Ortogonalnost u normiranim prostorima

Končić, Mihael

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihael Končić

ORTOGONALNOST U NORMIRANIM PROSTORIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Berić

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U unitarnom prostoru ortogonalnost na uobičajen način definiramo pomoću skalarnog produkta. Kažemo da su dva vektora međusobno ortogonalna ako im je skalarni produkt jednak nuli. Ako imamo neki unitaran prostor X te njegovu (topološku) bazu (e_n), tada za proizvoljni $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara (α_n), takav da vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Ako su vektori baze međusobno ortogonalni, tada skalare jednostavno možemo zapisati kao $\alpha_n = \dfrac{\langle x, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle}$ što je dovoljno dobra motivacija za proučavanje pojma ortogonalnosti. Relaciju ortogonalnosti željeli bismo proširiti i na normirane prostore, ali odmah vidimo da je ovakva definicija nemoguća budući da norma općenito ne potječe iz skalarnog produkta. Matematičari se ovim problemom bave od 30-ih godina 20. stoljeća i danas postoje razne definicije ortogonalnosti koje su na unitarnim prostorima ekvivalentne klasičnoj, a mogu se proširiti i na normirane prostore.

U prvom poglavlju ovog rada navodimo neke osnovne pojmove vezane za unitarne i normirane prostore te ćemo uvesti šest svojstava koja klasična relacija ortogonalnosti zadovoljava na unitarnom prostoru.

U drugom poglavlju navodimo razna poopćenja ortogonalnosti u normiranim prostorima što je zapravo i glavni cilj ovog rada. Posebnu pažnju obratit ćemo na četiri u literaturi najzastupljenije ortogonalnosti: Birkhoff-Jamesovu, Robertsovu, Jamesovu i Pitagorinu. Za svaku od njih provjerit ćemo koja svojstva ortogonalnosti ona zadovoljava, a koja ne. Pokazat će se da ne postoji poopćenje koje zadovoljava sva svojstva. Tu ćemo također pokazati važnu karakterizaciju Birkhoff-Jamesove ortogonalnosti na prostoru ograničenih linearnih operatora.

U posljednjem poglavlju bavimo se mjerama odstupanja Banachovih prostora od Hilbertovih, tj. uvest ćemo konstante koje mjere koliko je neki Banachov prostor daleko do toga da bude Hilbertov.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Unitarni i normirani prostori

U ovom ćemo odjeljku definirati unitarne i normirane prostore te pokazati vezu između njih. Većina rezultata može se naći u [2]. Tijekom cijelog rada $\mathbb{F}$ će nam biti zajednička oznaka za polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ i polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1.1. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X$;
4. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \forall x_1, x_2 \in X$;
5. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ naziva se unitaran prostor.

Pogledajmo sada neke uobičajene primjere unitarnih prostora. S $C([a, b])$ označavat ćemo prostor svih neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$, a $M_{mn}(\mathbb{F})$ će nam biti oznaka za prostor svih matrica reda $m \times n$ (pišemo $M_n(\mathbb{F})$ ukoliko je $m = n$).

Primjer 1.1.2.

(a) $(\mathbb{F}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *gdje je* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i}$ *za* $x = (\xi_1, ..., \xi_n), y = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{F}^n$.

(b) $(C([a, b]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *gdje je* $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ *za* $f, g \in C([a, b])$.

(c) $(M_{mn}(\mathbb{F}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *gdje je* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ *za* $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

Definicija 1.1.3. *Norma na vektorskom prostoru* X *nad poljem* $\mathbb{F}$ *je preslikavanje* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ *naziva se normiran prostor.*

Očito je prostor $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ primjer jednog normiranog prostora nad poljem $\mathbb{F}$. U sljedećem primjeru možemo vidjeti još neke učestale primjere normiranih prostora nad poljem $\mathbb{F}$.

Primjer 1.1.4.

(a) $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$, *gdje je* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$ *za* $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

(b) $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$, *gdje je* $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$ *za* $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

(c) $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$, *gdje je* $\|x\|_\infty = \max\{|\xi_i| : 1 \leq i \leq n\}$ *za* $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

(d) *Općenito, za* $p \geq 1$ *je* $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$ *normiran prostor, gdje je* $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p\right)^{1/p}$ *za* $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

Sada ćemo navesti primjere normi nad vektorskim prostorom $C([a, b])$.

Primjer 1.1.5.

(a) $(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$, *gdje je* $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$.

(b) $(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$, *gdje je* $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.

(c) $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, *gdje je* $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$.

Slijede primjeri normi na prostoru $M_{mn}(\mathbb{F})$.

Primjer 1.1.6.

(a) $(M_{mn}(\mathbb{F}), |||\cdot|||_1)$, *gdje je* $|||A|||_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

(b) $(M_{mn}(\mathbb{F}), |||\cdot|||_2)$, *gdje je* $|||A|||_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$.

(c) $(M_{mn}(\mathbb{F}), ||| \cdot |||_\infty)$, *gdje je* $|||A|||_\infty = \max\limits_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} |a_{ij}|$.

Matrične norme također možemo dobiti kao operatorske norme iz odgovarajućih vektorskih korištenjem definicije:

$$||A|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||Ax||. \tag{1.1}$$

Kada se u (1.1) uvrste norme iz primjera 1.1.4 dobivamo matrične norme dane u sljedećem primjeru. Sa ρ ćemo označiti spektralni radijus kvadratne matrice, a σ_i označavat će singularne vrijednosti matrice pri čemu je σ_{max} najveća singularna vrijednost.

Primjer 1.1.7.

(a) $(M_{mn}(\mathbb{F}), || \cdot ||_1)$, *gdje je* $||A||_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.

(b) $(M_{mn}(\mathbb{F}), || \cdot ||_2)$, *gdje je* $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sigma_{max}(A)$.

(c) $(M_{mn}(\mathbb{F}), || \cdot ||_\infty)$, *gdje je* $||A||_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Navedimo sada još jednu matričnu normu koja će nam biti važna za jedan od kasnijih rezultata. U literaturi se za nju često koristi naziv *nuklearna norma*.

Primjer 1.1.8. $(M_{mn}(\mathbb{F}), || \cdot ||_*)$, *gdje je* $||A||_* = \mathrm{tr}\left(\sqrt{A^*A}\right) = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i(A)$.

Prirodno se postavlja pitanje veze između normiranih i unitarnih prostora. U sljedećih nekoliko razultata vidjet ćemo da je svaki unitaran prostor ujedno i normiran te uz koje uvjete vrijedi i obrat. Za početak, iskažimo jednu korisnu nejednakost koja vrijedi na svim unitarnim prostorima.

Propozicija 1.1.9. *(Cauchy-Schwarz-Bunjakovski) Neka je* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *unitaran prostor. Tada je*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad \forall x, y \in X. \tag{1.2}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni.

Uz pomoć nejednakosti iz prethodne propozicije lako se pokaže da je na proizvoljnom unitarnom prostoru $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ formulom $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zadana jedna norma. U daljnjem ćemo podrazumijevati da je svaki unitaran prostor normiran uz ovako uvedenu normu.

Pretpostavimo da je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitaran prostor. Za $x, y \in X$ imamo

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle,$$
$$||x - y||^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo tzv. *jednakost paralelograma*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in X \tag{1.3}$$

Slično, lako se provjeri da vrijedi i

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2, \tag{1.4}$$

ako je prostor realan, odnosno

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2, \tag{1.5}$$

ako je prostor kompleksan. Prethodne dvije jednakosti zovu se *polarizacijske formule*. One pokazuju da u svakom unitarnom prostoru skalarni produkt možemo rekonstruirati iz izvedene norme.

Jednakost paralelograma (1.3) je, kako smo vidjeli, uvjet koji ispunjava svaka norma koja je izvedena iz skalarnog produkta. Zanimljivo je da je taj uvjet i dovoljan. Sljedeći teorem pokazuje da jednakost paralelograma zapravo karakterizira norme koje potječu iz skalarnog produkta.

Teorem 1.1.10 (Jordan - von Neumann)**.** *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Tada postoji skalarni produkt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *na* X *takav da vrijedi* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in X$, *onda i samo onda kada ta norma zadovoljava jednakost paralelograma* (1.3)*. U tom slučaju taj je skalarni produkt jedinstven i dan je polarizacijskom formulom* (1.4)*, odnosno* (1.5)*, ovisno o tome je li prostor* X *realan ili kompleksan.*

Osim prethodnog teorema koji je vrlo popularan u matematičkoj literaturi, postoji i sljedeći rezultat kojeg je Ficken dokazao u [9].

Teorem 1.1.11. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *realan normiran prostor. Tada je* X *unitaran ako i samo ako za svaka dva vektora* $x, y \in X$ *takva da* $\|x\| = \|y\|$ *i za svaka dva* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *vrijedi da je*

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\beta x + \alpha y\|.$$

Sada ćemo uvesti definiciju konvergencije u normiranim prostorima, a zatim ćemo pomoću toga definirati potpune normirane, odnosno unitarne prostore.

Definicija 1.1.12. *Neka je* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u normiranom prostoru* X*.*

Kažemo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira prema* $x \in X$*, pišemo* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *, ako*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyjev ako*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Napomena 1.1.13. *Lako možemo provjeriti da je svaki konvergentan niz ujedno i Cauchyjev. Obrat općenito ne vrijedi.*

Definicija 1.1.14. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se Banachov prostor. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Navedimo sada nekoliko oznaka i rezultata vezanih za operatore na normiranim prostorima koje ćemo koristiti kasnije u radu.

Definicija 1.1.15. *Ako su X i Y normirani prostori, onda je operator $A : X \to Y$ ograničen ako*

$$\exists M > 0 \quad t.d. \quad ||Ax|| \leq M||x||, \quad \forall x \in X.$$

Skup svih ograničenih linearnih operatora označavamo s $\mathbb{B}(X, Y)$. Za $X = Y$ pišemo $\mathbb{B}(X)$. Skup svih ograničenih linearnih funkcionala na X, $\mathbb{B}(X, \mathbb{F})$, zove se dualni prostor prostora X i označava se s X'.

Teorem 1.1.16. *(polarni rastav operatora) Neka su X, Y konačnodimenzionalni Hilbertovi prostori. Za svaki $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ postoje pozitivni operatori $P \in \mathbb{B}(X), P' \in \mathbb{B}(Y)$ te unitarni operatori $U, V \in \mathbb{B}(X, Y)$ takvi da je $A = UP = P'V$.*

Teorem 1.1.17. *(SVD dekompozicija) Neka je $m \geq n$ i neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Tada postoje unitarne matrice $U \in M_m(\mathbb{F})$ i $V \in M_n(\mathbb{F})$ te matrica $\Sigma = diag(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in M_{m,n}$ takve da je $A = U\Sigma V^*$. Nenegativni realni brojevi σ_i zovu se singularne vrijednosti matrice A. Posebno, ako je A pozitivno definitna matrica onda je $U = V$.*

Možemo još i pisati $A = U\Sigma V^* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^*$ gdje su u_i stupci matrice U, a v_i stupci matrice V.

U slučaju kada je $m < n$, SVD dekompoziciju definiramo za A^*.

