Cjelobrojne funkcije i primjene

Čičko, Jana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jana Čičko

CJELOBROJNE FUNKCIJE I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mario Krnić

Suvoditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima

Sadržaj

Uvod

Cijeli brojevi temelj su diskretne matematike te nije neuobičajeno da nam je potreban samo cijeli dio nekog realnog broja.
Upravo je cilj ovoga diplomskoga rada upoznati se s funkcijama koje nam omogućuju da realnom broju pridružimo odgovarajući cijeli dio. Funkciju koja nekom realnom broju pridružuje najveći cijeli broj, koji je manji od tog broja nazivamo funkcijom najveće cijelo, a funkciju koja tom broju pridružuje najmanji cijeli broj veći od tog broja nazivamo funkcijom najmanje cijelo. Funkciju najveće cijelo još nazivamo pod, a funkciju najmanje cijelo strop. Te funkcije zajednički nazivamo cjelobrojnim funkcijama.
U prvom poglavlju najprije ćemo matematički precizno definirati cjelobrojne funkcije te ćemo zatim navesti njihova najbitnija svojstva koja ćemo koristiti tijekom cijelog rada. Također, upoznat ćemo se s raznim primjenama cjelobrojnih funkcija, a posebno obraditi primjenu u iskazu i dokazu Dirichletovog principa. Primjenjujući Dirichletov princip riješit ćemo nekoliko primjera, u kojima ćemo uočiti primjenu funkcija pod i strop u zadacima iz svakodnevnog života. Zatim ćemo obraditi primjenu u teoriji brojeva te riješiti problemske zadatke iz tog područja. Na kraju, postupno ćemo izgraditi pojam binarne operacije mod uz koju usko vežemo cjelobrojnu funkciju pod.
U drugom poglavlju riješit ćemo velik broj problemskih zadataka (identitete, jednadžbe, nejednakosti i nejednadžbe), koji uključuju cjelobrojne funkcije. Među zadacima naći će se i oni s matematičkih natjecanja u Republici Hrvatskoj. Pri rješavanju zadataka primjenjivat ćemo svojstva iz prvog poglavlja. Konačno, u posljednjem poglavlju također ćemo riješiti problemske zadatke, ali one sa sumama i rekurzijama u kojima možemo primijeniti svojstva cjelobrojnih funkcija.

Poglavlje 1

Cjelobrojne funkcije

U ovom poglavlju definirat ćemo cjelobrojne funkcije i navesti njihova osnovna svojstva. Riješit ćemo nekoliko primjera u kojima možemo primijeniti svojstva cjelobrojnih funkcija. Otkrit ćemo ulogu funkcije pod u iskazu Dirichletovog principa. Zatim ćemo Dirichletov princip dokazati i riješiti nekoliko primjera iz svakodnevnog života. Slijedi primjena funkcije pod u teoriji brojeva, pri čemu ćemo se najprije prisjetiti teorema o dijeljenju s ostatkom te ga povezati s cjelobrojnom funkcijom pod. Zatim ćemo riješiti nekoliko primjera iz teorije brojeva. Konačno, postupno ćemo izgraditi pojam binarne operacije mod uz koju usko vežemo cjelobrojnu funkciju pod, te navesti svojstva te operacije.

1.1 Pod i strop

Definicija 1.1.1. *Funkciju* $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *koja realnom broju* x *pridružuje najveći cijeli broj manji ili jednak* x*, tj.*

$$\lfloor x \rfloor = max\{\, m \in \mathbb{Z} :\ m \leq x \,\},$$

nazivamo ***najveće cijelo****.*

Funkciju $\lceil\ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *koja realnom broju* x *pridružuje najmanji cijeli broj veći ili jednak* x*, tj.*

$$\lceil x \rceil = min\{\, m \in \mathbb{Z} :\ m \geq x \,\},$$

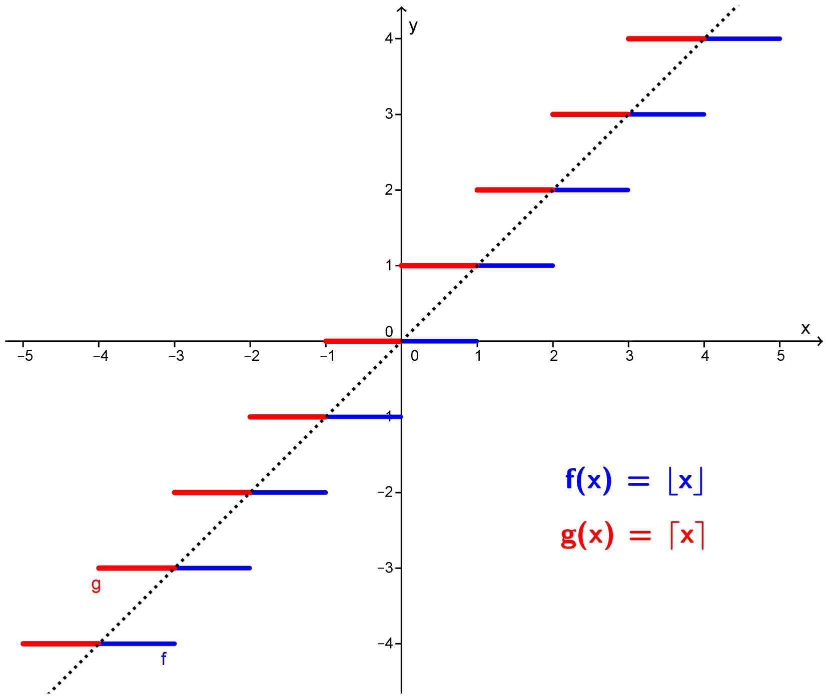
nazivamo ***najmanje cijelo****.*

Funkciju $\lfloor\ \rfloor$ *još nazivamo* ***pod*** *(eng. floor), a funkciju* $\lceil\ \rceil$ ***strop*** *(eng. ceiling).*

Funkcije pod i strop zajednički nazivamo cjelobrojnim funkcijama.

Osnovna svojstva

Promotrimo sada grafove funkcija pod i strop. Možemo uočiti da njihove grafove tvore stepenasti dijelovi ispod i iznad grafa funkcije $h(x) = x$.



Slika 1.1: Grafovi funkcija pod i strop

Iz grafova funkcija pod i strop lako uočavamo neka svojstva tih funkcija. Na primjer, iz grafova je očito da funkcija pod poprima manje ili jednake vrijednosti kao funkcija $h(x) = x$, iz čega slijedi $\lfloor x \rfloor \leq x$. Slično, funkcija strop poprima veće ili jednake vrijednosti kao funkcija $h(x) = x$, iz čega slijedi $\lceil x \rceil \geq x$ (to je jasno i iz definicije). Nadalje, vrijednosti funkcija pod i strop se podudaraju u cjelobrojnim točkama:

$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z} \iff \lceil x \rceil = x.$$

Na primjer, imamo $\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$. Dakle, za $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = x$.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Tada vrijedi:*

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1. \tag{1.1}$$

Dokaz. S obzirom da je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, imamo da je $\lfloor x \rfloor = z$, a $\lceil x \rceil = z + 1$, gdje je $z \in \mathbb{Z}$. Iz toga slijedi da je $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = z + 1 - z = 1$. □

Napomena 1.1.3. Dakle, za $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$ vrijedi $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$.

Također, uočavamo da je translacijom grafa funkcije $h(x) = x$ za 1 udesno duž osi x, graf funkcije pod u potpunosti iznad tog grafa. Dakle, $x - 1 < \lfloor x \rfloor$. Analogno vrijedi: $x + 1 > \lceil x \rceil$. Te dvije nejednakosti daju nam sljedeće:

Teorem 1.1.4. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \tag{1.2}$$

Nadalje, uočavamo da zrcaljenjem jedne funkcije (pod ili strop) oko obje osi dobivamo drugu:

Teorem 1.1.5. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil; \qquad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor. \tag{1.3}$$

Prema tome, lako možemo jednu funkciju (pod ili strop) izraziti u terminima druge.

Pravila zadana sljedećim teoremom bit će nam posebno važna i koristit će nam pri rješavanju različitih zadataka:

Teorem 1.1.6. *Neka je $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1 \tag{1.4a}$$
$$\lfloor x \rfloor = n \iff x - 1 < n \leq x \tag{1.4b}$$
$$\lceil x \rceil = n \iff n - 1 < x \leq n \tag{1.4c}$$
$$\lceil x \rceil = n \iff x \leq n < x + 1 \tag{1.4d}$$

Dokaz. Tvrdnje slijede direktno iz definicije cjelobrojnih funkcija. □

Uočimo sada sljedeću tvrdnju:

Propozicija 1.1.7. *Neka je $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n. \tag{1.5}$$

Dokaz. S obzirom da za $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\lfloor n \rfloor = n$, iz toga slijedi tvrdnja. □

Napomena 1.1.8. Slične operacije, kao na primjer izvlačenje konstantnog faktora, ne vrijede općenito. Npr., $\lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$, za $n = 2$ i $x = \frac{1}{2}$. To znači da u većini slučajeva teško možemo otkloniti pod i strop zagrade.

Uočimo sljedeće odnose među nejednakostima:

Teorem 1.1.9. *Neka je $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$x < n \iff \lfloor x \rfloor < n \tag{1.6a}$$
$$n < x \iff n < \lceil x \rceil \tag{1.6b}$$
$$x \leq n \iff \lceil x \rceil \leq n \tag{1.6c}$$
$$n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor \tag{1.6d}$$

Dokaz. Ako je $x < n$, tada je sigurno $\lfloor x \rfloor < n$, s obzirom na to da je $\lfloor x \rfloor \leq x$. Obratno, ako je $\lfloor x \rfloor < n$ tada je sigurno $x < n$, s obzirom na to da je $x < \lfloor x \rfloor + 1$ i $\lfloor x \rfloor + 1 < n$. Analogno dokazujemo i ostale tvrdnje iz teorema. □

Ako možemo promatrati samo cijeli dio nekog broja zapisanog u decimalnom obliku, tada možemo promatrati i njegov decimalni dio:

Definicija 1.1.10. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Razliku između x i $\lfloor x \rfloor$ zovemo **razlomljeni (decimalni) dio od x** i pišemo:*

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \tag{1.7}$$

Napomena 1.1.11. Broj $\lfloor x \rfloor$ ponekad nazivamo i ***cijeli dio od x*** budući da je $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.

Napomena 1.1.12. Ako realni broj x možemo zapisati u obliku $x = n + \theta$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 1$, tada je $n = \lfloor x \rfloor$ te $\theta = \{x\}$.

