \left\{ \alpha_i^1 \mid i \in [f(k)] \right\} = \min \left\{ \alpha^1_{(f(k))_j} \mid 0 \le j \le \overline{f(k)} \right\}$$

je rekurzivna. Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$ i promotrimo sljedeće slučajeve:

1° $\gamma < g(k)$
Kako je $d((\gamma, 0),\ \alpha_i) < 2^{-k}$ za neki $i \in [f(k)]$ i $\gamma < g(k) \le \alpha_i^1$, imamo

$$|\gamma - g(k)| \le |\gamma - \alpha_i^1| \le d((\gamma, 0),\ \alpha_i) < 2^{-k}.$$

2° $g(k) < \gamma$
Znamo da je $g(k) = \alpha_i^1$ za neki $i \in [f(k)]$. Kako je $d(\alpha_i, (x,y)) < 2^{-k}$ za neki $(x,y) \in [\gamma, 2] \times [0,1]$, iz $\alpha_i^1 < \gamma \le x$ slijedi

$$|g(k) - \gamma| \le |\alpha_i^1 - x| < 2^{-k}.$$

U oba slučaja dobivamo $|\gamma - g(k)| < 2^{-k}$, što je u kontradikciji s činjenicom da γ nije izračunljiv.

Dakle, skup $[\gamma, 2] \times [0,1]$ je poluizračunljiv, ali nije izračunljiv u $(\mathbb{R}^2, d, \alpha)$. ◀

Uočimo da smo tvrdnju korolara 3.2.23 mogli formulirati i na sljedeći način:

> Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $f : [0,1] \to X$ smještenje takvo da su $f([0,1])$ i $f(\{0,1\})$ poluizračunljivi skupovi. Tada je $f([0,1])$ izračunljiv skup.

Naime, ako je skup $f(\{0,1\}) = \{f(0), f(1)\}$ poluizračunljiv, kao u dokazu propozicije 3.1.7 dobivamo da su skupovi $\{f(0)\}$ i $\{f(1)\}$ izračunljivi, pa su prema propoziciji 2.3.8 $f(0)$ i $f(1)$ izračunljive točke.

Označimo $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ i $\partial I^2 = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$. Željeli bismo generalizirati gornji rezultat u dvodimenzionalnom slučaju. Konkretno, cilj nam je pokazati da vrijedi:

> Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $f : I^2 \to X$ smještenje takvo da su skupovi $f(I^2)$ i $f(\partial I^2)$ poluizračunljivi. Tada je $f(I^2)$ izračunljiv skup u (X, d, α).

Uočimo još da primjer 3.3.2 pokazuje da je pretpostavka da je $f(\partial I^2)$ poluizračunljiv nužna: skup $[\gamma, 2] \times [0,1]$ iz tog primjera je homeomorfan s I^2 i poluizračunljiv, ali nije izračunljiv.

Uvedimo sljedeće oznake za parove nasuprotnih stranica od I^2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2) \in I_2 \mid x_1 = 0\}, \qquad & B_1 &= \left\{(x_1, x_2) \in I^2 \mid x_1 = 1\right\}, \\ A_2 &= \{(x_1, x_2) \in I_2 \mid x_2 = 0\}, \qquad & B_2 &= \left\{(x_1, x_2) \in I^2 \mid x_2 = 1\right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

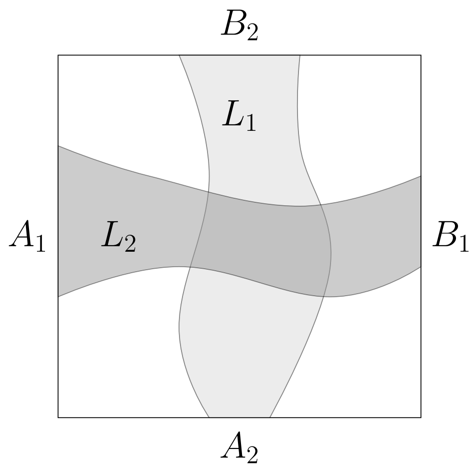
Uočimo da je tada

$$\partial I^2 = A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2.$$

Promotrimo još neka topološka svojstva skupa I^2.

Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$. Za $L \subseteq X$ kažemo da je **particija između** A **i** B ako postoje disjunktni otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ takvi da je $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ i $X \setminus (U \cup W) = L$.

Teorem 3.3.3 (Engelking, [4])**.** *Neka su A_1, B_1, A_2 i B_2 podskupovi od I^2 definirani s (3.3). Ako je L_1 particija između A_1 i B_1 i L_2 particija između A_2 i B_2, onda je $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.*



Slika 3.2

Dokaz. Neka su U_i i W_i otvoreni skupovi takvi da je $A_i \subseteq U_i$, $B_i \subseteq W_i$, $U_i \cap W_i = \emptyset$ i $I^2 \setminus L_i = U_i \cup W_i$, $i \in \{1, 2\}$. Definirajmo funkcije $f_1, f_2 : I^2 \to I$,

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d(x, L_i)}{d(x, L_i) + d(x, A_i)} + \frac{1}{2}, & x \in I^2 \setminus W_i \\ -\frac{1}{2}\frac{d(x, L_i)}{d(x, L_i) + d(x, B_i)} + \frac{1}{2}, & x \in I^2 \setminus U_i, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Lako se provjeri da su funkcije f_1 i f_2 neprekidne i vrijedi

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in L_i, \quad f_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A_i \quad \text{i} \quad f_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in B_i,$$

za $i = 1, 2$. Pretpostavimo da je $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Tada funkcija $F : I^2 \to I^2$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ ne poprima vrijednost $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Neka je $p : I^2 \setminus \{a\} \to I^2$ projekcija iz a na ∂I^2. Imamo da je $p \circ F : I^2 \to I^2$ neprekidna funkcija i vrijedi

$$(p \circ F)(I^2) \subseteq \partial I^2 = A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2.$$

Kako je

$$(p \circ F)(\operatorname{Int} I^2) \subseteq \partial I^2, \quad (p \circ F)(A_i) \subseteq B_i \quad \text{i} \quad (p \circ F)(B_i) \subseteq A_i, \qquad i = 1, 2,$$

slijedi da je $(p \circ F)(x) \neq x$ za svaki $x \in I^2$. No, to je u kontradikciji s Brouwerovim teoremom o fiksnoj točki. Dakle, vrijedi $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. $\square$

Korolar 3.3.4. *Neka su* A_i, B_i, $i = 1, 2$ *definirani s* (3.3). *Pretpostavimo da su* U_1, U_2, V_1, V_2 *otvoreni skupovi u* I^2 *takvi da je*

$$\begin{aligned} &U_1 \cap B_1 = \emptyset, \qquad V_1 \cap A_1 = \emptyset, \qquad U_1 \cap V_1 = \emptyset, \\ &U_2 \cap B_2 = \emptyset, \qquad V_2 \cap A_2 = \emptyset, \qquad U_2 \cap V_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Tada je

$$I^2 \neq U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\{U_1, U_2, V_1, V_2\}$ otvoreni pokrivač od I^2. Označimo njegov Lebesgueov broj s λ i odaberimo konačno mnogo zatvorenih skupova $K_1, \dots, K_l$ dijametra manjeg od λ koji prekrivaju I^2. Znamo da je tada svaki K_i sadržan u U_1, V_1, U_2 ili V_2. Definirajmo

$$F_1 = A_i \cup \bigcup \{K_j \mid K_j \subseteq U_1\}, \quad G_1 = B_1 \cup \bigcup \{K_j \mid K_j \subseteq V_1\},$$
$$F_2 = A_2 \cup \bigcup \{K_j \mid K_j \subseteq U_2\} \quad \text{i} \quad G_2 = B_2 \cup \bigcup \{K_j \mid K_j \subseteq V_2\}.$$

F_1, F_2, G_1 i G_2 su zatvoreni skupovi u I^2 koji u uniji daju I^2 i vrijedi

$$A_i \subseteq F_i, \quad B_i \subseteq G_i \quad \text{i} \quad F_i \cap G_i = \emptyset, \qquad i = 1, 2.$$

Znamo da za $i = 1, 2$ postoje disjunktni otvoreni skupovi W_i^0 i W_i^1 takvi da je $F_i \subseteq W_i^0$ i $G_i \subseteq W_i^1$. Tada je $L_i = I^n \setminus (W_i^0 \cup W_i^1)$ particija između A_i i B_i. Imamo

$$L_1 \cap L_2 = I^2 \setminus \left(W_1^0 \cup W_1^1 \cup W_2^0 \cup W_2^1\right) \subseteq I^2 \setminus (F_1 \cup G_1 \cup F_2 \cup G_2) = \emptyset,$$

što je u kontradikciji s prethodnim teoremom.
Dakle, vrijedi $I^2 \neq U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2$. □

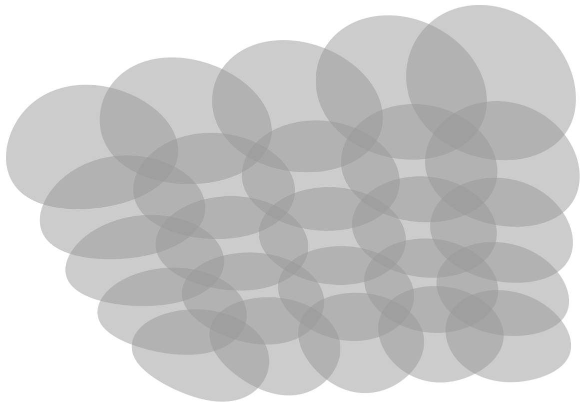
Neka je X skup i $m \in \mathbb{N}$. Za funkciju $C : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(X)$ kažemo da je **2-lanac u** X **duljine** m ako za sve $a, b \in \mathbb{N}_m^2$ vrijedi

$$C_a \cap C_b \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \rho(a, b) \leq 1.$$

Pri tome je ρ metrika na $\mathbb{N}_m^2$ definirana sa $\rho((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$.

Ako je (X, d) metrički prostor, na prirodan način definiramo **otvoreni 2-lanac**, **kompaktni 2-lanac** i **ε-2-lanac** u (X, d).

Ako je $C : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(X)$ neka funkcija i $S \subseteq X$, kažemo da C **pokriva** S ako je $S \subseteq \bigcup_{a \in \mathbb{N}_m^2} C(a)$.