Definicija 1.1.18. *Neka je X Hilbertov prostor te neka je $A \in \mathbb{B}(X)$. Numeričku sliku operatora A definiramo kao*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \ ||x|| = 1\}.$$

Teorem 1.1.19. *(Toeplitz-Hausdorffov teorem) Neka je X Hilbertov prostor te neka je $A \in \mathbb{B}(X)$. Tada je numerička slika operatora A konveksan skup.*

Teorem 1.1.20. *(Rieszov teorem o reprezentaciji) Neka je X Hilbertov prostor i X' njegov dual. Za svaki $f \in X'$ postoji jedinstveni $a \in X$ takav da je $f(x) = \langle x, a\rangle$. Dodatno, vrijedi da je $||a||_X = ||f||_{X'}$.*

Teorem 1.1.21. *(Hahn-Banach) Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ pravi potprostor od X. Za svaki ograničen linearan funkcional $f_0 \in Y'$ postoji ograničen linearan funkcional $f \in X'$ takav da je $f|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.*

Korolar 1.1.22. *Neka je X_0 potprostor normiranog prostora X i neka je $x_1 \in X$ takav da je $d = d(x_1, X_0) = \inf\{\|x_1 - x\| : x \in X_0\} > 0$. Tada postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i da vrijedi $f(x_1) = d$ i $f(x) = 0, \ \forall x \in X_0$.*

1.2 Ortogonalnost i ortonormirane baze

Pojam ortogonalnosti izvorno potječe iz geometrije, ali izrazito je važan i za mnoga druga područja matematike. U ovom odjeljku uvest ćemo definiciju ortogonalnosti na unitarnom prostoru te se upoznati s problemima koje ona nosi ukoliko se nalazimo u normiranom prostoru.

Definicija 1.2.1. *Neka je X unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y ortogonalni ako vrijedi $\langle x, y\rangle = 0$. Pišemo $x \perp y$.*

Primjer 1.2.2. *Dva vektora u $\mathbb{R}^2$ su ortogonalna u smislu skalarnog produkta*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ako i samo ako su okomiti u geometrijskom smislu.

Napomena 1.2.3. *Neka je X unitaran prostor i $\perp$ relacija ortogonalnosti definirana skalarnim produktom na X. Direktno iz svojstava skalarnog produkta slijedi da relacija ortogonalnosti $\perp$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *Nedegeneriranost: $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$.*
2. *Homogenost: $x \perp y \Rightarrow \alpha x \perp \beta y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*
3. *Simetričnost: $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.*
4. *Aditivnost s desna: $(x \perp y$ i $x \perp z) \Rightarrow x \perp (y + z)$.*
5. *Aditivnost s lijeva: $(x \perp y$ i $z \perp y) \Rightarrow (x + z) \perp y$.*
6. *Za svaka dva elementa x i y postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ tako da $x \perp (\alpha x + y)$.*

Ortogonalnost smo u proizvoljnom unitarnom prostoru definirali na prirodan način iz skalarnog produkta. Sada ćemo pokazati zašto nam je ona bitna u smislu prikaza proizvoljnog vektora pomoću linearne kombinacije elemenata baze.

Definicija 1.2.4. *Niz vektora $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ normiranog prostora X je topološka baza za X ako postoji jedinstven niz skalara $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$ (pri čemu se ovdje podrazumijeva obična konvergencija reda u normi prostora X).*

Napomena 1.2.5. *U unitarnom prostoru X za niz vektora $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ čiji su elementi međusobno ortogonalni ($e_i \perp e_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$) kažemo da je ortogonalan. Dodatno, ako su vektori niza normirani ($\|e_i\| = 1, \forall i \in \mathbb{N}$) kažemo da je niz ortonormiran.*

Definicija 1.2.6. *Ortonormiran niz $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u unitarnom prostoru X je ortonormirana baza (ONB) za X ako svaki vektor $x \in X$ dopušta prikaz oblika $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ (red konvergira u normi prostora X).*

Teorem 1.2.7. *Svaki Hilbertov prostor ima ortonormiranu bazu. Svaki separabilan Hilbertov prostor ima prebrojivu ortonormiranu bazu.*

Napomena 1.2.8. *Uočimo da zbog ortonormiranosti niza $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i neprekidnosti skalarnog produkta iz $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ odmah slijedi $\langle x, e_i\rangle = \alpha_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Dakle, prikaz vektora x u ONB $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je jedinstven pa je prethodna definicija u skladu s definicijom 1.2.4. Sada možemo reći da je svaka ONB unitarnog prostora ujedno i topološka baza. Izraz*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i \tag{1.6}$$

zove se Fourierov red vektora x, a skalari $\langle x, e_i\rangle$ Fourierovi koeficijenti vektora x s obzirom na ONB $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Sada se postavlja pitanje kako definirati ortogonalnost na proizvoljnom normiranom prostoru u kojem skalarni produkt ne mora nužno postojati. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo različite načine kako to možemo napraviti.

Poglavlje 2

Poopćenja ortogonalnosti na normiranim prostorima

Poopćenje ortogonalnosti na normirane prostore je problem kojim se od 30-ih godina 20. stoljeća pa sve do danas bave mnogi matematičari. Postoji puno različitih poopćenja, a neka najvažnija navest ćemo u ovom poglavlju. Također, provjerit ćemo koja svojstva ortogonalnosti zadovoljavaju te ćemo pokazati da se zaista radi o poopćenjima, tj. da na unitarnom prostoru imamo ekvivalenciju s klasičnom ortogonalnošću. Važno je odmah napomenuti da ne postoji poopćenje koje zadovoljava svih šest svojstava ortogonalnosti iz napomene 1.2.3 na općenitom normiranom prostoru.

2.1 Birkhoff-Jamesova ortogonalnost

Definicija 2.1.1. *Neka je X normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y Birkhoff-James ortogonalni (pišemo $x \perp_B y$) ako*

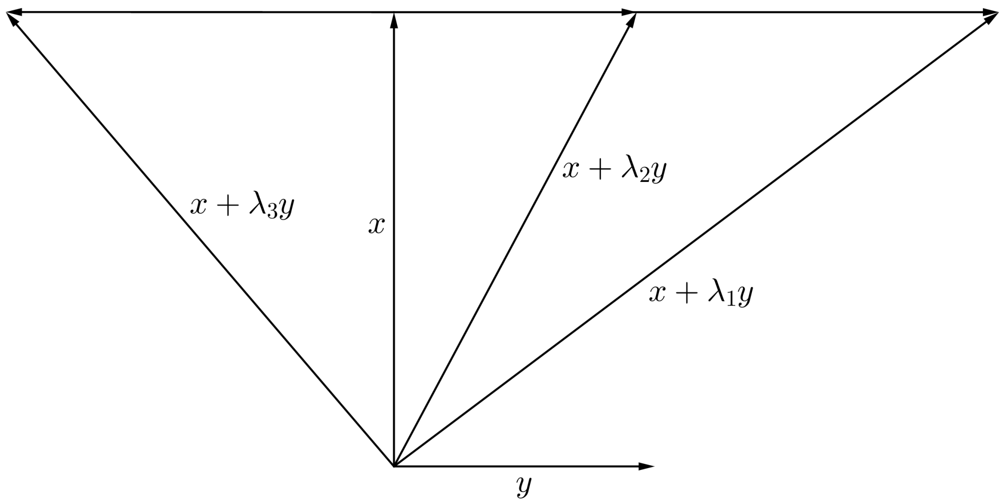
$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}. \tag{2.1}$$

Birkhoff[1] je ovakvu definiciju ortogonalnosti uveo 1935. godine u [4], dok je James[2] prvi detaljno proučio njezina svojstva. U literaturi se često osim Birhhoff-Jamesova koristi naziv *Birkhoffova* ortogonalnost.

Birhhoff-Jamesova ortogonalnost, kao i mnoge druge, ima geometrijsku pozadinu što možemo uočiti na slici 2.1. Naime, za dva (u geometrijskom smislu) okomita vektora x i y te za proizvoljni λ vidimo da su x i λy zapravo katete pravokutnog trokuta, a $x + \lambda y$ je njegova hipotenuza. Znamo da je hipotenuza pravokutnog trokuta uvijek duža od njegovih kateta pa je stoga $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

[1]George David Birkhoff (1884. - 1944.), američki matematičar.

[2]Robert Clarke James (1918. - 2003.), američki matematičar.



Slika 2.1: $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Na slici 2.2 možemo vidjeti primjere Birkhoff-James ortogonalnih vektora u prostoru $\mathbb{R}^2$ sa sljedećim normama: (a) $\|\cdot\|_1$, (b) $\|\cdot\|_2$, (c) $\|\cdot\|_\infty$. Romb, kružnica i kvadrat predstavljaju jedinične sfere pojedinih normiranih prostora (jediničnu sferu normiranog prostora X definiramo kao $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$). Na svakom od ova tri primjera x je jediničan vektor, a budući da se $x + \lambda y$ nalazi izvan jedinične sfere za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, možemo zaključiti da je $1 = \|x\| \leq \|x + \lambda y\|$.

U propoziciji koja slijedi pokazat ćemo da je na proizvoljnom unitarnom prostoru Birkhofova ortogonalnost ekvivalentna s klasičnom ortogonalnošću.

Propozicija 2.1.2. *Neka je X unitaran prostor. Tada za $\forall x, y \in X$ vrijedi sljedeće:*

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

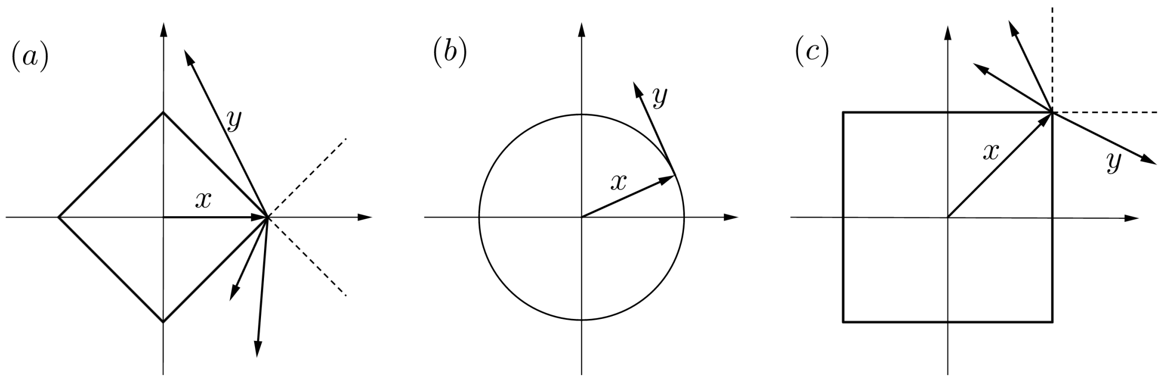
Dokaz. Za $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$\|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \lambda y, x \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

Pretpostavimo da je $\langle x, y \rangle = 0$. Tada imamo $\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2$.

Obratno, neka je $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Tada je $2\operatorname{Re}\langle \lambda y, x \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Posebno, za $\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}, y \neq 0$ (za $y = 0$ jednakost je trivijalna) vrijedi:

$$0 \leq 2\operatorname{Re}\langle \lambda x, y \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 = -2\operatorname{Re}\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} = -\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \leq 0$$



Slika 2.2: BJ ortogonalni vektori u $\mathbb{R}^2$ s različitim normama

Dakle, $\langle x, y\rangle = 0$. □

Pokažimo sada koja svojstva ortogonalnosti su ovdje zadovoljena, a koja nisu.