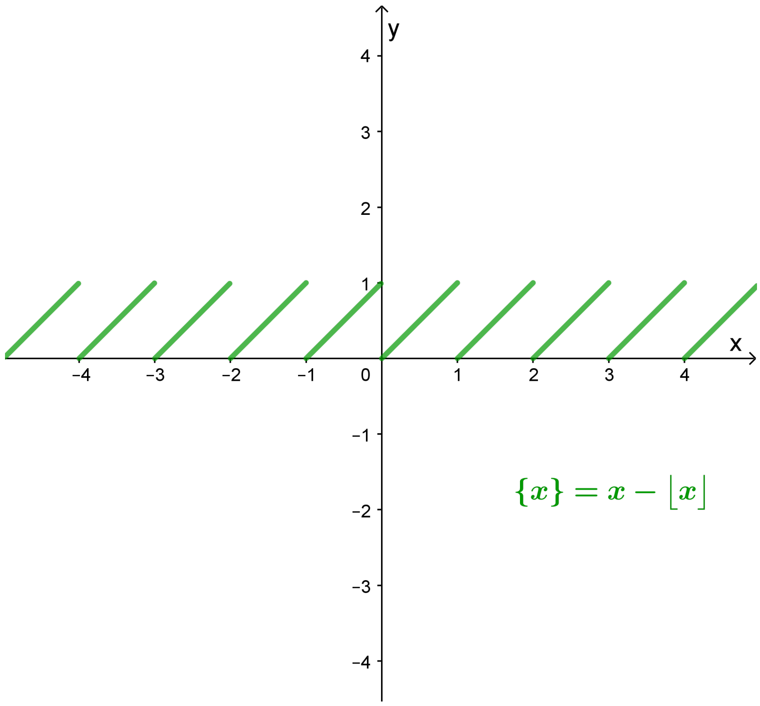
Funkciju $\{\,\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja realnom broju x pridružuje njegov razlomljeni dio možemo definirati s $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Na slici 1.2 vidimo graf te funkcije.

Uočimo sada neka svojstva te funkcije koja su očita i iz samog grafa:

Propozicija 1.1.13. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$0 \leq \{x\} < 1. \tag{1.8}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz (1.7). □



Slika 1.2: Graf funkcije $\{\ \} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Propozicija 1.1.14. *Neka je $n \in \mathbb{Z}$. Tada vrijedi:*

$$\{n\} = 0. \tag{1.9}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz (1.7). □

Korolar 1.1.15. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ te $n \in \mathbb{Z}$. Tada vrijedi:*

$$\{x + n\} = \{x\}. \tag{1.10}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz (1.9). □

Korolar 1.1.16. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je:*

$$\{-x\} = 1 - \{x\}. \tag{1.11}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz (1.7). □

Napomena 1.1.17. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\lfloor \{x\} \rfloor = 0. \tag{1.12}$$

Napomena 1.1.18. Jednakost (1.5) općenito ne vrijedi za $n \in \mathbb{R}$, no problem možemo svesti na dva moguća slučaja za $\lfloor x+y \rfloor$, $x, y \in \mathbb{R}$: ako zapišemo $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ i $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, tada imamo $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$. S obzirom da $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$, imamo da je $\lfloor x + y \rfloor$ jednak $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ili u suprotnom $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

1.2 Osnovne primjene

Nakon što smo naveli osnovna svojstva cjelobrojnih funkcija, u ovom dijelu riješit ćemo velik broj primjera u kojima ih možemo primijeniti. Pozabavit ćemo se problemima kao što su određivanje najmanjeg ili najvećeg cijela logaritma broja, iz čega ćemo izvesti pravilo pomoću kojeg možemo odrediti broj znamenaka cijelog broja u binarnom zapisu. Primjenom svojstava funkcija pod i strop otkrit ćemo kako odrediti broj cijelih brojeva u nekom intervalu. Nakon toga pozabavit ćemo se složenijim primjerima, no o tome ćemo više pri kraju točke. Započnimo sada s jednim jednostavnim primjerom:

Primjer 1.2.1. *Koliko iznosi* $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$*?*

Rješenje. S obzirom da je $\lfloor x \rfloor$ cijeli broj, tada je $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$ jednak $\lfloor x \rfloor$. □

Iz prethodnog primjera jasno je da ako dodamo još jednu pod ili strop zagradu, ponovo će rezultat biti $\lfloor x \rfloor$. Dakle, generalno dodavanjem pod ili strop zagrada rezultat se ne mijenja. Analogno vrijedi i kad je početna zagrada strop.

U sljedećem primjeru odredit ćemo najveće cijelo logaritma broja primjenom svojstava iz prethodne točke:

Primjer 1.2.2. *Koliko iznosi* $\lceil \log_2 35 \rceil$*?*

Rješenje. S obzirom na to da vrijedi $2^5 < 35 \leq 2^6$, logaritmiranjem cijele nejednakosti dobivamo $\log_2 2^5 < \log_2 35 \leq \log_2 2^6$, iz čega primjenom svojstva za logaritam potencije dobivamo $5 < \log_2 35 \leq 6$. Konačno, iz (1.4c) slijedi da je $\lceil \log_2 35 \rceil = 6$. □

Iz prethodnog primjera slijedi zanimljivo pitanje - je li broj znamenaka broja 35 zapisanog u binarnom zapisu jednak $\lceil \log_2 35 \rceil$, tj. 6? Ako zapišemo 35 u binarnom zapisu: 100011, vidimo da broj znamenaka zaista jest 6. Možemo li svakom cijelom broju odrediti broj znamenaka u binarnom zapisu? Tvrdimo da je broj znamenaka cijelog broja n zapisanog u binarnom zapisu jednak $\lceil \log_2 n \rceil$. No, lako možemo pronaći kontraprimjer toj tvrdnji. Npr., broj 32 zapisan u binarnom zapisu jest 100000, no $\lceil \log_2 32 \rceil = 5$. Dakle, naša tvrdnja ne vrijedi za sve cijele brojeve. Međutim, možemo primijetiti da vrijedi $\lfloor \log_2 35 \rfloor = 5$, iz čega zaključujemo da je broj znamenaka jednak $\lfloor \log_2 35 \rfloor + 1$. Želimo generalizirati tu tvdnju tako da vrijedi za sve cijele brojeve.

Tvrdimo sljedeće:

Primjer 1.2.3. *Broj znamenaka cijelog broja n u binarnom zapisu jednak je* $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

Rješenje. Cijeli broj n ima m znamenaka u binarnom zapisu ako i samo ako je

$$2^{m-1} \leq n < 2^m.$$

Logaritmiranjem cijele nejednakosti logaritmom po bazi 2 dobivamo $m - 1 < \log_2 n < m$. Sada iz (1.4a) slijedi da je $m - 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Sada je broj znamenaka broja 32 zapisanog u binarnom zapisu jednak $\lfloor \log_2 32 \rfloor + 1 = 6$, i to uistinu vrijedi.

Slijedi još jedan zanimljiv primjer. Zanima nas možemo li odrediti broj cijelih brojeva u sljedećem intervalu:

Primjer 1.2.4. *Odredite broj cijelih brojeva u intervalu* $[x, y\rangle$, *gdje su* $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Za cijeli broj n je $n \in [x, y\rangle$ ako i samo ako je $x \leq n < y$.
Sada iz (1.6c) slijedi

$$x \leq n \iff \lceil x \rceil \leq n,$$

a iz (1.6b) slijedi

$$n < y \iff n < \lceil y \rceil.$$

Iz toga slijedi da je

$$\lceil x \rceil \leq n < \lceil y \rceil.$$

Konačno, cijelih brojeva u intervalu $[x, y\rangle$ ima

$$\lceil y \rceil - \lceil x \rceil.$$

□

Analogno možemo odrediti broj cijelih brojeva u intervalu $\langle x, y]$. Dobili bismo da je broj cijelih brojeva jednak $\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor$.

Odredimo sada broj cijelih brojeva u nekom intervalu s konkretnim brojevima:

Primjer 1.2.5. *Odredite broj cijelih brojeva u intervalu* $\left[\frac{3}{2}, \frac{23}{3}\right\rangle$.

Rješenje. S obzirom da je $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$ te $\left\lceil \frac{23}{3} \right\rceil = 8$, imamo da je broj cijelih brojeva u zadanom intervalu jednak $\left\lceil \frac{23}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 8 - 2 = 6$. □

Odredimo još broj cijelih brojeva u zatvorenom intervalu:

Primjer 1.2.6. *Odredite broj cijelih brojeva u intervalu* $[x, y]$, *gdje su* $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Za cijeli broj n je $n \in [x, y]$ ako i samo ako je $x \le n \le y$.
Sada iz (1.6c) slijedi

$$x \le n \Longleftrightarrow \lceil x \rceil \le n,$$

a iz (1.6d) slijedi

$$n \le y \Longleftrightarrow n \le \lfloor y \rfloor.$$

Iz toga slijedi da je

$$\lceil x \rceil \le n \le \lfloor y \rfloor.$$

Konačno, cijelih brojeva u intervalu $[x, y\rangle$ ima

$$\lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil + 1.$$

□

Analogno bismo odredili broj cijelih brojeva u otvorenom intervalu $\langle x, y\rangle$ koji je jednak $\lceil y \rceil - \lfloor x \rfloor - 1$.

Odredimo sada broj cijelih brojeva u zatvorenom intervalu s konkretnim brojevima:

Primjer 1.2.7. *Odredite broj cijelih brojeva u intervalu* $\left[\frac{12}{5}, \frac{105}{6}\right]$.

Rješenje. S obzirom da je $\left\lceil \frac{12}{5} \right\rceil = 3$ te $\left\lfloor \frac{105}{6} \right\rfloor = 17$, imamo da je broj cijelih brojeva u zadanom intervalu jednak $\left\lfloor \frac{105}{6} \right\rfloor - \left\lceil \frac{12}{5} \right\rceil + 1 = 17 - 3 + 1 = 15$.

□

Na kraju, odredimo još broj cijelih brojeva u otvorenom intervalu s konkretnim brojevima:

Primjer 1.2.8. *Odredite broj cijelih brojeva u intervalu* $\left\langle -\pi, \frac{120}{17}\right\rangle$.