Slika 3.3: 2-lanac duljine 5

Primjer 3.3.5. Za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $F^n : \mathbb{N}^2_{n-1} \to \mathcal{P}(I^2)$,

$$F^n_{(i,j)} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right], \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}^2_{n-1}.$$

Tada je F^n kompaktan 2-lanac u I^2 koji pokriva I^2. Nadalje, vrijedi

$$\operatorname{diam} F^n_{(i,j)} = \frac{\sqrt{2}}{n}, \qquad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2_{n-1}.$$

◀

Konačan 2-**niz** u $\mathbb{N}$ je svaka funkcija $a : \mathbb{N}^2_m \to \mathbb{N}$, za neki $m \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.3.6. *Postoje rekurzivne funkcije $\Sigma : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ i $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je svaki konačan 2-niz a u $\mathbb{N}$ jednak funkciji $\mathbb{N}^2_{\omega(i)} \to \mathbb{N}$, $(j_1, j_2) \mapsto \Sigma(i, j_1, j_2)$ za neki $i \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bilo koja rekurzivna injekcija (npr. $(x, y) \mapsto 2^{x+1}3^{y+1}$). Neka su $\Sigma : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ i $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dane formulama

$$\Sigma(i, j_1, j_2) = (\tau_1(i))_{f(j_1,j_2)} \quad \text{i} \quad \omega(i) = \tau_2(i), \qquad \forall i, j_1, j_2 \in \mathbb{N}.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $a : \mathbb{N}^2_m \to \mathbb{N}$ proizvoljan 2-niz. Označimo $N = \max\{f(j_1, j_2) \mid (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2_m\}$ i za $k \in \{0, \ldots, N\}$ definirajmo

$$b_k = \begin{cases} a_{(j_1,j_2)}, & k = f(j_1, j_2) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako je $(b_0, b_1, \dots, b_N)$ neprazan konačan niz u $\mathbb{N}$, postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(b_0, b_1, \dots, b_N) = ((u)_0, \dots, (u)_{\overline{u}}) .$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(u, m) = (\tau_1(i), \tau_2(i))$. Jasno je da je tada $\omega(i) = m$, a za $j_i, j_2 \in \mathbb{N}_m$ imamo

$$\Sigma(i, j_1, j_2) = (\tau_1(i))_{f(j_1,j_2)} = (u)_{f(j_1,j_2)} = b_{f(j_1,j_2)} = a_{(j_1,j_2)}.$$

Također, očito su Σ i ω rekurzivne, pa su to upravo tražene funkcije. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $\ell \in \mathbb{N}$ označimo

$$\mathcal{H}_\ell^2 = \left(J_{\Sigma(\ell,j_1,j_2)}\right)_{0 \le j_1, j_2 \le \omega(\ell)} .$$

Kažemo da je $\mathcal{H}_\ell^2$ **formalni** 2-**lanac** ako za sve $j_1, j_2, j_1', j_2' \in \{0, 1, \dots, \omega(\ell)\}$ vrijedi

$$|j_1 - j_1'| > 1 \text{ ili } |j_2 - j_2'| > 1 \quad \Rightarrow \quad J_{\Sigma(\ell,j_1,j_2)} \diamond J_{\Sigma(\ell,j_1',j_2')}.$$

Nadalje, kažemo da je $\mathcal{H}_\ell^2$ **pravi** 2-**lanac** ako za sve $j_1, j_2, j_1', j_2' \in \{0, 1, \dots, \omega(\ell)\}$ vrijedi

$$\max\{|j_1 - j_1'|, |j_2 - j_2'|\} \le 1 \quad \Rightarrow \quad J_{\Sigma(\ell,j_1,j_2)} \cap J_{\Sigma(\ell,j_1',j_2')} \neq \emptyset.$$

Slično jednodimenzionalnom slučaju, umjesto $\bigcup\limits_{0 \le j_1, j_2 \le \omega(\ell)} J_{\Sigma(\ell,j_1,j_2)}$ kratko pišemo $\bigcup \mathcal{H}_\ell^2$.

Propozicija 3.3.7. *Skup* $\Omega = \{\ell \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_\ell^2$ *je formalni* 2*-lanac*$\}$ *je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.5.4 skup $\Gamma = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \diamond J_v\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Lako se vidi da je funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^5)$,

$$\Psi(\ell) = \left\{(\ell, i, j, i', j') \mid i, j, i', j' \le \omega(\ell) \text{ i } \left(|i - i'| > 1 \text{ ili } |j - j'| > 1\right)\right\}, \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

r.r.o. Budući da je funkcija $f : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}^2$, $f(\ell, i, j, i', j') = (\Sigma(\ell, i, j), \Sigma(\ell, i', j'))$ rekurzivna, zaključujemo da je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Phi(\ell) = f(\Psi(\ell))$ r.r.o. Sada iz

$$\begin{aligned}\ell \in \Omega \ &\Leftrightarrow \ \Big(\big(\forall i, j, i', j' \le \omega(\ell)\big)\big(|i - i'| > 1 \text{ ili } |j - j'| > 1\big) \Rightarrow (\Sigma(\ell, i, j), \Sigma(\ell, i', j')) \in \Gamma \Big) \\ &\Leftrightarrow \ \Phi(\ell) \subseteq \Gamma\end{aligned}$$

slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv. $\square$

Propozicija 3.3.8. *U izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) skup*

$$\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Ovo lako slijedi iz

$$I_i \cap I_j \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N})\ \alpha_k \in I_i \ \textbf{i}\ \alpha_k \in I_j.$$

□

Propozicija 3.3.9. *U izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) skup*

$$\left\{(u,v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \cap J_v \neq \emptyset\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodne propozicije i

$$J_u \cap J_v \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in [u])\,(\exists j \in [v])\ I_i \cap I_j \neq \emptyset.$$

□

Propozicija 3.3.10. *U izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) skup*

$$\Omega = \left\{\ell \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}^2_\ell \text{ je pravi 2-lanac}\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Lako se vidi da je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(\ell) = \{(\Sigma(\ell,i,j), \Sigma(\ell,i',j')) \mid i,j,i',j' \leq \omega(\ell),\ |i-i'| \leq 1,\ |j-j'| \leq 1\}$$

r.r.o. Sada tvdrnja slijedi iz prethodne propozicije zbog

$$\begin{aligned} \ell \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad J_{\Sigma(\ell,i,j)} \cap J_{\Sigma(\ell,i',j')} \neq \emptyset, \qquad \forall i,j,i',j' \leq \omega(\ell) \text{ t.d.} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |i-i'| \leq 1 \text{ i } |j-j'| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(\ell) \subseteq \{(u,v) \mid J_u \cap J_v \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

□

Za $\ell \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathrm{fmesh}^2(\ell) = \max_{0 \leq i,j \leq \omega(\ell)} \mathrm{fdiam}(\Sigma(\ell, i, j)).$$

Kako je

$$\mathrm{fmesh}^2(\ell) = \max_{0 \leq i \leq \omega(\ell)} \left(\max_{0 \leq j \leq \omega(\ell)} \mathrm{fdiam}(\Sigma(\ell, i, j)) \right),$$

zaključujemo da je funkcija $\mathrm{fmesh}^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna.

Neka je X skup, $m \in \mathbb{N}$ i $C : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(X)$ proizvoljna funkcija. Označimo

$$\partial C = \bigcup_{\substack{i \in \{0,m\} \\ \text{ili } j \in \{0,m\}}} C(i, j).$$

Nadalje, uvodimo oznake:

$$\partial^{\leftarrow} C = \bigcup_{i \leq m} C(0, i), \qquad \partial^{\rightarrow} C = \bigcup_{i \leq m} C(m, i),$$
$$\partial^{\downarrow} C = \bigcup_{i \leq m} C(i, 0), \qquad \partial^{\uparrow} C = \bigcup_{i \leq m} C(i, m).$$

Također, ako je $m \geq 1$, označavamo

$$\partial^{\leftleftarrows} C = \bigcup_{\substack{j \leq m \\ i \in \{0,1\}}} C(i, j), \qquad \partial^{\rightrightarrows} C = \bigcup_{\substack{j \leq m \\ i \in \{m-1,m\}}} C(i, j),$$
$$\partial^{\downdownarrows} C = \bigcup_{\substack{i \leq m \\ j \in \{0,1\}}} C(i, j), \qquad \partial^{\upuparrows} C = \bigcup_{\substack{i \leq m \\ j \in \{m-1,m\}}} C(i, j).$$

Lema 3.3.11. *Postoji rekurzivna funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\bigcup \mathcal{H}_\ell^2 = J_{\zeta(\ell)}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Imamo

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell^2 = \bigcup_{0 \leq j_1, j_2 \leq \omega(\ell)} J_{\Sigma(\ell, j_1, j_2)} = \bigcup_{0 \leq j_1, j_2 \leq \omega(\ell)} \left(\bigcup_{i \in [\Sigma(\ell, j_1, j_2)]} I_i \right) = \bigcup_{i \in \bigcup_{0 \leq j_1, j_2 \leq \omega(\ell)} [\Sigma(\ell, j_1, j_2)]} I_i.$$

Promotrimo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(\ell) = \bigcup_{0 \le j_1, j_2 \le \omega(\ell)} [\Sigma(\ell, j_1, j_2)].$$

Kako su funkcije $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$ i $\Lambda : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Psi(\ell) = \{(\ell, j_1, j_2) \mid 0 \le j_1, j_2 \le \omega(\ell)\} \quad \text{i} \quad \Lambda(\ell, j_1, j_2) = [\Sigma(\ell, j_1, j_2)]$$

r.r.o., iz

$$\Phi(\ell) = \bigcup_{z \in \Psi(\ell)} \Lambda(z)$$

zaključujemo da je i Φ r.r.o. Stoga postoji rekurzivna funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(\ell) = [\zeta(\ell)]$. Sada je

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell^2 = \bigcup_{i \in \zeta(\ell)} I_i = J_{\zeta(\ell)},$$

pa je ζ tražena funkcija. □

Direktno iz definicije poluizračunljivog skupa i prethodne leme slijedi:

Propozicija 3.3.12. *Neka je S poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Tada je skup $\{\ell \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^2\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Lema 3.3.13. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada postoji rekurzivna funkcija $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\partial \mathcal{H}_\ell^2 = J_{\nu(\ell)}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Definiramo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$,

$$\Psi(\ell) = \{(\ell, j_1, j_2) \mid 0 \le j_1, j_2 \le \omega(\ell),\ j_1 = 0 \text{ ili } j_1 = \omega(\ell) \text{ ili } j_2 = 0 \text{ ili } j_2 = \omega(\ell)\}.$$

Lako se vidi da je Ψ r.r.o. funkcija. Imamo

$$\partial \mathcal{H}_\ell^2 = \bigcup_{z \in \Psi(\ell)} J_{\Sigma(z)} = \bigcup_{z \in \Psi(\ell)} \left(\bigcup_{i \in [\Sigma(z)]} I_i \right) = \bigcup_{i \in \bigcup_{z \in \Psi(\ell)} [\Sigma(z)]} I_i.$$

Kako je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(\ell) = \bigcup_{z \in \Psi(\ell)} [\Sigma(z)]$ r.r.o., znamo da postoji rekurzivna funkcija $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(\ell) = [\nu(\ell)]$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\partial \mathcal{H}_\ell^2 = \bigcup_{i \in [\nu(\ell)]} I_i = J_{\nu(\ell)},$$

dakle, ν je tražena funkcija. □

Odavde slijedi:

Propozicija 3.3.14. *Neka je S poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Tada je skup $\{\ell \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \partial H_\ell^2\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Za $u, v \in \mathbb{N}$ definiramo relaciju

$$J_u \subseteq_F J_v \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in [u])\,(\exists j \in [v])\;\; I_i \subseteq_F I_j.$$

Jasno, $J_u \subseteq_F J_v$ povlači $J_u \subseteq J_v$.