1. Nedegeneriranost. Ako vrijedi $x \perp_B x$ onda imamo $\|x + \lambda x\| \geq \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$. Tada posebno za $\lambda = -1$ vrijedi $\|x\| \leq 0$ iz čega slijedi da je $x = 0$. Obratno, ako je $x = 0$ trivijalno vrijedi da je $x \perp_B x$.

2. Homogenost. Neka je $x \perp_B y$, tj. $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Tada vrijedi

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \leq |\alpha| \, \|x + \lambda y\| = \|\alpha x + \lambda \alpha y\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}. \tag{2.2}$$

   Odavde možemo vidjeti da vrijedi $\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \mu\beta y\|, \forall \mu \in \mathbb{F}$, tj. $\alpha x \perp_B \beta y$. Naime, neka je $\mu \in \mathbb{F}$ proizvoljan. Tada uvrštavanjem $\lambda = \frac{\mu\beta}{\alpha}$ u (2.2) dobivamo $\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \mu\beta y\|$.

3. Simetričnost. Možemo vidjeti da svojstvo simetričnosti općenito ne vrijedi. Uzmimo na primjer prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Lako vidimo da je $(1, 1) \perp_B (2, 0)$, ali $(2, 0) \not\perp_B (1, 1)$.

4. Aditivnost s desna. Ne vrijedi općenito. Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Neka su $x = (1, 1), y = (2, 0), z = (0, 2) \in \mathbb{R}^2$. Lako se provjeri da je $x \perp_B y$ i $x \perp_B z$, ali $x \not\perp_B y + z$.

5. Aditivnost s lijeva. Ne vrijedi općenito. Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Neka su $x = (1, 1), y = (2, 0), z = (0, -1) \in \mathbb{R}^2$. Lako se provjeri da je $x \perp_B y$ i $z \perp_B y$, ali $x + z \not\perp_B y$.

6. Birkhoff-Jamesova ortogonalnost zadovoljava ovo svojstvo. To i još nešto više daju nam teoremi 2.1.3 i 2.1.4 čiji se dokazi mogu pronaći u [12].

Teorem 2.1.3. *Neka je X normiran prostor nad poljem $\mathbb{R}$ te neka su $x, y \in X$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $x \perp_B \alpha x + y$. Nadalje, vrijedi $|\alpha| \leq \frac{||y||}{||x||}$. Ako je $x \perp_B \alpha x + y$ i $x \perp_B \beta x + y$, onda je $x \perp_B \gamma x + y$ za svaki $\gamma \in [a, b]$.*

Neprekidnost Birkhoff-Jamesove ortogonalnosti zajedno s gornjim teoremom povlači da za svaka dva $x, y \in X$ postoji zatvoreni interval $[a, b] \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $\alpha \in [a, b]$ vrijedi $x \perp_B \alpha x + y$. James je pokazao sljedeći rezultat koji će nam precizno reći o kojem se točno intervalu radi.

Teorem 2.1.4. *Neka su $x \neq 0$ i y dva vektora u normiranom prostoru X nad poljem $\mathbb{R}$ i neka je*

$$\alpha = \frac{1}{||x||} \lim_{n\to\infty}(||nx|| - ||nx + y||), \quad \beta = \frac{1}{||x||} \lim_{n\to\infty}(||nx - y|| - ||nx||).$$

Tada su α i β najmanji, odnosno najveći skalari za koje vrijedi 6. svojstvo.

Iz definicije Birkhoff-Jamesove ortogonalnosti vidimo da nije baš sasvim jednostavno provjeriti ortogonalnost između dva vektora. Sljedeći teorem, kojeg su dokazali Bhatia i Šemrl ([3]) reći će nam kako u prostoru ograničenih linearnih operatora to možemo napraviti na jednostavniji način. U dokazu ovog teorema poistovjećivat ćemo matrice s operatorima na konačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru H na uobičajen način.

Teorem 2.1.5. *Neka je H konačnodimenzionalan Hilbertov prostor i neka su $A, B \in \mathbb{B}(H)$. Tada su operatori A i B Birkhoff-James ortogonalni ako i samo ako postoji jediničan vektor $x \in H$ takav da je $||Ax|| = ||A||$ i $\langle Ax, Bx\rangle = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji takav vektor x. Tada imamo

$$||A + \lambda B||^2 \geq ||(A + \lambda B)x||^2 = ||Ax||^2 + |\lambda|^2||Bx||^2 \geq ||Ax||^2 = ||A||^2,$$

što pokazuje dovoljnost tvrdnje.

Pokažimo da vrijedi i obrat. Neka su sada A i B proizvoljni Birkhoff-James ortogonalni operatori. Neka je $A = UP$ polarna dekomozicija operatora A, gdje je U unitaran, a P pozitivan operator. Tada imamo da je

$$||P + \lambda U^*B|| \geq ||P|| = ||A||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

Drugim riječima, udaljenost operatora P do linearne ljuske od U^*B je $||P||$. Koristeći korolar 1.1.22, znamo da postoji linearan funkcional $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ takav da je $||\phi|| =$

1, $\phi(P) = \|P\|$ i $\phi(U^*B) = 0$. Sada prema teoremu 1.1.20 možemo naći matricu T takvu da je $\phi(X) = \mathrm{tr}(XT)$, $\forall X \in \mathbb{B}(H)$. Kako je $\|\phi\| = 1$, znamo da je

$$\|T\|_* = \mathrm{tr}\left(\sqrt{T^*T}\right) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j = 1,$$

gdje su σ_i singularne vrijednosti matrice T. Sada koristeći polarni rastav i SVD dekompoziciju možemo pisati

$$T = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j u_j u_j^*\right) V,$$

gdje su singularne vrijednosti posložene u padajućem poretku, vektori u_j čine ortonormiranu bazu za prostor H, a matrica V je unitarna. Sada imamo da je

$$\begin{aligned} \|P\| = \mathrm{tr}(PT) &= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \ \mathrm{tr}[Pu_j(V^*u_j)^*] = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \langle Pu_j, V^*u_j\rangle \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \|Pu_j\| \qquad (2.3) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \|P\| = \|P\|, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti koristili nejednkost CSB te činjenicu da je matrica V unitarna ($\|V^*u_j\| = \|u_j\| = 1$). Odavde slijedi da ako je k rang matrice T (tj. $\sigma_k \neq 0$, ali $\sigma_{k+1} = 0$), onda vrijedi da je $\|Pu_j\| = \|P\|$, za $j = 1, ..., k$. Sada jer je P pozitivan operator pa posebno i hermitski te zbog CSB nejednakosti imamo

$$\|P\|^2 = \|Pu_j\|^2 = \langle Pu_j, Pu_j\rangle = \langle P^2u_j, u_j\rangle \leq \|P^2u_j\|\,\|u_j\| = \|P^2u_j\|.$$

S druge strane $\|P^2u_j\| \leq \|P^2\|\,\|u_j\| = \|P^2\| = \|Pu_j\|^2$ pa je onda $\|Pu_j\|^2 = \|P^2u_j\|$. Sada znamo da su zbog 1.1.9 P^2u_j i u_j kolinearni, tj. postoji $\lambda > 0$ takav da je $P^2u_j = \lambda^2u_j$ te onda imamo da vrijedi $\lambda^2\langle u_j, u_j\rangle = \lambda^2 = \|P\|^2$ pa je $\lambda = \|P\|$. Zbog $P^2u_j = \lambda^2u_j$ vrijedi $Pu_j = \lambda u_j$. Konačno, vrijedi da je $Pu_j = \|P\|u_j$.

Budući da kod prve nejednakosti u 2.3 zapravo imamo jednakost, slijedi da je V^*u_j linearno zavisno s Pu_j, $\forall j = 1, ..., k$. Sada za neki λ imamo

$$\langle Pu_j, V^*u_j\rangle = \lambda\langle Pu_j, Pu_j\rangle = \lambda\|Pu_j\|^2 = \lambda\|P\|^2,$$

dok je s druge strane

$$\langle Pu_j, V^*u_j\rangle = \|Pu_j\|\|V^*u_j\| = \|Pu_j\| = \|P\|$$

pa slijedi da je $\lambda = \frac{1}{\|P\|}$. Sada vidimo da vrijedi $V^* u_j = \frac{1}{\|P\|} P u_j = u_j \ \forall j = 1, ..., k$. Slijedi da je matrica T oblika

$$T = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j u_j^*,$$

gdje svojstveni vektori u_j matrice P, koji pripadaju najvećoj svojstvenoj vrijednosti $\|P\|$, razapinju prostor K. Od prije znamo da vrijedi $\phi(U^* B) = \operatorname{tr}(U^* BT) = 0$ pa odavde imamo

$$\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \langle B^* U u_j, u_j \rangle = 0.$$

Neka je Q ortogonalni projektor na linearnu ljusku vektora u_j. Tada zbog invarijantnosti traga na unitarnu transformaciju sličnosti te zbog činjenice da je $Q = Q^*$, gornju jednakost možemo preformulirati na sljedeći način:

$$\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \langle Q B^* U Q u_j, u_j \rangle = 0.$$

Budući da je numerička slika svakog operatora pa posebno i matrice QB^*UQ konveksan skup, lako vidimo da postoji jediničan vektor $x \in K$ takav da vrijedi

$$0 = \langle QB^* UQx, x \rangle = \langle B^* Ux, x \rangle = \langle Ux, Bx \rangle.$$

Sada imamo

$$\langle Ax, Bx \rangle = \langle UPx, Bx \rangle = \|P\| \langle Ux, Bx \rangle = 0.$$

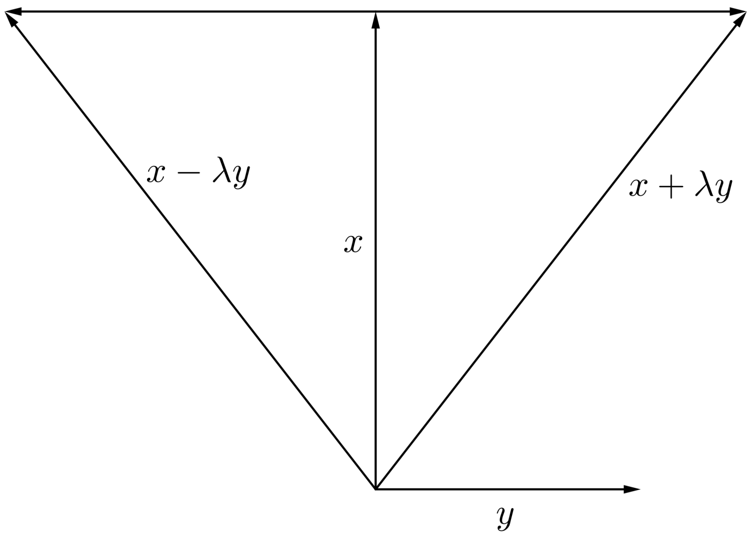
□

Valja napomenuti da vrlo sličan rezultat vrijedi i za beskonačnodimenzionalne prostore. Naime, ako su $A, B \in \mathbb{B}(H)$, gdje je H beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor, onda su operatori A i B Birkhoff-James ortogonalni ako i samo ako postoji niz jediničih vektora $\{x_n\}$ takav da $\|Ax_n\| \to \|A\|$ i $\langle Ax_n, Bx_n \rangle \to 0$. Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [3].