Rješenje. S obzirom da je $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ te $\left\lceil \frac{120}{17} \right\rceil = 8$, imamo da je broj cijelih brojeva u zadanom intervalu jednak $\left\lceil \frac{120}{17} \right\rceil - \lfloor -\pi \rfloor - 1 = 8 - (-4) - 1 = 11$. □

U sljedeća dva primjera trebamo zadanu jednakost dokazati ili je opovrgnuti. S obzirom na to da je lakše pokazati da neka tvrdnja nije istinita (jer je dovoljno pronaći jedan kontraprimjer za koji ta tvrdnja ne vrijedi), najprije ćemo pokušati pokazati da jednakosti ne vrijede. Započnimo sa sljedećim primjerom:

Primjer 1.2.9. *Provjeri vrijedi li sljedeća jednakost:*

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \qquad x \in \mathbb{R}, x \geq 0. \tag{1.13}$$

Rješenje. Jednakost očito vrijedi za $x \in \mathbb{Z}$ jer je $x = \lfloor x \rfloor$. Također, jednakost vrijedi u posebnim slučajevima za $\pi = 3.14159...$, $e = 2.71828...$, i $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803...$. S obzirom na to da ne uspijevamo pronaći kontraprimjer, probajmo dokazati da jednakost vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. Ideja je otkloniti vanjsku zagradu funkcije pod i drugi korijen od $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$, te zatim i unutarnju zagradu pod. Zatim želimo vratiti drugi korijen i vanjsku zagradu pod kako bismo dobili $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, pa pokušajmo:
Neka je $m = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$. Tada iz (1.4a) slijedi $m \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1$. Time smo bez smanjenja općenitosti otklonili vanjsku zagradu pod. Sada kvadriranjem te nejednakosti (sva tri izraza iz nejednakosti su nenegativna) dobivamo $m^2 \leq \lfloor x \rfloor < (m+1)^2$. Time smo otklonili drugi korijen. Nadalje, otklonit ćemo preostalu zagradu pod primjenom svojstva (1.6d) na lijevu nejednakost te primjenom svojstva (1.6a) na desnu nejednakost. Time dobivamo: $m^2 \leq x < (m+1)^2$. Sada jednostavno korjenujemo nejednakost i dobivamo: $m \leq \sqrt{x} < m+1$ te ponovo iz (1.4a) slijedi $m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Konačno, $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. □

Napomena 1.2.10. Slično dokazujemo da vrijedi:

$$\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \qquad x \in \mathbb{R}, x \geq 0.$$

Uočimo da dokaz jednakosti (1.13) nije primijenjiv samo na drugi korijen. Dakle, jednakost možemo generalizirati i dokazati da vrijedi za sve neprekidne, rastuće funkcije s jednim dodatnim svojstvom:

Teorem 1.2.11. *Neka je f neprekidna, rastuća funkcija te neka vrijedi:*

$$f(x) \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Tada vrijedi:

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \quad i \quad \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil, \tag{1.14}$$

za sve definirane $f(x)$, $f(\lfloor x \rfloor)$ i $f(\lceil x \rceil)$.

Dokaz. Dokažimo da to vrijedi za funkciju strop (slično se dokazuje za funkciju pod). Za $x = \lceil x \rceil$ jednakost očito vrijedi. Promotrimo sada slučaj kada je $x < \lceil x \rceil$. Dakle, za $x < \lceil x \rceil$ vrijedi da je i $f(x) < f(\lceil x \rceil)$ jer je f rastuća funkcija. Nadalje, vrijedi $\lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$ (jer funkcija strop nije padajuća). Ako je $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, tada postoji y takav da je $x \leq y < \lceil x \rceil$ i $f(y) = \lceil f(x) \rceil$, s obzirom da je f neprekidna. Iz posebnog svojstva funkcije f slijedi da je y cijeli broj. No, nemoguće je da se između x i $\lceil x \rceil$ nalazi cijeli broj koji je strogo manji od $\lceil x \rceil$. Time dolazimo do kontradikcije pa slijedi $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, što smo i trebali dokazati. □

Važan specijalan slučaj gornjeg teorema posebno ćemo istaknuti:

Korolar 1.2.12. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$. $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. *Tada vrijedi:*

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad i \quad \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil, \tag{1.15}$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Konačno dolazimo do drugog primjera kojeg trebamo dokazati ili opovrgnuti:

Primjer 1.2.13. *Provjeri vrijedi li sljedeća jednakost:*

$$\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \qquad x \in \mathbb{R}, x \geq 0.$$

Rješenje. Jednakost vrijedi za $x = \pi$ i $x = e$, no ne vrijedi za $x = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803...$ iz čega slijedi da jednakost ne vrijedi općenito. □

Sada ćemo riješiti još nekoliko primjera u kojima možemo primijeniti svojstva cjelobrojnih funkcija. Prvi primjer je niz čiji opći član možemo izračunati. U drugom primjeru trebamo riješiti limes, a prisjetit ćemo se i binomnog teorema koji će nam biti potreban kako bismo riješili zadatak.

Primjer 1.2.14. *Odredite n-ti član niza*

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...$$

Rješenje. Neka je x_n n-ti član niza.

Tada, kako je suma prvih m brojeva jednaka $1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{1}{2}m(m + 1)$, slijedi da je $x_n = m$ ako i samo ako je $\frac{1}{2}m(m-1) < n \leq \frac{1}{2}m(m+1)$. Posljednju nejednakost pomnnožimo s 2 pa imamo:

$$m^2 - m < 2n \leq m^2 + m.$$

Kako su $m^2 - m$ i $2n$ cijeli brojevi vrijedi

$$m^2 - m + \frac{1}{4} < 2n < m^2 + m + \frac{1}{4},$$

odnosno

$$(m - \frac{1}{2})^2 < 2n < (m + \frac{1}{2})^2.$$

Kako je $m - \frac{1}{2} > 0$ za $m \in \mathbb{N}$ zaključujemo da vrijedi

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \frac{1}{2}, \text{ tj. } m < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < m + 1.$$

Prema tome, iz (1.4a) slijedi da je $m = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, tj. $x_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. □

Riješimo sada primjer s limesom:

Zadatak 1.2.15. *Izračunajte*

$$\lim_{n\to\infty} \{(2+\sqrt{2})^n\}$$

.

Rješenje. Iz binomnog teorema [1] imamo:

$$(2+\sqrt{2})^2 = 2^n + 2^{n-1}\binom{n}{1}\sqrt{2} + 2^{n-2}\binom{n}{2}\cdot 2 + ... + (\sqrt{2})^n,$$

$$(2-\sqrt{2})^2 = 2^n + 2^{n-1}\binom{n}{1}\sqrt{2} - 2^{n-2}\binom{n}{2}\cdot 2 + ... + (-1)^n(\sqrt{2})^n.$$

Prema tome vrijedi

$$(2+\sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2} \quad \text{i} \quad (2-\sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2},$$

gdje su A i B prirodni brojevi.

Iz (1.10) i (1.11) slijedi:

$$\begin{aligned} \{(2+\sqrt{2})^n\} &= \{A + B\sqrt{2}\} = 1 - \{-A - B\sqrt{2}\} \\ = 1 - \{2A - A - B\sqrt{2}\} &= 1 - \{A - B\sqrt{2}\} = 1 - \{(2-\sqrt{2})^n\}. \end{aligned}$$

No, kako je $0 < 2 - \sqrt{2} < 1$, to je

$$\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n = 0$$

, pa je i

$$\lim_{n\to\infty}\{(2-\sqrt{2})^n\} = 0.$$

Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{2})^n\} = 1 - 0 = 1.$$

□

[1] Binomni teorem: Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

1.3 Dirichletov princip

Dirichletov princip jedan je od najpoznatijih kombinatornih principa koji se koristi u rješavanju raznovrsnih problema, a posebno pri dokazivanju postojanja objekata koji imaju neko određeno svojstvo. Poznat je pod raznim popularnim nazivima kao što su *princip kutija, princip golubinjaka, princip pretinaca, itd.* Prvi ga je jasno formulirao njemački matematičar P. G. L. Dirichlet (1805.-1859.) pa se njemu u čast taj princip naziva Dirichletov princip. Princip se može formulirati na različite načine, gdje najjednostavnije oblike nazivamo *slabom formom*. Navedimo primjer jedne takve formulacije: *Ako $n+1$ predmeta rasporedimo bilo kako u n praznih kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem dva od tih predmeta.*

Nama je posebno važna tzv. *jaka forma* Dirichletovog principa u kojoj primjenjujemo cjelobrojnu funkciju pod, te ćemo je i dokazati:

Teorem 1.3.1. *Ako m predmeta rasporedimo u n kutija, tada barem jedna kutija sadrži $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ predmeta.*

Dokaz. Najveći višekratnik broja n koji je manji od m dobivamo tako da n množimo redom s $1, 2, 3, ...$, sve dok ne premašimo $m-1$. Najveći takav višekratnik koji nije veći od $m-1$ je upravo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$. Kada bi bilo točno $n \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ predmeta, stavili bismo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ njih u svaku kutiju, ali kako imamo m predmeta i vrijedi $n \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq m-1 < m$, u najmanje jednoj kutiji bit će barem jedan predmet više. □

Prethodni teorem možemo iskazati i ovako:

Teorem 1.3.2. *Neka su S i T konačni skupovi, $|S| = m$, $|T| = n$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada postoji $y \in T$, takav da vrijedi*

$$\left| f^{-1}(y) \right| \geq \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1.$$

U sljedećem primjeru vidimo direktnu primjenu *jake forme* Dirichletovog principa:

Primjer 1.3.3. *Pokaži da je među 38 ljudi barem 4 rođeno u istom mjesecu.*

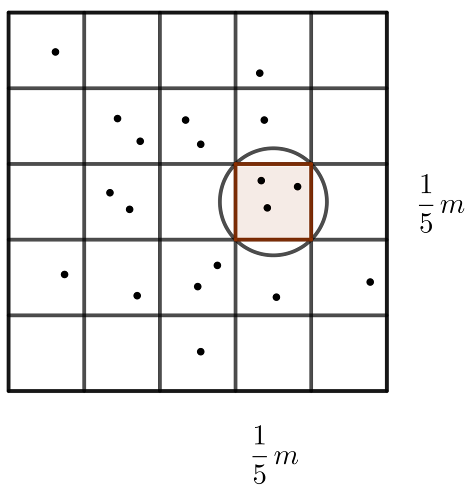
Rješenje. Koristeći se jakom formom Dirichletovog principa slijedi da je barem $\left\lfloor \frac{38-1}{12} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor 3.08\dot{3} \right\rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$ ljudi rođeno u istom mjesecu. □

Riješimo sada jedan geometrijski primjer u kojem primjenjujemo *jaku formu* Dirichletovog principa:

Zadatak 1.3.4. *Na prozoru oblika kvadrata stranice duljine* 1 *m nalazi se* 51 *komarac. Može li Stipe okruglom metlicom polumjera* $\frac{1}{7}$ *ubiti* 3 *komarca?*