Propozicija 3.3.15. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Skup*

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \subseteq_F J_v\}$$

je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Promotrimo sljedeći skup:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left\{(i, v) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists j \in [v])\;\; I_i \subseteq_F I_j\right\}\\ &= \left\{(i, v) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists j \in \mathbb{N})\;\; I_i \subseteq_F I_j \text{ i } j \in [v]\right\}.\end{aligned}$$

Iz propozicije 2.2.3 i teorema o projekciji slijedi da je Γ rekurzivno prebrojiv. Sada za $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ imamo

$$(u, v) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in [u])\,(i, v) \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad [u] \times \{v\} \subseteq \Gamma.$$

Kako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, $(u, v) \mapsto [u] \times \{v\}$ r.r.o., odavde slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv. $\square$

Lema 3.3.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je A kompaktan skup u (X, d). Pretpostavimo da je $v \in \mathbb{N}$ takav da je $A \subseteq J_v$. Tada postoji $\lambda > 0$ takav da za svaki $u \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$A \subseteq_\lambda J_u \quad \Rightarrow \quad J_u \subseteq_F J_v.$$

Dokaz. Tvrdimo da postoji $\mu > 0$ takav da za svaki $x \in A$ postoji $j \in [v]$ takav da vrijedi $d(x, \lambda_j) + \mu < \rho_j$. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A$ takav da vrijedi

$$(\forall j \in [v])\;\; d(x_n, \lambda_j) + \frac{1}{n} \geq \rho_j.$$

Kako je A kompaktan, postoji podniz $(x_{p_n})_n$ niza (x_n) i $a \in A$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = a$. Tada za svaki $j \in [v]$ vrijedi

$$d(x_{p_n}, \lambda_j) + \frac{1}{p_n} \geq \rho_j.$$

Neka je $j \in [v]$ takav da je $a \in I_j$. Tada je $d(a, \lambda_j) < \rho_j$. S druge strane, puštanjem $n \to \infty$ u gornjem izrazu za taj j dobivamo

$$d(a, \lambda_j) \geq \rho_j,$$

što je u kontradikciji s izborom j.

Dakle, postoji $\mu > 0$ s traženim svojstvom. Stavimo $\lambda = \frac{\mu}{2}$. Pretpostavimo da je $A \subseteq_\lambda J_u$.

Neka je $i \in [u]$. Imamo $\rho_i < \lambda$ i $K(\lambda_i, \rho_i) \cap A \neq \emptyset$. Prema tome, postoji $x \in A$ takav da je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$. Također, znamo da postoji $j \in [v]$ takav da je $d(x, \lambda_j) + \mu < \rho_j$. Imamo

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < d(\lambda_i, x) + d(x, \lambda_j) + \frac{\mu}{2} < d(x, \lambda_j) + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} < \rho_j.$$

Dakle, vrijedi $I_i \subseteq_F I_j$. Kako je i bio proizvoljan, slijedi $J_u \subseteq_F J_v$. $\square$

Lema 3.3.17. *Neka su U_1, U_2, V_1, V_2 otvoreni skupovi u I^2 takvi da je*

$$A_1 \subseteq U_1, \quad B_1 \subseteq V_1, \quad A_2 \subseteq U_2 \quad i \quad B_2 \subseteq V_2.$$

Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\partial^{\leftleftarrows} F^n \subseteq U_1, \quad \partial^{\rightrightarrows} F^n \subseteq V_1, \quad \partial^{\downdownarrows} F^n \subseteq U_2 \quad i \quad \partial^{\upuparrows} F^n \subseteq V_2,$$

pri čemu je F^n 2-lanac iz primjera 3.3.5.

Dokaz. Označimo

$$\lambda = \min\left\{d(A_1, I^2 \setminus U_1),\ d(B_1, I^2 \setminus V_1),\ d(A_2, I^2 \setminus U_2),\ d(B_2, I^2 \setminus V_2)\right\}$$

i odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\dfrac{2\sqrt{2}}{n_0} < \lambda$.

Neka je $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$. Tvrdimo da je $\partial^{\leftleftarrows} F^n \subseteq U_1$. Neka je $x \in \partial^{\leftleftarrows} F^n$. Tada je $x \in F^n_{ij},\ i \in \{0, 1\},\ j \in \{0, \ldots, n-1\}$, odnosno

$$x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \quad \text{ili} \quad \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right].$$

Prema tome, imamo $x = (u, v)$, gdje je $u \leq \frac{2}{n}$. Definirajmo $\hat{x} = (0, v)$. Imamo $\hat{x} \in A_1 \subseteq U_1$ i

$$d(x, \hat{x}) = u \leq \frac{2}{n} < \frac{2\sqrt{2}}{n_0} < \lambda.$$

Stoga je $x \notin I^2 \setminus U_1$, odnosno $x \in U_1$. Dakle, vrijedi $\partial^{\leftleftarrows} F^n \subseteq U_1$.

Preostale inkluzije dokazuju se analogno. □

Za $a, \ell \in \mathbb{N}$ pišemo $\partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a$ ako je

$$J_{\Sigma(\ell, j_1, j_2)} \subseteq_F J_a, \qquad \forall j_1 \in \{0, 1\},\ \forall j_2 \in \{0, \dots, \omega(\ell)\}.$$

Analogno definiramo $\partial^{\rightrightarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a$, $\partial^{\downdownarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a$ i $\partial^{\upuparrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a$.

Propozicija 3.3.18. *U izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) skupovi*

$$\begin{gathered}\left\{(\ell, a) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a\right\}, \quad \left\{(\ell, a) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\rightrightarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a\right\}, \\ \left\{(\ell, a) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\downdownarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a\right\} \quad i \quad \left\{(\ell, a) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\upuparrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a\right\}\end{gathered}$$

su rekurzivno prebrojivi.

Dokaz. Lako se vidi da je funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(\ell, a) = \{(\Sigma(\ell, j_1, j_2), a) \mid 0 \leq j_1, j_2 \leq \omega(\ell),\ j_1 \in \{0, 1\}\}$$

r.r.o. Kako je

$$\partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\ell, a) \subseteq \{(u, v) \mid J_u \subseteq_F J_v\},$$

iz propozicije 3.3.15 slijedi da je skup $\left\{(\ell, a) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_a\right\}$ rekurzivno prebrojiv. Analogno dokazujemo da su preostala tri skupa rekurzivno prebrojiva. □

Propozicija 3.3.19. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $f : I^2 \to X$ smještenje. Neka su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$f(A_1) \subseteq J_{a_1}, \quad f(B_1) \subseteq J_{b_1}, \quad f(A_2) \subseteq J_{a_2} \quad i \quad f(B_2) \subseteq J_{b_2}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je

(1) $\mathcal{H}_\ell^2$ *je pravi formalni 2-lanac,*

(2) $f(I^2) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^2$*,*

(3) $\operatorname{fmesh}^2(\ell) < \varepsilon$*,*

(4) $f(\partial I^2) \subseteq \partial \mathcal{H}^2_\ell$,

(5) $\partial^{\leftleftarrows} \mathcal{H}^2_\ell \subseteq_F J_{a_1}$, $\partial^{\rightrightarrows} \mathcal{H}^2_\ell \subseteq_F J_{b_1}$, $\partial^{\downdownarrows} \mathcal{H}^2_\ell \subseteq_F J_{a_2}$ *i* $\partial^{\upuparrows} \mathcal{H}^2_\ell \subseteq_F J_{b_2}$.

Dokaz. Kako je f uniformno neprekidna, postoji $\delta > 0$ takav da za $A \subseteq I^2$ vrijedi

$$\operatorname{diam} A < \delta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{diam} f(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako su $f^{-1}(J_{a_1})$, $f^{-1}(J_{b_1})$, $f^{-1}(J_{a_2})$ i $f^{-1}(J_{b_2})$ otvoreni skupovi u I^2 takvi da je

$$A_1 \subseteq f^{-1}(J_{a_1}), \quad B_1 \subseteq f^{-1}(J_{b_1}), \quad A_2 \subseteq f^{-1}(J_{a_2}) \quad \text{i} \quad B_2 \subseteq f^{-1}(J_{b_2}),$$

prema lemi 3.3.17 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\partial^{\leftleftarrows} F^n \subseteq f^{-1}(J_{a_1}),\ \partial^{\rightrightarrows} F^n \subseteq f^{-1}(J_{b_1}),\ \partial^{\downdownarrows} F^n \subseteq f^{-1}(J_{a_2}) \text{ i } \partial^{\upuparrows} F^n \subseteq f^{-1}(J_{b_2}),$$

odnosno

$$f(\partial^{\leftleftarrows} F^n) \subseteq J_{a_1},\ f(\partial^{\rightrightarrows} F^n) \subseteq J_{b_1},\ f(\partial^{\downdownarrows} F^n) \subseteq J_{a_2} \text{ i } f(\partial^{\upuparrows} F^n) \subseteq J_{b_2}. \tag{3.4}$$

Odaberimo $n \geq n_0$ takav da je $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$. Tada je $\operatorname{diam} F^n_{ij} < \delta, \forall i,j \leq n-1$, pa je $\operatorname{diam} f(F^n_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall i,j \leq n-1$.

Prema korolaru 3.2.18, postoji $r > 0$ takav da za sve $i,j,i',j' \in \{0,\dots,n-1\}$ takve da je $|i-i'| > 1$ ili $|j-j'| > 1$ i $u,v \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left(f(F^n_{ij}) \subseteq_r J_u \ \text{ i } \ f(F^n_{i'j'}) \subseteq_r J_v\right) \quad \Rightarrow \quad J_u \diamond J_v. \tag{3.5}$$

Prema lemi 3.3.16, r možemo odabrati tako da vrijedi

$$\begin{array}{lll} f(F^n_{ij}) \subseteq_r J_u \ \Rightarrow \ J_u \subseteq_F J_{a_1}, & & \forall i \in \{0,1\} \\ f(F^n_{ij}) \subseteq_r J_u \ \Rightarrow \ J_u \subseteq_F J_{b_1}, & & \forall i \in \{n-2,n-1\} \\ f(F^n_{ij}) \subseteq_r J_u \ \Rightarrow \ J_u \subseteq_F J_{a_2}, & & \forall j \in \{0,1\} \\ f(F^n_{ij}) \subseteq_r J_u \ \Rightarrow \ J_u \subseteq_F J_{b_2}, & & \forall j \in \{n-2,n-1\} \end{array} \tag{3.6}$$

Također, možemo pretpostaviti da je $r < \frac{\varepsilon}{8}$.

Za sve $i,j \in \{0,\dots,n-1\}$ odaberimo $u_{ij} \in \mathbb{N}$ takav da je $f(F^n_{ij}) \subseteq_r J_{u_{ij}}$. Kako je $(u_{ij})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ konačan 2-niz u $\mathbb{N}$, postoji $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(u_{ij})_{0 \leq i,j \leq n-1} = (\Sigma(\ell,i,j))_{0 \leq i,j \leq \omega(\ell)}.$$

Tada je

$$\mathcal{H}^2_\ell = \left(J_{\Sigma(\ell,i,j)}\right)_{0 \leq i,j \leq \omega(\ell)} = \left(J_{u_{ij}}\right)_{0 \leq i,j \leq n-1}.$$

Iz (3.5) slijedi da je H_ℓ^2 formalni 2-lanac. Nadalje, iz konstrukcije je jasno da je $\mathcal{H}_\ell^2$ pravi 2-lanac. Dakle, vrijedi (1).

Imamo

$$f(I^2) = \bigcup_{0 \le i,j \le n-1} f(F_{ij}^n) \subseteq \bigcup_{0 \le i,j \le n-1} J_{u_{ij}} = \bigcup \mathcal{H}_\ell^2,$$

odnosno, vrijedi (2).

Kako je $f(F_{ij}^n) \subseteq_r J_{u_{ij}}$, prema propoziciji 3.2.19 vrijedi

$$\operatorname{fdiam}(u_{ij}) \le \operatorname{diam} f(F_{ij}^n) + 4r < \frac{\varepsilon}{2} + 4 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon,$$

pa je

$$\operatorname{fmesh}(\ell) = \max_{0 \le i,j \le n-1} \operatorname{fdiam}(u_{ij}) < \varepsilon.$$

Prema tome, vrijedi (3). Također, iz konstrukcije od $\mathcal{H}_\ell^2$ lako slijedi

$$f(\partial I^2) \subseteq f(\partial F^n) \subseteq \partial \mathcal{H}_\ell^2,$$

pa vrijedi (4). Konačno, iz (3.6) slijedi (5), čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Propozicija 3.3.20. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $f : I^2 \to X$ smještenje. Fiksirajmo $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$f(A_1) \subseteq J_{a_1},\ f(B_1) \subseteq J_{b_1},\ f(A_2) \subseteq J_{a_2}\ i\ f(B_2) \subseteq J_{b_2}$$

te

$$J_{a_1} \cap J_{b_1} = \emptyset \quad i \quad J_{a_2} \cap J_{b_2} = \emptyset.$$

Pretpostavimo da postoji $\ell \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

(1) $\mathcal{H}_\ell^2$ je formalni 2-lanac,

(2) $f(I^2) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^2$,

(3) $f(\partial I^2) \subseteq \partial \mathcal{H}_\ell^2$,

(4) $\partial^{\leftleftarrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{a_1}$, $\partial^{\rightrightarrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{b_1}$, $\partial^{\downdownarrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{a_2}$ i $\partial^{\upuparrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{b_2}$.

Tada "strogo unutrašnje karike" od $\mathcal{H}_\ell^2$ sijeku $f(I^2)$, tj. vrijedi

$$J_{\Sigma(\ell,i,j)} \cap f(I^2) \neq \emptyset, \qquad \forall i,j \in \{2, \ldots, \omega(\ell) - 2\}.$$

Dokaz. Radi jednostavnosti zapisa, uvedimo oznake

$$m = \omega(\ell) \quad \text{i} \quad C_{ij} = J_{\Sigma(\ell,i,j)}.$$

Tada je $(C_{ij})_{0\leq i,j\leq m}$ konačan 2-niz otvorenih skupova u (X,d) za koje vrijedi

$$|i-i'|>1 \text{ ili } |j-j'|>1 \quad \Rightarrow \quad C_{ij}\cap C_{i'j'}=\emptyset, \qquad \forall i,j,i',j' \leq m.$$

Odaberimo $i_0, j_0 \in \{2,\dots,m-2\}$. Tvrdimo da vrijedi

$$C_{i_0j_0}\cap f(I^2)\neq\emptyset.$$

Pretpostavimo suprotno. Tada iz (2) slijedi

$$f(I^2) \subseteq \bigcup_{\substack{0\leq i,j\leq m\\ (i,j)\neq(i_0,j_0)}} C_{ij}. \tag{3.7}$$

Promotrimo sljedeće skupove (slika 3.4):

$$U_1 = \left(\bigcup_{i\in\{0,1\}} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i<i_0\\ 1<j<m-1}} C_{ij}\right), \quad V_1 = \left(\bigcup_{i\in\{m-1,m\}} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i>i_0\\ 1<j<m-1}} C_{ij}\right),$$

$$U_2 = \left(\bigcup_{j\in\{0,1\}} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1<i<m-1\\ j<j_0}} C_{ij}\right), \quad V_2 = \left(\bigcup_{j\in\{m-1,m\}} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1<i<m-1\\ j>j_0}} C_{ij}\right).$$

Očito su U_1, V_1, U_2, V_2 otvoreni skupovi u (X,d). Nadalje, imamo

$$x\in U_1 \;\Rightarrow\; x\in C_{ij},\; i<i_0 \quad \text{i} \quad x\in V_1 \;\Rightarrow\; x\in C_{ij},\; i>i_0,$$

pa je $U_1\cap V_1=\emptyset$. Analogno pokazujemo $U_2\cap V_2=\emptyset$. Lako se vidi da za $0\leq i,j\leq m$, $(i,j)\neq(i_0,j_0)$ vrijedi $C_{ij}\subseteq U_1\cup V_1\cup U_2\cup V_2$, pa iz (3.7) slijedi

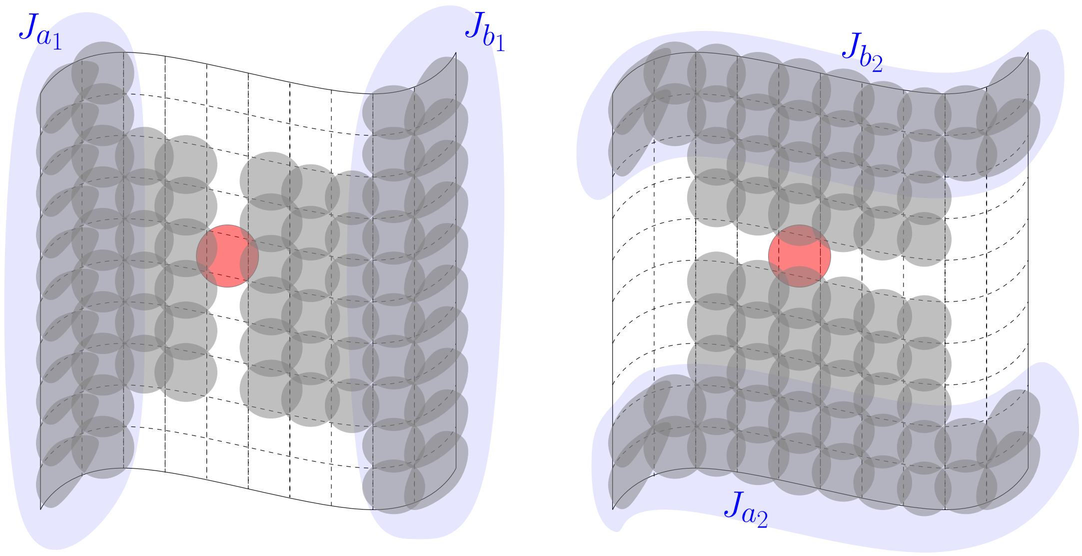
$$f(I^2)\subseteq U_1\cup V_1\cup U_2\cup V_2. \tag{3.8}$$

Tvrdimo da vrijedi

$$U_1\cap f(B_1)=\emptyset, \quad V_1\cap f(A_1)=\emptyset, \quad U_2\cap f(B_2)=\emptyset \quad \text{i} \quad V_2\cap f(A_2)=\emptyset. \tag{3.9}$$

Imamo

$$U_1 = \left(\bigcup_{i\in\{0,1\}} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i<i_0\\ 1<j<m-1}} C_{ij}\right).$$



(a) skupovi U_1 i V_1

(b) skupovi U_2 i V_2

Slika 3.4

Iz (4) slijedi $\bigcup\limits_{i\in\{0,1\}} C_{ij} \subseteq J_{a_1}$, pa zbog $J_{a_1} \cap J_{b_1} = \emptyset$ i $f(B_1) \subseteq J_{b_1}$ vrijedi

$$\left(\bigcup_{i\in\{0,1\}} C_{ij}\right) \cap f(B_1) = \emptyset. \tag{3.10}$$

Također, kako je $(C_{ij})_{0\leq i,j\leq m}$ formalni 2-lanac, vrijedi

$$\left(\bigcup_{1<i,j<m-1} C_{ij}\right) \cap \partial C = \emptyset.$$

Budući da je

$$\bigcup_{\substack{i<i_0\\1<j<m-1}} C_{ij} \subseteq \bigcup_{1<i,j<m-1} C_{ij},$$

iz (3) slijedi

$$\left(\bigcup_{\substack{i<i_0\\1<j<m-1}} C_{ij}\right) \cap f(B_1) = \emptyset. \tag{3.11}$$

Iz (3.10) i (3.11) slijedi $U_1 \cap f(B_1) = \emptyset$. Analogno dokazujemo i preostale tvrdnje.

Promotrimo sada skupove $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(V_1)$, $f^{-1}(U_2)$ i $f^{-1}(V_2)$. To su otvoreni skupovi u I^2 takvi da je

$$f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(V_1) = \emptyset \quad \text{i} \quad f^{-1}(U_2) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset,$$

a iz (3.8) slijedi

$$I^2 \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup f^{-1}(V_2).$$

Također, iz (3.9) slijedi

$$f^{-1}(U_1) \cap B_1 = \emptyset, \quad f^{-1}(V_1) \cap A_1 = \emptyset, \quad f^{-1}(U_2) \cap B_2 = \emptyset \quad \text{i} \quad f^{-1}(V_2) \cap A_2 = \emptyset.$$

No, to je u kontradikciji s korolarom 3.3.4. Dakle, vrijedi $C_{i_0 j_0} \cap f(I^2) \neq \emptyset$. □

Teorem 3.3.21. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $f : I^2 \to X$ smještenje. Pretpostavimo da su $f(I^2)$ i $f(\partial I^2)$ poluizračunljivi skupovi u (X, d, α). Tada je $f(I^2)$ izračunljiv skup.*

Dokaz. Fiksirajmo $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(A_1) \subseteq J_{a_1}, \quad f(B_1) \subseteq J_{b_1}, \quad f(A_2) \subseteq J_{a_2} \quad \text{i} \quad f(B_2) \subseteq J_{b_2}$$

i

$$J_{a_1} \cap J_{b_1} = \emptyset \quad \text{i} \quad J_{a_2} \cap J_{b_2} = \emptyset.$$

Prema propoziciji 3.3.19, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $\ell \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

(1) $\mathcal{H}_\ell^2$ je pravi formalni 2-lanac,

(2) $f(I^2) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^2$,

(3) $\mathrm{fmesh}^2(\ell) < 2^{-k}$,

(4) $f(\partial I^2) \subseteq \partial \mathcal{H}_\ell^2$ i

(5) $\partial^{\leftleftarrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{a_1}$, $\partial^{\rightrightarrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{b_1}$, $\partial^{\downdownarrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{a_2}$ i $\partial^{\upuparrows} \mathcal{H}_\ell^2 \subseteq_F J_{b_2}$.

Promotrimo skup

$$\Omega = \left\{ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{vrijedi } (1) - (5) \right\}.$$

Taj skup je rekurzivno prebrojiv - to slijedi iz propozicija 3.3.7, 3.3.10 i 3.3.18, činjenice da je funkcija $\mathrm{fmesh}^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna i pretpostavke da su $f(I^2)$ i

$f(\partial I^2)$ poluizračunljivi skupovi. Sada prema teoremu 1.1.9 zaključujemo da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da sa svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $(k, \varphi(k)) \in \Omega$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Označimo $\ell = \varphi(k)$. Jasno, za (k, ℓ) vrijedi (1)-(5). Prema propoziciji 3.3.20, imamo

$$J_{\Sigma(\ell,i,j)} \cap f(I^2) \neq \emptyset, \qquad \forall 1 < i, j < \omega(\ell) - 1.$$

Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\alpha_{g(i)} \in J_i,\ \forall i \in \mathbb{N}$, kao u lemi 3.2.9. Tvrdimo da vrijedi

$$\left\{\alpha_{g(\Sigma(\ell,i,j))} \mid 1 < i, j < \omega(\ell) - 1\right\} \approx_{3 \cdot 2^{-k}} f(I^2). \tag{3.12}$$

Za $1 < i, j < \omega(\ell) - 1$ znamo da je

$$\alpha_{g(\Sigma(\ell,i,j))} \in J_{\Sigma(\ell,i,j)} \quad \text{i} \quad J_{\Sigma(\ell,i,j)} \cap f(I^2) \neq \emptyset.$$

Kako je $\mathrm{fmesh}^2(\ell) < 2^{-k}$, imamo $\mathrm{fdiam}(\Sigma(\ell, i, j)) < 2^{-k}$ pa postoji $x \in f(I^2)$ takav da je

$$d(\alpha_{g(\Sigma(\ell,i,j))}, x) < 2^{-k} < 3 \cdot 2^{-k}.$$

Obratno, za $x \in f(I^2)$ zbog (2) znamo da je $x \in J_{\Sigma(\ell,i,j)}$ za neke $0 \leq i, j \leq \omega(\ell)$. Lako se vidi da postoje $i', j' \in \{1, \ldots, \omega(\ell) - 1\}$ i $i'', j'' \in \{2, \ldots, \omega(\ell) - 2\}$ takvi da je

$$\max\{|i - i'|, |j - j'|\} \leq 1 \quad \text{i} \quad \max\{|i' - i''|, |j' - j''|\} \leq 1.$$

Kako je $\mathcal{H}^2_\ell$ pravi lanac, slijedi da postoje

$$a \in J_{\Sigma(\ell,i,j)} \cap J_{\Sigma(\ell,i',j')} \quad \text{i} \quad b \in J_{\Sigma(\ell,i',j')} \cap J_{\Sigma(\ell,i'',j'')}.$$

Stoga je

$$d(x, \alpha_{g(\Sigma(\ell,i,j))}) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, \alpha_{g(\Sigma(\ell,i,j))}) < 3 \cdot 2^{-k}.$$

Dakle, vrijedi (3.12).

Budući da je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\Phi(k) = \{g(\Sigma(\ell, i, j)) \mid 1 < i, j < \omega(\ell) - 1\}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

r.r.o. i skup $\Phi(k)$ je neprazan za svaki $k \in \mathbb{N}$, znamo da postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(k) = [h(k)],\ \forall k \in \mathbb{N}$. Sada iz (3.12) slijedi

$$f(I^2) \approx_{3 \cdot 2^{-k}} \Lambda_{h(k)}, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

odakle zaključujemo da je $f(I^2)$ izračunljiv skup. □

3.4 Izračunljiv tip

Neka je A topološki prostor i B potprostor od A. Kažemo da uređen par (A, B) ima **izračunljiv tip** (za klasu izračunljivih metričkih prostora) ako za svaki izračunljiv metrički prostor (X, d, α) i svako smještenje $f : A \to X$ takvo da su skupovi $f(A)$ i $f(B)$ poluizračunljivi vrijedi da je $f(A)$ izračunljiv.

Za topološki prostor A kažemo da ima izračunljiv tip ako $(A, \emptyset)$ ima izračunljiv tip.

Drugim riječima, za topološki prostor A vrijedi

A ima izračunljiv tip	$\Leftrightarrow$	za svaki izračunljiv metrički prostor (X, d, α) i svako smještenje $f : A \to X$ takvo da je $f(A)$ poluizračunljiv vrijedi da je $f(A)$ izračunljiv
	$\Leftrightarrow$	za svaki izračunljiv metrički prostor (X, d, α) vrijedi da je svaki poluizračunljiv skup S koji je homeomorfan s A izračunljiv.

Neka je K kontinuum lančast od a do b. Iz teorema 3.2.22 slijedi da $(K, \{a, b\})$ ima izračunljiv tip. Nadalje, iz teorema 3.3.21 slijedi da $(I^2, \partial I^2)$ ima izračunljiv tip.

Iz propozicije 3.1.7 slijedi da svaki konačan topološki prostor ima izračunljiv tip.

Može se pokazati da jedinična kružnica $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ ima izračunljiv tip. Zapravo, svaka sfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ima izračunljiv tip. Općenito, ako je M kompaktna mnogostrukost, onda M ima izračunljiv tip. Ako je M kompaktna mnogostrukost s rubom, onda $(M, \partial M)$ ima izračunljiv tip.

Poglavlje 4

Izračunljivi topološki prostori

4.1 Osnovne definicije i primjeri

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{T}$ takav da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Pretpostavimo da postoje rekurzivno prebrojivi skupovi $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}^2$ takvi da vrijedi

(1) ako je $(i, j) \in \mathcal{C}$, onda je $I_i \subseteq I_j$,

(2) ako je $(i, j) \in \mathcal{D}$, onda je $I_i \cap I_j = \emptyset$,

(3) ako su $i, j \in \mathbb{N}$ i $x \in I_i \cap I_j$, onda postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $(k, i), (k, j) \in \mathcal{C}$,

(4) ako su $x, y \in X$, $x \neq y$, onda postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $y \in I_j$ i $(i, j) \in \mathcal{D}$.

Tada za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ kažemo da je **izračunljiv topološki prostor**.

Za skupove $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kažemo da su **karakteristične relacije** za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Uočimo: ako je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, onda je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Propozicija 4.1.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $\mathcal{T}_d$ topologija inducirana metrikom d. Neka je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz racionalnih otvorenih kugli u (X, d, α) definiran na standardni način sa*

$$I_i = K(\lambda_i, \rho_i), \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor.

Dokaz. Jasno je da vrijedi $I_i \in \mathcal{T}_d$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Neka je $U \in \mathcal{T}_d$ i $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Odaberimo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in K(\alpha_i, \varepsilon)$. Vrijedi

$$K(\alpha_i, \varepsilon) \subseteq K(x, r) \subseteq U.$$

No, znamo da je $K(\alpha_i, \varepsilon) = I_j$ za neki $j \in \mathbb{N}$, pa je

$$x \in I_j \subseteq U.$$

Dakle, $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Definirajmo skupove

$$\mathcal{C} = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\right\} \quad \text{i} \quad \mathcal{D} = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\right\}.$$

Iz propozicija 2.2.3 i 2.5.2 znamo da su skupovi $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ rekurzivno prebrojivi. Nadalje, imamo

$$I_i \subseteq_F I_j \quad \Rightarrow \quad I_i \subseteq I_j$$

i

$$I_i \diamond I_j \quad \Rightarrow \quad I_i \cap I_j = \emptyset,$$

pa vrijedi (1) i (2) iz definicije karakterističnih relacija.

Pretpostavimo da su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da postoji $x \in I_i \cap I_j$. Tada je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$ i $d(x, \lambda_j) < \rho_j$. Odaberimo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $\varepsilon > 0$ i

$$d(x, \lambda_i) + 2\varepsilon < \rho_i, \qquad d(x, \lambda_j) + 2\varepsilon < \rho_j.$$

Znamo da postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in K(\alpha_u, \varepsilon)$. Imamo

$$d(\alpha_u, \lambda_i) + \varepsilon \leq d(\alpha_u, x) + d(x, \lambda_i) + \varepsilon < d(x, \lambda_i) + 2\varepsilon < \rho_i.$$

Analogno dobivamo $d(\alpha_u, \lambda_j) + \varepsilon < \rho_j$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_u, \varepsilon) = (\lambda_k, \rho_k)$. Tada je

$$I_k \subseteq_F I_i, \qquad I_k \subseteq_F I_j \quad \text{i} \quad x \in I_k,$$

pa vrijedi (3).

Neka su sada $x, y \in X$, $x \neq y$. Odaberimo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < 4\varepsilon < d(x, y)$. Neka su $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in K(\alpha_u, \varepsilon)$ i $y \in K(\alpha_v, \varepsilon)$. Kad bi bilo $d(\alpha_u, \alpha_v) \leq 2\varepsilon$, imali bismo

$$d(x, y) \leq d(x, \alpha_u) + d(\alpha_u, \alpha_v) + d(\alpha_v, y) < \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

što je u kontradikciji s izborom broja ε. Dakle, vrijedi $d(\alpha_u, \alpha_v) > 2\varepsilon$. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(\lambda_i, \rho_i) = (\alpha_u, \varepsilon)$ i $(\lambda_j, \rho_j) = (\alpha_v, \varepsilon)$. Tada je $x \in I_i$, $y \in I_j$ i $I_i \diamond I_j$, pa vrijedi (4). Prema tome, $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ je izračunljiv topološki prostor. $\square$

Ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, za prostor $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ iz prethodne propozicije kažemo da je izračunljiv topološki prostor pridružen izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Napomena 4.1.2. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $x \in X$. Tada je x izračunljiva točka u (X, d, α) ako i samo ako je skup $\{I_i \mid x \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv. Naime, ako je x izračunljiva točka, onda je skup $\{x\}$ izračunljiv, pa je i izračunljivo prebrojiv. To znači da je skup

$$\{I_i \mid \{x\} \subseteq I_i\} = \{I_i \mid x \in I_i\}$$

rekurzivno prebrojiv. Obratno, ako je skup $\{I_i \mid x \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv, imamo da je skup $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv. Također, za $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} x \in J_j \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists i \in [j]) \ x \in I_i \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists i \in \mathbb{N}) \ x \in I_i \text{ i } i \in [j] \end{aligned}$$

pa iz teorema o projekciji slijedi da je $\{x\}$ poluizračunljiv. Stoga je $\{x\}$ izračunljiv, pa je x izračunljiva točka.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Kažemo da je $x \in X$ **izračunljiva točka** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv.

Neka je $S \subseteq X$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Kažemo da je S **izračunljivo prebrojiv skup** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv.

Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i.$$

Ako je S kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$, kažemo da je S **poluizračunljiv skup** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.

Lako se vidi da ova definicija ne ovisi o izboru funkcija $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Za $S \subseteq X$ kažemo da je **izračunljiv skup** u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ ako je izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv.

Primijetimo da su definicije izračunljivo prebrojivog i poluizračunljivog skupa u izračunljivom topološkom prostoru direktne generalizacije odgovarajućih definicija u izračunljivom metričkom prostoru, a prema napomeni 4.1.2 isto vrijedi i za definiciju izračunljive točke.

Napomena 4.1.3. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $x_0 \in X$ i $S \subseteq X$. Neka je $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor pridružen prostoru (X, d, α). Tada vrijedi:

(i) x_0 je izračunljiva točka u (X, d, α) ako i samo ako je x_0 izračunljiva točka u $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$;

(ii) S je izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α) ako i samo ako je S izračunljivo prebrojiv skup u $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$;

(iii) S je poluizračunljiv skup u (X, d, α) ako i samo ako je S poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$;

(iv) S je izračunljiv skup u (X, d, α) ako i samo ako je S izračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}_d, (I_i))$.

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ takve da vrijedi

(5) $\mathcal{D}$ je simetrična,

(6) $\mathcal{C}$ je refleksivna i tranzitivna,

(7) za $i, j, k \in \mathbb{N}$ takve da je $(k, i) \in \mathcal{C}$ i $(i, j) \in \mathcal{D}$ vrijedi $(k, j) \in \mathcal{D}$.

Tada za $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kažemo da su **prave karakteristične relacije** za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Propozicija 4.1.4. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada postoje prave karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ neke karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Definiramo

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \left\{ (j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid (i, j) \in \mathcal{D} \right\}$$

i

$$\mathcal{C}' = \Big\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists n \in \mathbb{N})\, (\exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}) \;\; i = a_0, \;\; j = a_n \\ \text{i } \forall k < n \;\, (a_k, a_{k+1}) \in \mathcal{C} \Big\}.$$

Imamo $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ i $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$. Jasno je da je $\mathcal{D}'$ rekurzivno prebrojiv skup. Kako je skup

$$\Omega = \{ a \in \mathbb{N} \mid ((a)_k, (a)_{k+1}) \in \mathcal{C} \;\, \forall k \leq \overline{a} \}$$

rekurzivno prebrojiv, iz

$$\mathcal{C}' = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists a \in \mathbb{N}) \;\, (a)_0 = i, \;\, a_{\overline{a}} = j \text{ i } a \in \Omega \right\}$$

slijedi da je i $\mathcal{C}'$ rekurzivno prebrojiv.

Iz konstrukcije je jasno da je relacija $\mathcal{D}'$ simetrična i relacija $\mathcal{C}'$ refleksivna i tranzitivna. Nadalje, ako je $(i, j) \in \mathcal{C}'$, iz (1) i tranzitivnosti inkluzije slijedi $I_i \subseteq I_j$. Ako je $(i, j) \in \mathcal{D}'$, očito vrijedi $I_i \cap I_j = \emptyset$. Dakle, $\mathcal{C}'$ i $\mathcal{D}'$ su karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Pretpostavimo sada da su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ koje zadovoljavaju (5) i (6). Definiramo

$$\mathcal{D}' = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists u, v \in \mathbb{N})\ (u, v) \in \mathcal{D},\ (i, u) \in \mathcal{C} \text{ i } (j, v) \in \mathcal{C}\right\}.$$

Sada su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}'$ tražene prave karakteristične relacije. Naime, jasno je da je $\mathcal{D}'$ rekurzivno prebrojiv i da vrijedi (1)-(6). Odaberimo $(k, i) \in \mathcal{C}$ i $(i, j) \in \mathcal{D}'$. Tada postoji $(u, v) \in \mathcal{D}$ takav da je $(i, u), (j, v) \in \mathcal{C}$. Iz $(k, i) \in \mathcal{C}$ i $(i, u) \in \mathcal{C}$ slijedi $(k, u) \in \mathcal{C}$, a zatim iz $(j, v) \in \mathcal{C}$ i $(u, v) \in \mathcal{D}$ slijedi $(k, j) \in \mathcal{D}'$. Dakle, vrijedi (7). □

4.2 Efektivna separacija kompaktnih skupova

Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ fiksirane prave karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Lema 4.2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ i $x \in I_{i_0} \cap \cdots \cap I_{i_n}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $(k, i_0), \ldots, (k, i_n) \in \mathcal{C}$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n. Za $n = 0$ tvrdnja je očita, a za $n = 1$ to je upravo uvjet (3).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \geq 1$. Neka je

$$x \in I_{i_0} \cap \cdots \cap I_{i_{n+1}}$$

za neke $i_0, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$. Tada je $x \in I_{i_0} \cap \cdots \cap I_{i_n}$, pa po pretpostavci postoji $k' \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k'$ i $(k', i_j) \in \mathcal{C},\ \forall j \in \{0, \ldots, n\}$. Sada imamo $x \in I_{k'} \cap I_{i_{n+1}}$, pa prema (3) postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $(k, k') \in \mathcal{C}$ i $(k, i_{n+1}) \in \mathcal{C}$. Odavde zbog tranzitivnosti od $\mathcal{C}$ slijedi $(k, i_j) \in \mathcal{C},\ \forall j \in \{0, \ldots, n+1\}$. □

Neka su $i, a \in \mathbb{N}$. Definiramo sljedeću relaciju:

$$I_i \subseteq_{\mathcal{C}} J_a \quad \Leftrightarrow \quad (\exists j \in [a])\ (i, j) \in \mathcal{C}.$$

Očito, ako je $I_i \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$, onda vrijedi $I_i \subseteq J_a$. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_a \subseteq_{\mathcal{C}} J_b \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in [a])\ I_i \subseteq_{\mathcal{C}} J_b$$

i tada kažemo da je J_a $\mathcal{C}$-**podskup** od J_b.
Jasno, $J_a \subseteq_{\mathcal{C}} J_b$ povlači $J_a \subseteq J_b$.

Propozicija 4.2.2. *Skup* $\Omega = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \subseteq_{\mathcal{C}} J_b\}$ *je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Iz rekurzivne prebrojivosti od $\mathcal{C}$ lako slijedi da je skup

$$\Gamma = \left\{(i,a) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_{\mathcal{C}} J_a\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Sada iz

$$(a,b) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad [a] \times \{b\} \subseteq \Gamma$$

zaključujemo da je i Ω rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 4.2.3. *Neka je* K *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$ *i* $K \subseteq J_a \cap J_b$ *za neke* $a, b \in \mathbb{N}$. *Tada postoji* $c \in \mathbb{N}$ *takav da je* $K \subseteq J_c$ *te* $J_c \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$ *i* $J_c \subseteq_{\mathcal{C}} J_b$.

Dokaz. Neka je $x \in K$ proizvoljan. Tada je $x \in J_a \cap J_b$, pa postoje $i \in [a]$ i $j \in [b]$ takvi da je $x \in I_i \cap I_j$. Prema (3), postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $(k,i), (k,j) \in \mathcal{C}$. Dakle, za svaki $x \in K$ možemo pronaći $k_x \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in I_{k_x}, \qquad I_{k_x} \subseteq_{\mathcal{C}} J_a \quad \text{i} \quad I_{k_x} \subseteq_{\mathcal{C}} J_b.$$

Kako je K kompaktan, postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in K$ takvi da je $K \subseteq I_{k_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{k_{x_n}}$. Sada za $c \in \mathbb{N}$ takav da je $[c] = \{k_{x_0}, \ldots, k_{x_n}\}$ vrijedi $J_c \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$, $J_c \subseteq_{\mathcal{C}} J_b$ i $K \subseteq J_c$. □

Uočimo da za $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$J_a \subseteq_{\mathcal{C}} J_b \text{ i } J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_c \quad \Rightarrow \quad J_a \subseteq_{\mathcal{C}} J_c,$$

odnosno, relacija $\subseteq_{\mathcal{C}}$ je tranzitivna.

Korolar 4.2.4. *Neka je* K *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$. *Pretpostavimo da je*

$$K \subseteq J_{a_1} \cap \cdots \cap J_{a_n}, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}.$$

Tada postoji $c \in \mathbb{N}$ *takav da je* $K \subseteq J_c$ *i* $J_c \subseteq_{\mathcal{C}} J_{a_{0,}}, \ \ldots \ J_c \subseteq_{\mathcal{C}} J_{a_n}$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom pomoću propozicije 4.2.3, slično kao lemu 4.2.1. □

Neka su $i, a \in \mathbb{N}$. Pišemo $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a$ ako je $(i,j) \in \mathcal{D}$, $\forall j \in [a]$. Lako se vidi da je skup

$$\left\{(i,a) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_a \diamond_{\mathcal{D}} J_b \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in [a])\ I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_b$$

i kažemo da su J_a i J_b **$\mathcal{D}$-disjunktni**.
Uočimo: ako je $J_a \diamond_{\mathcal{D}} J_b$, onda je $J_a \cap J_b = \emptyset$. Također, uočimo da vrijedi

$$J_a \diamond_{\mathcal{D}} J_b \quad \Leftrightarrow \quad J_b \diamond_{\mathcal{D}} J_a.$$

Propozicija 4.2.5. *Skup $\Omega = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \diamond_{\mathcal{D}} J_b\}$ je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz

$$(a,b) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad [a] \times \{b\} \subseteq \big\{(i,a) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a\big\}$$

i činjenice da je skup s desne strane rekurzivno prebrojiv. □

Lema 4.2.6. *Neka su $i, a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

(i) ako je $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a$ i $J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$, onda je $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_b$;

(ii) ako je $J_c \diamond_{\mathcal{D}} J_a$ i $J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$, onda je $J_c \diamond_{\mathcal{D}} J_b$;

(iii) ako je $J_c \diamond_{\mathcal{D}} J_a$, $J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$ i $J_d \subseteq_{\mathcal{C}} J_c$, onda je $J_d \diamond_{\mathcal{D}} J_b$.

Dokaz.

(i) Za svaki $j \in [b]$ postoji $k \in [a]$ takav da je $(j,k) \in \mathcal{C}$, a iz $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a$ slijedi $(i,k) \in \mathcal{D}$. Prema uvjetu (7), tada vrijedi $(i,j) \in \mathcal{D}$.

(ii) Za svaki $i \in [c]$ imamo $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a$, pa tvrdnja slijedi iz (i).

(iii) Iz $J_c \diamond_{\mathcal{D}} J_a$ i $J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$ prema (ii) slijedi $J_c \diamond_{\mathcal{D}} J_b$. Odavde i iz $J_d \subseteq_{\mathcal{C}} J_c$ ponovno prema (ii) slijedi $J_d \diamond_{\mathcal{D}} J_b$.

□

Lema 4.2.7. *Neka je K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ i $x \in X \setminus K$. Tada postoje $i, a \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $K \subseteq J_a$ i $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a$.*

Dokaz. Neka je $y \in K$ proizvoljan. Tada je očito $x \neq y$, pa prema (4) postoje $i_y, j_y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i_y}$, $y \in I_{j_y}$ i $(i_y, j_y) \in \mathcal{D}$.

Kako je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_0, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq I_{j_{y_0}} \cup \dots \cup I_{j_{y_n}}.$$

Tada imamo $x \in I_{i_{y_0}} \cap \cdots \cap I_{i_{y_n}}$. Prema lemi 4.2.1, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ i $(i, i_{y_t}) \in \mathcal{C}$, $\forall t \in \{0, \ldots, n\}$.

Kako je $(i_{y_0}, j_{y_0}), \ldots, (i_{y_n}, j_{y_n}) \in \mathcal{D}$, prema (7) imamo $(i, j_{y_0}), \ldots, (i, j_{y_n}) \in \mathcal{D}$. Neka je $a \in \mathbb{N}$ takav da je $[a] = \{j_{y_0}, \ldots, j_{y_n}\}$. Tada je $K \subseteq J_a$ i vrijedi $I_i \diamond_{\mathcal{D}} J_a$. $\square$

Propozicija 4.2.8. *Neka su K i L neprazni disjunktni kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoji $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_a$, $L \subseteq J_b$ i $J_a \diamond_{\mathcal{D}} J_b$.*

Dokaz. Prema lemi 4.2.7, za svaki $x \in K$ postoje $c_x, i_x \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i_x}$, $L \subseteq J_{c_x}$ i $I_{i_x} \diamond_{\mathcal{D}} J_{c_x}$. Kako je K kompaktan, postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in K$ takvi da je $K \subseteq I_{i_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{i_{x_n}}$.

Imamo $L \subseteq J_{c_{x_0}} \cap \cdots \cap J_{c_{x_n}}$. Prema korolaru 4.2.4, postoji $b \in \mathbb{N}$ takav da je $L \subseteq J_b$ i $J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_{c_{x_0}}, \ \ldots \ J_b \subseteq_{\mathcal{C}} J_{c_{x_n}}$. Prema lemi 4.2.6 (i), imamo i $I_{i_{x_0}} \diamond_{\mathcal{D}} J_b, \ \ldots \ I_{i_{x_n}} \diamond_{\mathcal{D}} J_b$. Sada za $a \in \mathbb{N}$ takav da je $[a] = \{i_{x_0}, \ldots, i_{x_n}\}$ vrijedi $K \subseteq J_a$ i $J_a \diamond_{\mathcal{D}} J_b$. $\square$

Teorem 4.2.9. *Neka je $\mathcal{F}$ konačna familija nepraznih kompaktnih skupova u $(X, \mathcal{T})$ i neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ konačan skup. Tada za svaki $K \in \mathcal{F}$ možemo odabrati $i_K \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi:*

(i) *za svaki $K \in \mathcal{F}$ vrijedi $K \subseteq J_{i_K}$,*

(ii) *ako su $K, L \in \mathcal{F}$ takvi da je $K \cap L = \emptyset$, onda je $J_{i_K} \diamond_{\mathcal{D}} J_{i_L}$,*

(iii) *ako je $K \in \mathcal{F}$ i $a \in A$ takav da $K \subseteq J_a$, onda je $J_{i_K} \subseteq_{\mathcal{C}} J_a$.*

Dokaz. Za svaki par disjunktnih skupova $K, L \in \mathcal{F}$ prema propoziciji 4.2.8 postoje $u_{(K,L)}, v_{(K,L)} \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_{u_{(K,L)}}$, $L \subseteq J_{v_{(K,L)}}$ i $J_{u_{(K,L)}} \diamond_{\mathcal{D}} J_{v_{(K,L)}}$.

Neka je $K \in \mathcal{F}$. Skup

$$\Gamma = \big\{u_{(K,L)} \mid L \in \mathcal{F} \text{ t.d } K \cap L = \emptyset\big\} \cup \\ \cup \big\{v_{(L,K)} \mid L \in \mathcal{F} \text{ t.d } L \cap K = \emptyset\big\} \cup \{a \in A \mid K \subseteq J_a\}$$

je konačan i vrijedi $K \subseteq J_t$ za svaki $t \in \Gamma$, pa prema korolaru 4.2.4 postoji $i_K \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_{i_K}$ i $J_{i_K} \subseteq_{\mathcal{C}} J_t$, $\forall t \in \Gamma$.

Jasno je da vrijede tvrdnje (i) i (iii). Dokažimo (ii). Neka su $K, L \in \mathcal{F}$ takvi da je $K \cap L = \emptyset$. Tada je $J_{i_K} \subseteq_{\mathcal{C}} J_{u_{(K,L)}}$, $J_{i_L} \subseteq_{\mathcal{C}} J_{v_{(K,L)}}$ i $J_{u_{(K,L)}} \diamond_{\mathcal{D}} J_{v_{(K,L)}}$, pa prema lemi 4.2.6 (iii) imamo $J_{i_K} \diamond_{\mathcal{D}} J_{i_L}$. $\square$

Teorem 4.2.10. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada postoje rekurzivno prebrojivi skupovi $C, D \subseteq \mathbb{N}^2$ takvi da vrijedi:*

(1) *za sve $(i, j) \in C$, vrijedi $J_i \subseteq J_j$;*

(2) za sve $(i,j) \in D$ vrijedi $J_i \cap J_j = \emptyset$;

(3) ako je $\mathcal{F}$ neprazna konačna familija nepraznih kompaktnih skupova u $(X, \mathcal{T})$ i ako je $A \subseteq \mathbb{N}$ konačan, onda za svaki $K \in \mathcal{F}$ možemo odabrati $i_K \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi:

(i) za svaki $K \in \mathcal{F}$ vrijedi $K \subseteq J_{i_K}$,

(ii) ako su $K, L \in \mathcal{F}$ takvi da je $K \cap L = \emptyset$, onda je $(i_K, i_L) \in D$,

(iii) ako je $K \in \mathcal{F}$ i $a \in A$ takav da $K \subseteq J_a$, onda je $(i_K, a) \in C$.

Dokaz. Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ prave karakteristične relacije za $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Stavimo

$$C = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid J_i \subseteq_{\mathcal{C}} J_j\right\} \quad \text{i} \quad D = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid J_i \diamond_{\mathcal{D}} J_j\right\}.$$

Prema propozicijama 4.2.2 i 4.2.5 skupovi C i D su rekurzivno prebrojivi. Jasno je da vrijedi (1) i (2). Prema teoremu 4.2.9 vrijedi (3). □

4.3 Hausdorffov kontinuum

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ familije skupova. Kažemo da $\mathcal{U}$ **profinjuje** $\mathcal{V}$ ako za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $U \subseteq V$.

Neka je $C_0, \ldots, C_m$ lanac u skupu X te neka je $\mathcal{U}$ familija podskupova od X. Kažemo da je $C_0, \ldots, C_m$ **$\mathcal{U}$-lanac** ako familija $\{C_0, \ldots, C_m\}$ profinjuje $\mathcal{U}$. Dakle, $C_0, \ldots, C_m$ je $\mathcal{U}$-lanac ako za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$ vrijedi $C_i \subseteq U$ za neki $U \in \mathcal{U}$.

Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X **Hausdorffov kontinuum** ako je X povezan i kompaktan Hausdorffov prostor.

Za Hausdorffov kontinuum X kažemo da je **lančast** ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreni $\mathcal{U}$-lanac $C_0, \ldots, C_m$ koji pokriva X.

Propozicija 4.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je (X, d) lančast kontinuum ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ lančast Hausdorffov kontinuum.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) lančast kontinuum. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $(X, \mathcal{T}_d)$. Kako je (X, d) kompaktan, postoji Lebesgueov broj $\lambda > 0$ za $\mathcal{U}$. Neka je $C_0, \ldots C_m$ otvoren λ-lanac u (X, d) koji pokriva X. Iz definicije Lebesgueovog broja slijedi da $\{C_0, \ldots, C_m\}$ profinjuje $\mathcal{U}$.

Obratno, pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov kontinuum. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\mathcal{U} = \left\{K(x, \frac{\varepsilon}{3}) \mid x \in X\right\}$$

otvoreni pokrivač za $(X, \mathcal{T}_d)$, pa postoji otvoreni $\mathcal{U}$-lanac $C_0, \ldots, C_m$ koji pokriva X. Zbog $\operatorname{diam} K(x, \frac{\varepsilon}{3}) \leq \varepsilon$, $\forall x \in X$ imamo da je $C_0, \ldots, C_m$ ε-lanac. □

Neka je X Hausdorffov kontinuum i neka su $a, b \in X$. Kažemo da je X **lančast od** a **do** b ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreni $\mathcal{U}$-lanac $C_0, \ldots, C_m$ koji pokriva X takav da $a \in C_0$ i $b \in C_m$.

Propozicija 4.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor i $a, b \in X$. Tada je (X, d) kontinuum lančast od a do b ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ Hausdorffov kontinuum lančast od a do b.*

Dokaz. Dokaz provodimo analogno kao za propoziciju 4.3.1. □

Uočimo: ako je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $S \subseteq X$ kompaktan, onda je prostor S s relativnom topologijom metrizabilan. Naime, kako je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov, S je kompaktan Hausdorffov prostor, pa je normalan. Budući da $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, i S zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pa slijedi da je S metrizabilan.

Propozicija 4.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $x_0 \in X$ izračunljiva točka. Tada je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid x_0 \in J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz

$$x_0 \in J_j \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i \in [j]) \ x_0 \in I_i$$

prema teoremu o projekciji. □

Propozicija 4.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$J_u \cup J_v \cup J_w = J_{g(u,v,w)}, \qquad \forall u, v, w \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Funkcija $\Phi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(u, v, w) = [u] \cup [v] \cup [w]$ je r.r.o. i $\Phi(u, v, w) \neq \emptyset$, $\forall u, v, w \in \mathbb{N}$. Stoga postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(u, v, w) = [g(u, v, w)]$, $\forall u, v, w \in \mathbb{N}$. Tada je

$$J_u \cup J_v \cup J_w = \bigcup_{i \in [u]} I_i \cup \bigcup_{j \in [v]} I_j \cup \bigcup_{k \in [w]} I_k = \bigcup_{i \in [u] \cup [v] \cup [w]} I_i = \bigcup_{i \in [g(u,v,w)]} I_i = J_{g(u,v,w)}.$$

□

Napomena 4.3.5. Ako je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, i $x_0 \in X$ takav da je $\{x_0\}$ poluizračunljiv skup, onda je $\{x_0\}$ izračunljiv skup. Naime, imamo

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap \{x_0\} \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid x_0 \in I_i\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \{x_0\} \subseteq J_{f(i)}\},$$

pri čemu je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $I_i = J_{f(i)}, \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Teorem 4.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i S poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Pretpostavimo da je S, kao potprostor od $(X, \mathcal{T})$, Hausdorffov kontinuum lančast od a do b, pri čemu su a i b izračunljive točke u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Tada je S izračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.*

Dokaz. Kako je S Hausdorffov kontinuum, on je kompaktan, pa postoji metrika d na S takva da se $\mathcal{T}_d$ podudara s relativnom topologijom na S.

Promotrimo najprije slučaj $a = b$. Prema propoziciji 4.3.2, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε-lanac $C_0, \ldots, C_m$ u (S, d) od a do b koji pokriva S. Kako je $a \in C_0$, $b \in C_m$ i $a = b$, slijedi $m = 0$ ili $m = 1$. Stoga je $\operatorname{diam} S \leq 2\varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$, pa imamo $S = \{a\}$. No, tada je S izračunljiv prema napomeni 4.3.5.

Pretpostavimo da je $a \neq b$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in S \cap I_i$, $x \notin \{a, b\}$. Naime, kad bi bilo $I_i \cap S \subseteq \{a, b\}$, skup $I_i \cap S$ bi istovremeno bio zatvoren (jer je konačan) i otvoren (jer je I_i otvoren) u S, što je nemoguće zbog povezanosti od S.

Neka je $x \in S \cap I_i$, $x \neq a, b$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq I_i \cap S$. Neka je $\varepsilon = \min\{r, \ d(a, x), \ d(b, x)\}$. Jasno, imamo $\varepsilon > 0$. Neka je $K_0, \ldots, K_m$ kompaktan ε-lanac u (S, d) od a do b koji pokriva S. Tada je $x \in K_n$ za neki $0 \leq n \leq m$. Zbog $\operatorname{diam} K_n < d(a, x)$ i $\operatorname{diam} K_n < d(b, x)$ vrijedi $n \neq 0$ i $n \neq m$. Također, zbog $\operatorname{diam} K_n < r$ imamo $K_n \subseteq K(x, r)$, pa je $K_n \subseteq I_i$.

Promotrimo skupove

$$F_1 = K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1}, \qquad F_2 = K_n \quad \text{i} \quad F_3 = K_{n+1} \cup \cdots \cup K_m.$$

Imamo $a \in F_1$, $b \in F_3$ i $x \in F_2 \subseteq I_i$. Također, vrijedi $F_1 \cap F_3 = \emptyset$ i $S = F_1 \cup F_2 \cup F_3$.

Neka su C i D rekurzivno prebrojivi skupovi kao u teoremu 4.2.10 i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $I_i = J_{f(i)}, \ \forall i \in \mathbb{N}$. Tada postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $F_1 \subseteq J_u$, $F_2 \subseteq J_v$, $F_3 \subseteq J_w$, $(u, w) \in D$ i $(v, f(i)) \in C$.

Prema tome, ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$, postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

(i) $a \in J_u$, $b \in J_w$,

(ii) $S \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$,

(iii) $(u, w) \in D$,

(iv) $(v, f(i)) \in C$.

Iz pretpostavke teorema, propozicija 4.3.3 i 4.3.4 i činjenice da su C i D rekurzivno prebrojivi skupovi slijedi da je skup

$$\Omega = \{(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{vrijedi (i)-(iv)}\}$$

rekurzivno prebrojiv. Dakle, ako je $I_i \cap S \neq \emptyset$, postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, u, v, w) \in \Omega$.

Pretpostavimo sada da za $i \in \mathbb{N}$ postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, u, v, w) \in \Omega$. Tvrdimo da je tada $I_i \cap S \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Tada iz $(v, f(i)) \in C$ slijedi $J_v \subseteq J_{f(i)} = I_i$, pa je $J_v \cap S = \emptyset$. Odavde i iz (ii) slijedi $S \subseteq J_u \cup J_w$. Iz (iii) slijedi $J_u \cap J_v = \emptyset$. No, kako je $a \in J_u$ i $b \in J_v$, ovo je u kontradikciji s povezanosti od S. Dakle, vrijedi $I_i \cap S \neq \emptyset$.

Zaključujemo da za $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$I_i \cap S \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (\exists u, v, w \in \mathbb{N})\ (i, u, v, w) \in \Omega.$$

Prema teoremu o projekciji, odavde slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. Stoga je S izračunljivo prebrojiv. Dakle, S je izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$, odnosno, S je izračunljiv. $\square$

Neka je A topološki prostor i B potprostor od A. Za uređen par (A, B) kažemo da **ima izračunljiv tip za klasu izračunljivih topoloških prostora** ako za svaki izračunljiv topološki prostor $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ i svako (topološko) smještenje $f : A \to X$ takvo da su skupovi $f(A)$ i $f(B)$ poluizračunljivi vrijedi da je $f(A)$ izračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$.

Lema 4.3.7. *Neka je S poluizračunljiv skup u izračunljivom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ i neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada je i skup $S \setminus J_m$ poluizračunljiv.*

Dokaz. Tvrdnja lako slijedi iz činjenice da za $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$S \setminus J_m \subseteq J_i \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq J_i \cup J_m \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq J_{h(i,m)},$$

pri čemu je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $[h(u, v)] = [u] \cup [v]$, $\forall u, v \in \mathbb{N}$. $\square$

Propozicija 4.3.8. *Neka je X Hausdorffov kontinuum lančast od a do b i neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam. Tada je Y Hausdorffov kontinuum lančast od $f(a)$ do $f(b)$.*

Dokaz. Kako je X Hausdorffov kontinuum i Y je homeomorfan s X, jasno je da je Y Hausdorffov kontinuum. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od Y. Tada je

$$\mathcal{U} = \left\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V} \right\}$$

otvoreni pokrivač od X. Neka je $C_0, \ldots, C_m$ otvoreni $\mathcal{U}$-lanac u X od a do b koji pokriva X. Tada je $f(C_0), \ldots, f(C_m)$ otvoreni $\mathcal{V}$-lanac u Y od $f(a)$ do $f(b)$ koji pokriva Y. $\square$

Propozicija 4.3.9. *Neka je A Hausdorffov kontinuum lančast od a do b. Tada $(A, \{a, b\})$ ima izračunljiv tip za klasu izračunljivih topoloških prostora.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je $f : A \to X$ smještenje takvo da su skupovi $f(A)$ i $f(\{a, b\})$ poluizračunljivi.

Ako je $a = b$, slično kao u dokazu teorema 4.3.6 zaključujemo da je $A = \{a\}$. Tada je $f(A) = \{f(a)\}$ jednočlan poluizračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$, pa je izračunljiv prema napomeni 4.3.5.

Pretpostavimo sada da je $a \neq b$. Tada je $f(a) \neq f(b)$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f(a) \in J_m$ i $f(b) \notin J_m$. Prema lemi 4.3.7, imamo da je skup

$$f(\{a, b\}) \setminus J_m = \{f(a), f(b)\} \setminus J_m = \{f(b)\}$$

izračunljiv. Analogno dobivamo i da je $\{f(a)\}$ izračunljiv. Dakle, $f(a)$ i $f(b)$ su izračunljive točke u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. Nadalje, prema propoziciji 4.3.8, $f(A)$ je Hausdorffov kontinuum lančast od $f(a)$ do $f(b)$, pa je prema teoremu 4.3.6 izračunljiv skup u $(X, \mathcal{T}, (I_i))$. $\square$

Bibliografija

[1] V. Čačić, *Izračunljivost za računarce*, nastavni materijali, 2018.

[2] V. Brattka, *Plottable real number functions and the computable graph theorem*, SIAM Journal on Computing **38** (2008), 303–328.

[3] V. Brattka i B. Presser, *Computability on subsets of metric spaces*, Theoretical Computer Science **305** (2003), 43–76.

[4] R. Engelking, *Dimension theory*, North-Holland Publishing Company, 1978.

[5] Z. Iljazović, *Co-c.e. spheres and cells in computable metric spaces*, Logical Methods in Computer Science **7** (2011).

[6] Z. Iljazović i I. Sušić, *Semicomputable manifolds in computable topological spaces*, Journal of Complexity **45** (2018), 83 – 114.

[7] M. B. Pour-El i I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, 1989.

[8] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, 2009.

[9] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, 2000.

[10] K. Weihrauch i T. Grubba, *Elementary Computable Topology*, Journal of Universal Computer Science **15** (2009), br. 6, 1381–1422.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo izračunljivost poluizračunljivih skupova u izračunljivim metričkim prostorima. Rad je podijeljen u četiri poglavlja. U prvom poglavlju generaliziramo teoreme klasične teorije izračunljivosti na funkcije s kodomenama $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, te dokazujemo tehničke rezultate koji će nam biti korisni u kasnijim razmatranjima.

U drugom poglavlju definiramo izračunljiv metrički prostor i uvodimo osnovne pojmove vezane uz izračunljivost u metričkom prostoru. Proučavamo *izračunljivo prebrojive*, *izračunljive*, *poluizračunljive* i *koizračunljivo prebrojive* skupove. Dokazujemo da je kompaktan skup u izračunljivom metričkom prostoru izračunljiv ako i samo ako je poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv.

Glavni dio rada je treće poglavlje, u kojem dokazujemo izračunljivost nekih poluizračunljivih skupova u izračunljivom metričkom prostoru. Konkretno, dokazujemo da je poluizračunljiv lančast kontinuum s poluizračunljivim krajnjim točkama izračunljiv, te da je poluizračunljiva dvodimenzionalna ćelija s poluizračunljivim rubom izračunljiva.

U četvrtom poglavlju definiramo nešto općenitiji ambijent, izračunljiv topološki prostor, i dokazujemo da je poluizračunljiv Hausdorffov kontinuum s poluizračunljivim krajnjim točkama izračunljiv u izračunljivom topološkom prostoru.

Summary

In this thesis we study computability of semicomputable sets in computable metric spaces. The thesis is divided into four chapters. In the first chapter we generalise theorems from classical computability theory to functions with values in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$, and we prove some technical results which will be useful in further studies.

In the second chapter we define computable metric spaces and we introduce some basic notions regarding computability in a metric space. We study *computably enumerable*, *computable*, *semicomputable* and *co-computably enumerable* sets. We show that a compact set in a computable metric space is computable if and only if it is semicomputable and computably enumerable.

The main part of this thesis is the third chapter, in which we prove computability of certain semicomputable sets in a computable metric space. Namely, we prove that a semicomputable chainable continuum with semicomputable endpoints is computable, and that a semicomputable two-dimensional cell with semicomputable border is computable.

In the fourth chapter we define a more general ambient space, computable topological space, and we show that a semicomputable Hausdorff continuum with semicomputable endpoints is computable in a computable topological space.

Životopis

Rođena sam 9. prosinca 1995. godine u Varaždinu, gdje sam pohađala I. osnovnu školu, te kasnije Prvu gimnaziju. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na državnim natjecanjima iz matematike i logike.

Obrazovanje sam nastavila na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, gdje sam 2014. godine upisala preddiplomski studij *Matematika*, te potom 2017. godine diplomski studij *Teorijska matematika.*

Tijekom studija bila sam demonstratorica iz nekoliko kolegija. Po završetku oba studija nagrađena sam za izniman uspjeh od Vijeća Matematičkog odsjeka, a po završetku diplomskog studija i od Vijeća Prirodoslovno-matematičkog fakulteta.