2.2 Robertsova ortogonalnost

Definicija 2.2.1. *Neka je X normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y Roberts ortogonalni (pišemo $x \perp_R y$) ako*

$$\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}. \tag{2.4}$$



Slika 2.3: $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$

Ovo je jedna od prvih ortogonalnosti definirana na normiranim prostorima, a uveo ju je Roberts[3] 1934. godine u [17]. Odmah možemo primijetiti da je Robertsova ortogonalnost jača od Birkhoff-Jamesove. Zaista, ako su x, y elementi nekog normiranog prostora takvi da $x \perp_R y$, onda za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ imamo:

$$2||x|| = ||(x + \lambda y) + (x - \lambda y)|| \leq ||(x + \lambda y)|| + ||(x - \lambda y)|| = 2||x + \lambda y||,$$

pa vrijedi $x \perp_B y$.

Da bismo bolje dočarali definiciju Robertsove ortogonalnosti pogledajmo sliku 2.3. Promatrajući vektore x i y koji su okomiti u geometrijskom smislu, vidimo da su $x - \lambda y$ i $x + \lambda y$ krakovi jednakokračnog trokuta pa su im duljine jednake, tj. vrijedi da je $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ za svaki λ.

Pokažimo sada da je Robertsova ortogonalnost zaista poopćenje ortogonalnosti u normiranim prostorima.

Propozicija 2.2.2. *Neka je X unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada za $\forall x, y \in X$ vrijedi*

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff ||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\langle x, y \rangle = 0$. Tada za $\lambda \in \mathbb{F}$ imamo

$$||x \pm y||^2 = \langle x \pm \lambda y, x \pm \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle,$$

[3] Byron David Roberts (1893.-1963.), američki matematičar.

pa slijedi da je $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}$.

Obratno, neka je $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}$, tj. neka je $x \perp_R y$. Već smo ranije rekli da to povlači da je $x \perp_B y$, a zbog propozicije 2.1.2 imamo da je $\langle x, y \rangle = 0$. □

Pogledajmo još koja svojstva zadovoljava Robertsova ortogonalnost.

1. Nedegeneriranost. Ako vrijedi $x \perp_R x$ onda imamo $\|x + \lambda x\| = \|x - \lambda x\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Tada posebno za $\lambda = 1$ vrijedi $2\|x\| = 0$ iz čega slijedi da je $x = 0$. Obratno, ako je $x = 0$, trivijalno vrijedi da je $x \perp_R x$.

2. Homogenost. Neka je $x \perp_R y$, tj. $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\| \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Tada množenjem prethodne jednakosti s $|\alpha|$ dobivamo

$$\|\alpha x + \lambda \alpha y\| = \|\alpha x - \lambda \alpha y\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}. \tag{2.5}$$

   Odavde možemo vidjeti da vrijedi $\|\alpha x + \mu\beta y\| = \|\alpha x - \mu\beta y\|, \forall \mu \in \mathbb{F}$, tj. $\alpha x \perp_R \beta y$. Naime, neka je $\mu \in \mathbb{F}$ proizvoljan. Tada uvrštavanjem $\lambda = \frac{\mu\beta}{\alpha}$ u (2.5) dobivamo $\|\alpha x + \mu\beta y\| = \|\alpha x - \mu\beta y\|$.

3. Simetričnost. Neka je $x \perp_R y$, tj. $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Tada za proizvoljnji $\mu \in \mathbb{F}$ možemo uzeti $\lambda = \frac{1}{\mu}$ pa imamo da je

$$\|\mu x + y\| = |\mu| \left\| x + \frac{1}{\mu} y \right\| = |\mu| \left\| x - \frac{1}{\mu} y \right\| = \|\mu x - y\|, \ \forall \mu \in \mathbb{F}.$$

   Kako je $\mu \in \mathbb{F}$ proizvoljan, imamo da je $y \perp_R x$.

4. Aditivnost s desna. Ne vrijedi općenito. Neka je $X = (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Neka su:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   matrice iz prostora $M_2(\mathbb{R})$. Lako se provjeri da je $x \perp_R y$ i $x \perp_R z$, ali $x \not\perp_R y + z$.

5. Aditivnost s lijeva. Kombiniranjem 3. i 4. svojstva lako možemo vidjeti da ne vrijedi.

6. Iz činjenice da postoje prostori u kojima barem jedan od dva Roberts ortogonalna vektora mora biti nul-vektor (vidi primjer 2.2.3), automatski slijedi da 6. svojstvo nije zadovoljeno.

Primjer 2.2.3 ([11]). *Neka je X normiran prostor nad poljem $\mathbb{R}$ koji sadrži sve neprekidne funkcije oblika $f(x) = ax + bx^2$, gdje je $\|ax + bx^2\|$ maksimalna vrijednost funkcije $|ax + bx^2|$*

na intervalu $[0, 1]$. *Pretpostavimo da su funkcije* f, g *takve da je* $f \perp_R g$, *tj.* $\|f + \lambda g\| = \|f - \lambda g\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ako $|f|$ *poprima maksimum samo u točki* $x = 1$, *onda uzimajući dovoljno mali* $|\lambda|$ *možemo postići da* $|f + \lambda g|, |f - \lambda g|$ *poprimaju maksimum proizvoljno blizu točke* $x = 1$. *Pretpostavimo da je* $g(1) \neq 0$. *Neka je predznak od* λ *takav da su* $f(1)$ *i* $\lambda g(1)$ *istog predznaka. Tada je* $|f(1) + \lambda g(1)| > |f(1)|$ *pa je stoga* $\|f + \lambda g\| > \|f\|$. *S druge strane imamo da je* $|f - \lambda g| < |f(1)|$ *u blizini* $x = 1$ *i za svaki* x *ako je* $|\lambda|$ *dovoljno malo. Tada za takav* λ *imamo da je* $\|f - \lambda g\| < \|f\|$ *pa nije moguće da* $\|f + \lambda g\| = \|f - \lambda g\|$ *bude zadovoljeno za svaki* λ, *stoga vrijedi da je* $g(1) = 0$. *Dakle, ako je* $f \perp_R g$ *i* $|f|$ *poprima maksimum samo u* $x = 1$, *slijedi da je* $g(1) = 0$. *Sada ako je* $g \neq 0$ *imamo da je* g *oblika* $\alpha(x - x^2)$ *za neki* α *što znači da poprima maksimum samo u točki* $x = \frac{1}{2}$. *Analogno kao prije možemo pokazati da ako pretpostavimo da je* $f(\frac{1}{2}) \neq 0$, *uzimajući* λ *dovoljno malen predznaka takvog da su* $\lambda f(\frac{1}{2})$ *i* $g(\frac{1}{2})$ *istog predznaka, imamo da je* $\|\lambda f + g\| > \|g\|$ *i* $\|\lambda f - g\| < \|g\|$. *Sada imamo da je* $f(\frac{1}{2}) = 0$ *i da je* f *oblika* $\beta(x - 2x^2)$ *za neki* β. *Sada možemo uočiti da za* $f = (x - 2x^2)$, $g = (x - x^2)$ *te za* $\lambda = 4$ *imamo da je* $\|f + 4g\| \neq \|f - 4g\|$. *Naime, vrijedi da je* $\|f + 4g\| = \max_{x \in [0,1]} |5x + 6x^2| = \frac{25}{24}$, *dok je* $\|f - 4g\| = \max_{x \in [0,1]} |3x - 2x^2| = \frac{9}{8}$. *Za* f *oblika* $\beta(x - 2x^2)$ *te* g *oblika* $\alpha(x - x^2)$ *možemo uzeti* $\lambda = \frac{4\beta}{\alpha}$ *pa analognim računom vidimo da te dvije funkcije nisu Roberts ortogonalne. Upravo smo pokazali da za funkcije takve da bilo* $|f|$, *bilo* $|g|$ *poprimaju maksimum u* $x = 1$, *nije moguće postići* $f \perp_R g$ *osim ako je* $f = 0$ *ili* $g = 0$.

Pretpostavimo sada da $|f|$ *poprima maksimum samo u* $x = -\frac{a}{2b}$, *što je jedina preostala mogućnost budući da je* f *oblika* $ax + bx^2$. *Tada analogno kao prije možemo dobiti da ukoliko vrijedi* $f \perp_R g$ *imamo da je* $g(-\frac{a}{2b}) = 0$ *i da je* g *oblika* $\alpha(ax + 2bx^2)$ *ili je pak* $g = 0$. *Budući da* $|f|$ *poprima maksimum samo u točki* $x = -\frac{a}{2b}$, *funkcija* $|f + \lambda g|$ *ga poprima u blizini te točke ukoliko je* $|\lambda|$ *dovoljno malen. Ponovno bez smanjenja općenitosti možemo uzeti* $g = (ax + 2bx^2)$. *Sada imamo* $f + \lambda g = a(1 + \lambda)x + b(1 + 2\lambda)x^2$ *te za dovoljno mali* $|\lambda|$ *izraz* $\|f + \lambda g\| = \|f - \lambda g\|$ *možemo pisati kao*

$$\left|\frac{a^2(1+\lambda)^2}{4b(1+2\lambda)}\right| = \left|\frac{a^2(1-\lambda)^2}{4b(1-2\lambda)}\right|.$$

Gornja jednakost povlači da je $\lambda = 0$ *ili* $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. *Dakle, nemoguće je imati* $f \perp_R g$ *ukoliko* $|f|$ *ili* $|g|$ *poprimaju maksimum samo u unutrašnjosti skupa* $[0, 1]$, *osim ako je* $f = 0$ *ili* $g = 0$.

Jedina preostala mogućnost je da $|f|$ *i* $|g|$ *poprime maksimum i u unutrašnjosti skupa* $[0, 1]$ *i u* $x = 1$. *Tada bi* f *i* g *bili oblika* $\alpha(2(1 - 2^{\frac{1}{2}})x + x^2)$ *odakle lako vdimo da je nemoguće da vrijedi* $f \perp_R g$.

2.3 Jamesova ortogonalnost

U ovom odjeljku promatrat ćemo isključivo realne prostore, osim ako striktno ne kažemo drugačije.

Definicija 2.3.1. *Neka je X realan normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y James ortogonalni (pišemo $x \perp_J y$) ako*

$$\|x + y\| = \|x - y\|. \tag{2.6}$$

Napomena 2.3.2. *Za kompleksne normirane prostore možemo promatrati sljedeću relaciju:*

$$x \perp_J y \Leftrightarrow \begin{cases} \|x + y\| = \|x - y\| \\ \|x + iy\| = \|x - iy\|. \end{cases}$$

James je tvrdio da su zahtjevi u definiciji Robertsove ortogonalnosti prejaki da bi je smatrali "dobrom" ortogonalnošću. Kao što smo već naveli ranije, postoje prostori u kojima za svaka dva vektora x i y takva da je $x \perp_R y$ vrijedi da barem jedan od njih mora biti nul-vektor, što je također mana Robertsove ortogonalnosti. To je potaknulo Jamesa da 1945. godine ([11]) definira ovakvu ortogonalnost koja je očigledno slabija od Robertsove i nezavisna s Birkhoff-Jamesovom. Naime, u prostoru $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ lako vidimo da je $(1, 1) \perp_B (2, 0)$, ali $(1, 1) \not\perp_J (2, 0)$. S druge strane imamo da je $(1, 2) \perp_J (-2, 1)$, ali $(1, 2) \not\perp_B (-2, 1)$.