Rješenje. Trebamo dokazati da u kvadratu duljine stranice 1 m postoji barem jedan krug polumjera $\frac{1}{7}\,m$ u kojem se nalaze 3 točke. S obzirom na to da kvadrat ne možemo podijeliti na krugove tako da svaki dio tog kvadrata bude prekriven, podijelimo kvadrat na manje sukladne kvadrate te promatramo broj točaka unutar njih. Željeli bismo dokazati da postoji barem jedan takav kvadratić u kojem su barem 3 točke. Ako problem povežemo s Dirichletovim principom smještanja predmeta u kutije, očito je da će točke biti predmeti, a kutije manji kvadrati na koje želimo podijeliti veliki kvadrat. Broj točaka je poznat i iznosi 51, a broj kvadratića je nepoznat i označimo ga s n. S obzirom da želimo da u barem jednom tom kvadratiću ima barem 3 točke, primjenom *jake forme* Dirichletovog principa dobivamo da je:

$$\left\lfloor \frac{51-1}{n} \right\rfloor + 1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \left\lfloor \frac{50}{n} \right\rfloor = 2 \qquad \Rightarrow \qquad n \in \{17, 18, ..., 25\}$$



Slika 1.3: Podijela na 25 manjih kvadrata

Za svaki dobiveni n možemo dokazati da je broj točaka u barem jednom od tih n kvadratića barem 3. Zbog jednostavnosti uzmimo da je $n = 25$ te podijelimo kvadrat duljine stranice $1\,m$ na 25 sukladnih kvadratića duljine stranica $\frac{1}{5}\,m$ kao što je prikazano na slici 1.3. Prema Dirichletovom principu sigurno postoji barem jedan u kojem se nalaze barem 3 točke.
Pokažimo još da takav kvadratić možemo prekriti krugom polumjera $\frac{1}{7}\,m$. Općenito, najmanji polumjer kruga kojim možemo prekriti kvadrat jednak je polovini duljine dijagonale tog kvadrata. Imamo da je polovina duljine dijagonale kvadrata sa stranicom duljine $\frac{1}{7}\,m$ jednaka $\frac{1}{5\sqrt{2}}$, pa imamo:

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7},$$

iz čega vidimo da je najmanji polumjer kruga kojim možemo prekriti kvadrat duljine stranice $\frac{1}{5}\,m$ sigurno manji od $\frac{1}{7}\,m$.
Time smo pokazali da Stipe može okruglom metlicom polumjera $\frac{1}{7}\,m$ ubiti 3 komarca. □

1.4 Primjena u teoriji brojeva

U ovoj točki susrest ćemo se s problemskim zadacima iz teorije brojeva koji se učinkovito rješavaju primjenom funkcije pod. Najprije, prisjetit ćemo se teorema o dijeljenju s ostatkom, a zatim ćemo iskazati i dokazati lemu i teorem koji će nam omogućiti rješavanje tih problema. U drugom dijelu točke postupno ćemo graditi pojam binarne operacije mod uz koju usko vežemo cjelobrojnu funkciju pod. Navest ćemo i svojstva te operacije, te izdvojiti najvažnija koja nam daju potvrdu da smo dobro definirali operaciju.

Prisjetimo se najprije poznatog teorema:

Teorem 1.4.1 (Teorem o dijeljenju s ostatkom)**.** *Za proizvoljan cijeli broj n i prirodan broj m postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $n = qm + r, 0 \leq r < m$. Broj q nazivamo kvocijentom, a r ostatkom pri dijeljenju broja n brojem m.*

Iz Teorema o dijeljenju s ostatkom slijedi zanimljiv korolar:

Korolar 1.4.2. *Neka su n i m prirodni brojevi za koje postoje cijeli brojevi q i r takvi da je $n = qm + r, r < m$. Tada je kvocijent q pri dijeljenju broja n brojem m jednak je $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$.*

Dokaz. Iz Teorema o dijeljenju s ostatkom slijedi:

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qm+r}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{m} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor = q. \tag{1.16}$$

□

Sada ćemo izreći i dokazati lemu koja će nam koristiti pri rješavanju raznih problema iz teorije brojeva s cjelobrojnim funkcijama:

Lema 1.4.3. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Tada je broj svih višekratnika $v \leq n$ broja m jednak $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$.*

Dokaz. Neka je $n = qm + r$, gdje su q i $r \in \mathbb{N}_0, r < n$. Tada su traženi višekratnici broja $m : m, 2m, 3m, 4m, ..., qm$, tj. ukupno ih ima q. S druge strane je prema (1.16) $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = q$, čime je tvrdnja leme dokazana. □

Primijenimo sada gornju lemu na konkretnom primjeru:

Primjer 1.4.4. *Odredite broj višekratnika broja 7 među sljedećim brojevima:*

$$321, 322, 323, ..., 833, 834.$$

Rješenje. Višekratnika broja 7 manjih ili jednakih od 834 ima

$$\left\lfloor \frac{834}{7} \right\rfloor = 119.$$

Od tog broja oduzet ćemo broj višekratnika broja 7 manjih od 321, tj. broj

$$\left\lfloor \frac{321}{7} \right\rfloor = 45,$$

pa je traženi broj višekratnika jednak $119 - 45 = 74$. □

Riješimo još jedan primjer:

Primjer 1.4.5. *Odredite broj četveroznamenkastih brojeva koji su djeljivi sa* 6*, a nisu djeljivi s* 24.

Rješenje. Odredimo broj višekratnika broja 6 koji nisu višekratnici od 24 među brojevima $1000, 1001, 1002, ..., 9999$. Broj višekratnika od 6 u danom nizu jest

$$\left\lfloor \frac{9999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 1500.$$

No, svaki višekratnik od 24 ujedno je i višekratnik od 6 pa od broja višekratnika broja 6 moramo oduzeti broj višekratnika od 24 u danom nizu, tj.

$$\left\lfloor \frac{9999}{24} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{24} \right\rfloor = 375.$$

Konačno, traženi broj je $1500 - 375 = 1125$. □

Sada ćemo još iskazati i dokazati teorem koji ćemo primijenjivati pri rješavanju raznih problema te koji nam govori o eksponentu nekog prostog broja u rastavu $n!$ na produkt prostih faktora:

Teorem 1.4.6. *Neka je n prirodan broj, p prost broj i s prirodan broj takav da je* $p^s \le n < p^{s+1}$, *te neka je a najveći prirodan broj za koji vrijedi* $p^a \mid n!$.
Tada je

$$a = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor. \tag{1.17}$$

Dokaz. Prema Lemi 1.4.3., broj višekratnika od p koji se pojavljuju kao faktori produkta $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot n$ jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, od p^2 jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, od p^3 jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$, ..., od p^s jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor$. Uočimo da za $k \ge s+1$ nema višekratnika od p^k koji nisu veći od n jer za takve k vrijedi $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{n}{p^{s+1}} \right\rfloor = 0$, što zajedno s $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ge 0$ daje $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Sada je očito da je suma iz tvrdnje teorema traženi eksponent jer je svaki faktor produkta $n!$ koji je višekratnik od p^m, a nije višekratnik od p^{m+1}, brojen na navedeni način točno m puta i to kao višekratnik od $p, p^2, p^3, ..., p^m$. □

Sada ćemo primijeniti gornji teorem na nekoliko primjera:

Primjer 1.4.7. *Odredite eksponent broja 7 u rastavu broja* $500!$ *na produkt prostih faktora.*

Rješenje. Iz (1.17) slijedi da je traženi eksponent jednak:

$$\left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{3^3} \right\rfloor = 166 + 55 + 18 = 239.$$

□

Primjer 1.4.8. *Rastavite broj* 12! *na produkt prostih faktora.*

Rješenje. Treba odrediti eksponente prostih faktora $p \leq 12$ u rastavu broja 12! na produkt prostih faktora. Iz (1.17) slijedi:

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{2^3} \right\rfloor = 6 + 3 + 1 = 10,\\
&\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{3^2} \right\rfloor = 4 + 1 = 5,\\
&\left\lfloor \frac{12}{5} \right\rfloor = 2,\\
&\left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor = 1,\\
&\left\lfloor \frac{12}{11} \right\rfloor = 1.
\end{aligned}$$

Stoga, $12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$. □

Sada ćemo riješiti još jedan primjer iz teorije brojeva u kojemu koristimo svojstva cjelobrojnih funkcija:

Primjer 1.4.9. *Odredite sve prirodne brojeve n takve da* $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *dijeli n.*

Rješenje. Neka je $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = t$. Tada iz (1.4a) slijedi da je $t \leq \sqrt{n} < t + 1$, odnosno kvadriranjem dobivamo

$$t^2 \leq n < (t+1)^2.$$

Kako $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ dijeli n to je $n = k \cdot t$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
t^2 \leq kt < t^2 + 2t + 1, \quad tj.\\
t \leq k < t + 2 + \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Ako je $t = 1$ tada je $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$ i to vrijedi za $n = 1, 2, 3$. Ako je $t > 1$ tada je $\frac{1}{t} < 1$ pa imamo

$$t \leq k < t + 3.$$

Kako su t i k prirodni brojevi, to za fiksirani t, k može poprimiti vrijednosti $t, t+1, t+2$. Dakle, ako je $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = t$, to je $n = t^2, t(t+1)$ ili $t(t+2)$. Primijetimo da ako je $t = 1$ onda je $t^2 = 1, t(t+1) = 2, t(t+2) = 3$.
Prema tome, svi prirodni brojevi koji zadovoljavaju uvjet zadatka su $n = t^2, n = t(t+1), n = t(t+2), t \in \mathbb{N}$. □

Binarna operacija mod

Promatrajući teorem o dijeljenju s ostatkom, uočimo da ostatak r pri dijeljenju broja n brojem m možemo pisati $n \bmod m$. Uzevši u obzir tu činjenicu te iz (1.16), možemo zaključiti sljedeće:

Korolar 1.4.10. *Za proizvoljan prirodan broj n i prirodan broj m vrijedi sljedeće:*

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor m + n \bmod m,$$

tj. vrijedi

$$n \bmod m = n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor m. \tag{1.18}$$

Primjer 1.4.11. *Intuitivno je jasno kako dobivamo ostatak pri dijeljenju dvaju prirodnih brojeva. Kada dijelimo neki prirodan broj s $n \in \mathbb{N}$, sigurno će ostatak pri dijeljenju biti iz skupa* $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$. *Npr.*

$$5 \bmod 3 = 5 - 3\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor \qquad = 2.$$

No, probat ćemo takvo dijeljenje s ostatkom generalizirati tako da vrijedi za sve cijele brojeve. Promotrimo sada nekoliko primjera u kojima tražimo ostatak pri dijeljenju dvaju brojeva kada nisu oba prirodna:

$$5 \bmod -3 = 5 - (-3)\left\lfloor \frac{5}{-3} \right\rfloor \qquad = -1;$$
$$-5 \bmod 3 = -5 - 3\left\lfloor \frac{-5}{3} \right\rfloor \qquad = 1;$$
$$-5 \bmod -3 = -5 - (-3)\left\lfloor \frac{-5}{-3} \right\rfloor \qquad = -2.$$