Koncept Jamesove ortogonalnosti također proizlazi iz geometrije. U geometriji okomitost između dva vektora možemo ispitati promatrajući paralelogram kojeg oni razapinju. Ukoliko su dijagonale tog paralelograma jednake duljine, vektori su okomiti (vidi sliku 2.4). Također možemo uočiti da ukoliko imamo dva okomita vektora, onda njihova suma i razlika čine jednakokračan trokut pa od tuda dolazi naziv *isosceles orthogonality* koji se u stranoj literaturi najčešće koristi za ovu ortogonalnost (engl. isosceles znači jednakokračan).

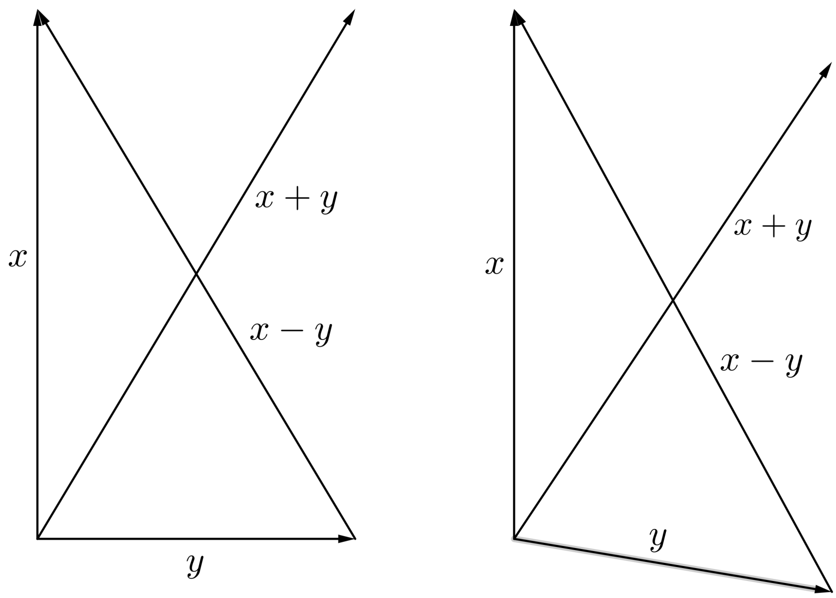
Sljedeća propozicija pokazuje nam da se Jamesova ortogonalnost podudara s klasičnom ortogonalnošću ukoliko se nalazimo u unitarnom prostoru. Dokaz propozicije slijedi direktno iz polarizacijskih formula (1.4) i (1.5).

Propozicija 2.3.3. *Neka je X unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada za $\forall x, y \in X$ vrijedi*

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \perp_J y.$$

Pogledajmo sada koja svojstva zadovoljava Jamesova ortogonalnost.

1. Nedegeneriranost. Ako vrijedi $x \perp_J x$ onda imamo $\|x + x\| = \|x - x\| = 0$ iz čega slijedi da je $x = 0$. Obratno, ako je $x = 0$, trivijalno vrijedi da je $x \perp_J x$.



Slika 2.4: Lijevo imamo $x \perp_J y$, a desno $x \not\perp_J y$

2. Homogenost. Ne vrijedi općenito. Pogledajmo na primjer prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, vektore $x = \left(\frac{3}{2}, 1\right), y = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ te skalare $\alpha = 1, \beta = 2$. Jasno je da vrijedi $x \perp_J y$, ali $\alpha x \not\perp_J \beta y$.

   Dodatno, vrijedi da je svojstvo homogenosti za ovu ortogonalnost zadovoljeno ako i samo ako se nalazimo u unitarnom prostoru (teorem 2.3.4).

3. Simetričnost. Slijedi direktno iz činjenice da je $\|x - y\| = \|y - x\|$.

4. Aditivnost s desna. Ne vrijedi općenito. Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Neka su $x = (1, 2), y = (1, 0), z = (-2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Lako se provjeri da je $x \perp_J y$ i $x \perp_J z$, ali $x \not\perp_J y + z$.

5. Aditivnost s lijeva. Kombiniranjem 3. i 4. svojstva lako možemo vidjeti da ne vrijedi.

   Slično kao i za homogenost, može se pokazati da je aditivnost (zbog simetričnosti je svejedno promatramo li s desna ili s lijeva) zadovoljena ako i samo ako se nalazimo u unitarnom prostoru (teorem 2.3.5).

6. Može se pokazati da vrijedi uvijek (teorem 2.3.7).

Pokažimo sada da svojstva homogenosti i aditivnosti nužno povlače da se nalazimo u unitarnom prostoru. Uočimo da obrati ovih implikacija slijede direktno iz propozicije 2.3.3.

Teorem 2.3.4. *Neka je X normiran prostor. Ako je Jamesova ortogonalnost homogena u X, onda je X unitaran prostor.*

Dokaz. Neka su $x, y \in X$ takvi da je $\|x\| = \|y\|$. Tada vrijedi

$$\|(x+y)+(x-y)\| = \|(x+y)-(x-y)\|,$$

tj. vrijedi da je $(x+y) \perp_J (x-y)$. Ako je Jamesova ortogonalnost homogena u prostoru X, onda imamo da je

$$\|(\alpha+1)(x+y)+(\alpha-1)(x-y)\| = \|(\alpha+1)(x+y)-(\alpha-1)(x-y)\|,$$

tj. vrijedi da je $\|\alpha x+y\| = \|x+\alpha y\|$. Sada iz ovoga primjenom teorema 1.1.11 zaključujemo da je X unitaran prostor. □

Teorem 2.3.5. *Neka je X normiran prostor. Ako je Jamesova ortogonalnost aditivna u X, onda je X unitaran prostor.*

Dokaz. Zapravo ćemo pokazati da svojstvo aditivnosti povlači homogenost, a onda iz prethodnog teorema slijedi da je X unitaran.

Neka je $x \perp_J y$. Iz definicije Jamesove ortogonalnosti i 3. svojstva lako možemo vidjeti da je onda $x \perp_J -y$ i $y \perp_J x$. Pretpostavimo da je Jamesova ortogonalnost aditivna. Tada iz prethodnog vrijedi $nx \perp_J my$ za svaki $n, m \in \mathbb{N}$, tj. $\|nx+my\| = \|nx-my\|$ što povlači da je $\|x+\frac{m}{n}y\| = \|x-\frac{m}{n}y\|$. Sada zbog neprekidnosti norme imamo da je $\|x+\lambda y\| = \|x-\lambda y\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, tj. Jamesova ortogonalnost je homogena. □

Preostaje nam još dokazati da 6. svojstvo zaista vrijedi. Za to ćemo iskoristiti sljedeću lemu.

Lema 2.3.6. *Neka je X normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty}(\|(n+a)x+y\| - \|nx+y\|) = a\|x\|.$$

Dokaz. Kako je $\frac{n}{n+a} + \frac{a}{n+a} = 1$, imamo da za n pozitivan i dovoljno velik da $n+a > 0$ vrijedi

$$\|(n+a)x+y\| = \left\|nx+\frac{ny}{n+a}\right\| + a\left\|x+\frac{y}{n+a}\right\|.$$

Sada je

$$\|(n+a)x+y\| - \|nx+y\| = \left(\left\|nx+\frac{ny}{n+a}\right\| - \|nx+y\|\right) + a\left\|x+\frac{y}{n+a}\right\|.$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned}\left|\left(\left\|nx + \frac{ny}{n+a}\right\| - \|nx+y\|\right)\right| &= \left|\left(\left\|nx + y - \frac{ay}{n+a}\right\| - \|nx+y\|\right)\right| \\ &\leq \left|(\|nx+y\| + \left|\frac{a}{n+a}\right| \|y\| - \|nx+y\|)\right| \\ &= \left|\frac{a}{n+a}\right| \|y\|,\end{aligned}$$

što teži prema nuli kad pustimo $n \to \infty$. Kako je $\lim_{n\to\infty} a \left\|x + \frac{y}{n+a}\right\| = a\|x\|$ vrijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}(\|(n+a)x+y\| - \|nx+y\|) = a\|x\|.$$

□

Teorem 2.3.7. *Neka je X normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\|x + (\alpha x + y)\| = \|x - (\alpha x + y)\|, \quad tj. \quad x \perp_J \alpha x + y.$$

Dokaz. Za početak, definirajmo realnu funkciju realne varijable kao

$$f(n) = \|x + (nx+y)\| - \|x - (nx+y)\| = \|(n+1)x+y\| - \|(n-1)x+y\|.$$

Sada prema lemi 2.3.6 vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}(\|(n+2)x+y\| - \|nx+y\|) = 2\|x\|$. Slično možemo zaključiti da je $\lim_{n\to-\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} f(-n) = -2\|x\|$. Sada iz neprekidnosti funkcije $f(n)$ slijedi da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(\alpha) = 0$, tj. $\|x+(\alpha x+y)\| = \|x - (\alpha x + y)\|$. □

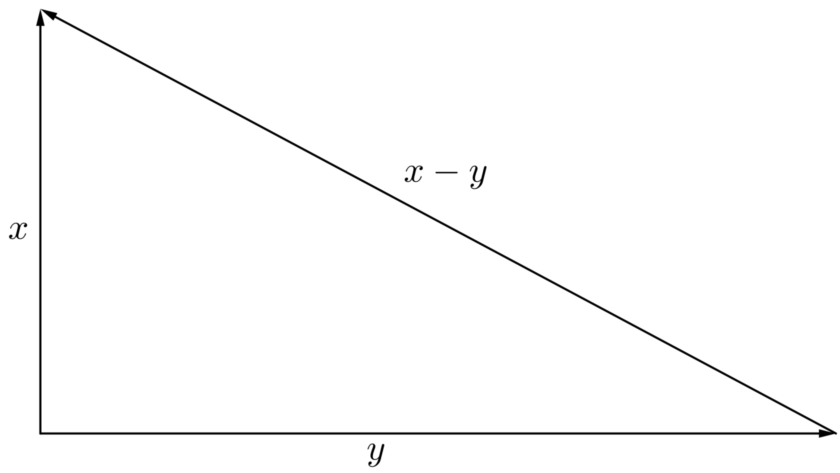
2.4 Pitagorina ortogonalnost

U ovom odjeljku promatrat ćemo isključivo realne prostore, osim ako striktno ne kažemo drugačije.

Definicija 2.4.1. *Neka je X realan normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y Pitagora ortogonalni (pišemo $x \perp_P y$) ako*

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{2.7}$$

Ovu je ortogonalnost isto kao i prethodnu definirao James ([11]). Pitagorina ortogonalnost očito proizlazi iz euklidske geometrije i zasigurno je jedna od najprirodnije definiranih ortogonalnosti na normiranim prostorima. Naime, poznati Pitagorin teorem kaže da je odnos duljina stranica u pravokutnom trokutu dan jednadžbom $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su a i b



Slika 2.5: $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

stranice koje zatvaraju pravi kut (katete), a c dijagonala pravokutnika kojeg one razapinju (hipotenuza). Upravo to možemo vidjeti na slici 2.4 gdje su vektori x i y ortogonalni u geometrijskom smislu.

Uočimo da su Pitagorina i Jamesova ortogonalnost međusobno nezavisne. Neka je X normiran prostor kao u primjeru 2.2.3. Neka su $f_1 = x, g_1 = x - x^2 \in X$. Vrijedi da je $\|x + (x - x^2)\| = \|x - (x - x^2)\| = 1$, tj. $f_1 \perp_J g_1$. S druge strane imamo $\|x\|^2 + \|x - x^2\|^2 = \frac{17}{16}$ dok je $\|x - (x - x^2)\|^2 = \|x^2\|^2 = 1$ pa $f_1 \not\perp_P g_1$. Dakle, pokazali smo da Jamesova ortogonalnost ne povlači Pitagorinu. Pokažimo da ni Pitagorina ne povlači Jamesovu. Neka su $f_2 = x, g_2 = -2x + \frac{1}{4}\sqrt{65}x^2 \in X$. Vrijedi da je $\|f_2\|^2 = 1$, $\|g_2\|^2 = \frac{16}{65}$, $\|f_2 - g_2\|^2 = \frac{81}{65}$ pa je $f_2 \perp_P g_2$. S druge strane je $\|f_2 + g_2\|^2 = \frac{81}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{65}$ pa je $f_2 \not\perp_J g_2$.

Iz prethodnog direktno slijedi da Pitagorina ortogonalnost ne povlači ni Robertsovu. Obratno, neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Lako vidimo da je $(1, 1) \perp_R (1, -1)$ dok s druge strane imamo $(1, 1) \not\perp_P (1, -1)$ pa onda ni Robertsova ne povlači Pitagorinu.

Sada iz $\perp_R \Rightarrow \perp_B$ odmah slijedi da Birkhoff-Jamesova ortogonalnost ne povlači Pitagorinu. Kako je $(1, 2 - \sqrt{3}) \perp_P (1, -\sqrt{3})$ te je $(1, 2 - \sqrt{3}) \not\perp_B (1, -\sqrt{3})$ zaključujemo da ne vrijedi ni obrat. Dakle, Pitagorina ortogonalnost je nezavisna sa svim ostalim ortogonalnostima koje smo do sada definirali.

Pokažimo da je Pitagorina ortogonalnost zaista poopćenje ortogonalnosti.

Propozicija 2.4.2. *Neka je X realan unitaran prostor. Tada za $\forall x, y \in X$ vrijedi*

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Dokaz. Za $x, y \in X$ imamo $\|x - y\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$, iz čega direktno slijedi tvrdnja. □

Napomena 2.4.3. *Možemo primijetiti da ukoliko se nalazimo u kompleksnom unitarnom prostoru X, za $x, y \in X$ imamo $\|x - y\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$. Odavde lako vidimo da $\langle x, y\rangle = 0$ povlači $x \perp_P y$, ali obrat općenito ne vrijedi.*

Pogledajmo sada koja svojstva vrijede za Pitagorinu ortogonalnost.

1. Nedegeneriranost. Ako vrijedi $x \perp_P x$ onda imamo $0 = \|x - x\|^2 = 2\|x\|^2$ iz čega slijedi da je $x = 0$. Obratno, ako je $x = 0$, trivijalno vrijedi da je $x \perp_P x$.

2. Homogenost. Ne vrijedi općenito. Pogledajmo na primjer prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, vektore $x = (1, 2 - \sqrt{3}), y = (0, -\sqrt{3})$ te skalare $\alpha = 1, \beta = -1$. Jasno je da vrijedi $x \perp_P y$, ali $\alpha x \not\perp_P \beta y$.

   Vrijedi analogan rezultat kao i kod Jamesove ortogonalnosti. Dakle, Pitagorina ortogonalnost zadovoljava svojstvo homogenosti ako i samo ako se nalazimo u unitarnom prostoru (teorem 2.4.5).

3. Simetričnost. Slijedi direktno iz činjenice da je $\|x - y\| = \|y - x\|$.

4. Aditivnost s desna. Ne vrijedi općenito. Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Neka su $x = (1, 2 - \sqrt{3}), y = (0, -\sqrt{3}), z = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$. Lako se provjeri da je $x \perp_P y$ i $x \perp_P z$, ali $x \not\perp_P y + z$.

5. Aditivnost s lijeva. Kombiniranjem 3. i 4. svojstva lako vidimo da ne vrijedi.

   Za Pitagorinu ortogonalnost vrijedi da su svojstva homogenosti i aditivnosti međusobno ekvivalentna (teorem 2.4.6) pa iz toga slijedi da je svojstvo aditivnosti zadovoljeno ako i samo ako se nalazimo u unitarnom prostoru.

6. Može se pokazati da vrijedi uvijek (teorem 2.4.4).

Teorem 2.4.4. *Neka je X normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\|x\|^2 + \|\alpha x + y\|^2 = \|x - (\alpha x + y)\|^2, \quad tj. \; x \perp_P \alpha x + y.$$

Dokaz. Za početak, definirajmo realnu funkciju realne varijable kao

$$f(n) = \|x\|^2 + \|nx + y\|^2 - \|x - (nx + y)\|^2.$$

Koristeći činjenicu da je $\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{(2n-1)}{n^2}=1$ imamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
f(n) =&\|x\|^2+\frac{2n-1}{n^2}\|nx+y\|^2+\left(\left\|(n-1)x+\left(\frac{n-1}{n}\right)y\right\|^2-\|(n-1)x+y\|^2\right)\\
=&\|x\|^2+(2n-1)\left\|x+\frac{y}{n}\right\|^2\\
&+\left(\left\|(n-1)x+\left(\frac{n-1}{n}\right)y\right\|-\|(n-1)x+y\|\right)\left(\left\|(n-1)x+\left(\frac{n-1}{n}\right)y\right\|+\|(n-1)x+y\|\right)\\
\geq&\|x\|^2+(2n-1)\left\|x+\frac{y}{n}\right\|^2-\left|\frac{1}{n}\right|\|y\|\left(\left\|(n-1)x+\left(\frac{n-1}{n}\right)y\right\|+\|(n-1)x+y\|\right)
\end{aligned}$$

Za $n\geq 0$ koristeći 4. svojstvo norme lako možemo vidjeti da vrijede sljedeće dvije nejednakosti

$$\left\|x+\frac{y}{n}\right\|^2\geq\left(\|x\|-\left\|\frac{y}{n}\right\|\right)^2,$$

$$\left\|(n-1)x+\left(\frac{n-1}{n}\right)y\right\|+\|(n-1)x+y\|\leq 2(n-1)\|x\|+\frac{2n-1}{n}\|y\|.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
f(-n)&\geq 2n\|x\|^2+\frac{2n-1}{n^2}\|y\|^2-2\left(\frac{2n-1}{n}\right)\|x\|\,\|y\|-\|y\|\left(2\left(\frac{n-1}{n}\right)\|x\|+\frac{2n-1}{n^2}\|y\|\right)\\
&=2n\|x\|^2-2\left(\frac{3n-2}{n}\right)\|x\|\,\|y\|\\
&=2\|x\|\left(n\|x\|-\left(\frac{3n-2}{n}\right)\|y\|\right),
\end{aligned}$$

što je veće od nule za dovoljno veliki n. S druge strane, promatrajući funkciju

$$f(-n)=\|x\|^2+\|nx-y\|^2-\|(n+1)x-y\|^2$$

te koristeći činjenicu da je $\frac{(n+1)^2}{n^2}-\frac{(2n+1)}{n^2}=1$ imamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
f(n) =&\|x\|^2-\frac{2n+1}{n^2}\|nx-y\|^2+\left(\left\|(n+1)x-\left(\frac{n+1}{n}\right)y\right\|^2-\|(n+1)x-y\|^2\right)\\
=&\|x\|^2-(2n+1)\left\|x-\frac{y}{n}\right\|^2\\
&+\left(\left\|(n+1)x-\left(\frac{n+1}{n}\right)y\right\|-\|(n+1)x-y\|\right)\left(\left\|(n+1)x-\left(\frac{n+1}{n}\right)y\right\|+\|(n+1)x-y\|\right)\\
\leq&\|x\|^2-(2n+1)\left\|x-\frac{y}{n}\right\|^2+\|y\|\left(\left\|\left(\frac{n+1}{n}\right)x-\left(\frac{n+1}{n^2}\right)y\right\|+\left\|\left(\frac{n+1}{n}\right)x-\frac{y}{n}\right\|\right).
\end{aligned}$$

Za $n \geq 0$ možemo pisati

$$
\begin{aligned}
f(-n) &\leq -2n\|x\|^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right)\|x\|\,\|y\| - \frac{2n+1}{n^2}\|y\|^2 + \|y\|\left(2\left(\frac{n+1}{n}\right)\|x\| + \frac{2n+1}{n^2}\|y\|\right) \\
&= 2n\|x\|^2 - 2\left(\frac{3n-2}{n}\right)\|x\|\,\|y\| \\
&= -2\|x\|\left(n\|x\| - \left(\frac{3n+2}{n}\right)\|y\|\right),
\end{aligned}
$$

što je manje od nule za dovoljno veliki n. Kako je $f(n)$ neprekidna funkcija postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(\alpha) = 0$, tj. $\|x\|^2 + \|\alpha x + y\|^2 = \|x - (\alpha x + y)\|^2$. □

Iz propozicije 2.4.2 je jasno da je Pitagorina ortogonalnost homogena na unitarnom prostoru. Obrat ove tvrdnje dokazat ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 2.4.5. *Neka je X normiran prostor. Ako je Pitagorina ortogonalnost homogena u X, onda je X unitaran prostor.*

Dokaz. Neka su $x, y \in X$. U teoremu 2.4.4 pokazali smo da postoji $\alpha \in R$ takav da je $x \perp_P \alpha x + y$. Pretpostavimo da je vrijedi svojstvo homogenosti. Slijedi da je

$$\lambda^2\|x\|^2 + \|\alpha x + y\|^2 = \|\lambda x - (\alpha x + y)\|^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uzimajući $\lambda = (\alpha \pm 1)$ imamo da je $\|x \mp y\|^2 = (a \pm 1)^2\|x\|^2 + \|ax + y\|^2$. Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo da je

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|ax + y\|^2 + 2(a^2 + 1)\|x\|^2.$$

Koristeći homogenost vidimo da vrijedi $\alpha x \perp_P \alpha x + y$, pa je $\|\alpha x + y\|^2 + \alpha^2\|x\|^2 = \|y\|^2$. Sada iz ovoga dobivamo da je $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pa iz teorema 1.1.10 slijedi da je X unitaran prostor. □

Teorem 2.4.6. *Svojstva homogenosti i aditivnosti Pitagorine ortogonalnosti su ekvivalentna u svakom normiranom prostoru X.*

Dokaz. Neka je X normiran prostor i pretpostavimo da je Pitagorina ortogonalnost homogena u X. Tada je prema teoremu 2.4.5 prostor X unitaran, a na unitarnom prostoru je zbog 2.4.2 Pitagorina ortogonalnost ekvivalentna s klasičnom pa je onda i aditivna.