Uočimo da se u tom slučaju skup ostataka pri dijeljenju povećao, te sada uključuje i negativne cijele brojeve i nulu. Npr., ako dijelimo negativni cijeli broj ili nulu s prirodnim brojem $n \in \mathbb{N}$, ostatak pri takvom dijeljenju bit će iz skupa $\{-n+1, ..., -1, 0, 1, ..., n+1\}$. *Očito ima smisla tražiti ostatak pri dijeljenju cijelih brojeva koji nisu prirodni. Možemo se uvjeriti u to da isto vrijedi i za sve realne brojeve.*

Prisjetimo se sada definicije binarne operacije:

Definicija 1.4.12. *Neka je S skup te $f : S \times S \to S$. Tada za f kažemo da je* ***binarna operacija*** *na skupu S te $x, y \in S$. Ako je f binarna operacija na skupu S te $x, y \in S$, onda umjesto $f(x, y)$ pišemo xfy.*

Jednakost (1.18) možemo generalizirati tako da vrijedi za realne brojeve, pa konačno možemo definirati:

Definicija 1.4.13. *Neka je* mod : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *binarna operacija. Tada vrijedi:*

$$x \bmod y = x - \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y, \qquad x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0. \tag{1.19}$$

Napomena 1.4.14. U većini primjena operacije mod, broj nakon mod-a (npr. y u $x \bmod y$) je uglavnom pozitivan, no definicija ima smisla i kad je negativan. U oba slučaja, iznos $x \bmod y$ se nalazi između 0 i y:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \bmod y < y, &\quad y > 0, \\ 0 \geq x \bmod y > y, &\quad y < 0. \end{aligned}$$

Preostaje nam slučaj kada je $y = 0$. Definicija (1.19) ne pokriva taj slučaj, kako bi se izbjeglo dijeljenje s nulom, no mi ćemo ipak definirati:

Definicija 1.4.15. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$. *Tada vrijedi:*

$$x \bmod 0 = x. \tag{1.20}$$

Već smo se susreli sa operacijom mod, a da nismo bili svjesni, kada smo napisali realni broj x u sljedećem obliku: $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Dakle, razlomljeni dio možemo zapisati u obliku $x \bmod 1$ jer vrijedi:

$$x = \lfloor x \rfloor + x \bmod 1.$$

Preostaje nam izdvojiti najvažnije svojstvo operacije mod:

Propozicija 1.4.16. *Vrijedi svojstvo distributivnosti:*

$$c(x \bmod y) = (cx) \bmod (cy) \tag{1.21}$$

za sve $c, x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Iz definicije (1.19) slijedi:

$$c(x \bmod y) = c(x - y\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor) = cx - cy\left\lfloor \frac{cx}{cy} \right\rfloor = cx \bmod cy,$$

ako je $cy \neq 0$, a slučajevi kad je broj nakon mod-a jednak 0 su trivijalni. □

Napomena 1.4.17. Zbog jednakosti (1.21) smo sigurni da smo dobro definirali binarnu operaciju mod.

Riješimo sada nekoliko primjera s konkretnim brojevima:

Primjer 1.4.18. *Izračunajte:*

1. $2653 \bmod 18$,

2. $\frac{105}{4} \bmod 7$,

3. $345.22 \bmod 3.4$,

4. $-43 \bmod 2$.

Rješenje. Iz definicije (1.19) slijedi:

1. $2653 \bmod 18 = 2653 - 18 \cdot \left\lfloor \frac{2653}{18} \right\rfloor = 2653 - 18 \cdot 147 = 7$,

2. $\frac{105}{4} \bmod 7 = \frac{105}{4} - 7 \cdot \left\lfloor \frac{\frac{105}{4}}{7} \right\rfloor = \frac{105}{4} - 7 \cdot 3 = 5.25$,

3. $345.22 \bmod 3.4 = 345.22 - 3.4 \cdot \left\lfloor \frac{345.22}{3.4} \right\rfloor = 345.22 - 3.4 \cdot 101 = 1.82$,

4. $-43 \bmod 2 = -43 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{-43}{2} \right\rfloor = -43 - 2 \cdot (-22) = 1$.

□

Poglavlje 2

Identiteti, jednadžbe i nejednakosti

U ovom poglavlju proučavat ćemo razne identitete, jednadžbe, nejednakosti i nejednadžbe u kojima se pojavljuju funkcije pod i strop. Riješit ćemo i veliki broj problemskih zadataka, uključujući one s matematičkih natjecanja koji uključuju cjelobrojne funkcije.

2.1 Identiteti

U ovoj točki dokazat ćemo da vrijede neki identiteti u kojima se pojavljuju cjelobrojne funkcije. Najprije, riješit ćemo jednostavan zadatak u kojemu ćemo primijeniti definiciju funkcije pod kako bismo dokazali da traženi identitet vrijedi za svaki prirodan broj:

Zadatak 2.1.1. *Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi:*

$$\lfloor n \rfloor + \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2n \rfloor.$$

Rješenje. Iz definicije cjelobrojnih funkcija slijedi da je $\lfloor n \rfloor = n$, za $n \in \mathbb{N}$.
Zatim, iz (1.5) slijedi da je $\left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = n + 0 = n$.
Dakle, lijeva strana jednakosti jednaka je $n + n = 2n$, što je jednako $\lfloor 2n \rfloor$, s obzirom da je $n \in \mathbb{N}$.
Time smo dokazali da jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n. □

U sljedećem zadatku koristit ćemo znanje iz teorije brojeva te svojstva funkcije pod kako bismo dokazali traženi identitet:

Zadatak 2.1.2. *Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi:*

$$\left\lfloor \frac{n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$$

[4]

Rješenje. Prilikom dijeljenja s 3, prirodan broj n može imati ostatak $0, 1$ ili 2. Dakle, n možemo zapisati u obliku $n = 3k, n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$\begin{aligned}
n &= 3k, & \left\lfloor \frac{3k - \lfloor k \rfloor}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{3k - k}{2} \right\rfloor = k = \left\lfloor \frac{3k+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor, \\
n &= 3k + 1, & \left\lfloor \frac{3k + 1 - k}{2} \right\rfloor &= k = \left\lfloor \frac{3k+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor, \\
n &= 3k + 2, & \left\lfloor \frac{3k + 2 - k}{2} \right\rfloor &= k + 1 = \left\lfloor \frac{3k+3}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

□

Uočimo sada sljedeći identitet u kojemu se pojavljuje drugi korijen:

Zadatak 2.1.3. *Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$

[2]

Rješenje. Uvedimo za svaki prirodni broj n oznake $a_n = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor, b_n = \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor$. Kvadrat neparnog broja $2k + 1$ ima oblik $4k^2 + 4k + 1$ i pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1, a kvadrat parnog broja $2k$ koji je jednak $4k^2$, daje ostatak 0. Zato broj $4n + 2$ ne može biti kvadrat prirodnog broja. Zato je $a_n \neq \sqrt{4n+2}$, tj. $a_n < \sqrt{4n+2}$.
Nadalje, vrijedi nejednakost $\sqrt{4n+2} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ što se lagano provjeri uzastopnim kvadriranjem. Odatle je $b_n \leq a_n$. Dokažimo metodom kontradikcije da je $a_n = b_n$. Pretpostavimo da je za neki $m \in \mathbb{N}, a_m > b_m$. To znači da je $a_m \geq b_m + 1$, jer su a_m, b_m prirodni brojevi. Sada imamo niz nejednakosti

$$\sqrt{4m+2} > a_m \geq b_m + 1 = \left\lfloor \sqrt{m} + \sqrt{m+1} \right\rfloor + 1 > \sqrt{m} + \sqrt{m+1} > 2\sqrt{m}.$$

Odatle je $4m + 2 > a_m^2 > 4m$ pa je $a_m^2 = 4m + 1$. Kako je $a_m > \sqrt{m} + \sqrt{m+1}$, vrijedi

$$4m + 1 = a_m^2 > (\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^2 = 2m + 1 + 2\sqrt{m(m+1)}.$$

Odavde je $m > \sqrt{m(m+1)}$, odnosno $\sqrt{m} > \sqrt{m+1}$ što nije moguće. Dakle, uvijek je $a_n = b_n$. □

Zadatak 2.1.4. *Dokažite da za svaki neparan broj $n \geq 3$ vrijedi*

$$\left\lfloor \frac{4}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{n} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2(n-1)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor.$$

[2]

Rješenje. Promatrajmo brojeve $\left\lfloor \frac{4k}{n} \right\rfloor$, $k = 1, 2, ..., \frac{n-1}{2}$.

Očito je $\left\lfloor \frac{4k}{n} \right\rfloor \in \{0, 1\}$.

Znamo da je $\left\lfloor \frac{4k}{n} \right\rfloor = 1$ ako i samo ako je $\frac{4k}{n} \geq 1$, odnosno $k \geq \frac{n}{4}$.

Dakle, među brojevima $\left\lfloor \frac{4k}{n} \right\rfloor$, $k = 1, 2, ..., \frac{n-1}{2}$ ima ih $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ koji su jednaki 0, a ostali su jednaki 1.

Zato je $\left\lfloor \frac{4}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{n} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2(n-1)}{n} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.

Sada moramo pokazati da je $\frac{n-1}{2} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$.

Kako je broj n neparan, on je oblika $n = 4m + 1$ ili $n = 4m + 3, m = 0, 1, 2, ...$
Ako je $n = 4m + 1$, onda je

$$\frac{n-1}{2} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \frac{4m+1-1}{2} - \left\lfloor \frac{4m+1}{4} \right\rfloor = 2m - m = m = \left\lfloor m + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4m+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor.$$

Ako je $n = 4m + 3$, onda je

$$\frac{n-1}{2} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \frac{4m+3-1}{2} - \left\lfloor \frac{4m+3}{4} \right\rfloor = 2m+1-m = m+1 = \lfloor m+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{4m+4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor.$$

Time je dokaz završen.

□

U sljedećem zadatku koristit ćemo svojstva logaritma broja, $n-$tog korijena te naravno svojstva funkcije pod kako bismo dokazali sljedeći identitet:

Zadatak 2.1.5. *Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi*

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + ... + \lfloor \log_n n \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor.$$

[2]

Rješenje. Iz (1.4a) slijedi da je $\lfloor \log_m n \rfloor = k$ ako i samo ako je $k \leq \log_m n < k + 1$, što je ekvivalentno s $\frac{1}{k+1} < \log_n m \leq \frac{1}{k}$, odnosno

$$\sqrt[k+1]{n} < m \leq \sqrt[k]{n}.$$

Prema tome, među brojevima $\lfloor \log_m n \rfloor$ ima ih $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor - \lfloor \sqrt[k+1]{n} \rfloor$ koji su jednaki k.
Zato je

$$\sum_{m=2}^{n} \lfloor \log_m n \rfloor = \sum_{m=2}^{n} k(\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor - \lfloor \sqrt[k+1]{n} \rfloor) =$$

$$= 1(\lfloor n \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 2(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor) + ... + n(\lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor - \lfloor \sqrt[n-1]{n} \rfloor).$$

Nakon sređivanja imamo

$$\sum_{m=2}^{n} \lfloor \log_m n \rfloor = \left(\sum_{k=2}^{n} \lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor \right) + n(1 - \lfloor \sqrt[n+1]{n} \rfloor).$$

Još trebamo dokazati da je $\lfloor \sqrt[n+1]{n} \rfloor = 1$.
Tvrdimo da je $1 < \sqrt[n+1]{n} < 2$.
Naime, $\sqrt[n+1]{n} > \sqrt[n+1]{1} = 1$, a desna nejednakost je ekvivalentna s $n < 2^{n+1}$, što lagano dokažemo matematičkom indukcijom.
Dakle, $\lfloor \sqrt[k+1]{n} \rfloor = 1$ i vrijedi

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + ... + \lfloor \log_n n \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor.$$

□

2.2 Jednadžbe

U ovoj točki nastavljamo s rješavanjem zadataka te ćemo riješiti razne jednadžbe u kojima se pojavljuju cjelobrojne funkcije. Zanimljivo je da se upravo jednadžbe pojavljuju u većini zadataka s cjelobrojnim funkcijama na natjecanjima u Republici Hrvatskoj. Započnimo zato s jednim takvim zadatkom:

Zadatak 2.2.1. *Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi*

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = \frac{3}{2}n + 1.$$

Županijsko natjecanje, 2013. godine, 4. razred - A varijanta

Rješenje. Neka je

$$a_n = \lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor.$$

Trebamo riješiti jednadžbu

$$a_n = \frac{3}{2}n + 1.$$

Primijetimo da je $\lfloor \sqrt[4]{k} \rfloor = 1$ za $1 \leq k < 16$. Zato za $1 \leq n \leq 15$ vrijedi $a_n = n$.
Među tim brojevima nema brojeva za koje vrijedi dana jednakost.
Jednakost $\lfloor \sqrt[4]{k} \rfloor = 2$ vrijedi za $16 \leq k < 81$.
Zato za $16 \leq n \leq 80$ vrijedi $a_n = 1 + 1 + ... + 1 + 2 + ... + 2 = 15 + 2(n - 15) = 2n - 15$.
Da bi za $16 \leq n \leq 80$ vrijedila jednakost $a_n = \frac{3}{2}n + 1$, mora biti $2n - 15 = \frac{3}{2}n + 1$.
Dobivamo jedno rješenje $n = 32$ i to je jedino rješenje zadatka manje od 81.
Drugih (većih) rješenja nema, jer nakon $n = 81$ s porastom broja n za 1, vrijednost lijeve strane se povećava za najmanje 3, a vrijednost na desnoj strani za $\frac{3}{2}$, pa će lijeva strana biti veća od desne. □

Zadatak 2.2.2. *Odredi sva realna rješenja jednadžbe*

$$4x^2 - 20\lfloor x \rfloor + 9 = 0.$$

Državno natjecanje, 2012. godine, 2. razred - A varijanta

Rješenje. Vrijedi

$$4x^2 - 20\lfloor x \rfloor + 9 \geq 4x^2 - 20x + 9 = (2x - 9)(2x - 1),$$

pa mora biti $(2x - 9)(2x - 1) \leq 0$, tj. $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$. Zato je $0 \leq \lfloor x \rfloor \leq 4$.
Također, $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{20\lfloor x \rfloor - 9}$.
Uvrštavamo redom $\lfloor x \rfloor = 0, 1, 2, 3, 4$. Za $\lfloor x \rfloor = 0$ nema rješenja, a u svim ostalim slučajevima dobivamo po jednu vrijednost koja zadovoljava polaznu jednadžbu:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{11}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{31}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{51}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{71}.$$

□

Zadatak 2.2.3. *Riješite jednadžbu*

$$x^3 - \lfloor x \rfloor = 3.$$

[2]

Rješenje. Kako iz (1.2) slijedi $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, imamo da je $-x \leq -\lfloor x \rfloor < 1 - x$, tj. ako cijeloj nejednakosti pribrojimo x^3 imamo: $x^3 - x \leq x^3 - \lfloor x \rfloor < x^3 - x + 1$. Kako mora biti $x^3 - \lfloor x \rfloor = 3$, dobivamo da je $x^3 - x \leq 3 < x^3 - x + 1$. Dakle, mora vrijediti

$$2 < x^3 - x \leq 3. \tag{2.1}$$

Dokažimo da (2.1) ne vrijedi za $x \leq -1$. Naime, $x \leq -1$ povlači $x^2 - 1 \geq 0$ pa je tada $x^3 - x = x(x^2 - 1) \geq 0$, što je kontradikcija s (2.1).
Analogno, (2.1) ne vrijedi za $x \geq 2$. Naime, $x \geq 2$ povlači $x^3 - x = x(x-1)(x+1) \geq 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ što je opet kontradikcija s (2.1).
Dakle, razlikujemo tri slučaja:

1. $x \in \langle -1, 0 \rangle$.
   Tada je $\lfloor x \rfloor = -1$, jednadžba prelazi u $x^3 - (-1) = 3$, tj. $x^3 = 2$, pa je $x = \sqrt[3]{2}$. Međutim, $\sqrt[3]{2} \notin \langle -1, 0 \rangle$, pa $x = \sqrt[3]{2}$ nije rješenje.

2. $x \in [0, 1\rangle$.
   Tada je $\lfloor x \rfloor = 0$, jednadžba prelazi u $x^3 = 3$, tj. $x = \sqrt[3]{3}$. Opet, $\sqrt[3]{3} \notin [0, 1\rangle$ pa to nije rješenje.

3. $x \in [1, 2\rangle$.
   Tada je $\lfloor x \rfloor = 1$ i jednadžba prelazi u $x^3 - 1 = 3$, tj. $x^3 = 4$, pa je $x = \sqrt[3]{4}$, što je rješenje jednadžbe jer je $\sqrt[3]{4} \in [1, 2\rangle$.

□

Zadatak 2.2.4. *Odredi skup svih realnih brojeva x koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3}.$$

Županijsko natjecanje, 2012. godine, 4. razred - A varijanta

Rješenje. Iz (1.2) znamo da za svaki realan broj r vrijedi $r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$ pa vrijedi:

$$\frac{2x-1}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor \leq \frac{2x-1}{3}$$

$$\frac{4x+1}{6} - 1 < \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor \leq \frac{4x+1}{6}$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$\frac{2x-1}{3} - 1 + \frac{4x+1}{6} - 1 < \frac{5x-4}{3} \le \frac{2x-1}{3} + \frac{4x+1}{6}.$$

(Uočimo da ova nejednakost nije ekvivalentna početnoj jednadžbi)
Sređivanjem dobivamo $-\frac{5}{2} < x \le \frac{7}{2}$.

Lijeva strana početne jednakosti je cijeli broj pa to mora biti i desna.
Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $\frac{5x-4}{3} = k$, tj. $x = \frac{3k+4}{5}$.
Zbog nejednakosti $-\frac{5}{2} < x \le \frac{7}{2}$ jedini kandidati za rješenja su

$$-\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}, -1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2, \frac{13}{5}, \frac{16}{5}.$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu, vidimo da jednadžbu zadovoljavaju samo

$$x \in \left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2\right\}.$$

□

Zadatak 2.2.5. *Neka je $m \ge 2$ prirodan broj. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima jednadžba*

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor?$$

[2]

Rješenje. Neka je $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = k$. Kako tražimo rješenje u skupu prirodnih brojeva, to je $k \ge 0$.
Pokažimo prvo da dana jednadžba nema rješenja za $k \ge m-1$. Naime, tada iz (1.6d) slijedi da je $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \ge m-1$ ekvivalentno $\frac{x}{m} \ge m-1$, tj. $x \ge m(m-1)$. Ali tada je

$$\frac{x}{m-1} - \frac{x}{m} = x(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}) \ge m(m-1)(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}) = m - m + 1 = 1.$$

Dakle, $\frac{x}{m-1} - \frac{x}{m} \ge 1$, pa je tada $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \ne \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor$. Neka je sada $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = k$, $k \in \{0, 1, 2, ..., m-2\}$. Kako je $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = k$, iz (1.4a) slijedi da je $k \le \frac{x}{m} < k+1$, odnosno

$$km \le x < (k+1)m. \tag{2.2}$$

Analogno $\left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = k$ povlači $k \leq \frac{x}{m-1} < k+1$, odnosno

$$k(m-1) \leq x < (k+1)(m-1). \tag{2.3}$$

Nejednakosti (2.2) i (2.3) daju

$$km \leq x < (k+1)(m-1).$$

Dakle, za svaki k imamo $(k+1)(m-1) - km = km - k + m - 1 - km = m - 1 - k$ rješenja, osim za $k = 0$ jer tada moramo izbaciti 0. Zato je ukupan broj rješenja

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-2}(m-1-k) - 1 &= (m-1)\sum_{k=0}^{m-1} 1 - \sum_{k=0}^{m-2} k - 1 \\
&= (m-1)(m-1) - \frac{(m-2)(m-1)}{2} - 1 \\
&= \frac{2(m^2-2m+1) - (m^2-3m+2) - 2}{2} \\
&= \frac{m^2-m-2}{2} = \frac{(m-2)(m+1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.2.6. *Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi*

$$\left\lfloor \frac{x^2+1}{x+2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \frac{x(3x+1)}{2(x+2)}.$$

Državno natjecanje, 2019. godine, 2. razred - A varijanta

Rješenje. Prema definiciji funkcije strop, za sve realne t vrijedi $\lfloor t \rfloor \leq t$, pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je t cijeli broj.
Zato je

$$\left\lfloor \frac{x^2+1}{x+2} \right\rfloor \leq \frac{x^2+1}{x+2} \quad i \quad \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{x-1}{2}.$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo:

$$\frac{x(3x+1)}{2(x+2)} = \left\lfloor \frac{x^2+1}{x+2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{x^2+1}{x+2} + \frac{x-1}{2} = \frac{x(3x+1)}{2(x+2)}.$$

Dakle, obje gornje nejednakosti moraju biti jednakosti pa su zato $\frac{x^2+1}{x+2}$ i $\frac{x-1}{2}$ cijeli brojevi.