Obratno, pretpostavimo da je Pitagorina ortogonalnost aditivna u X. Neka su $x, y \in X$ takvi da je $x \perp_P y$. Prema teoremu 2.4.4 postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $x \perp_P \alpha x - y$. Zbog pretpostavke da vrijedi aditivnost imamo da je $x \perp_P ax$, a budući da za Pitagorinu ortogonalnost vrijedi 1. svojstvo, odavde lako vidimo da je $a = 0$ za $x \neq 0$. To znači

	Birkhoff-Jamesova	Robertsova	Jamesova	Pitagorina
1.	✔	✔	✔	✔
2.	✔	✔	✗	✗
3.	✗	✔	✔	✔
4.	✗	✗	✗	✗
5.	✗	✗	✗	✗
6.	✔	✗	✔	✔

Tablica 2.1: Svojstva ortogonalnosti

da je $x \perp_P -y$. Zbog simetričnosti Pitagorine ortogonalnosti vrijedi da je $y \perp_P x$, a onda zbog pretpostavke aditivnosti imamo da je $nx \perp_P my$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Odavde imamo da je $\|nx\|^2 + \|my\|^2 = \|nx - my\|^2$ te da je $\|x\|^2 + \|\frac{m}{n}y\|^2 = \|x - \frac{m}{n}y\|^2$. Sada zbog neprekidnosti norme vrijedi da je $\|x\|^2 + \|\lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2$, tj. $x \perp_P \lambda y$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ čime smo pokazali da vrijedi homogenost. □

Za kraj, u tablici 2.1 možemo na jednom mjestu vidjeti koja svojstva ortogonalnosti zadovoljavaju ova 4 do sada spomenuta poopćenja. Uočimo da ni jedno od njih ne zadovoljava više od 3 svojstva.

2.5 Ostale značajne ortogonalnosti

U ovom odjeljku navest ćemo još neke značajnije relacije ortogonalnosti u normiranim prostorima u čije detalje nećemo previše ulaziti. Sve ove ortogonalnosti nabrojene su u [1].

Singer[4] je u [18] uveo ortogonalnost blisko povezanu s Jamesovom ortogonalnošću.

Definicija 2.5.1. *Neka je X normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y Singer ortogonalni (pišemo $x \perp_S y$) ako vrijedi da je*

$$\|x\|\,\|y\| = 0 \quad \textit{ili} \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Carlsson je u [6] uveo sljedeću definiciju ortogonalnosti.

Definicija 2.5.2. *Neka je X normiran prostor i neka su α_i, β_i, γ_i, $i = 1, \ldots, m$ fiksirani realni brojevi za koje vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \gamma_i = 1.$$

[4]Isadore Singer (rođen 1924. godine), američki matematičar.

Neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y Carlsson ortogonalni (pišemo $x \perp_C y$) ako

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \|\beta_i \, x + \gamma_i \, y\|^2 = 0.$$

Napomena 2.5.3. *Lako vidimo da uz određene odabire koeficijenata Carlssonova ortogonalnost obuhvaća Jamesovu i Pitagorinu. Preciznije, za Jamesovu ortogonalnost u gornjoj definiciji možemo uzeti $m = 2$ te koeficijente $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1$. Ako pak želimo Pitagorinu ortogonalnost onda možemo uzeti $m = 3$ te koeficijente $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, \gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$.*

Boussouis je u [5] uveo sljedeću definiciju koja je još općenitija od Carlssonove ortogonalosti.

Definicija 2.5.4. *Neka je X normiran prostor i neka su $x, y \in X$. Kažemo da su x i y Boussouis ortogonalni (pišemo $x \perp_M y$) ako*

$$\int_\Omega \alpha(\omega) \; \|\beta(\omega)x + \gamma(\omega)y\|^2 \; d\mu(\omega) = 0,$$

gdje je (Ω, μ) prostor pozitivne mjere i α, β, γ μ-izmjerive funkcije definirane s Ω na $\mathbb{R}$ takve da je $\alpha(\omega) \neq 0$ gotovo svuda, $\alpha\beta^2$ i $\alpha\gamma^2$ su $\mu-$ integrabilne te vrijedi

$$\int_\Omega \alpha(\omega) \beta^2(\omega) \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \alpha(\omega) \gamma^2(\omega) \, d\mu(\omega) = 0, \quad \int_\Omega \alpha(\omega) \beta(\omega) \gamma(\omega) \, d\mu(\omega) = 1.$$

Poglavlje 3

Mjere odstupanja Banachovih prostora od Hilbertovih

Do sada smo komentirali kako možemo definirati ortogonalnost na normiranim prostorima koji nisu unitarni, ali mogli bi se pitati koliko je zapravo pojedini normiran prostor daleko od toga da bude unitaran, tj. kakva su njegova geometrijska svojstva. Postoje razne geometrijske konstante kojima možemo mjeriti odstupanja normiranih prostora od unitarnih, a neke od njih navest ćemo u ovom poglavlju.

3.1 Jordan–von Neumannova konstanta

Pogledajmo za početak teorem 1.1.10 koji nam govori da u normiranom prostoru možemo definirati skalarni produkt ako i samo ako vrijedi jednakost paralelograma (1.3). Dakle, za prostore koji nisu unitarni jednakost paralelograma neće vrijediti, ali prirodno bi bilo na neki način mjeriti koliko smo zapravo blizu, odnosno daleko od toga da ona ipak vrijedi. Definiciju Jordan-von Neumannove konstante na Banachovom prostoru X uveo je Clarkson[1] u [7] kao najmanju konstantu C takvu da vrijedi

$$\frac{1}{C} \leq \frac{||x+y||^2 + ||x-y||^2}{2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)} \leq C, \tag{3.1}$$

za svaki $x, y \in X$ td. $(x, y) \neq (0, 0)$. Označavat ćemo je s $C_{NJ}(X)$.

U sljedećoj definiciji iz [15] možemo vidjeti još jedan ekvivalentan način kako definirati Jordan-von Neumannovu konstantu.

[1] James Andrew Clarkson (1906.-1970.), američki matematičar.

Definicija 3.1.1. *Jordan-von Neumannovu konstantu C_{NJ} za Banachov prostor X definiramo kao*

$$C_{NJ}(X) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} : x, y \in X,\ (x,y) \neq (0,0) \right\} \tag{3.2}$$

Sljedeći teorem pokazali su Jordan i von Neumann u [14]. Teorem će nam reći koje vrijednosti Jordan-von Neumanova konstanta može poprimiti u Banachovom prostoru, a koje u Hilbertovom.

Teorem 3.1.2. *Neka je X Banachov prostor. Tada je $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$. Dodatno, X je Hilbertov ako i samo ako je $C_{NJ}(X) = 1$.*

Dokaz. Za $x, y \in X$ takve da $(x,y) \neq (0,0)$ definirat ćemo

$$C_{x,y} = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}. \tag{3.3}$$

Neka su $a = \inf\{C_{x,y} : (x,y) \neq (0,0)\}$, $b = C_{NJ}(X) = \sup\{C_{x,y} : (x,y) \neq (0,0)\}$. Imamo da je

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 + (\|x\| + \|y\|)^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) + 4\|x\|\,\|y\| \\ &\leq 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) + 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),\end{aligned}$$

gdje prva nejednakost vrijedi zbog svojstava norme, a posljednja zato jer je $2\|x\|\,\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ (općenito $2ab \leq a^2 + b^2$ zbog $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$). Sada imamo da je

$$C_{x,y} \leq \frac{4\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} = \frac{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}{\|x\|^2 + \|y\|^2} = 2.$$

pa možemo zaključiti da je $C_{NJ}(X) \leq 2$.

Uočimo sada da je

$$C_{x+y,x-y} = \frac{\|2x\|^2 + \|2y\|^2}{2\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)} = \frac{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2} = \frac{1}{C_{x,y}}.$$

Kako je

$$a \leq C_{x+y,x-y} = \frac{1}{C_{x,y}} \leq \frac{1}{a},$$

uzimajući supremum dobivamo da je $b \leq \frac{1}{a}$. Analogno iz

$$b \geq C_{x+y,x-y} = \frac{1}{C_{x,y}} \geq \frac{1}{b},$$

uzimanjem infinuma dobivamo da je $a \geq \frac{1}{b}$. Sada iz ovoga zaključujemo da je $a = \frac{1}{b}$. Kako je $a \leq b$ te je $a = \frac{1}{b}$ imamo da je $\frac{1}{b} \leq b$ pa vrijedi $1 \leq b$. Upravo smo pokazali da je $C_{NJ}(X) \geq 1$.

Iz teorema 1.1.10 direktno slijedi da je $C_{NJ}(X) = 1$ ako i samo ako je X Hilbertov prostor. □

Pogledajmo sada u sljedećem primjeru koliko iznosi Jordan-von Neumannova konstanta u nekim konkretnim Banachovim prostorima. Primjer se može naći u [7].

Primjer 3.1.3. *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$ *te neka je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Tada za Banachov prostor* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ *i za* $t = \min\{p, p'\}$ *vrijedi*

$$C_{NJ}(X) = 2^{\frac{2}{t} - 1}.$$

Primijetimo da u prethodnom primjeru $C_{NJ}(X)$ može poprimiti sve vrijednosti na segmentu $[1, 2]$. Naime, ako uzmemo $p = 1$ vidimo da je $C_{NJ}(X) = 2$. S druge strane za odabir $p = 2$ imamo da je $C_{NJ}(X) = 1$ što smo i očekivali budući da je u tom slučaju X Hilbertov prostor. Također možemo vidjeti da ni za koji $p \neq 2$ konstanta neće poprimiti vrijednost 1 što je ponovo u skladu s teoremom 3.1.2 (jer je X Hilbertov ako i samo ako je $p = 2$). Za $p \in \langle 1, 2 \rangle$ konstanta poprima sve ostale vrijednosti između 1 i 2.

3.2 Jamesova konstanta

Osim Jordan-von Neumannove konstante, imamo još i Jamesovu konstantu koja je vezana uz Jamesovu ortogonalnost, a dana je sljedećom definicijom.

Definicija 3.2.1. *Jamesovu konstantu* C_J *za Banachov prostor* X *definiramo kao*

$$C_J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\| : x, y \in X\} : x, y \in S_X\}, \tag{3.4}$$

gdje je S_X *jedinična sfera u prostoru* X, *tj.* $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Rezultati koji slijede mogu se naći u [10], a govore nam o rasponu Jamesove konstante u Banachovom prostoru. Za početak ćemo zbog jednostavnosti definirati neke oznake:

$$\alpha(x) = \inf\{\max\{\|x+y\|, \|x-y\| : y \in X\} : y \in S_X\},$$
$$\beta(x) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\| : y \in X\} : y \in S_X\}.$$

Uočimo da je $C_J(X) = \sup\{\beta(x) : x \in S_X\}$. Sa X_2 ćemo označavati normiran prostor dimenzije 2.

Lema 3.2.2. *Neka je $x \in S(X_2)$ i neka je $a = \alpha(x)$. Tada vrijedi sljedeće :*

(i) Postoji vektor $y \in S(X_2)$ takav da je $\|y - x\| = \|y + x\| = a$. Štoviše, takav y je jedinstven.

(ii) Neka je $p = \dfrac{y - x}{a}$. Tada je $p \in S(X_2)$ i vrijedi da je $\alpha(p) = \dfrac{2}{a}$.

(iii) $\alpha(x) = \beta(x)$.

Dokaz. (i) Dokaz se može naći u [10].

(ii) Neka je y kao u (i) i neka su

$$p = \frac{y - x}{a} \in S(X_2), \quad q = \frac{y + x}{a} \in S(X_2).$$

Vidimo da vrijedi

$$a = \frac{\|y - x\|}{\|p\|} = \frac{2\|x\|}{\|p - q\|},$$

pa je $\|p - q\| = \frac{2}{a}$. Analogno možemo pokazati da je $\|p + q\| = \frac{2}{a}$. Odavde iz (i) slijedi da je $\alpha(p) = \|p - q\| = \|p + q\| = \frac{2}{a}$.

(iii) Lako vidimo da za y iz (i) vrijedi da je $\|y - x\| = \|y + x\| = \beta(x)$.

□

Teorem 3.2.3. *Neka je X Banachov prostor. Tada vrijedi da je $\sqrt{2} \leq C_J(X) \leq 2$*

Dokaz. Direktno iz defininicije slijedi da je $C_J(X) \leq 2$. Neka je $x \in S(X)$ i neka je X_2 potprostor od X takav da mu je dimenzija 2 i takav da je $x \in X_2$. Neka je vektor $p \in S(X_2)$ definiran kao u prethodnoj lemi. Tada je $\alpha_{X_2}(x) \cdot \alpha_{X_2}(p) = 2$. Sada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha_{X_2}(x) \leq \sqrt{2}$ pa imamo da je

$$C_J(X) \geq \beta(p) \geq \beta_{X_2}(p) = \alpha_{X_2}(p) \geq \sqrt{2}.$$

□

Slično kao i za Jordan-von Neumannovu konstantu, vrijedi da ako je X Hilbertov, onda je $C_J(X) = \sqrt{2}$. Obrat ove tvrdnje općenito ne vrijedi.

U sljedećem primjeru možemo vidjeti koliko iznosi Jamesova konstanta u nekim konkretnim Banachovim prostorima.

Primjer 3.2.4. *Neka je $1 \leq p \leq \infty$ te neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ Banachov prostor. Tada vrijedi da je*

$$C_J(X) = \max\left\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\right\}.$$

Slično kao i prije može se vidjeti da ovisno o odabiru broja p, konstanta $C_J(X)$ može poprimiti sve vrijednosti iz segmenta $\left[\sqrt{2}, 2\right]$. U slučaju Hilbertovog prostora, tj. za $p = 2$, poprima se vrijednost $\sqrt{2}$ kao što znamo da mora vrijediti.

3.3 Dunkl-Williamsova konstanta

Dunkl[2] i Williams[3] su 1964. godine pokazali da na proizvoljnom Banachovom prostoru vrijedi sljedeća tvrdnja koju zovemo *Dunkl-Williamsova nejednakost* (vidi [8]).

Teorem 3.3.1. *Neka je X normiran prostor te neka su $x, y \in X$ takvi da $x, y \neq 0$. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 4 \frac{\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}. \tag{3.5}$$

Dokaz. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
(\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| + \left\| \frac{\|y\|}{\|x\|} x - y \right\| \\
&= \left\| x - y + y - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| + \left\| \frac{\|y\|}{\|x\|} x - x + x - y \right\| \\
&\leq \|x - y\| + \left\| y - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| + \left\| \frac{\|y\|}{\|x\|} x - x \right\| + \|x - y\| \\
&= \|x - y\| + \left\| \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}\right) y \right\| + \left\| \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} - 1\right) x \right\| + \|x - y\| \\
&= \|x - y\| + \big| \|y\| - \|x\| \big| + \big| \|y\| - \|x\| \big| + \|x - y\| \\
&\leq 4\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Budući da je $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$, dijeljenjem gornjeg s $\|x\| + \|y\|$ dobivamo traženu tvrdnju. □

Osim toga, u istom članku pokazali su da se konstanta 4 može zamijeniti konstantom 2 ukoliko se nalazimo u unitarnom prostoru.

Teorem 3.3.2. *Neka je X unitaran prostor te neka su $x, y \in X$ takvi da $x, y \neq 0$. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}. \tag{3.6}$$

[2] Charles F. Dunkl (rođen 1941.), američki matematičar.

[3] Kenneth Stuart Williams (rođen 1940.), kanadski matematičar.

Dokaz. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}\langle x, x\rangle + \frac{1}{\|y\|^2}\langle y, y\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\left(2\|x\|\,\|y\| - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\Big(2\|x\|\,\|y\| - \big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\big)\Big) \\
&= \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\Big(\|x - y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2\Big).
\end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 - \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2}\right)^2 \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \|x - y\|^2 - \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2}\right)^2 \frac{\Big(\|x - y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2\Big)}{\|x\|\,\|y\|} \\
&= \|x - y\|^2 \left(1 - \frac{(\|x\| + \|y\|)^2}{4\|x\|\,\|y\|}\right) + \frac{(\|x\| + \|y\|)^2\,(\|x\| - \|y\|)^2}{4\|x\|\,\|y\|} \\
&= \frac{1}{4\|x\|\,\|y\|}\Big[\|x - y\|^2 \Big(4\|x\|\,\|y\| - \|x\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| - \|y\|^2\Big) + (\|x\| + \|y\|)^2\,(\|x\| - \|y\|)^2\Big] \\
&= \frac{1}{4\|x\|\,\|y\|}\Big[\|x - y\|^2 \Big(-(\|x\| - \|y\|)^2\Big) + (\|x\| + \|y\|)^2\,(\|x\| - \|y\|)^2\Big] \\
&= \frac{1}{4\|x\|\,\|y\|}(\|x\| - \|y\|)^2 \Big[(\|x\| + \|y\|)^2 - \|x - y\|^2\Big] \\
&= \frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{4\|x\|\,\|y\|} 2\left(\|x\|\,\|y\| - \mathrm{Re}\langle x, y\rangle\right) \geq 0
\end{aligned}$$

gdje nejednakost slijedi iz propozicije 1.1.9. Iz ovoga lako možemo vidjeti da vrijedi tvrdnja teorema. □

Kasnije su Kirk[4] i Smiley[5] (vidi [16]) pokazali da nejednakost iz gornjeg teorema zapravo karakterizira Hilbertove prostore. Dakle, relacija (3.6) vrijedi ako i samo ako se nalazimo u Hilbertovom prostoru.

Na temelju ovih rezultata, u [13] je Dunkl-Williamsova konstanta za Banachov prostor definirana kao najmanja konstanta koja može zamijeniti konstantu 4 u Dunkl-Williamsovoj nejednakosti. Na drugi način je Dunkl-Williamsova konstanta dana sljedećom definicijom.

[4] William Arthur Kirk (rođen 1936.), američki matematičar

[5] Malcolm Finlay Smiley (1915–1982), američki matematičar

Definicija 3.3.3. *Dunkl–Williamsovu konstantu C_{DW} za Banachov prostor X definiramo kao*

$$C_{DW}(X) = \sup \left\{ \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x-y\|} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| : x, y \in X,\ x, y \neq 0,\ x \neq y \right\}. \tag{3.7}$$

Sada pomoću prethodnih rezultata koje smo naveli u ovom odjeljku lako možemo vidjeti da za svaki Banachov prostor X vrijedi da je $2 \leq C_{DW}(X) \leq 4$ te da je $C_{DW}(X) = 2$ ako i samo ako se nalazimo u Hilbertovom prostoru.

U sljedećem primjeru pokazat ćemo primjer Banachovog prostora za koji je Dunkl-Williamsova konstanta jednaka 4.

Primjer 3.3.4. *Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ Banachov prostor te neka su dani vektori $x = (1, 1)$ i $y = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, gdje je $\varepsilon > 0$ realan broj dovoljno malen da vrijedi sljedeće*

$$\begin{aligned} C_{DW}(X) &\geq \frac{\|x\|_\infty + \|y\|_\infty}{\|x-y\|_\infty} \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} - \frac{y}{\|y\|_\infty} \right\|_\infty \\ &= \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \left\| (1,1) - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1 \right) \right\|_\infty \\ &= \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{4+2\varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Kad pustimo $\varepsilon \to 0^+$ dobivamo da je $C_{DW}(X) = 4$.

Bibliografija

[1] J. Alonso, H. Martini i S. Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequationes mathematicae **83** (2012), 153–189.

[2] D. Bakić, *Normirani prostori*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1819-v2.pdf`, Pristupljeno: lipanj 2019.

[3] R. Bhatia i P. Šemrl, *Orthogonality of matrices and some distance problems*, Linear algebra and its applications **287** (1999), 77–85.

[4] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 169–172.

[5] B. Boussouis, *Orthogonalité et caractérisation des espaces préhilbertiens*, Disertacija, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fes, Morocco, 1995.

[6] S.O. Carlsson, *Orthogonality in normed linear spaces*, Arkiv för Matematik **4** (1962), 297–318.

[7] J.A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces*, Annals of Mathematics **38** (1937), 114–115.

[8] C.F. Dunkl i K.S. Williams, *A simple norm inequality*, The American Mathematical Monthly **71** (1964), 53–54.

[9] F.A. Ficken, *Note on the existence of scalar products in normed linear spaces*, Annals of mathematics **45** (1944), 362–366.

[10] J. Gao i K.S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, Journal of the Australian Mathematical Society **48** (1990), 101–112.

[11] R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Mathematical Journal **12** (1945), 291–302.

[12] R.C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **61** (1947), br. 2, 265–292.

[13] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster i E.M. Mazcunán-Navarro, *The Dunkl–Williams constant, convexity, smoothness and normal structure*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342** (2008), 298–310.

[14] P. Jordan i J. von Neumann, *On inner products in linear, metric spaces*, Annals of Mathematics **36** (1935), 719–723.

[15] M. Kato, L. Maligranda i Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Mathematica **144** (2001), 275–295.

[16] W.A. Kirk i M.F. Smiley, *Another characterization of inner product spaces*, The American Mathematical Monthly **71** (1964), 890–891.

[17] B.D. Roberts, *On the geometry of abstract vector spaces*, Tohoku Mathematical Journal, First Series **39** (1934), 42–59.

[18] I. Singer, *Angles abstraits et fonctions trigonométriques dans les espaces de Banach*, Acad. R.P. Romine. Bul. Sti. Sect. Sti. Mat. Fiz **9** (1957), 29–42.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavili smo se pitanjem poopćenja ortogonalnosti na normirane prostore u kojima općenito ne postoji skalarni produkt. Za početak smo definirali osnovne pojmove vezane za unitarne i normirane prostore te vezu između njih. Također smo uveli šest svojstava koje klasična ortogonalnost zadovoljava na unitarnom prostoru. U drugom poglavlju navodimo različite definicije poopćenja ortogonalnosti u normiranim prostorima. Svako od tih poopćenja smo posebno komentirali, pokazali da se zaista radi o poopćenju te provjerili koja od šest svojstva ortogonalnosti su zadovoljena. U posljednjem poglavlju bavili smo se pitanjem koliko je neki normiran prostor daleko od toga da bude unitaran, stoga smo uveli neke konstante kojima možemo mjeriti ta odstupanja.

Summary

In this graduate thesis we discussed the problem of generalised orthogonalities in normed spaces where an inner product may not exist. Firstly we introduced basic definitions related to inner product and normed spaces as well as the connection between the two. We have also introduced six properties which the classical definition of ortogonality in inner product spaces satisfies. In second chapter various definitions of generalized orthogonality in normed spaces were introduced. We debated each one of these ortogonalities separately, proved that they really are generalised orthogonalities and we also checked which ortogonality properties they satisfy. In the last chapter we discussed how close is a normed space to being a Hilbert space. To that end some constants which measure those deviations were introduced.

Životopis

Osobni podaci:

- Ime i prezime: Mihael Končić
- Datum rođenja: 20.03.1995.
- Mjesto rođenja: Zabok, Republika Hrvatska

Obrazovanje:

- 2001.-2009. Osnovna škola Stjepana Radića, Brestovec Orehovički
- 2009.-2013. Gimnazija Antuna Gustava Matoša, Zabok
- 2013.-2016. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički
- 2016.-2019. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, diplomski studij Primijenjena matematika