Razlomak $\frac{x-1}{2}$ je cijeli broj ako i samo ako je x neparan cijeli broj.
Prvi razlomak zapišimo kao:

$$\frac{x^2+1}{x+2} = x-2+\frac{5}{x+2}.$$

Kako je x cijeli broj, nužno je i dovoljno da $\frac{5}{x+2}$ bude cijeli broj.
Zato je $x+2 \in \{1,-1,5,-5\}$, odnosno $x \in \{-1,-3,3,-7\}$.

$\square$

Zadatak 2.2.7. *Odredi sva realna rješenja jednadžbe*

$$11\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = 9x.$$

Županijsko natjecanje, 2015. godine, 3. razred - A varijanta

Rješenje. Budući da su $\lfloor x\rfloor$ i $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$ cijeli brojevi, slijedi da je $9x$ cijeli broj.

Zato broj x možemo zapisati u obliku

$$x = a+\frac{1}{9}b, \qquad \text{pri čemu je } a=\lfloor x\rfloor \text{ i } b=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Početna jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned}
11\left\lfloor a+\frac{1}{9}b\right\rfloor + \left\lfloor a+\frac{1}{9}b+\frac{1}{2}\right\rfloor &= 9\left(a+\frac{1}{9}b\right),\\
11a + \left\lfloor a+\frac{1}{9}b+\frac{1}{2}\right\rfloor &= 9a+b,\\
\left\lfloor a+\frac{1}{9}b+\frac{1}{2}\right\rfloor &= b-2a.
\end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja: $\frac{b}{9}+\frac{1}{2}<1$ i $\frac{b}{9}+\frac{1}{2}\geq 1$.
Ako je $\frac{b}{9}+\frac{1}{2}<1$, tj. $b\in\{0,1,2,3,4\}$, onda je $a=b-2a$ i $b=3a$, iz čega slijedi $(a,b)=(0,0)$ ili $(a,b)=(1,3)$.
Ako je $\frac{b}{9}+\frac{1}{2}\geq 1$, tj. $b\in\{5,6,7,8\}$, onda je $a+1=b-2a$ i $b=3a+1$, iz čega slijedi $(a,b)=(2,7)$.
Konačno, rješenja dane jednadžbe su $0+\frac{0}{9}, 1+\frac{3}{9}, 2+\frac{7}{9}$, tj. $x\in\left\{0,\frac{4}{3},\frac{25}{9}\right\}$. $\square$

Zadatak 2.2.8. *Odredi sve trojke* (x, y, z) *pozitivnih realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} 3\lfloor x\rfloor - \{\, y\,\} + \{\, z\,\} &= 20.3 \\ 3\lfloor y\rfloor + 5\lfloor z\rfloor - \{\, x\,\} &= 15.1 \\ \{\, y\,\} + \{\, z\,\} &= 0.9. \end{aligned}$$

Županijsko natjecanje, 2017. godine, 2. razred - A varijanta

Rješenje. Zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo

$$3\lfloor x\rfloor + 2\{\, z\,\} = 21.2.$$

Imamo dvije mogućnosti: $\{\, z\,\} = 0.1$ ili $\{\, z\,\} = 0.6$.
No, samo za $\{\, z\,\} = 0.1$ je $\lfloor x\rfloor$ cijeli broj. Dakle, mora vrijediti $\{\, z\,\} = 0.1$ i $\lfloor x\rfloor = 7$.
Iz treće jednadžbe slijedi $\{\, y\,\} = 0.8$. Iz druge jednadžbe vidimo da mora vrijediti $\{\, x\,\} = 0.9$.
Također vrijedi

$$3\lfloor y\rfloor + 5\lfloor z\rfloor = 16.$$

Budući da su y i z pozitivni, jedina mogućnost je $\lfloor y\rfloor = 2$ i $\lfloor z\rfloor = 2$.
Sustav ima samo jedno rješenje $x = 7.9, y = 2.8, z = 2.1$.

□

2.3 Nejednakosti

U ovoj točki ćemo riješiti nekoliko zadataka u kojima trebamo odrediti vrijede li zadane nejednakosti ili riješiti zadanu nejednadžbu:

Zadatak 2.3.1. *Dokažite ili opovrgnite: Za sve realne brojeve* x *i* y *vrijedi nejednakost*

$$\lfloor 3x\rfloor + \lfloor 3y\rfloor \;\geq\; \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor + \lfloor x + y\rfloor.$$

[2]

Rješenje. Tvrdnja ne vrijedi. Primjerice, za $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ lijeva je strana jednaka $\left\lfloor \frac{3}{2}\right\rfloor + \left\lfloor -\frac{3}{2}\right\rfloor = 1 - 2 = -1$. Desna je strana jednaka

$$\lfloor 1\rfloor + \lfloor -1\rfloor + \lfloor 0\rfloor = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Dakle, $-1 < 0$ pa tvrdnja ne vrijedi. □

Zadatak 2.3.2. *Riješite nejednadžbu*

$$\lfloor x \rfloor \{x\} < x - 1.$$

[2]

Rješenje. Iz (1.7) slijedi $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, pa imamo da je nejednakost ekvivalentna s

$$\lfloor x \rfloor \{x\} < \lfloor x \rfloor + \{x\} - 1,$$

odnosno $\lfloor x \rfloor \{x\} - \lfloor x \rfloor - \{x\} + 1 < 0$. Faktoriziramo li izraz na lijevoj strani dobivamo

$$(\lfloor x \rfloor - 1)(\{x\} - 1) < 0.$$

Iz (1.8) slijedi da mora biti $\lfloor x \rfloor - 1 > 0$, tj. $\lfloor x \rfloor > 1$.
Dakle, rješenje je $x \in [2, +\infty\rangle$. □

Zadatak 2.3.3. *Dokažite nejednakost*

$$\lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor 2x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x + 2y \rfloor.$$

[2]

Rješenje. Kako iz (1.7) slijedi da je $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ i $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, nejednakost je ekvivalentna s

$$\lfloor \lfloor y \rfloor + \{y\} \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} + \{y\} \rfloor + \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} \rfloor \leq \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} \rfloor + \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 2\{x\} + 2\{y\} \rfloor.$$

Iz (1.5) i (1.12), slijedi da je nejednakost ekvivalentna s

$$\lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor + 2\lfloor \{x\} \rfloor \leq \lfloor 2\{x\} + 2\{y\} \rfloor. \tag{2.4}$$

Dokažimo sada (2.4).
Kako je $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$, razlikovat ćemo tri slučaja:

1. $\{x\} + \{y\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$.
   Tada (2.4) prelazi u $0 \leq 0$.

2. $\{x\} + \{y\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$.
   Tada je lijeva strana u (2.4) 0 ili 1, a desna 1 pa nejednakost vrijedi i u ovom slučaju.

3. $\{x\} + \{y\} \in [1, 2\rangle$.
   Tada je lijeva strana u (2.4) 1 ili 2, a desna 2 pa nejednakost vrijedi.

Ovime je dokaz završen. □

Poglavlje 3

Sume i rekurzije

3.1 Sume

U ovoj točki promatrat ćemo neke sume koje uključuju cjelobrojne funkcije. Neki zadaci su kao i u prethodnom poglavlju preuzeti s natjecanja te ćemo ih ovdje riješiti.

Zadatak 3.1.1. *Odredi formulu za zbroj*

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt{n^2 - 1} \rfloor.$$

Državno natjecanje, 2008. godine, 4. razred - A varijanta

Rješenje. Označimo sa S_n traženi zbroj. Nekoliko prvih pribrojnika u toj sumi izgleda ovako:

$$S_n = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + ...$$

S obzirom da je

$$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2,$$

vrijedi

$$n - 1 \leq \lfloor \sqrt{n^2 - 1} \rfloor < n,$$

pa je posljednji pribrojnik u ovoj sumi jednak $n - 1$.

Postavlja se pitanje: ako je $1 \leq k \leq n - 1$, koliko će se puta u sumi pojaviti pribrojnik k? Tu će vrijednost imati sljedeći članovi sume:

$$\lfloor \sqrt{k^2} \rfloor, \lfloor \sqrt{k^2 + 1} \rfloor, ..., \lfloor \sqrt{(k+1)^2 - 1} \rfloor.$$

Dakle, pribrojnik k pojavljuje se $(k+1)^2 - k^2$ puta. Primijetimo da je posljednji član sume jednak $\sqrt{n^2-1}$, pa je on ujedno i posljednji član u ovakvoj skupini pribrojnika. Zato je tražena suma jednaka:

$$S_n = 1 \cdot (2^2 - 1^2) + 2(3^2 - 2^2) + ... + (n-1)[n^2 - (n-1)^2].$$

Izračunajmo ovaj zbroj:

$$\begin{aligned} S_n &= 2^2 - 1^2 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3^2 ... + (n-1)n^2 - (n-1)(n-1)^2 \\ &= -1^2 - 2^2 - 3^2 - ... - (n-1)^2 + (n-1)n^2 \\ &= (n-1)n^2 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(4n-1)}{6}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.1.2. *Neka je p prost broj, te a prirodan broj koji nije djeljiv s p. Izračunajte*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \frac{ak}{p} \right\}.$$

[2]

Rješenje. Promatrajmo brojeve $a, 2a, 3a, ..., (p-2)a, (p-1)a$. Kako je p prost broj i a nije djeljiv s p, slijedi da niti jedan od ovih $p-1$ brojeva nije djeljiv s p. Dokažimo sada da oni daju različite ostatke pri dijeljenju s p.

U tu svrhu pretpostavimo suprotno, tj. da postoje i, j takvi da je $1 \leq i < j \leq p-1$ i $ai \equiv aj \pmod{p}$. [1]. Tada je $a(j-i) \equiv 0 \pmod{p}$, a to je kontradikcija jer je $j - i \in \{1, 2, 3, ..., p-1\}$.

Prema tome, imamo

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\{ \frac{ak}{p} \right\} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{1}{p} \cdot \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

□

[1] Ako cijeli broj $l \neq 0$ dijeli razliku $m - n$, onda kažemo da je m kongruentan n modulo l i pišemo $m \equiv n \pmod{l}$.

Zadatak 3.1.3. *Izračunajte* $\sum_{k=0}^{n^3-1} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$.

[2]

Rješenje. Očito će $\lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$ poprimiti vrijednosti $0, 1, 2, ..., n-1, \quad n \in \mathbb{N}$.
Neka je $\lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor = l$, pri čemu je $0 \leq l \leq n-1$.
Kako je $\lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor = l$, iz (1.4a) slijedi $l \leq \sqrt[3]{k} < l+1$, odakle je $l^3 \leq k < (l+1)^3$.
Prema tome, za $k = l^3, l^3+1, ..., (l+1)^3 - 1$ je $\lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor = l$.
Zato je $\sum_{k=0}^{n^3-1} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor = \sum_{l=0}^{n-1} l[(l+1)^3 - l^3]$. Nadalje sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{n-1} l[(l+1)^3 - l^3] &= \sum_{l=0}^{n-1} l(l^3 + 3l^2 + 3l + 1 - l^3) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} l(3l^2 + 3l + 1) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} l^3 + 3\sum_{l=0}^{n-1} l^2 + \sum_{l=0}^{n-1} l \\
&= 3 \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{4}(3n^2 - 3n + 4n - 2 + 2) \\
&= \frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

□

Napomena 3.1.4. U prethodnom primjeru koristili smo poznate formule:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}, \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4},
\end{aligned}$$

koje lagano dokazujemo indukcijom.

Zadatak 3.1.5. *Dokažite da za svaki prirodan broj n i realan broj x vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lceil x - \frac{k-1}{n} \right\rceil = \lceil nx \rceil.$$

[2]

Rješenje. Tvrdnja očito vrijedi za $x \in \mathbb{Z}$. Označimo, radi jednostavnosti, $\lfloor x \rfloor = r$ i $\{x\} = \theta$. Neka je $\theta \in \left\langle \frac{a-1}{n}, \frac{a}{n} \right]$, gdje je $a \in \{1, 2, ..., n\}$. Imamo da je

$$\frac{a-1}{n} < \theta \leq \frac{a}{n}. \tag{3.1}$$

Pribrojimo li toj nejednakosti $r - \frac{k-1}{n}$, dobivamo

$$r + \frac{a-1}{n} - \frac{k-1}{n} < r + \theta - \frac{k-1}{n} \leq r + \frac{a}{n} - \frac{k-1}{n},$$

odnosno,

$$r + \frac{a-k}{n} < x - \frac{k-1}{n} \leq r + \frac{a-k+1}{n}.$$

Iz prethodne nejednakosti zaključujemo da je $\left\lceil x - \frac{k-1}{n} \right\rceil = r + 1$ za $k = 1, 2, ..., a$ i $\left\lceil x - \frac{k-1}{n} \right\rceil = r$ za $k = a + 1, ..., n$.
Zato je

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lceil x - \frac{k-1}{n} \right\rceil = a(r+1) + (n-a)r = ar + a + nr - ar = nr + a. \tag{3.2}$$

S druge strane, iz (3.1) slijedi

$$r + \frac{a-1}{n} < \theta + r \leq r + \frac{a}{n}.$$

Pomnožimo li prethodni izraz s n, koristeći da je $x = r + \theta$ dobivamo $nr + a - 1 < nx \leq nr + a$.
Zato je

$$\lceil nx \rceil = nr + a. \tag{3.3}$$

Uspoređujući (3.2) i (3.3) vidimo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lceil x - \frac{k-1}{n} \right\rceil = \lceil nx \rceil.$$

□

3.2 Rekurzije

Rekurzivne relacije koje uključuju cjelobrojne funkcije često se pojavljuju u računalnim znanostima. Jedan od najpoznatijih i najprimjenjivijih algoritama za rješavanje problema rekurzijom je "podijeli pa vladaj". [2] Primjer jednog takvog sortiranja skupa od n podataka je da ih podijelimo na dva približno jednaka dijela, od kojih je jedan veličine $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, a drugi veličine $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Nakon što svaki taj skup podataka zasebno ponovo sortiramo (rekurzivno), podatke možemo ponovo spojiti nakon što smo odradili još $n-1$ usporedbi. Dakle, konačan broj usporedbi koje smo odradili jest $f(n)$, gdje je

$$\begin{aligned} f(1) &= 0; \\ f(n) &= f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, \end{aligned}$$

za $n > 1$.
Detaljnije o ovoj rekurziji možemo naći u [1].

Sada ćemo riješiti nekoliko zadataka s rekurzijama:

Zadatak 3.2.1. *Riješite rekurziju*

$$\begin{aligned} x_n &= n, \quad 0 \leq n < m,\ m \in \mathbb{N} \\ x_n &= x_{n-m} + 1, \quad n \geq m. \end{aligned}$$

[2]

Rješenje. Imamo da je $x_n = x_{n-m} + 1 = x_{n-2m} + 2 = ... = x_{n-km} + k = n - km + k$, gdje je $0 \leq n - km < m$.
No, tada je $n - m < km \leq n$, odnosno nakon dijeljenja s m

$$\frac{n}{m} - 1 < k \leq \frac{n}{m}.$$

Prema tome, $k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, pa je rješenje rekurzije

$$x_n = n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot m + \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor. \tag{3.4}$$

□

[2] Podijeli pa vladaj (Divide and conquer) algoritam.
Problem se dijeli na više istih, manjih problema. Podjela teče tako dugo dok se ne dođe do malog problema kojeg je jednostavno riješiti (obično rekurzijom.)

Napomena 3.2.2. *Iz* (1.18) *slijedi da rješenje rekurzije* (3.4) *možemo zapisati u obliku* $x_n = n \bmod m + \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$.

Zadatak 3.2.3. *Dokažite da je rješenje rekurzije*

$$\begin{aligned} x_0 &= m, \quad m > 2,\ m \in \mathbb{N} \\ x_n &= x_{n-1}^2 - 2, \quad n > 0 \end{aligned}$$

dano s $x_n = \left\lceil \alpha^{2^n} \right\rceil$ *gdje je* $\alpha + \frac{1}{\alpha} = m,\ \alpha > 1.$

[2]

Rješenje. Nađimo nekoliko početnih članova niza x_n:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \alpha^{-1}. \\ x_1 &= x_0^2 - 2 = (\alpha + \alpha^{-1})^2 - 2 = \alpha^2 + 2 + \alpha^{-2} - 2 = \alpha^2 + \alpha^{-2}. \\ x_2 &= x_1^2 - 2 = (\alpha^2 + \alpha^{-2})^2 - 2 = \alpha^4 + 2 + \alpha^{-4} - 2 = \alpha^4 + \alpha^{-4}. \end{aligned}$$

Tvrdimo da je $x_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Bazu već imamo.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$. Koristeći pretpostavku indukcije, dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - 2 = (\alpha^{2n} + \alpha^{-2n})^2 - 2 \\ &= (\alpha^{2^n})^2 + 2 + (\alpha^{-2^n})^2 - 2 \\ &= \alpha^{2 \cdot 2^n} + \alpha^{-2 \cdot 2^n} = \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Sada, kako je $\alpha > 1$ to je $\alpha^{-2n} < 1$.
Iz rekurzije je jasno da su svi x_n prirodni brojevi.
Zato je $x_n = \left\lceil \alpha^{2^n} \right\rceil$.

□

Zadatak 3.2.4. *Izračunajte*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

[2]

Rješenje. Primijetimo da ovaj beskonačni zbroj ima smisla jer počevši od nekog k je $\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} < 1$, pa je $\left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$. Pokušajmo sada naći vezu između S_n i S_{n+1}. Promatrajmo brojeve $a = \frac{n+1}{2^k} + \frac{1}{2}$ i $b = \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}$. Tada je

$$b - a = \frac{1}{2^k}. \tag{3.5}$$

Ako broj $a = \dfrac{n+1+2^{k-1}}{2^k}$ nije cijeli, onda se od $\lfloor a \rfloor$ razlikuje za

$$d \geq \frac{1}{2^k}. \tag{3.6}$$

Koristeći (3.5) i (3.6) zaključujemo da je tada

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Ako je $a = \dfrac{n+1+2^{k-1}}{2^k}$ cijeli broj, tj. $n + 1 + 2^{k-1} = 2^k \cdot l$, tada imamo da je $n + 1 = 2^{k-1}(2l - 1)$.
Budući da se svaki prirodan broj n na jedinstven način može prikazati u obliku $2^a(2b + 1)$, zaključujemo da postoji jedan i samo jedan k takav da je

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Prema tome, S_n i S_{n+1} razlikuju se za 1, tj.

$$S_{n+1} = S_n + 1.$$

Kako je $S_0 = 0$, to je $S_n = S_{n-1} + 1 = S_{n-2} + 2 = ... = S_0 + n = n.$ □

Bibliografija

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, USA (1994), 67-101. https://www.csie.ntu.edu.tw/~r97002/temp/Concrete%20Mathematics%202e.pdf

[2] M. Krnić, *Cjelobrojne funkcije*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb (2000), 174-186.

[3] Zadaci s matematičkih natjecanja u Republici Hrvatskoj, HMD. http://www.matematika.hr/natjecanja/domaca/

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb (1995).

[5] I. Kuzmanović, *Neke primjene funkcija pod i strop*, Osječki matematički list **8** (2008), 77-82. https://hrcak.srce.hr/33896

[6] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva (skripta)*. https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf

[7] S. Majstorović, *Dirichletov princip*, Osječki matematički list **6** (2006), 99-105. https://hrcak.srce.hr/9564

[8] R. Vlahović-Kruc, Materijali s kolegija *Metodika nastave matematike 1*, 2017.

Sažetak

U ovom radu opsežno smo obradili cjelobrojne funkcije. Najprije smo ih precizno matematički definirali i naveli njihova osnovna svojstva te smo zatim riješili velik broj primjera iz različitih područja (logaritmi, limesi, nizovi, raznoliki zadaci iz područja teorije brojeva, zadaci iz svakodnevnog života koje smo riješili primjenom Dirichletovog principa, itd.). U svim primjerima primijenjivali smo svojstva cjelobrojnih funkcija. Primjenjujući naučeno o cjelobrojnim funkcijama, postupno smo izgradili pojam binarne operacije mod. Velik dio rada posvetili smo rješavanju zadataka s identitetima, jednadžbama, nejednakostima i nejednadžbama među kojima su i zadaci s matematičkih natjecanja u Republici Hrvatskoj. Konačno, riješili smo i velik broj zadataka sa sumama i rekurzijama koje uključuju funkcije pod i strop.

Summary

In this thesis, we gave the extensive overview of the integer functions. In the beginning, we gave their strict mathematical definition and listed their main properties which we used throughout the whole thesis. Also, we solved a lot of examples from various mathematical areas (which included logarithms, limits, arrays, theory of numbers, Dirichlet's principle, etc.) in which we applied those properties. In great part of the thesis, we solved a lot of exercises which included identities, equations and inequalities. Within those exercises, there were a lot of those from mathematical competitions in the Republic of Croatia. Finally, we solved tasks that included sums and recursive relations with integer functions.

Životopis

Rođena sam 25. veljače 1994. godine u Zagrebu. Godine 2008. završila sam osnovnu školu "Kreativan razvoj" u Zagrebu. Iste godine upisujem XV. gimanziju u Zagrebu koju završavam 2012. godine. Iste godine upisujem preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovnom-matematičkom fakultetu u Zagrebu, kojeg završavam 2016. godine. Potom upisujem Diplomski sveučilišni studij, nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta.