SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Krišto

POVRŠINA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici, doc. dr. sc. Mei Bombardelli na beskrajno mnogo strpljenja i pomoći. Također se zahvaljujem svojoj obitelji na razumijevanju i riječima potpore, bez njih ne bih bila tu gdje jesam. Zahvaljujem se i mom Ivanu za svu pomoć, podršku i strpljenje tijekom svih ovih godina. Veliko hvala svim prijateljima i kolegama koji su mi uljepšali studentske dane i učinili ih nezaboravnima.

Sadržaj

Uvod

Jedna od prvih matematičkih disciplina uz aritmetiku je svakako geometrija. Ona se razvila iz praktičnih potreba ljudi, ponajviše u graditeljstvu i do današnjeg dana je ostala jednako važna. Iz povijesnih izvora otkrivamo da su već pred skoro pet tisućljeća ljudi u Mezopotamiji i starom Egiptu rješavali probleme koje danas promatramo u sklopu geometrije, a koji su se sastojali od praktičnih zadataka vezanih uz mjerenje duljina, površine ili obujma. Stari Egipćani su znali računati površinu trokuta, kvadrata, pravokutnika i kruga te smatramo da je geometrija egipatskog porijekla. Više o tome u [4].

Ipak, najstarija matematika za koju postoje sačuvani izvori je starogrčka matematika. Ondašnji matematičari su se uvelike bavili geometrijom i udarili su temelje na kojima ona i danas počiva. Pitagorejci su još u 5. stoljeću prije Krista operacije s brojevima shvaćali geometrijski, a osnovna ideja je bila da dva lika (poligona) imaju jednaku mjeru, tj. "jednaki su" - ako se jedan može rastaviti na trokute od kojih se drugi može sastaviti, a u ovom radu ćemo to pobliže proučiti. Starogrčki matematičar Euklid[1] je skupio sva dotadašnja znanja matematike u djelu *Elementi* koji do danas ostaju jedno od najvažnijih djela matematike. [4] U drugom poglavlju ćemo definirati pojmove jednakosastavljivost poligona i poligoni jednakog sadržaja.

Kako rastavljanje i sastavljanje geometrijskih likova, odnosno poligona, nije praktično, danas kada uspoređujemo veličine likova računamo / mjerimo njihovu površinu i uspoređujemo dobivene brojeve. O funkciji kojom mjerimo površinu ćemo se baviti u poglavlju "Površina".

Vrijedi spomenuti i jedan od najpoznatijih matematičkih teorema: Pitagorin poučak. On glasi: Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama tog trokuta. Dakle, ako su a i b duljine kateta trokuta, a c je duljina hipotenuze trokuta onda vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Međutim, Euklid ne koristi algebarsku notaciju nego dokazuje jednakost površina iako ju ne definira. U poglavlju "Pitagorin poučak" ćemo dokazati ovaj teorem na više načina.

[1] Atena, oko 330. pr. Kr. - oko 275. pr. Kr

Poglavlje 1

Osnovno o trokutu i poligonu

Kao što smo već rekli, u starogrčkoj matematici dva lika smatraju se jednakima (po površini) ako se jedan može rastaviti na dijelove (trokute) od kojih se drugi može sastaviti. U svakodnevnom životu nam to baš i nije korisno nego radije mjerimo/računamo površinu, odnosno iskazujemo ju brojem i potom uspoređujemo različite likove uspoređujući njihovu površine - brojeve. U ovom poglavlju ćemo definirati osnovne pojmove koji su nam potrebni za teoriju površine.

1.1 Euklidovi *Elementi*

Euklid je već na početku *Elemenata* zapisao postulate i aksiome kojima se definira ravnina. Geometrija se zasniva na pojmovima koji se ne definiraju i tvrdnjama koje se ne dokazuju te se pomoću njih definiraju svi ostali pojmovi i izvode i dokazuju brojne tvrdnje. Tvrdnje koje se smatraju točne i ne dokazuju se nazivaju se aksiomima. Euklid navodi ove aksiome:

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom preklapaju međusobno su jednake.
5. Cjelina je veća od dijela.

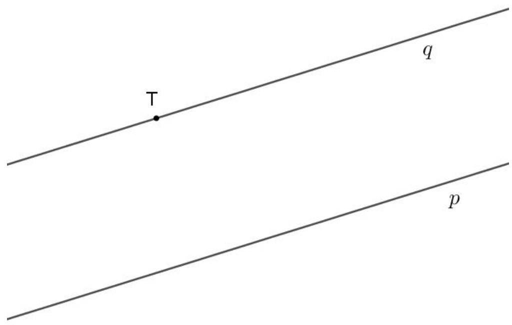
Također, Euklid navodi i sljedeće postulate:

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.
3. I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.

5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta. Iz [10].

Iznimno bitan je 5. postulat. On predstavlja važno svojstvo euklidske ravnine i još ga nazivamo i *Postulat o paralelama*. Brojni matematičari su kroz povijest pokušavali pokazati da se on zapravo ne može smatrati postulatom već da je teorem, a sami pokušaji dokazivanja te činjenice su doveli do otkrića novih geometrija, neeuklidskih. Više o njima u [12]. Danas se umjesto Euklidovog petog postulata uzima njemu ekvivalentna tvrdnja poznata pod nazivom *Playfairov*[1] *postulat*. On glasi:

Playfairov postulat. Danom točkom T izvan zadanog pravca p prolazi najviše jedan pravac q paralelan s p.



Slika 1.1: Aksiom o paralelama

Naravno, Euklid je u svom djelu skupio sve dotadašnje rezultate, no za današnje potrebe je nužna preciznija notacija i formulacija, odnosno, precizniji iskazi danih tvrdnji i definicija. Naposljetku, David Hilbert[2] 1899. je objavio svoje djelo *Osnove geometrije* i zasnovao euklidsku geometriju. U ovom radu ćemo promatrati likove u Hilbertovoj ravnini u kojoj vrijedi Playfairov postulat.

Počevši s Propozicijom 35. iz prve knjige Euklidovih Elemenata koja glasi: "Paralelogrami s istom osnovicom koji leže na istim paralelama međusobno su jednaki" Euklid nas upoznaje s novim pojmom koji bismo mi danas zvali "jednake površine", odnosno shvaćanje površine na način na koji smo naučili u školi, gdje nekom liku pridružujemo broj koji nazivamo njegovom površinom. No, kod Euklida ovu propoziciju ne možemo objasniti na taj način. Euklid u svojoj knjizi koristi izraz "jednakost" likova i ne definira

[1] John Playfair,škotski matematičar, 1748. - 1819.
[2] David Hilbert, njemački matematičar, 1862. – 1943.

ga. Oslanjajući se na Hilbertovu ravninu, pokazat ćemo da se pojam ”jednakost” likova u Euklidovom smislu može definirati te da se njegova svojstva mogu dokazati.

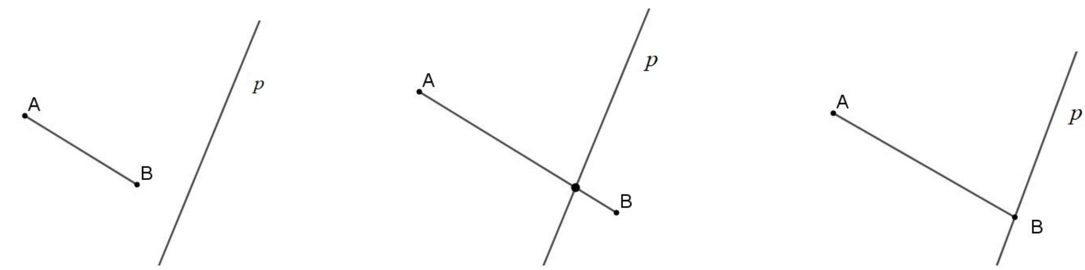
1.2 Trokuti i poligoni

Neka vrijede aksiomi Hilbertove ravnine. Osnovni objekti u ravnini su točke (označavamo ih velikim tiskanim slovima $A, B, C, ...$) i pravci (označavamo ih malim tiskanim slovima $a, b, c, ...$). Među točkama i pravcima postoji veza i oni su indirektno definirani svojim svojstvima koja proizlaze iz sustava aksioma. Tako je npr. aksiomima opisan odnos da točka *leži između* drugih dviju točaka. Definirajmo pojmove koje ćemo koristiti.

Definicija 1.1. *Neka su A i B dvije različite točke koje leže na pravcu p.* ***Dužina*** $\overline{AB}$ *je skup svih točaka pravca p koje leže između točaka A i B, uključujući i točke A i B.*

Slika 1.2: Dužina $\overline{AB}$

Definicija 1.2. *Točka A i B* ***leže s iste strane*** *pravca p ako vrijedi* $\overline{AB} \cap p = \emptyset$*. Ako je* $\overline{AB} \cap p \neq \emptyset$ *tada točke A i B ne leže s iste strane pravca p.*



(a) Točke A i B leže s iste strane pravca p

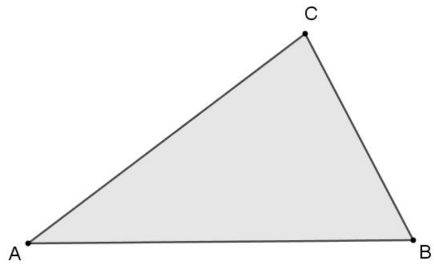
(b) Točke A i B ne leže s iste strane pravca p

(c) Točke A i B ne leže s iste strane pravca p

Slika 1.3: Položaj točaka u odnosu na pravac

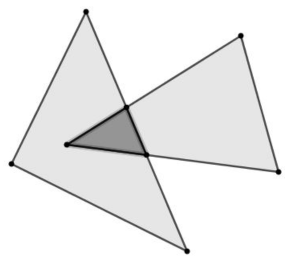
Definicija 1.3. ***Unutrašnjost trokuta*** *ABC je skup točaka ravnine koje su s iste strane pravca AB kao i točka C, s iste strane pravca AC kao točka B i s iste strane pravca BC kao točka A.*

Definicija 1.4. ***Trokut*** *ABC je podskup ravnine koji se sastoji od tri dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ i unutrašnjosti trokuta ABC. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ nazivamo stranice trokuta.*



Slika 1.4: Trokut ABC

Definicija 1.5. *Dva trokuta se* ***preklapaju*** *ako imaju barem jednu zajedničku unutarnju točku (točku u unutrašnjosti). U suprotnom kažemo da se ne preklapaju.*



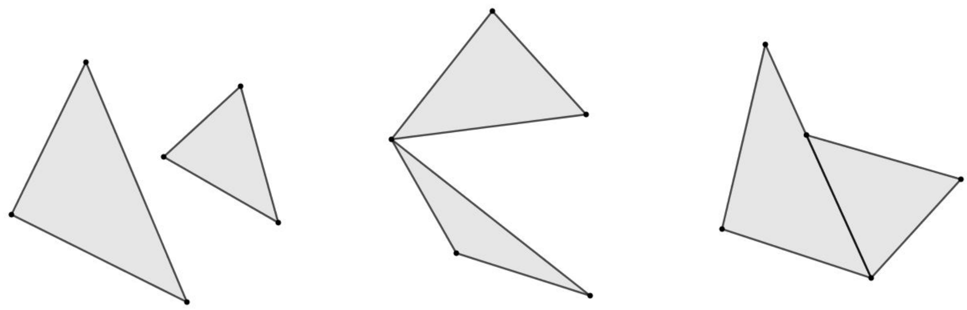
Slika 1.5: Trokuti koji se preklapaju

Trokuti koji imaju zajednički samo jedan vrh ili dijelove ruba (stranice) se ne preklapaju.

Definicija 1.6. *Skup $S \subseteq M$ je* ***konveksan*** *ako vrijedi*

$$A, B \in S \implies \overline{AB} \subseteq S.$$

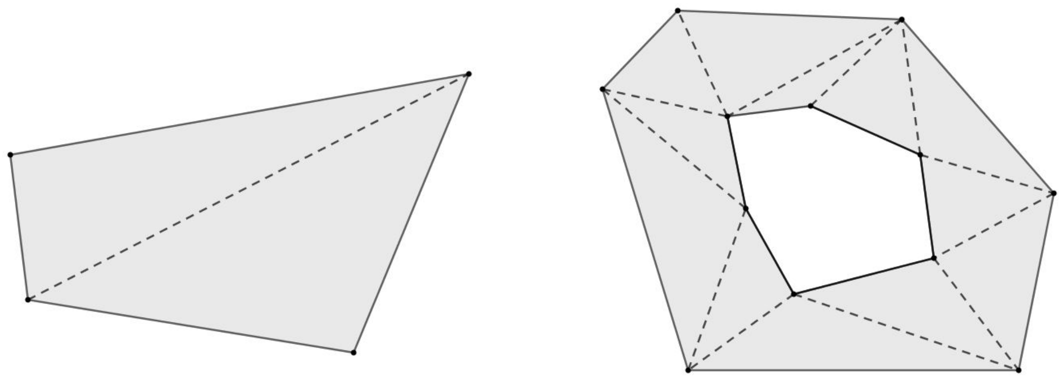
Svaki trokut je konveksan. Također, presjek dvaju konveksnih skupova je konveksan. Sada ćemo definirati poligon i pokazati neka njegova svojstva.



(a) (b) (c)

Slika 1.6: Trokuti koji se ne preklapaju

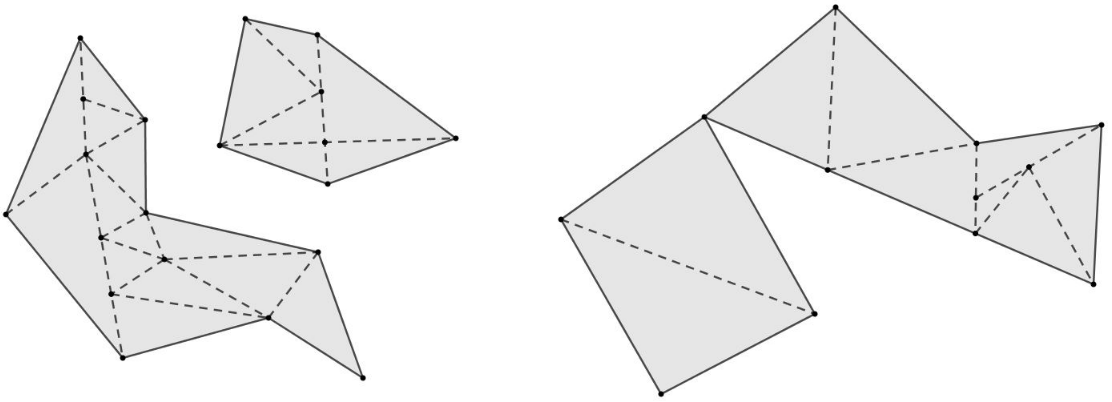
Definicija 1.7. ***Poligon*** *je podskup ravnine koji možemo prikazati kao konačnu uniju trokuta koji se ne preklapaju.*



Slika 1.7: Poligoni

Dakle, četverokut, peterokut, šesterokut itd. su također poligoni, bili oni konveksni ili ne. Na slici 1.8 možemo vidjeti još neke ”neobične” poligone koji zadovoljavaju definiciju.

Primijetimo kako se u skup poligona ubrajaju i poligoni s ”rupom” te oni koji su ”odvojeni”, odnosno, njihovi dijelovi nemaju zajedničku niti jednu zajedničku točku te oni koji imaju samo jednu zajedničku točku. Također, ovako definiranom poligonu pripada njegov rub i sve njegove unutarnje točke. Za poligon koji nema ”rupe” niti odvojene dijelove kažemo da je **jednostavni poligon**.

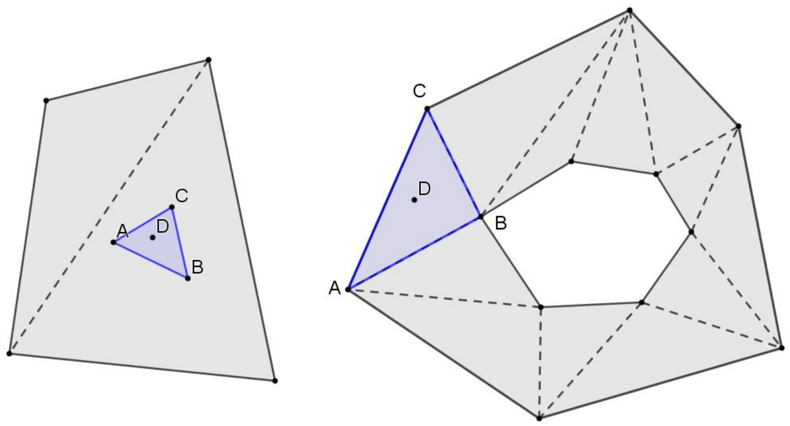


(a) Poligon koji ima "odvojene" dijelove

(b) Poligon kojem dijelovi imaju samo jednu zajedničku točku

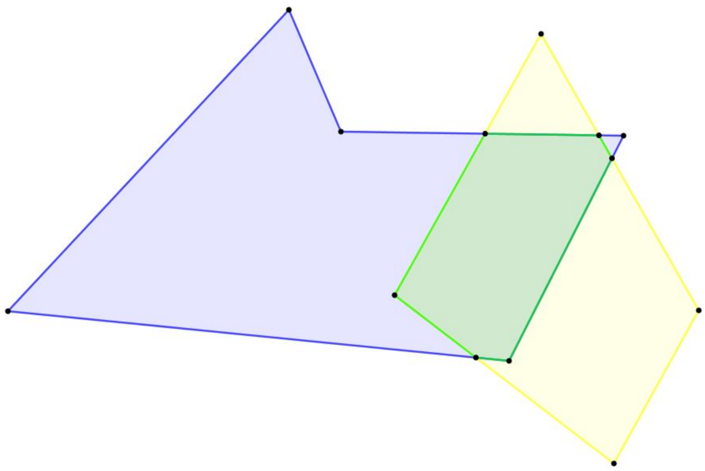
Slika 1.8: Neobični poligoni

Definicija 1.8. *Za točku D kažemo da je* ***unutarnja točka poligona*** $\mathcal{P}$ *ako postoji neki trokut $ABC \subseteq \mathcal{P}$ tako da je točka D u unutrašnjosti trokuta ABC.*



Slika 1.9: Točka D se nalazi unutar poligona

Definicija 1.9. *Dva poligona se* ***preklapaju*** *ako imaju zajedničke unutarnje točke. Inače se ne preklapaju.*



Slika 1.10: Dva jednostavna poligona koja se preklapaju

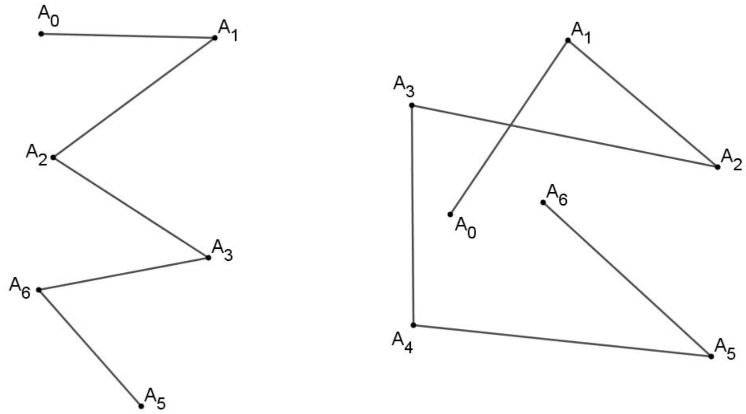
Definicija 1.10. ***Izlomljena linija*** *je unija od konačno mnogo različitih dužina* $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$ *u ravnini, zadanih u određenom poretku, tako da se jedan kraj svake dužine (osim zadnje) podudara s jednim krajem sljedeće dužine. Dužine koje čine izlomljenu liniju zovu se njene* ***stranice****, njihovi krajevi su njeni* ***vrhovi****, a obzirom na dani poredak dužina i vrhova, prvi vrh prve dužine* (A_0) *je* ***početak****, a drugi vrh zadnje dužine* ***kraj*** (A_n) ***izlomljene linije****. Izlomljena linija je* ***zatvorena*** *ako joj se početak i kraj podudaraju. Izlomljena linija je* ***jednostavna****, ako svaka njena točka leži ili na samo jednoj njenoj stranici ili samo na dvjema kojima je ta točka kraj. Inače se izlomljena linija zove* ***samopresječna****.*

Ako spojimo dva vrha jednostavnog poligona $\mathcal{P}$ proizvoljnom jednostavnom izlomljenom linijom koja se nalazi unutar tog poligona dobit ćemo dva nova poligona $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ čije sve unutarnje točke leže unutar $\mathcal{P}$. Kažemo da je $\mathcal{P}$ rastavljen na $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ ili da se $\mathcal{P}$ sastoji od $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$.

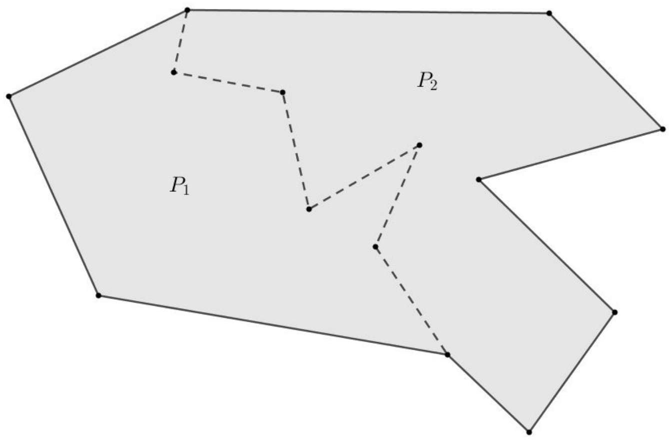
Definicija 1.11. ***Triangulacija poligona*** *je svaki prikaz tog poligona kao unije konačno mnogo trokuta koji se ne preklapaju, takav da je presjek dvaju trokuta ili zajednička stranica ili zajednički vrh ili je presjek prazan.*

Primijetimo da se svaki konveksan mnogokut može triangulirati dijagonalama iz jednog vrha.

Lema 1.12. *Prikaz poligona kao konačne unije nepreklapajućih trokuta uvijek možemo profiniti do triangulacije.*



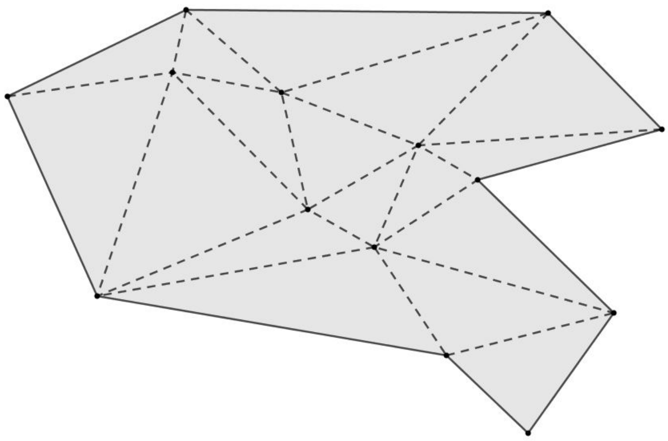
Slika 1.11: Jednostavna i samopresječna izlomljena linija



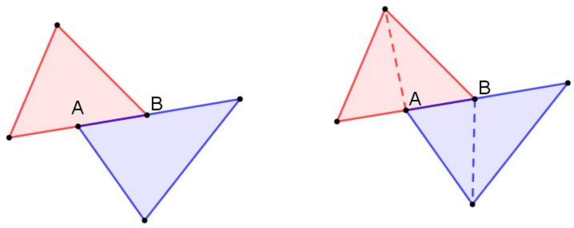
Slika 1.12: Poligon $\mathcal{P}$ se sastoji od poligona $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$

Dokaz. Neka je poligon $\mathcal{P}$ prikazan kao unija nepreklapajućih trokuta. Ako se ne radi o triangulaciji onda postoji točka koja je vrh jednog od tih trokuta, a pripada stranici drugog trokuta, ali nije njegov vrh. Radi lakšeg razumijevanja označimo trokute s T_1 i T_2. Imamo tri slučaja:

1° slučaj. Dva trokuta imaju zajednički dio stranice tako da vrh trokuta T_1 leži na stranici trokuta T_2 i obrnuto, vrh trokuta T_2 leži na stranici od T_1. U oba trokuta spojimo vrh koji leži na stranici drugog trokuta sa nasuprotnim vrhom toj stranici (kao na slici 1.14).

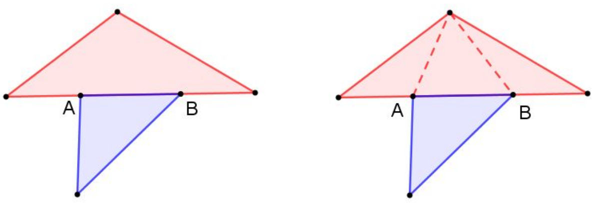


Slika 1.13: Jedna od triangulacija poligona



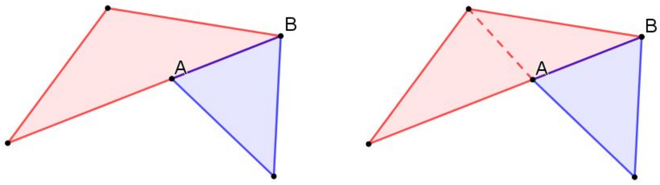
Slika 1.14: Prvi slučaj

Tako smo dobili trokute kojima je zajednička cijela stranica ili samo vrh.



Slika 1.15: Drugi slučaj

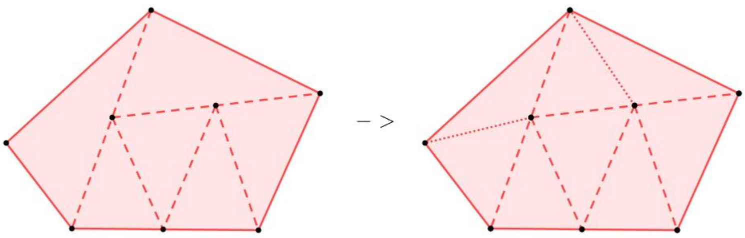
2° slučaj. Dva vrha trokuta T_2 leže na stranici trokuta T_1, odnosno cijela stranica trokuta T_2 leži na stranici trokuta T_1. Kao i u prethodnom slučaju, vrhove koji leže na stranici spojimo sa vrhom nasuprotnim toj stranici te će dobiveni trokuti imati zajedničku cijelu stranicu ili samo vrh.



Slika 1.16: Treći slučaj

3° slučaj. Trokuti T_1 i T_2 imaju jedan zajednički vrh, a drugi vrh trokuta T_2 leži na stranici od T_1. Spojimo vrh koji leži na stranici trokuta T_1 sa nasuprotnim vrhom toj stranici. Dobiveni trokuti imaju zajedničku cijelu stranicu ili samo vrh.
Za svaki od "problematičnih" slučajeva činimo isti postupak dok god postoji jedan od takvih u poligonu. Postupak završava kada smo razriješili sve takve situacije, a to će biti moguće jer se poligon sastoji od konačno mnogo trokuta. Ovim je lema dokazana. □

Iz definicije 1.7 i leme 1.12 slijedi da svaki poligon ima triangulaciju.

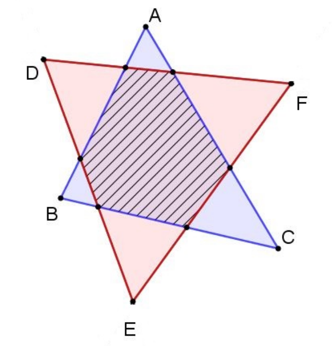


Slika 1.17: Primjer triangulacije poligona

Pokažimo sada neka važna svojstva poligona.

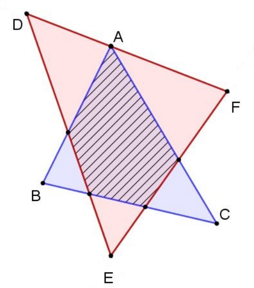
Lema 1.13. *Presjek dvaju trokuta koji se preklapaju je poligon.*

Dokaz. Ovaj dokaz neće biti sasvim formalan pa ćemo ovdje napisati samo ideju dokaza. Neka su zadani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ koji se preklapaju. Svaki trokut je konveksan pa će i njihov presjek biti konveksan. Jer se zadani trokuti preklapaju njihov presjek ne može biti

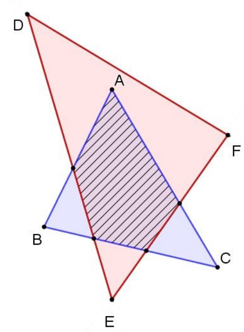


Slika 1.18: Presjek dvaju trokuta je šesterokut

prazan skup, točka niti dužina. Presjek dvaju trokuta je omeđen dužinama i dužine koje ga omeđuju pripadaju pravcima AB, BC, CA, DE, EF i FD. Dakle, presjek dvaju prekla-



(a)

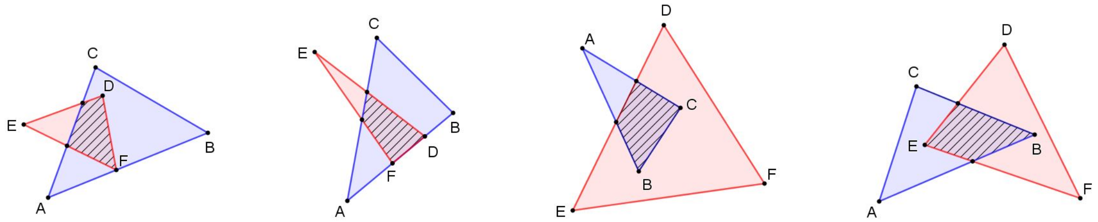


(b)

Slika 1.19: Presjek dvaju trokuta može biti peterokut

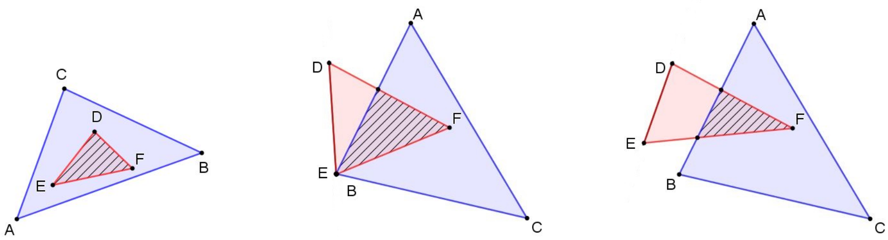
pajućih trokuta je konveksni skup omeđen dužinama, njih najviše šest. Zato taj konveksni skup može biti trokut, četverokut, peterokut ili šesterokut. Na sljedećim slikama možemo vidjeti neke od mogućih slučajeva.
Budući da su svi dobiveni presjeci konveksni mnogokuti moguće ih je triangulirati (dovoljno je samo povući dijagonale iz jednog vrha). Dakle, po definiciji su presjeci dvaju trokuta poligoni i ovime je tvrdnja dokazana. □

Štoviše, poligoni koji su presjek dvaju nepreklapajućih trokuta su konveksni. Ovom lemom smo dokazali što vrijedi za presjek preklapajućih trokuta, a za nepreklapajuće je očito da će im presjek biti prazan skup, točka, dio stranice ili pak cijela stranica.



(a) (b) (c) (d)

Slika 1.20: Presjek dvaju trokuta može biti četverokut



(a) (b) (c)

Slika 1.21: Presjek dvaju trokuta je trokut

Propozicija 1.14. *Presjek dvaju poligona koji se preklapaju je poligon.*

Dokaz. Pokažimo da je presjek dvaju preklapajućih poligona također poligon. Ako se jedan poligon nalazi u unutrašnjosti drugoga, njihov presjek će biti upravo taj unutarnji poligon pa je tvrdnja očita.

Neka su zadana dva poligona $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}$ koji se preklapaju i od kojih se niti jedan ne nalazi unutar drugoga te neka su oba triangulirana:

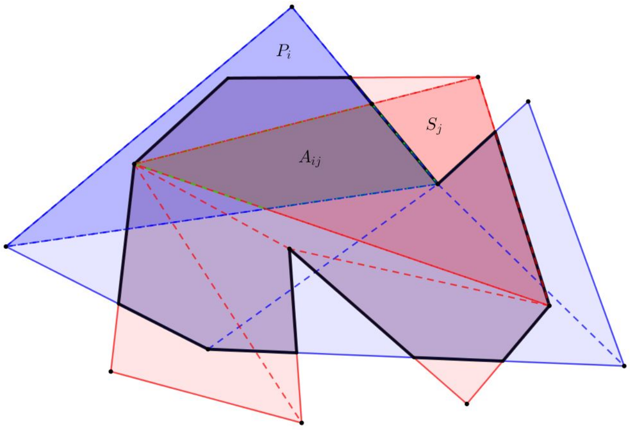
$$\mathcal{P} = P_1 \cup ... \cup P_n,$$

$$\mathcal{S} = S_1 \cup ... \cup S_m,$$

pri čemu su S_i i P_j trokuti.

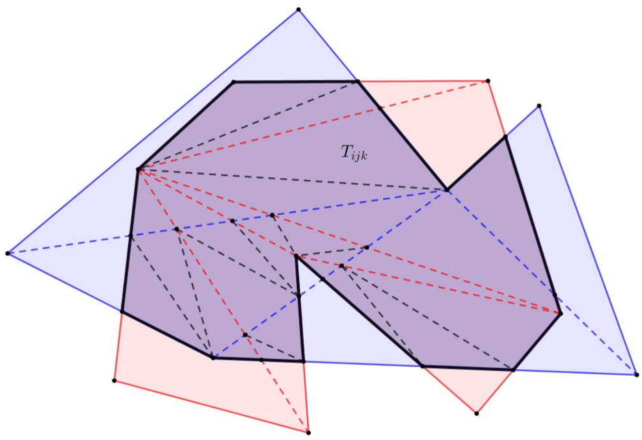
Pogledajmo presjeke trokuta P_i i S_j. Za one trokute koji se preklapaju prema lemi 1.13 vrijedi da su njihovi presjeci poligoni koje nazovimo $\mathcal{A}_{ij}$. Svaki od tih poligona možemo triangulirati. Imamo:

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \left(\bigcup_i^n P_i\right) \cap \left(\bigcup_j^m S_j\right) = \bigcup_{ij} \left(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{S}_j\right) = \bigcup_{ij} \mathcal{A}_{ij} = \bigcup_{ijk} T_{ijk}.$$



Slika 1.22: Presjek trokuta P_i i S_j su poligoni $\mathcal{A}_{ij}$

Dakle, presjek trokuta P_i i S_j je poligon $\mathcal{A}_{ij}$ kojeg smo rastavili na nepreklapajuće trokute T_{ijk}.

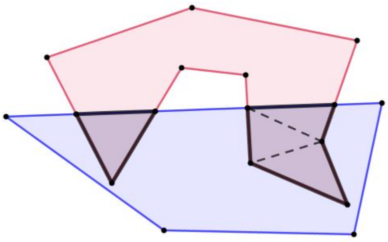


Slika 1.23: Nepreklapajući trokuti T_{ijk}

Presjek poligona $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}$ je konačna unija nepreklapajućih trokuta T_{ijk}, a to je po definiciji 1.7 poligon. Ovime je tvrdnja dokazana. □

Primjer još jednog presjeka dvaju poligona možemo vidjeti na sljedećoj slici.

Pojam *razlika poligona* u ovom radu neće predstavljati običnu skupovnu razliku dvaju poligona, već ćemo tome dodati i rubne dužine.



Slika 1.24: Presjek dvaju poligona može biti poligon s ”odvojenim” dijelovima

Definicija 1.15. ***Razlika poligona*** *je najmanji zatvoreni (kompaktan) skup koji sadrži njihovu skupovnu razliku.*

Tako definiranu razliku poligona označavat ćemo znakom \. Bez dokazivanja ćemo koristiti činjenicu da neke skupovne jednakosti vrijede za poligone uz ovako definiranu razliku. Primjerice, za poligone $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ vrijedi:

$$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \cup (\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}) \cup (\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}).$$

Lema 1.16. *Neka je zadan trokut $\mathcal{T}$ i poligon $\mathcal{P}$ takav da je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$. Razlika $\mathcal{P} \setminus \mathcal{T}$ je poligon ili prazan skup.*

Dokaz. Poligon $\mathcal{P}$ zbog 1.12 možemo prikazati pomoću triangulacije:

$$\mathcal{P} = P_1 \cup ... \cup P_n$$

gdje su P_i nepreklapajući trokuti za svaki i. Vrijedi:

$$\mathcal{P} \setminus \mathcal{T} = \Big(\bigcup_i P_i\Big) \setminus \mathcal{T}.$$

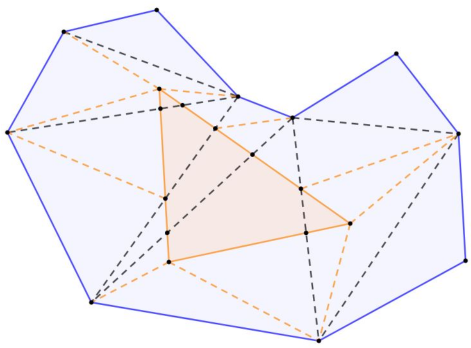
Stoga, dovoljno je odrediti presjek $\left(\bigcup_i P_i\right) \cap \mathcal{T}^{\mathrm{c}}$, odnosno za svaki i promatrati razliku $P_i \setminus \mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{T}$ trokut unutar poligona $\mathcal{P}$ njegov presjek s trokutima P_i prema lemi 1.13 će biti poligoni te ih možemo rastaviti na manje trokute:

$$\Big(\bigcup_i P_i\Big) \setminus \mathcal{T} = \bigcup_i \Big(P_i \setminus \mathcal{T}\Big) = \bigcup_j S_{ij}.$$

Trokuti S_{ij} se neće preklapati (jer se ni trokuti P_i ne preklapaju) i ima ih konačno mnogo. Imamo

$$\mathcal{P} \setminus \mathcal{T} = \Big(\bigcup_i \mathcal{P}_i\Big) \setminus \mathcal{T} = \bigcup_i \Big(P_i \setminus \mathcal{T}\Big) = \bigcup_{ij} S_{ij}$$

i stoga je $\mathcal{P} \setminus \mathcal{T}$ poligon. □



Slika 1.25: Razlika poligona i trokuta

Propozicija 1.17. *Neka su zadani poligoni $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}$ tako da vrijedi $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ i $\mathcal{S} \neq \mathcal{P}$. Tada je $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ poligon.*

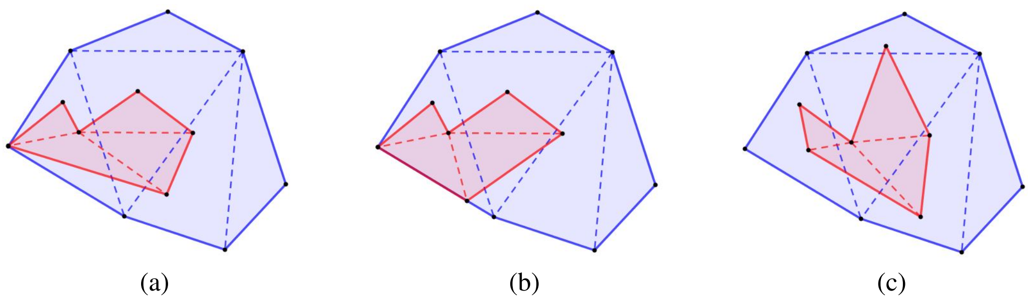
Dokaz. Želimo pokazati da će razlika dvaju poligona od kojih se jedan nalazi u unutrašnjosti drugoga uvijek biti poligon. Vrijedi $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ i $\mathcal{S} \neq \mathcal{P}$ za poligone $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}$. Neka je

$$\mathcal{P} = P_1 \cup ... \cup P_n$$

jedna triangulacija od $\mathcal{P}$, a

$$\mathcal{S} = S_1 \cup ... \cup S_m$$

jedna triangulacija od $\mathcal{S}$. Na slici 1.26 su prikazani neki slučajevi.
Dokažimo tvrdnju. Želimo dokazati da je $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ poligon. Budući da je $\mathcal{S}$ trianguliran možemo gledati razliku poligona $\mathcal{P}$ sa svakim trokutom S_j posebno, odnosno $\mathcal{P} \setminus \left(\bigcup_j S_j \right)$.



Slika 1.26: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ - neki slučajevi

Prema lemi 1.16 imamo da je za svaki j $\mathcal{P} \setminus S_j = \mathcal{R}_j$ poligon. Dobili smo poligone $\mathcal{R}_j$ za koje vrijedi $\mathcal{R}_j \subseteq \mathcal{P}$ i imamo

$$\mathcal{P} \setminus \mathcal{S} = \mathcal{P} \setminus \left(\bigcup_j S_j \right) = \bigcap_j \left(\mathcal{P} \setminus S_j \right) = \bigcap_j \mathcal{R}_j.$$

Uzastopno primjenjujući propoziciju 1.14 na poligone $\mathcal{R}_j$ dobivamo da je $\bigcap_j \mathcal{R}_j$ poligon. Stoga je $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ poligon. □

Propozicija 1.18. *Unija dvaju poligona je poligon.*

Dokaz. Neka su poligoni zadani triangulacijom:

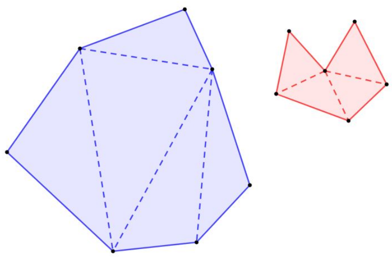
$$\mathcal{P} = P_1 \cup ... \cup P_n$$

i

$$\mathcal{Q} = Q_1 \cup ... \cup Q_m,$$

pri čemu su P_i trokuti na koje je rastavljen $\mathcal{P}$, a Q_j trokuti na koje je rastavljen $\mathcal{Q}$. Njihovi međusobni položaji mogu biti:

1. nemaju zajedničkih unutarnjih točaka;
2. preklapaju se tako da je jedan podskup drugoga;
3. preklapaju se tako da niti jedan nije podskup onog drugog.



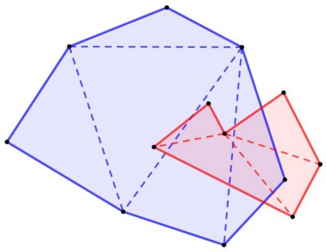
Slika 1.27: Unija poligona koji nemaju niti jednu zajedničku točku

1° slučaj. Neka poligoni $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ nemaju zajedničkih unutarnjih točaka pa se ni trokuti P_i i Q_j ne preklapaju. Poligoni se ne preklapaju pa je njihova unija:

$$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = (P_1 \cup ... \cup P_n) \cup (Q_1 \cup ... \cup Q_m) = \left(\bigcup_i^n P_i \right) \cup \left(\bigcup_j^m Q_j \right).$$

Dakle, unija dvaju poligona je zapravo konačna unija nepreklapajućih trokuta što je po definiciji poligon.

2° slučaj. Neka je $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Tada je $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \mathcal{P}$ pa je to očito poligon.



Slika 1.28: Unija poligona koji se preklapaju

3° slučaj. Neka se poligoni $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ preklapaju tako da niti jedan nije podskup onog drugog. Dakle, uniju $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \cup (\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}) \cup (\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}).$$

Želimo pokazati da su $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ poligoni. Prema propoziciji 1.14 njihov presjek $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ je poligon. Vrijedi $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q} = \mathcal{P} \setminus \big(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}\big)$, a jer je $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ prema propoziciji 1.17 slijedi da je $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ poligon. Analogno vrijedi i za $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Sada vidimo da imamo situaciju kao i u prvom slučaju jer se poligoni $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ ne preklapaju pa je njihova unija također poligon. Time smo dokazali da je $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ poligon.
Tvrdnja je dokazana za sve slučajeve. □

Korolar 1.19. *Svaka konačna unija trokuta je poligon.*

Tvrdnja slijedi iz 1.18.

Poglavlje 2

Jednakosastavljivost poligona i poligoni jednakog sadržaja

Euklid u *Elementima* nije definirao površinu poligona, nego je upotrebljavao izraz "jednaki" za poligone. Mi njegovu "jednakost" želimo zamijeniti nekim drugim pojmom koji će biti dobar temelj za teoriju površine. U ovom poglavlju ćemo definirati jednakosastavljivost poligona i poligone jednakog sadržaja i dokazati njihova svojstva. Također ćemo Euklidove tvrdnje iskazati pomoću tih novih pojmova.

2.1 Jednakosastavljivost poligona

Svaki poligon je prema definiciji unija trokuta pa je prirodno uspoređivati ih pomoću rastava na trokute. Stoga definiramo sljedeći pojam.

Definicija 2.1. *Poligoni $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ su **jednakosastavljivi** ako postoje nepreklapajući trokuti $T_1, T_2, ..., T_n$ i nepreklapajući trokuti $T_1', T_2', ..., T_n'$ takvi da je*

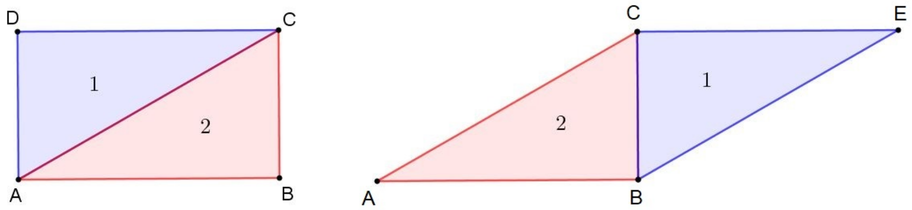
$$\mathcal{P} = T_1 \cup \ldots \cup T_n,$$

$$\mathcal{P}' = T_1' \cup \ldots \cup T_n',$$

gdje su za svaki i trokuti T_i i T_i' sukladni.
Za jednakosastavljive poligone pišemo $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$.

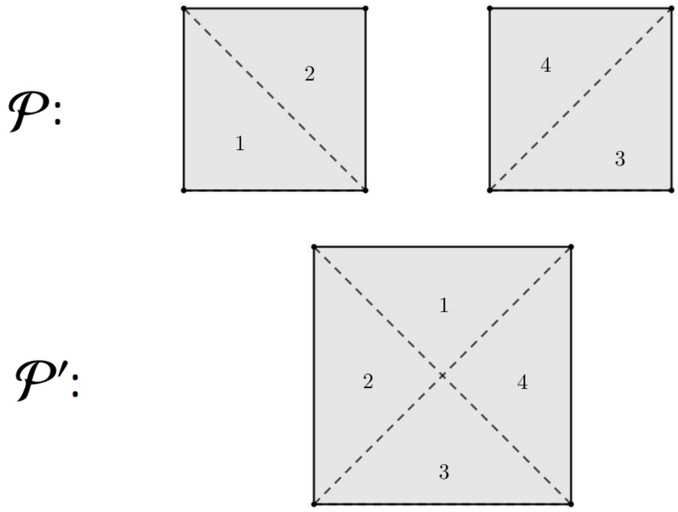
Iz definicije slijedi da su sukladni trokuti jednakosastavljivi.

Primjer 1. Neka je $ABCD$ zadani pravokutnik. Na slici 2.1 vidimo pravokutnik koji je dijagonalom podijeljen na dva trokuta označena brojevima 1 i 2. Ako trokut 1 u pravokutniku pomjerimo kao na slici dobit ćemo paralelogram kojemu je osnovica dužina $\overline{AB}$, a visina na tu stranicu $\overline{BC}$. Pravokutnik $ABCD$ i paralelogram $ABEC$ su jednakosastavljivi.



Slika 2.1: Jednakosastavljivi pravokutnik i paralelogram

Primjer 2. Ako je $\mathcal{P}$ unija dva sukladna kvadrata i $\mathcal{P}'$ kvadrat kojemu je stranica jednaka dijagonali kvadrata iz $\mathcal{P}$ tada su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ jednakosastavljivi. Možemo podijeliti $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ na 4 sukladna trokuta kao što je prikazano na slici 2.2.

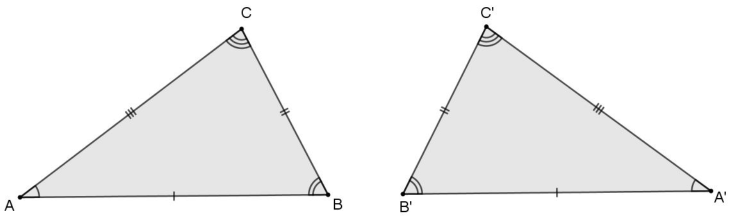


Slika 2.2: Iz dva kvadrata rastavljanjem na trokute slažemo novi kvadrat

Definicija 2.2. *Kažemo da je preslikavanje $\varphi : M \to M$ **izometrija ravnine** M ako za svake dvije točke A i B ravnine M vrijedi $|AB| = |A'B'|$, gdje je $A' = \varphi(A)$ i $B' = \varphi(B)$.*

Definicija 2.3. *Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su **sukladni** ako postoji izometrija φ za koju vrijedi $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ i $C' = \varphi(C)$. Pišemo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Vrijede poznati teoremi o sukladnosti trokuta koje ovdje nećemo navoditi.



Slika 2.3: Sukladni trokuti

Propozicija 2.4. *Relacija jednakosastavljivost je relacija ekvivalencije na skupu svih poligona.*

Dokaz. Pokažimo *refleksivnost*. Neka je $\mathcal{P}$ poligon, $\mathcal{P} = T_1 \cup \ldots \cup T_n$ pri čemu su T_i trokuti. Očito je $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$ jer se sastoje od istih trokuta T_i. Relacija $\equiv$ je refleksivna.

Pokažimo *simetričnost*. Neka je $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$. Kako je

$$\mathcal{P} = T_1 \cup \ldots \cup T_n,$$

$$\mathcal{P}' = T_1' \cup \ldots \cup T_n',$$

gdje su $T_i \cong T_i'$ za svaki i, očito vrijedi $\mathcal{P}' \equiv \mathcal{P}$. Relacija $\equiv$ je simetrična.

Preostaje još pokazati *tranzitivnost*. Neka su $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$. To znači da postoje trokuti T_i i T_i' tako da vrijedi

$$\mathcal{P} = T_1 \cup \ldots \cup T_n$$

$$\mathcal{P}' = T_1' \cup \ldots \cup T_n',$$

te je *i* $T_i \cong T_i'$ za svaki i.
Neka su $\mathcal{P}' \equiv \mathcal{P}''$. To znači da postoje sukladni trokuti S_j' i S_j'' tako da vrijedi

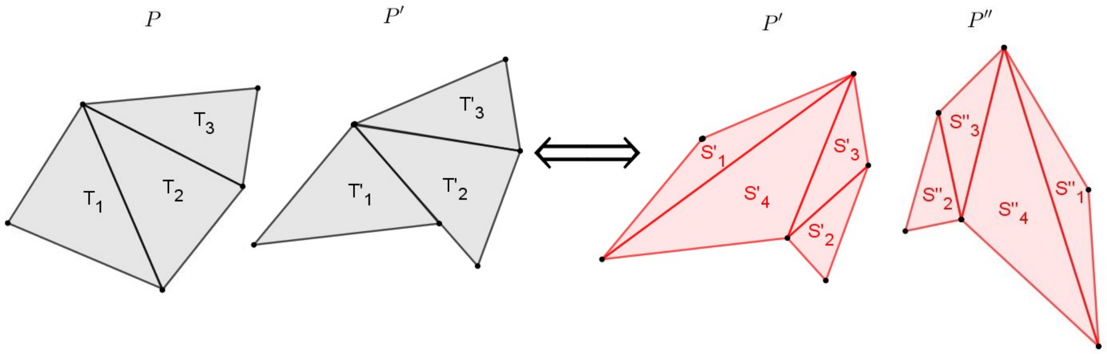
$$\mathcal{P}' = S_1' \cup \ldots \cup S_m',$$

$$\mathcal{P}'' = S_1'' \cup \ldots \cup S_m'',$$

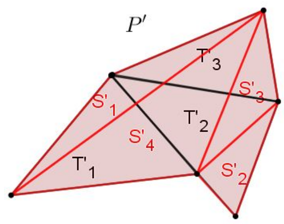
gdje je $S_j' \cong S_j''$ za svaki j. Trebamo pokazati $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}''$. Zapisat ćemo rastave od $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}''$ tako da ih prikažemo kao uniju sukladnih trokuta.

Za svaki i, j promatramo skupove T_i' i S_j'. Ako se oni preklapaju tada je prema lemi 1.13 njihov presjek poligon. To znači da postoje nepreklapajući trokuti U' tako da vrijedi:

$$T_i' \cap S_j' = \bigcup_k U_{ijk}'.$$



Slika 2.4: Poligoni $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$



Slika 2.5: Poligon $\mathcal{P}'$

Neka je φ_i izometrija koja trokut T_i preslikava u njemu sukladan trokut T_i'. Tada s φ_i^{-1} preslikajmo trokute U'_{ijk} u nove trokute $U_{ijk} = \varphi_i^{-1}(U'_{ijk})$ sadržane u T_i. Vrijedi

$$T_i = \varphi_i^{-1}\big(T_i'\big) = \varphi_i^{-1}\left(\bigcup_{jk} U'_{ijk}\right) = \bigcup_{jk} \varphi_i^{-1}\big(U'_{ijk}\big) = \bigcup_{jk} U_{ijk}$$

i $U_{ijk} \cong U'_{ijk}$ za svaki i, j, k.
Analogno, za svaki j neka je ψ_j izometrija koja S'_j preslikava u njemu sukladan trokut S''_j. Neka je $U''_{ijk} = \psi_j(U'_{ijk})$. Tada vrijedi

$$S''_j = \psi_j\big(S'_j\big) = \psi_j\left(\bigcup_{ik} U'_{ijk}\right) = \bigcup_{ik} \psi_j\big(U'_{ijk}\big) = \bigcup_{ik} U''_{ijk}$$

i $U''_{ijk} \cong U'_{ijk}$ za svaki i, j, k.
Lako je provjeriti da se trokuti U_{ijk} međusobno ne preklapaju za sve i, j, k. To vrijedi budući da smo ih dobili izometrijama koje preslikavaju nepreklapajuće trokute U'_{ijk}. Iz

istog razloga, niti trokuti U''_{ijk} za sve i, j, k se ne preklapaju. Možemo napisati

$$\mathcal{P} = \bigcup_i T_i = \bigcup_{ijk} U_{ijk},$$

$$\mathcal{P}'' = \bigcup_j S''_j = \bigcup_{ijk} U''_{ijk},$$

pri čemu za svaki i, j, k vrijedi $U_{ijk} \cong U''_{ijk}$ jer $U_{ijk} \cong U'_{ijk}$ i $U'_{ijk} \cong U''_{ijk}$, a relacija sukladnost trokuta je relacija ekvivalencije. Iz toga slijedi $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}''$. Relacija $\equiv$ je tranzitivna.
Pokazavši refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost dokazali smo da je relacija $\equiv$ relacija ekvivalencije. □

Propozicija 2.5. *Unije nepreklapajućih jednakosastavljivih poligona su jednakosastavljive.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ dva nepreklapajuća poligona i $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{Q}'$ njima jednakosastavljivi poligoni, tj. $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$ i $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}'$ pri čemu su $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{Q}'$ nepreklapajući. Za svaki i postoje trokuti $P_i \cong P'_i$ takvi da je

$$\mathcal{P} = \bigcup_i P_i,$$

$$\mathcal{P}' = \bigcup_i P'_i$$

te za svaki j postoje trokuti $Q_j \cong Q'_j$ takvi da je

$$\mathcal{Q} = \bigcup_j Q_j,$$

$$\mathcal{Q}' = \bigcup_j Q'_j.$$

Dokažimo $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}'$. Prema propoziciji 1.18 te unije su poligoni i možemo ih zapisati na sljedeći način:

$$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \left(\bigcup_i P_i\right) \cup \left(\bigcup_j Q_j\right),$$

$$\mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}' = \left(\bigcup_i P'_i\right) \cup \left(\bigcup_j Q'_j\right).$$

Budući da se $\mathcal{P}$ ne preklapa s $\mathcal{Q}$ niti se $\mathcal{P}'$ preklapa s $\mathcal{Q}'$ i jer vrijedi $P_i \cong P'_i$ za svaki i i $Q_j \cong Q'_j$ za svaki j te su unije sastavljene od nepreklapajućih sukladnih trokuta pa prema definiciji 2.1 vrijedi

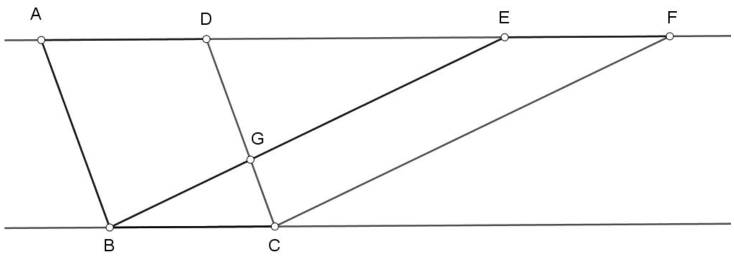
$$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}'$$

što smo i trebali dokazati. □

Dokažimo propoziciju I35 iz Euklidovih *Elemenata* pomoću jednakosastavljivosti.

Primjer 3. *Paralelogrami sa zajedničkom osnovicom koji leže na paralelnim pravcima međusobno su jednaki.*

Želimo pokazati "jednakost" dvaju paralelograma pa ćemo se poslužiti pojmom jednakosastavljivosti poligona. Neka su $ABCD$ i $EBCF$ paralelogrami s zajedničkom osnovicom $\overline{BC}$ takvi da su AD i EF na istom pravcu. Treba dokazati da su paralelogrami $ABCD$ i $EBCF$ jednakosastavljivi, odnosno, da se ti paralelogrami mogu prikazati kao unije nepreklapajućih trokuta gdje su odgovarajući trokuti sukladni.

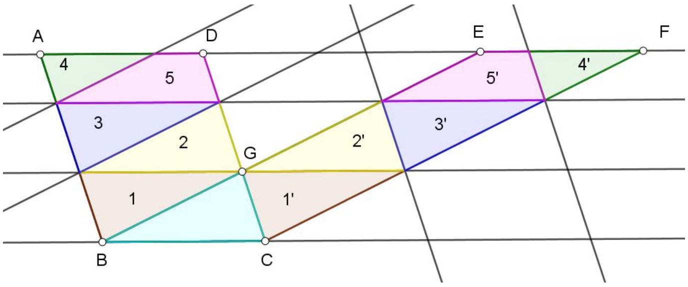


Slika 2.6: Paralelogrami

Budući da su $ABCD$ i $EBCF$ paralelogrami vrijedi $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ i $\overline{EF} \cong \overline{BC}$ pa je onda i $\overline{AD} \cong \overline{EF}$. Neka je G sjecište dužina $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$.

Može se odmah uočiti da trokut $\triangle GBC$ leži u oba paralelograma i jednakosastavljiv je sa samim sobom. Dalje, kroz točku G povučemo paralelu s osnovicama (BC i AD). Na slici 2.7 možemo vidjeti dva trokuta označena s 1 i 1' koji su sukladni (sve stranice su im paralelne). Dalje povlačimo paralele sa stranicama ovih paralelograma kao na slici. U jednom trenutku ćemo doći do četverokuta (na slici označen brojevima 5 i 5').

Tom četverokutu možemo nacrtati dijagonalu no nije odmah jasno da su dobiveni trokuti sukladni. Da bismo pokazali da su ovi paralelogrami "jednaki" odnosno, jednakosastavljivi, bit će nam korisna jedna druga relacija.



Slika 2.7: Paralelogrami

2.2 Poligoni jednakog sadržaja

Hilbert, u svom već ranije spomenutom djelu [9], kaže da dva poligona imaju jednak sadržaj kada je moguće, dodavanjem drugih jednakosastavljih poligona dobiti dva nova jednakosastavljiva poligona. Također kaže: "Iz definicija jednakosastavljivosti i jednakog sadržaja slijedi da kombiniranjem (dodavanjem) jednakosastavljivih poligona kao rezultat dobijemo jednakosastavljive poligone. No, ako od jednakosastavljivih poligona *uzmemo* jednakosastavljive poligone tada imamo poligone jednakog sadržaja."

Definirajmo poligone jednakog sadržaja.

Definicija 2.6. *Dva poligona $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ imaju* ***jednak sadržaj*** *ako postoje poligoni Q, Q' takvi da vrijedi:*

(i) $\mathcal{P}$ i Q se ne preklapaju,

(ii) $\mathcal{P}'$ i Q' se ne preklapaju,

(iii) $Q \equiv Q'$,

(iv) $\mathcal{P} \cup Q \equiv \mathcal{P}' \cup Q'$.

Za poligone koji imaju jednak sadržaj pišemo $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$.

Iz ove definicije je očito da jednakosastavljivi poligoni imaju jednak sadržaj. Također, sukladni trokuti imaju jednak sadržaj, kao i sukladni poligoni. Sada možemo dokazati propoziciju I35 iz Euklidovih *Elemenata* pomoću jednakog sadržaja poligona:

Propozicija 2.7 (EE I35)**.** *Paralelogrami sa zajedničkom osnovicom čije nasuprotne stranice leže na istom pravcu paralelnom osnovici su jednakog sadržaja.*

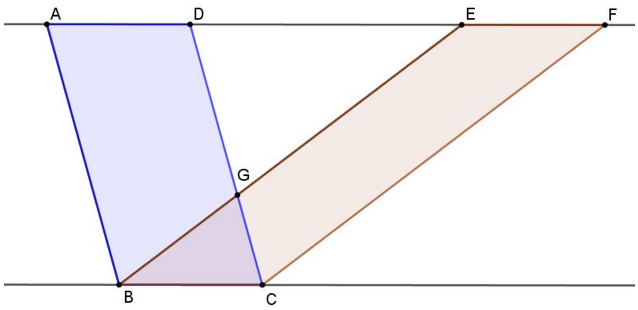
Dokaz. Neka su $ABCD$ i $BCFE$ paralelogrami s zajedničkom osnovicom $\overline{BC}$ i stranice nasuprot osnovice im leže na istom pravcu paralelnom osnovici $\overline{CD}$ (kao na slici 2.8).

Sjecište dužina $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$ označimo s G. Uzmimo da je $\mathcal{P} = ABCD$ i $\mathcal{P}' = BCFE$. Izaberimo $Q = Q' = \triangle DGE$.
Pokažimo da su trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle DCF$ sukladni. Vrijedi $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ i $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ pa iz tog slijedi $\overline{AD} \cong \overline{EF}$ zbog tranzitivnosti relacije $\cong$. Tvrdimo $\overline{AE} \cong \overline{DF}$. Vidimo da vrijedi:

$$\overline{AE} = \overline{AD} \cup \overline{DE}$$

$$\overline{DF} = \overline{EF} \cup \overline{DE}.$$

Budući da su $\overline{AD} \cong \overline{EF}$ možemo zaključiti $\overline{AE} \cong \overline{DF}$. Imamo $\angle BAE \cong \angle CDF$ jer su kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca AB i CD. Analogno vrijedi $\angle AEB \cong \angle DFC$. Prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.



Slika 2.8: Paralelogrami

Promotrimo sada unije $\mathcal{P} \cup Q$ i $\mathcal{P}' \cup Q'$. Vrijedi

$$\mathcal{P} \cup Q = ABCD \cup DGE = ABCGE = ABE \cup BCG,$$

$$\mathcal{P}' \cup Q' = BCFE \cup DGE = BCFDG = DCF \cup BCG.$$

Poligoni $\mathcal{P} \cup Q$ i $\mathcal{P}' \cup Q'$ su jednakosastavljivi jer je $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ i $\triangle BCG \cong \triangle BCG$. Po definiciji 2.6 paralelogrami $ABCD$ i $BCFE$ imaju jednak sadržaj, tj. $ABCD \doteq CDEF$. $\square$

U nastavku ćemo dokazati neka svojstva relacije $\doteq$. Za to će nam biti potrebna sljedeća lema.

Lema 2.8. *Neka je $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$ i $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ pri čemu se poligoni $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ ne preklapaju. Tada postoje nepreklapajući poligoni $\mathcal{P}'_1$ i $\mathcal{P}'_2$ takvi da je $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \cup \mathcal{P}'_2$ i vrijedi $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}'_1$ i $\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}'_2$.*

Dokaz. Neka vrijedi:

$$\mathcal{P} = T_1 \cup \cdots \cup T_n$$

$$\mathcal{P}' = T'_1 \cup \cdots \cup T'_n$$

pri čemu su $T_i \cong T'_i$ za svaki i te $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ i poligoni $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ se ne preklapaju. Promatramo presjeke $T_i \cap \mathcal{P}_1$ i $T_i \cap \mathcal{P}_2$ za svaki i. Zanimaju nas samo presjeci skupova koji se preklapaju. Prema propoziciji 1.14 imamo:

$$T_i \cap \mathcal{P}_1 = \bigcup_j S_{ij1}$$

pri čemu su S_{ij1} međusobno nepreklapajući trokuti te

$$T_i \cap \mathcal{P}_2 = \bigcup_j S_{ij2}$$

gdje su S_{ij2} međusobno nepreklapajući trokuti. Zbog nepreklapanja poligona $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ trokuti S_{ijk} za sve i, sve j i $k = 1, 2$ su nepreklapajući - svaka dva od njih. Vrijedi:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1 = \Big(\bigcup_i T_i\Big) \cap \mathcal{P}_1 = \bigcup_i \Big(T_i \cap P_1\Big) = \bigcup_{ij} S_{ij1},$$

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_2 = \Big(\bigcup_i T_i\Big) \cap \mathcal{P}_2 = \bigcup_i \Big(T_i \cap P_2\Big) = \bigcup_{ij} S_{ij2}$$

pri čemu su S_{ij1} međusobno nepreklapajući te S_{ij2} međusobno nepreklapajući. Naravno, kako se poligoni $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ ne preklapaju niti trokuti S_{ij1} i S_{mn2} se ne preklapaju. Ovo znači da je $\bigcup_{ijk} S_{ijk}$ rastav skupa $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ na nepreklapajuće trokute.
Neka su za svaki i φ_i izometrije takve da je $\varphi_i(T_i) = T'_i$. Koristimo izometrije φ_i i definiramo

$$S'_{ijk} = \varphi_i(S_{ijk})$$

za svaki i, svaki j te za $k = 1, 2$. Unija ovih skupova, $\bigcup_{ijk} S'_{ijk}$ je rastav skupa $\mathcal{P}'$ na nepreklapajuće trokute. Definiramo

$$\mathcal{P}'_1 = \bigcup_i \varphi_i\Big(\bigcup_j S_{ij1}\Big) = \bigcup_{ij} \varphi_i(S_{ij1}) = \bigcup_{ij} S'_{ij1},$$

$$\mathcal{P}_2' = \bigcup_i \varphi_i\Big(\bigcup_j S_{ij2}\Big) = \bigcup_{ij} \varphi_i(S_{ij2}) = \bigcup_{ij} S'_{ij2}.$$

Vrijedi da su poligoni $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_1'$ jednakosastavljivi, odnosno $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_1'$ jer se sastoje od sukladnih trokuta, a to isto vrijedi i za poligone $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_2'$, odnosno $\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_2'$. Jasno je da se $\mathcal{P}_1'$ i $\mathcal{P}_2'$ ne preklapaju i da je njihova unija $\mathcal{P}'$. Ovime je lema dokazana. □

Propozicija 2.9. *Relacija jednak sadržaj je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Jednak sadržaj je očito refleksivna i simetrična relacija. Još trebamo pokazati tranzitivnost. Neka je $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}' \doteq \mathcal{P}''$. Želimo pokazati $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}''$.
Postoje poligoni $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}'$ takvi da je $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}'$ i $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}'$. Također postoje poligoni $\mathcal{R}'$ i $\mathcal{R}''$ takvi da je $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}''$ i $\mathcal{P}' \cup \mathcal{R}' \equiv \mathcal{P}'' \cup \mathcal{R}''$.
Vrijedi: $\mathcal{P}$ se ne preklapa s $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}'$ se ne preklapa s $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{P}'$ se ne preklapa s $\mathcal{R}'$, $\mathcal{P}''$ se ne preklapa s $\mathcal{R}''$, no za $\mathcal{Q}'$ i $\mathcal{R}'$ ne možemo biti sigurni da se ne preklapaju.
Neka je $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$ takav da vrijedi: $\mathcal{R}$ se ne preklapa s $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{Q}$ niti s $\mathcal{Q}'$, a iz toga slijedi da se ne preklapa niti s unijama ovih skupova.
Neka je $\mathcal{Q}'' \cong \mathcal{Q}'$ takav da vrijedi: $\mathcal{Q}''$ se ne preklapa s $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$, $\mathcal{R}'$ niti s $\mathcal{R}''$. Iz ovoga slijedi da se $\mathcal{Q}''$ ne preklapa niti s unijama ovih skupova.

Da bi vrijedilo $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}''$ trebamo dokazati:

(a) $\mathcal{P}$ se ne preklapa s $\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$

(b) $\mathcal{P}''$ se ne preklapa s $\mathcal{Q}'' \cup \mathcal{R}''$

(c) $\mathcal{Q} \cup \mathcal{R} \equiv \mathcal{Q}'' \cup \mathcal{R}''$

(d) $\mathcal{P} \cup \big(\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}\big) \equiv \mathcal{P}'' \cup \big(\mathcal{Q}'' \cup \mathcal{R}''\big)$.

Dokažimo ove tvrdnje.

(a) Vrijedi da se $\mathcal{P}$ ne preklapa s $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{P}$ se ne preklapa s $\mathcal{R}$ jer smo ga tako odabrali. Stoga se niti $\mathcal{P}$ ne preklapa s $\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}$.

(b) Vrijedi da se $\mathcal{P}''$ ne preklapa s $\mathcal{Q}''$ jer smo ga tako odabrali niti se $\mathcal{P}''$ preklapa s $\mathcal{R}''$. Stoga se niti $\mathcal{P}''$ ne preklapa s $\mathcal{Q}'' \cup \mathcal{R}''$.

(c) Iz $\mathcal{Q}' \cong \mathcal{Q}''$ slijedi $\mathcal{Q}' \equiv \mathcal{Q}''$. Već otprije imamo $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}'$ pa zbog tranzitivnosti relacije jednakosastavljivosti vrijedi $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}' \equiv \mathcal{Q}''$. Također, iz $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$ slijedi $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$, a već otprije znamo $\mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}''$ pa vrijedi $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}' \equiv \mathcal{R}''$. Također imamo da se $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{R}$ ne preklapaju te da se $\mathcal{Q}''$ i $\mathcal{R}''$ ne preklapaju. Budući da se radi o unijama nepreklapajućih poligona koristimo propoziciju 2.5 iz čega slijedi $\mathcal{Q} \cup \mathcal{R} \equiv \mathcal{Q}'' \cup \mathcal{R}''$.

(d) Zbog $\mathcal{P} \cup Q \equiv \mathcal{P}' \cup Q'$ i kako smo odabrali $\mathcal{R}$ tako da se ne preklapa s $\mathcal{P} \cup Q$ niti s $\mathcal{P}' \cup Q'$ vrijedi:

$$\mathcal{P} \cup Q \cup \mathcal{R} = \left(\mathcal{P} \cup Q\right) \cup \mathcal{R} \equiv \left(\mathcal{P}' \cup Q'\right) \cup \mathcal{R} = \mathcal{P}' \cup \left(Q' \cup \mathcal{R}\right). \tag{2.1}$$

Primijetimo da se $\mathcal{P}'$ ne preklapa s $Q' \cup \mathcal{R}$ jer se $\mathcal{P}'$ ne preklapa s Q' i $\mathcal{R}$ smo odabrali tako da se ne preklapa s $\mathcal{P}'$. Također zbog činjenice da je $\mathcal{P}'' \cup \mathcal{R}'' \equiv \mathcal{P}' \cup \mathcal{R}'$ i kako smo odabrali Q'' tako da se ne preklapa s $\mathcal{P}'' \cup \mathcal{R}''$ niti s $\mathcal{P}' \cup \mathcal{R}'$ vrijedi:

$$\mathcal{P}'' \cup \mathcal{R}'' \cup Q'' = \left(\mathcal{P}'' \cup \mathcal{R}''\right) \cup Q'' \equiv \left(\mathcal{P}' \cup \mathcal{R}'\right) \cup Q'' = \mathcal{P}' \cup \left(\mathcal{R}' \cup Q''\right). \tag{2.2}$$

Uočimo da se $\mathcal{P}'$ ne preklapa s $\mathcal{R}' \cup Q''$ jer se $\mathcal{P}'$ ne preklapa s $\mathcal{R}'$ i Q'' smo birali tako da se ne preklapa s $\mathcal{P}'$.
Znamo $\mathcal{R}' \cong \mathcal{R}$ i $Q'' \cong Q'$ pa je $Q' \cup \mathcal{R} \equiv Q'' \cup \mathcal{R}'$ jer se Q' ne preklapa s $\mathcal{R}$ i Q'' se ne preklapa s $\mathcal{R}'$. Uočimo još da se $\mathcal{P}'$ ne preklapa s $Q' \cup \mathcal{R}$ niti s $Q'' \cup \mathcal{R}'$ pa vrijedi:

$$\mathcal{P}' \cup \left(Q' \cup \mathcal{R}\right) \equiv \mathcal{P}' \cup \left(Q'' \cup \mathcal{R}'\right). \tag{2.3}$$

Iz (2.1), (2.2) i (2.3) imamo:

$$\mathcal{P} \cup Q \cup \mathcal{R} \equiv \mathcal{P}' \cup \left(Q' \cup \mathcal{R}\right) \equiv \mathcal{P}' \cup \left(Q'' \cup \mathcal{R}'\right) = \mathcal{P}' \cup \left(\mathcal{R}' \cup Q''\right) \equiv \mathcal{P}'' \cup \mathcal{R}'' \cup Q''.$$

Time je dokazano (d).
Prema definiciji 2.6 vrijedi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}''$ pa je relacija $\doteq$ relacija ekvivalencije. □

Sljedeće dvije propozicije navodimo bez dokaza, a u dokazu se koristi lema 2.8.

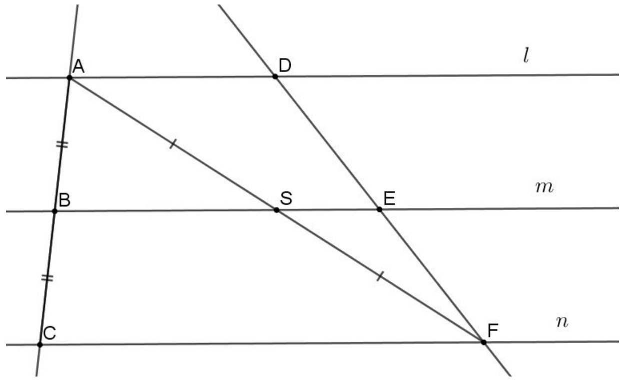
Propozicija 2.10. *Unije nepreklapajućih poligona jednakog sadržaja imaju jednak sadržaj.*

Propozicija 2.11. *Ako je $Q \subseteq \mathcal{P}$ i $Q' \subseteq \mathcal{P}'$, i ako Q i Q' imaju jednak sadržaj, i $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ imaju jednak sadržaj tada $\mathcal{P} \setminus Q$ i $\mathcal{P}' \setminus Q'$ imaju jednak sadržaj.*

U nastavku ćemo konačno dovesti sve ovo u vezu s (euklidovom) površinom.

Lema 2.12. *Neka su zadana tri paralelna pravca. Pretpostavimo da odsijecaju sukladne dužine $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ na transverzali. Tada za dužine $\overline{DE}$ i $\overline{EF}$ na drugoj transverzali tih pravaca vrijedi $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.*

Dokaz. Zadani su pravci l, m i n kao na slici 2.9 te dvije transverzale koje se s pravcima l, m i n sijeku u točkama A, B, C, D, E i F.
Spojimo točke A i F. Gledamo trokut $\triangle ACF$. Označimo sjecište pravaca AF i m sa S. Tada je dužina $\overline{BS}$ srednjica trokuta $\triangle ACF$ jer je točka B polovište stranice $\overline{AC}$ i jer je BS paralelan s pravcem n, odnosno s pravcem CF. Iz toga slijedi da je točka S polovište



Slika 2.9: Transverzale uz pravce l, m, n

stranice $\overline{AF}$.
Sada gledamo trokut $\triangle AFD$. Dužina $\overline{SE}$ je srednjica trokuta $\triangle AFD$ jer je točka S polovište stranice $\overline{AF}$ i jer je pravac SE paralelan s pravcem l, odnosno s pravcem AD, pa slijedi da je točka E polovište stranice $\overline{FD}$. Iz toga slijedi $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. □

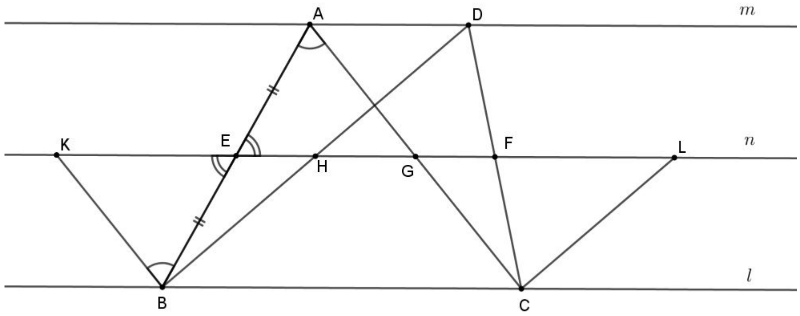
Propozicija 2.13 (EE I37)**.** *U euklidskoj ravnini, trokuti sa zajedničkom osnovicom čiji su gornji vrhovi na istom pravcu paralelnom osnovici imaju jednak sadržaj.*

Dokaz. Neka su zadani trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$. Neka je $l = BC$ i neka je $m = AD$ te neka su l i m paralelni pravci. Neka je točka E polovište dužine $\overline{AB}$. Pravac n prolazi kroz E i paralelan je s l, te siječe dužinu $\overline{DC}$ u točki F. Tada iz leme 2.12 slijedi da je točka F polovište dužine $\overline{DC}$ i vrijedi $\overline{DF} \cong \overline{FC}$. Označimo s G sjecište dužine $\overline{AC}$ s pravcem n, a s H sjecište dužine $\overline{BD}$ s pravcem n. Neka pravac paralelan s AC kroz točku B siječe pravac n u točki K. Također, neka pravac paralelan s BD koji prolazi kroz točku C siječe pravac n u točki L.
Pokažimo $\triangle AEG \cong \triangle BEK$. Vrijedi $\angle AEG = \angle BEK$ jer su vršni kutovi. Također vrijedi $\angle GAE = \angle KBE$ jer su kutovi uz transverzalu AE parlalenih pravaca AG i KB. I budući da je točka E polovište dužine $\overline{AB}$ vrijedi $\overline{AE} \cong \overline{EB}$. Po K-S-K poučku o sukladnosti trokuta imamo $\triangle AEG \cong \triangle BEK$.
Promotrimo trokut $\triangle ABC$ i paralelogram $BCGK$. Vrijedi:

$$ABC = AEG \cup BCGE$$

i

$$BCGK = BCGE \cup BEK.$$



Slika 2.10: Paralelogrami

Četverokut $BCGE$ možemo rastaviti na dva trokuta. Sada imamo:

$$ABC = AEG \cup BCG \cup BGE$$

i

$$BCGK = BCG \cup BGE \cup BEK$$

gdje su $\triangle AEG \cong \triangle BEK$ te $\triangle BCG \cong \triangle BCG$ i $\triangle BGE \cong \triangle BGE$ pa su ABC i $BCGK$ jednakosastavljivi po definiciji 2.1 i stoga imaju i jednak sadržaj.
Analogno prethodnom, $\triangle DHF \cong \triangle CLF$ pa $\triangle BCD$ ima jednak sadržaj kao paralelogram $BCLH$. Prema propoziciji 2.7 paralelogrami $BCGK$ i $BCLH$ imaju jednak sadržaj. Zbog tranzitivnosti relacije $\doteq$ iz propozicije 2.9 slijedi:

$$ABC \doteq BCGK \doteq BCLH \doteq BCD.$$

Dakle, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ imaju jednak sadržaj. □

Pokazali smo da dva trokuta sa zajedničkom osnovicom koji imaju istu visinu uvijek imaju jednak sadržaj. Štoviše, vrijedi da svi jednakosastavljivi poligoni imaju jednak sadržaj. Zanima nas vrijedi li i obrnuta tvrdnja, odnosno, hoće li dva trokuta (poligona) jednakog sadržaja uvijek biti jednakosastavljiva?

U idućem poglavlju ćemo vidjeti da je odgovor na ovo pitanje potvrdan, odnosno, da su relacije jednak sadržaj poligona i jednakosastavljivost poligona ekvivalentne relacije. Sljedeći aksiom će biti posljedica postojanja funkcije površine, a zasad ćemo ga zapisati u sljedećem obliku gdje ćemo ga koristiti pri dokazu nekih tvrdnji.

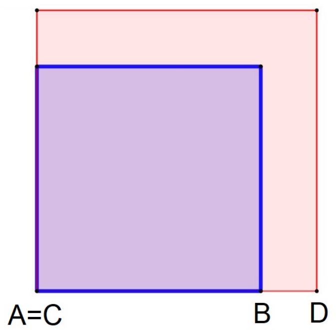
Propozicija 2.14 (de Zoltov aksiom)**.** *Ako je $\mathcal{Q}$ poligon sadržan unutar drugog poligona $\mathcal{P}$ i ako $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ nije prazan tada $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ nemaju jednak sadržaj.*

De Zoltov aksiom će biti posljedica postojanja funkcije površine tako da ćemo ga dokazati u sljedećem poglavlju. On može zamijeniti Euklidov peti aksiom koji kaže ”Cjelina je veća od dijela.” za pojam sadržaja. Ipak, za poligone izbjegavamo koristiti riječ veće ili manje jer one impliciraju da postoji nekakav uređaj između poligona, koji još nismo utemeljili. Svi rezultati u kojima Euklid pokazuje da su dva poligona jednaka će vrijediti za jednak sadržaj. No, kada jednak sadržaj koristimo kako bi zaključili o sukladnosti dužina ili kutova u nekom poligonu tada će nam trebati de Zoltov aksiom.

Uz pomoć de Zoltova aksioma možemo dokazati sljedeće:

Korolar 2.15. *Neka su dane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ takve da kvadrati nad $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ imaju jednak sadržaj. Tada su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sukladne.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ i da kvadrati nad $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ imaju jednak sadržaj. Označimo s $\mathcal{P}$ kvadrat nad stranicom $\overline{CD}$ i s Q kvadrat nad stranicom $\overline{AB}$ pri čemu je $Q \subseteq \mathcal{P}$. Jer je $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ tada te kvadrate možemo nacrtati ”jedan preko drugoga” pa će se veći kvadrat $\mathcal{P}$ sastojati od manjeg kvadrata Q i šesterokuta $\mathcal{P} \setminus Q$. Taj šesterokut nije prazan, odnosno, ima unutarnje točke, pa prema de Zoltovu aksiomu 2.14 $\mathcal{P}$ i Q nemaju jednak sadržaj. Došli smo do kontradikcije.



Slika 2.11: Kvadrati nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$

Dakle, kvadrati nad sukladnim dužinama imaju jednak sadržaj. □

Propozicija 2.16 (EE I39)**.** *Ako dva trokuta imaju jednak sadržaj i sukladne osnovice tada imaju jednake visine.*

Euklid je dokazao ovu propoziciju, no koristio je postupke koji nalikuju na uvođenje novih aksioma vezanih uz površinu. Dokaz ćemo ostaviti za iduće poglavlje, kada ćemo imati dobro definiranu funkciju kojom računamo površinu.

Poglavlje 3

Površina

U ovom poglavlju ćemo povezati rezultate iz prethodnog poglavlja sa pojmom površine kojeg znamo danas - kao broja. Definirajmo funkciju:

Definicija 3.1. *Neka je $\mathbb{P}$ skup svih poligona u ravnini.* ***Funkcija površine*** *α na skupu $\mathbb{P}$ je funkcija $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ s ovim svojstvima:*

(P1) $\alpha(T) > 0$, za svaki trokut $T \in \mathbb{P}$,

(P2) Ako je $T \cong T'$, onda je $\alpha(T) = \alpha(T')$, za sve trokute $T, T' \in \mathbb{P}$,

(P3) Ako se dva poligona $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ ne preklapaju tada vrijedi

$$\alpha(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \alpha(\mathcal{P}) + \alpha(\mathcal{Q}).$$

Broj $\alpha(P)$ nazivamo površina poligona $\mathcal{P}$.

Propozicija 3.2. *Neka je α funkcija površine.*

(a) Ako je $\mathcal{P}$ poligon tada vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) > 0$.

(b) Ako $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$ tada vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{P}')$.

(c) Ako $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$ tada vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{P}')$.

(d) Ako je $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ i $P \setminus Q \neq \emptyset$ tada vrijedi $\alpha(\mathcal{Q}) < \alpha(\mathcal{P})$.

Dokaz. (a) Poligon $\mathcal{P} = T_1 \cup ... \cup T_n$ je unija nepreklapajućih trokuta T_i. Iz definicije 3.1 slijedi

$$\alpha(\mathcal{P}) = \sum \alpha(T_i),$$

a za svaki T_i vrijedi $\alpha(T_i) > 0$ pa stoga imamo $\alpha(\mathcal{P}) > 0$.

(b) Kako su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ jednakosastavljivi poligoni možemo ih rastaviti na trokute

$$\mathcal{P} = T_1 \cup \cdots \cup T_n$$

i

$$\mathcal{P}' = T_1' \cup \cdots \cup T_n'$$

pri čemu je $T_i \cong T_i'$ za svaki i. Iz svojstva (P2) definicije 3.1 slijedi

$$\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T_i') = \alpha(\mathcal{P}').$$

Ovime je tvrdnja dokazana.

(c) Ako poligoni $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ imaju jednak sadržaj prema definiciji 2.6 postoje neki poligoni $Q \equiv Q'$ takvi da se $\mathcal{P}$ ne preklapa s Q i $\mathcal{P}'$ se ne preklapa s Q' te su $\mathcal{P} \cup Q \equiv \mathcal{P}' \cup Q'$. Iz (b) dijela ove propozicije slijedi $\alpha(Q) = \alpha(Q')$ i

$$\alpha(\mathcal{P} \cup Q) = \alpha(\mathcal{P}' \cup Q'). \tag{3.1}$$

Iz svojstva (P3) definicije 3.1 imamo:

$$\alpha(\mathcal{P} \cup Q) = \alpha(\mathcal{P}) + \alpha(Q),$$

$$\alpha(\mathcal{P}' \cup Q') = \alpha(\mathcal{P}') + \alpha(Q').$$

Zbog (3.1) imamo

$$\alpha(\mathcal{P}) + \alpha(Q) = \alpha(\mathcal{P}') + \alpha(Q').$$

Budući da vrijedi i $\alpha(Q) = \alpha(Q')$ oduzimanjem iz ovoga dobivamo $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{P}')$.

(d) Vrijedi $\mathcal{P} = Q \cup (\mathcal{P} \setminus Q)$. Prema propoziciji 1.17 $\mathcal{P} \setminus Q$ je poligon. Budući da je $\mathcal{P} \setminus Q$ neprazan prema (a) dijelu vrijedi $\alpha(\mathcal{P} \setminus Q) > 0$. Iz (P3) definicije 3.1 slijedi

$$\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(Q) + \alpha(\mathcal{P} \setminus Q)$$

te lako vidimo da vrijedi $\alpha(Q) < \alpha(\mathcal{P})$. □

Iz (c) i (d) slijedi de Zoltov aksiom.

Sada kada smo definirali funkciju površine i kada smo vidjeli neka njena svojstva želimo dokazati da takva funkcija postoji.

Teorem 3.3. *Postoji jedinstvena funkcija površine $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ koja uz uvjete (P1) - (P3) iz definicije 3.1 zadovoljava i dodatni uvjet: Neka je $\triangle ABC$ trokut sa osnovicom $\overline{BC}$ duljine a. Neka je v duljina visine na tu osnovicu. Tada vrijedi*

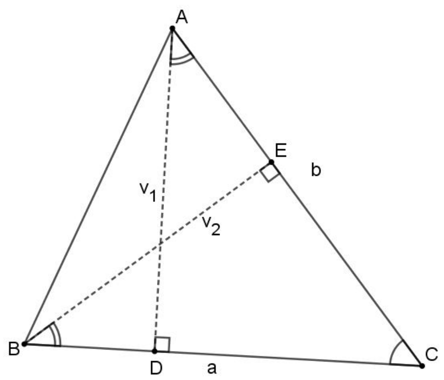
$$\alpha(ABC) = \frac{1}{2}av.$$

Dokaz. Želimo pokazati da je funkcija α dobro definirana: trebamo pokazati da je α nekog trokuta neovisna o izabranoj osnovici i tada trebamo pokazati da je $\alpha(\mathcal{P})$ neovisna o izabranoj triangulaciji te da je jedinstvena. Nakon toga trebamo provjeriti da α zadovoljava svojstva funkcije površine iz definicije 3.1. Ove tvrdnje ćemo provjeriti kao zasebne leme.

Lema 3.4. *Neka je zadan trokut $\triangle ABC$. Neka je a jedna osnovica i njoj pripadna visina v_1, a b druga osnovica i njoj pripadna visina v_2. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{2}av_1 = \frac{1}{2}bv_2.$$

Dokaz. Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ i $a = |BC|$, $v_1 = |AD|$, $b = |AC|$ i $v_2 = |BE|$ kao na slici 3.1. Pravokutni trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BEC$ imaju zajednički kut pri vrhu C. Budući da se radi o pravokutnim trokutima tada su im i preostali kutovi sukladni, odnosno vrijedi $\angle CAD \cong \angle CBE$. Prema K-K teoremu o sličnosti trokuta trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BEC$ su slični.



Slika 3.1: Trokut *ABC*

Iz toga slijedi da su omjeri odgovarajućih stranica jednaki pa imamo

$$\frac{v_1}{b} = \frac{v_2}{a}.$$

Unakrsnim množenjem dobivamo $av_1 = bv_2$ iz čega slijedi $\frac{1}{2}av_1 = \frac{1}{2}bv_2$ čime je tvrdnja dokazana. □

Poligon $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ možemo prikazati kao uniju trokuta $\mathcal{P} = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ i za svaki od trokuta možemo izabrati jednu stranicu koja će biti osnovica a_i, a v_i njoj odgovarajuća visina. Definiramo

$$\alpha(\mathcal{P}) = \sum \frac{1}{2}a_i v_i.$$

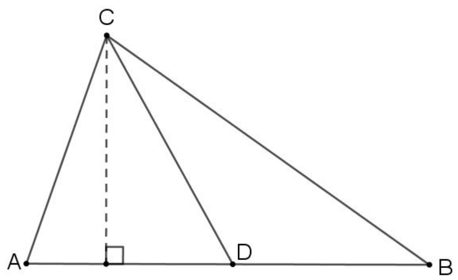
Pokazali smo da je umnožak duljine osnovice i odgovarajuće visine isti bez obzira koju stranicu izabrali za osnovicu. Polovina umnoška osnovice i visine trokuta T nazivamo površina trokuta T i označavamo $\alpha(T)$. Ta je funkcija dobro definirana za trokut. Još trebamo vidjeti što se događa kad trokut podijelimo na manje dijelove.

Lema 3.5. *Ako je neki trokut T rastavljen na konačan broj nepreklapajućih trokuta T_i na bilo koji način, tada je površina trokuta T jednaka sumi površina trokuta T_i, odnosno*

$$T = \bigcup_i T_i \implies \alpha(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T_i).$$

Dokaz. Ovaj dokaz ćemo provesti postupno u tri koraka. Najprije ćemo gledati što se događa ako neki trokut podijelimo na dva manja. Nakon toga ćemo pokazati što se događa ako zadani trokut podijelimo na manje trokute.

1° slučaj. Promatramo trokut $\triangle ABC$ koji je podijeljen dužinom $\overline{CD}$, pri čemu je točka D na stranici $\overline{AB}$, na dva nova manja trokuta.

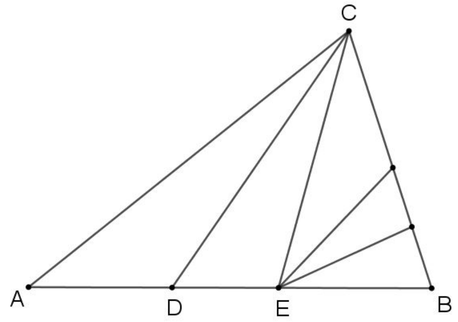


Slika 3.2: Trokut je podijeljen na dva manja trokuta

Neka je stranica $\overline{AB}$ osnovica danog trokuta, a stranice $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ osnovice dvaju manjih trokuta. Sva tri trokuta imaju istu visinu i ako dodamo osnovice $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ jednu drugoj dobit ćemo stranicu $\overline{AB}$ pa iz toga slijedi

$$\alpha(ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}(|AD| + |DB|) \cdot v = \frac{1}{2}|AD| \cdot v + \frac{1}{2}|DB| \cdot v = \alpha(ACD) + \alpha(BCD). \quad (3.2)$$

2° slučaj. Neka je trokut $\triangle ABC$ podijeljen na trokute T_i tako da ne postoje novi vrhovi u unutrašnjosti trokuta ABC i jedna stranica (na slici 3.3 je to stranica $\overline{AC}$) nema novih



Slika 3.3: Podjela trokuta na više manjih trokuta bez vrhova u unutrašnjosti

vrhova. Označimo ovaj uvjet zvjezdicom (*). Želimo pokazati $\alpha(ABC) = \sum_i \alpha(T_i)$.

Koristeći matematičku indukciju po broju manjih trokuta T_i imamo:

1° *Baza indukcije.* Za $i = 2$, odnosno ako smo trokut rastavili na dva manja trokuta smo pokazali u 1° slučaju ovog dokaza.

2° *Pretpostavka indukcije.* Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki rastav bilo kojeg trokuta na n manjih trokuta tako da je ispunjen uvjet (*).

3° *Korak indukcije.* Dokažimo da tvrdnja vrijedi i u slučaju rastava na $n + 1$ trokuta. Neka je trokut ABC podijeljen na trokute $T_1, T_2, ..., T_{n+1}$. Kako po pretpostavci na jednoj stranici, u našem primjeru $\overline{AC}$, nema novih vrhova, ta stranica mora biti i stranica jednog od manjih trokuta, primjerice trokuta T_1. Treći vrh D trokuta T_1 tada leži na stranici $\overline{AB}$ ili $\overline{BC}$ (bez smanjenja općenitosti uzmimo neka leži na stranici $\overline{AB}$). Prema (3.2) vrijedi

$$\alpha(ABC) = \alpha(T_1) + \alpha(BCD). \tag{3.3}$$

Trokut $\triangle BCD$ zadovoljava uvjet da nema unutarnjih vrhova jer ih niti trokut $\triangle ABC$ nema i na njegovoj stranici $\overline{CD}$ koja je u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$ ne leže nikakvi vrhovi. Na trokut BCD koji je podijeljen na trokute T_2, T_3, ... , T_{n+1} primijenimo pretpostavku indukcije. Tada vrijedi:

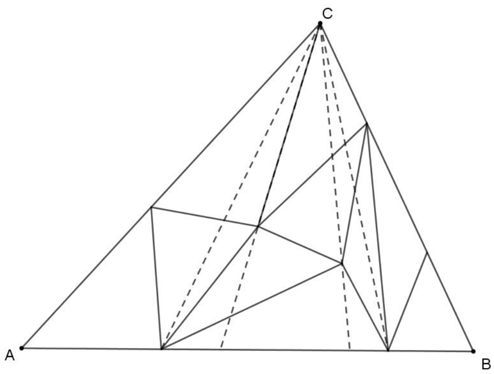
$$\alpha(BCD) = \sum_{i=2}^{n+1} \alpha(T_i) \tag{3.4}$$

Dakle, imamo:

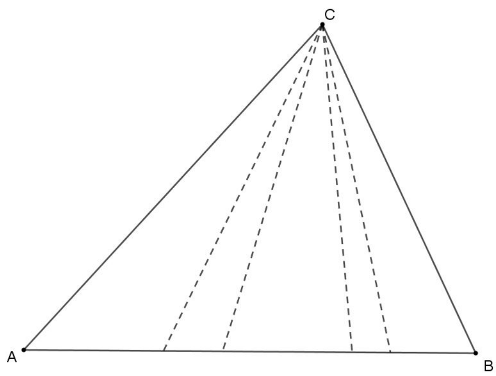
$$\alpha(ABC) = \alpha(ACD) + \alpha(BCD) = \alpha(T_i) + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha(T_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(T_i).$$

Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da $\alpha(ABC) = \sum \alpha(T_i)$ vrijedi za sve trokute koji zadovoljavaju uvjet (*).

3° slučaj. Neka je trokut $\triangle ABC$ rastavljen na manje trokute T_i na bilo koji način. Bez smanjenja općenitosti izaberimo vrh C trokuta $\triangle ABC$ i nacrtajmo dužine (na slici 3.4 (a) označene isprekidanom linijom) od vrha C do svakog vrha manjih trokuta, uključujući i one vrhove na stranici $\overline{AB}$. Također, produžimo dužine preko unutarnjih vrhova do stranice $\overline{AB}$.



(a) T_i



(b) S_j

Slika 3.4: Podjela na trokute

Sada smo dobili novu podjelu trokuta $\triangle ABC$ i nove trokute označimo s S_j (slika 3.4 (b)). Primijetimo da podjela na S_j zadovoljava pretpostavku 2° slučaja ovog dokaza pa imamo:

$$\alpha(ABC) = \sum_j \alpha(S_j). \tag{3.5}$$

Ako gledamo trokute T_i i S_j i njihove presjeke dobivamo novu podjelu:

$$ABC = \bigcup_{ij} \big(T_i \cap S_j\big).$$

Prema lemi 1.13 njihovi presjeci su poligoni. Svaki poligon je konačna unija nepreklapajućih trokuta tako da imamo $T_i \cap S_j = \bigcup_k U_{ijk}$. Sada imamo treći rastav trokuta $\triangle ABC$ na trokute U_{ijk}, odnosno

$$ABC = \bigcup_{ij} \big(T_i \cap S_j\big) = \bigcup_{ij} \Big(\bigcup_k U_{ijk}\Big) = \bigcup_{ijk} U_{ijk}.$$

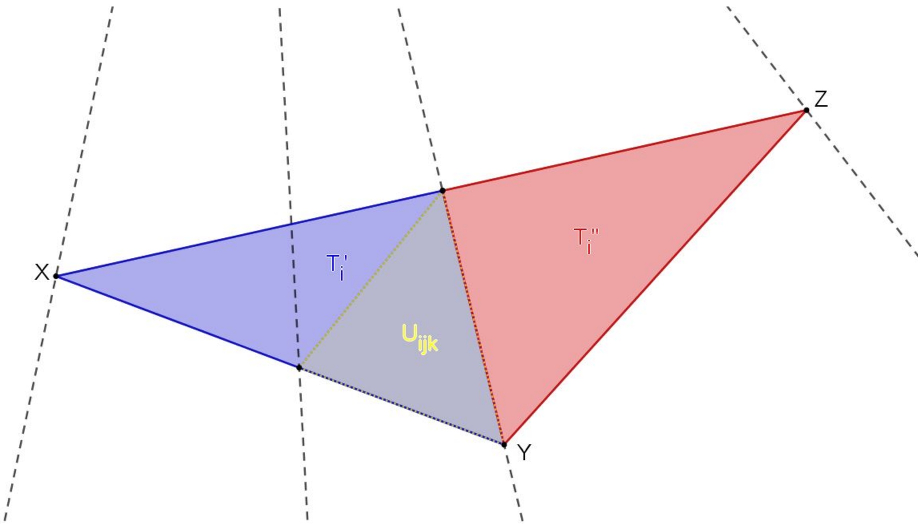
Primijetimo da je svaki S_j unija trokuta U_{ijk} ako variramo i i k, a ova triangulacija trokuta S_j zadovoljava uvjete 2° slučaja. Nema unutarnjih vrhova jer dužine koje su stranice trokuta S_j prolaze kroz sve vrhove prvobitne triangulacije. Nadalje, na stranici trokuta S_j koja leži na osnovici $\overline{AB}$ također nema nikakvih vrhova iz istog razloga. Dakle, prema 2° slučaju imamo:

$$\alpha(S_j) = \sum_{ik} \alpha(U_{ijk}). \tag{3.6}$$

Prema (3.5) i (3.6) imamo:

$$\alpha(ABC) = \sum_{ijk} \alpha(U_{ijk}). \tag{3.7}$$

Još trebamo vidjeti što je s podjelom trokuta T_i na manje trokute U_{ijk}. Gledamo neki trokut T_i sa vrhovima X, Y i Z (slika 3.5). Jedan od pravaca iz vrha C kroz X, Y i Z će zasigurno podijeliti trokut T_i na dva manja trokuta T_i' i T_i'' (u ovom slučaju pravac kroz Y). Prema 1° slučaju ovog dokaza imamo $\alpha(T_i) = \alpha(T_i') + \alpha(T_i')$.



Slika 3.5: T_i podijeljen na T_i' i T_i''

Oba dijela trokuta T_i su dalje podijeljena pravcima iz vrha C i dodatnim dužinama koje smo dodali kako bi rastavili poligone na trokute. Ove triangulacije trokuta T_i' i T_i'' zadovoljavaju uvjete iz 2° slučaja: Ne postoje unutarnji vrhovi i stranica nastala od pravca iz vrha C kroz Y (kojom smo podijelili trokut T_i na dva manja trokuta) ne sadrži nove vrhove. Vrijedi

$$T_i = T_i' \cup T_i'' = \bigcup_{jk} U_{ijk},$$

a iz 2° slučaja možemo zaključiti da svaki od T_i' i T_i'' ima površinu jednaku sumi površina od U_{ijk} od kojih se sastoji pa stoga slijedi

$$\alpha(T_i) = \sum_{j,k} \alpha(U_{ijk}).$$

Konačno, iz ove jednadžbe i (3.7) dobivamo

$$\alpha(ABC) = \sum_{i} \alpha(T_i)$$

što smo i trebali dokazati. □

Korolar 3.6. *Površina poligona $\mathcal{P}$ jednaka je zbroju površina trokuta T_i na koje je rastavljen. Vrijedi*

$$\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(T_i). \tag{3.8}$$

Poligon može biti rastavljen na različite načine na konačan broj nepreklapajućih trokuta. Trebamo pokazati da je površina poligona neovisna o načinu na koji smo ga rastavili, odnosno da za svaki prikaz tog poligona kao unije konačnog broja nepreklapajućih trokuta, odnosno neke triangulacije tog poligona vrijedi (3.8). Pokazali smo da se svaka podjela poligona na trokute može profiniti do triangulacije.

Lema 3.7. *Površina poligona je neovisna o triangulaciji.*

Dokaz. Neka su dane dvije triangulacije poligona $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = T_1 \cup \cdots \cup T_n$$

i

$$\mathcal{P} = T_1' \cup \cdots \cup T_m'.$$

Gledamo presjek $T_i \cap T_j'$. Prema lemi 1.13 i propoziciji 2.4 presjeke trokuta T_i i T_j' možemo rastaviti na trokute U_{ijk}, dakle

$$T_i \cap T_j' = \bigcup_k U_{ijk}.$$

Primijenimo lemu 3.5 na svaki od trokuta T_i i T_j':

$$T_i = \bigcup_{jk} U_{ijk} \implies \alpha(T_i) = \sum_{jk} U_{ijk},$$

$$T'_j = \bigcup_{ik} U_{ijk} \implies \alpha(T'_j) = \sum_{ik} U_{ijk}.$$

Za prvu triangulaciju dobivamo

$$\alpha(\mathcal{P}) = \sum_i \alpha(T_i) = \sum_{ijk} U_{ijk},$$

a za drugu

$$\alpha(\mathcal{P} = \sum_j \alpha(T'_j) = \sum_{ijk} U_{ijk}$$

pa $\alpha(\mathcal{P})$ ne ovisi o triangulaciji. □

Dokaz teorema 3.3, nastavak. Jedinstvenost ove funkcije je očita jer s uvjetom iz teorema 3.3 možemo točno odrediti vrijednost α za svaki trokut, a svaki poligon je upravo konačna unija nepreklapajućih trokuta. Još je ostalo provjeriti zadovoljava li svojstva funkcije površine iz definicije 3.1.
Budući da su duljine pozitivne, za svaki trokut T vrijedi $\alpha(T) > 0$. Sukladni trokuti imaju sukladne stranice i visine pa je $\alpha(T) = \alpha(T')$ ako su $T \cong T'$.
Ako su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ poligoni koji se ne preklapaju, $\mathcal{P} = P_1 \cup \dots \cup P_n$ i $\mathcal{Q} = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_m$ prema lemi 3.7 možemo triangulirati $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Imamo

$$\alpha(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \alpha\Big(\big(\cup P_i\big) \cup \big(\cup Q_j\big)\Big) = \sum_i \alpha(P_i) + \sum_j \alpha(Q_j) = \alpha(\mathcal{P}) + \alpha(\mathcal{Q}).$$

Prema lemama 1.12, 3.4 i 3.7 funkcija α je dobro definirana i zadovoljava sva potrebna svojstva. □

Dakle, dokazali smo jedinstvenost i egzistenciju funkcije površine definirane kao u teoremu 3.3.

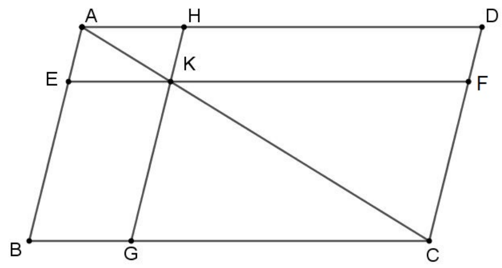
Propozicija 3.8 (EE I43)**.** *Neka je $ABCD$ paralelogram, te $EF \parallel BC$, $GH \parallel CD$ te pravci EF i GH se sijeku u točki K na dijagonali $\overline{AC}$, kao na slici 3.6. Paralelogrami $EBGK$ i $HKFD$ su jednakog sadržaja.*

Dokaz. Promotrimo paralelogram $AEKH$. Njegova dijagonala $\overline{AK}$ ga dijeli na dva sukladna trokuta i vrijedi:

$$\triangle AEK \cong \triangle KHA.$$

Promotrimo paralelogram $KGCF$. Njegova dijagonala $\overline{KC}$ ga dijeli na dva sukladna trokuta i za njih vrijedi:

$$\triangle KGC \cong \triangle CFK.$$



Slika 3.6: Paralelogram $ABCD$

Također, isto vrijedi i za paralelogram $ABCD$, odnosno,

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

Vrijedi:

$$ABC = EBGK \cup AEK \cup KGC$$

te

$$CDA = HKFD \cup KHA \cup CFK.$$

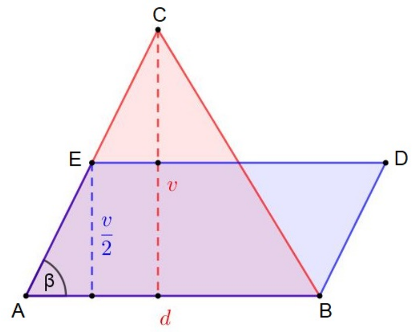
Budući da su $\triangle ABC$ i $\triangle CDA$ sukladni, oni su i jednakosastavljivi, a iz toga slijedi da imaju jednak sadržaj. Analogno vrijedi i za $AEK \cup KGC$ i $KHA \cup CFK$. Neka je $\mathcal{P} = ABC, \mathcal{P}' = CDA$, $Q = AEK \cup KBG$ i $Q' = KHA \cup CFK$. Onda je $\mathcal{P} \setminus Q = EBGK$ i $\mathcal{P}' \setminus Q' = HKFD$ pa iz propozicije 2.11 slijedi $\mathcal{P} \setminus Q \doteq \mathcal{P}' \setminus Q'$, odnosno $EBGK \doteq HKFD$. Ovime je tvrdnja dokazana. □

Teorem 3.9 (EE I44)**.** *Neka su zadani kut δ i duljina a. Svaki trokut je jednakog sadržaja kao neki paralelogram sa stranicom a i kutom δ.*

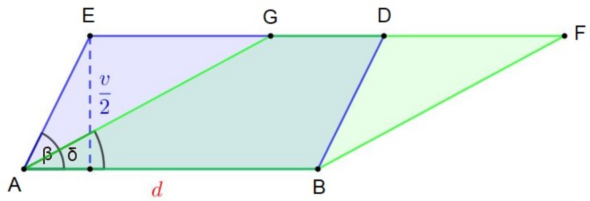
Dokaz. Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ sa osnovicom $|AB| = d$, visinom v i kutom β pri vrhu A. On je jednakosastavljiv s paralelogramom $ABDE$ s istom osnovicom duljine d kojemu je visina $\frac{v}{2}$ te je jedan njegov unutarnji kut β. Kako su jednakosastavljivi tako su i jednakog sadržaja.

Produljimo pravac ED preko točke D i označimo na njemu točku G tako da vrijedi $\angle BAG = \delta$. Na pravcu ED označimo točku F tako da vrijedi $|AB| = |GF|$. Sada imamo paralelogram $ABFG$ s kutom δ pri vrhu A i visinom $\frac{v}{2}$ te osnovicom duljine d. Prema propoziciji 2.7 paralelogram $ABDE$ s kutom β i paralelogram $ABFG$ s kutom δ su jednakog sadržaja.

Gledamo paralelogram $ABFG$. Produljimo stranicu $\overline{AB}$ preko točke B i označimo točku H na pravcu AB tako da vrijedi $a = |BH|$. Označimo sjecište pravaca FH i AG s I. Kroz

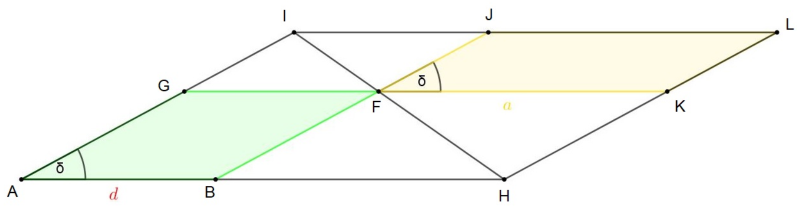


Slika 3.7: Trokut ABC i paralelogram $ABDE$



Slika 3.8: Paralelogram $ABDE$ i paralelogram $ABFG$

točku I povucimo paralelu s pravcem AB te sjecište te paralele i pravca BF označimo s J. Kroz točku H povucimo paralelu s pravcem AG i označimo sjecište te paralele s pravcem IJ s L. Sjecište pravaca GF i HL označimo s K. Dobili smo jedan veliki paralelogram $AHLI$ sa osnovicom duljine $d + a$. Unutar njega je paralelogram $ABFG$ s osnovicom duljine d i kutom δ te paralelogram $FKLJ$ s osnovicom duljine a i kutom δ zbog toga što su $\angle GAB \cong \angle JFK$ jer su kutovi s paralelnim kracima. Tada prema propoziciji 3.8 imamo $ABFG \doteq FKLJ$.

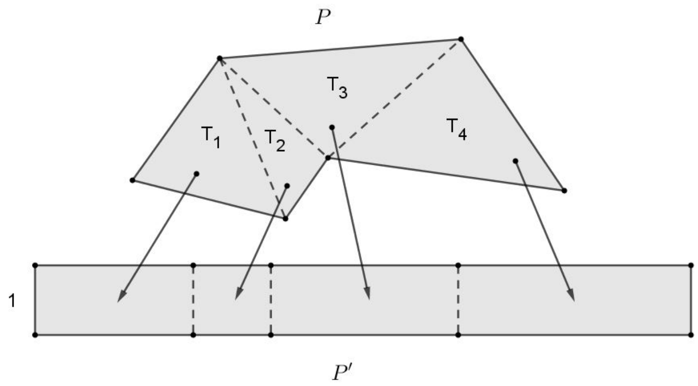


Slika 3.9: Paralelogram $ABFG$ i paralelogram $FKLJ$

Dakle, dokazali smo da su trokut $\triangle ABC$ s osnovicom d i kutom β i paralelogram $FKLJ$ s osnovicom a i kutom δ jednakog sadržaja. □

Propozicija 3.10. *Neka je α funkcija površine definirana kao u teoremu 3.3. Dva poligona $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ imaju jednak sadržaj ako i samo ako vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{Q})$.*

Dokaz. Iz (c) dijela propozicije 3.2 slijedi da ako $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ imaju jednak sadržaj tada vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{Q})$.
Pokažimo suprotnu tvrdnju. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{Q})$. Poligon $\mathcal{P}$ možemo rastaviti na konačan broj nepreklapajućih trokuta.



Slika 3.10: Pravokutnik sa stranicom duljine 1

Prema propoziciji 3.9 svaki od tih trokuta ima jednak sadržaj kao neki pravokutnik sa stranicom duljine 1. "Spojimo" te pravokutnike tako da duljina jedne stranice novog pravokutnika, nazovimo ga $\mathcal{P}'$, ostane 1. Neka je a duljina druge stranice pravokutnika $\mathcal{P}'$. Analogno napravimo i s trokutima od kojih je sastavljen poligon $\mathcal{Q}$ i taj pravokutnik nazovimo $\mathcal{Q}'$. Duljine stranica pravokutnika $\mathcal{Q}'$ su duljine 1 i b.
Pronašli smo pravokutnike $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{Q}'$ s jednom stranicom duljine 1 koji redom imaju jednak sadržaj kao $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$. Ako dijagonalom podijelimo pravokutnike $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{Q}'$ svaki na dva trokuta prema teoremu 3.3 i korolaru 3.6 imamo $\alpha(\mathcal{P}') = 1 \cdot a = a$ i $\alpha(\mathcal{Q}') = 1 \cdot b = b$. Iz (c) dijela propozicije 3.2 imamo da poligoni jednakog sadržaja imaju jednake površine pa vrijedi $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{P}') = a$ i $\alpha(\mathcal{Q}) = \alpha(\mathcal{Q}') = b$.
Zbog pretpostavke $\alpha(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{Q})$ imamo $a = b$. Budući da su pravokutnici $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{Q}'$ sukladni tada imaju jednak sadržaj. Dakle, $\mathcal{P}' \doteq \mathcal{Q}'$, tj. vrijedi

$$\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}' \doteq \mathcal{Q}' \doteq \mathcal{Q}$$

pa je zbog tranzitivnosti $\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$. Tvrdnja je ovime dokazana. □

Sada možemo dokazati i propoziciju 2.16.

Dokaz propozicije 2.16. Zadani su trokuti P i Q jednakog sadržaja i jednakih osnovica. Označimo duljine osnovica s a, a odgovarajuće visine s v i v'. Prema propoziciji 3.2 vrijedi $\alpha(P) = \alpha(Q)$ pa iz teorema 3.3 imamo

$$\frac{1}{2}av = \frac{1}{2}av'$$

i dijeljenjem s $\frac{1}{2}a$ dobijemo

$$v = v'$$

što smo i trebali pokazati. □

Poglavlje 4

Pitagorin poučak

Kao što smo već rekli na početku, osnovna ideja da su dva lika (poligona) jednaka ako se jedan može rastaviti na dijelove od kojih se drugi može sastaviti. Taj "problem" danas nazivamo **disekcija** ili **preslagivanje**. U ovom poglavlju ćemo dokazati Pitagorin poučak preslagivanjem, koristeći se jednakim sadržajem, algebarski te pomoću površine.

Propozicija 4.1 (Pitagorin poučak)**.** *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut pri čemu je $|BC| < |AB|$ i pravi kut je pri vrhu B. Neka je $ABDE$ kvadrat nad stranicom $\overline{AB}$ takav da je C između B i D. Produljimo dužinu $\overline{BC}$ preko točke D za duljinu $|BC|$ i krajnju točku označimo s H. Nad dužinom $\overline{DH}$ konstruiramo kvadrat $DHFK$. Uočimo da točka K leži na dužini $\overline{DE}$.

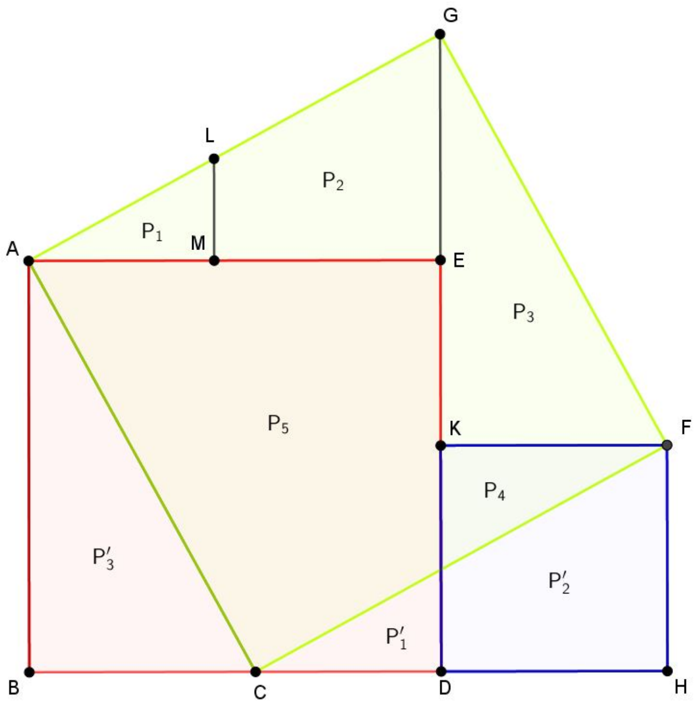
Lako se uoči da je $\triangle ABC \cong \triangle CHF$ jer su oba pravokutna te za njihove katete vrijedi: $\overline{BC} \cong \overline{HF}$ i zbog $|AB| = |BD| = |BC| + |CD| = |DH| + |CD| = |CD| + |DH| = |CH|$ vrijedi $\overline{AB} \cong \overline{CH}$. Također vrijedi da je $\angle ACF$ pravi jer kutovi $\angle BCA$, $\angle ACF$ i $\angle FCH$ čine ispruženi kut, a $\angle BCA$ i $\angle FCH$ zajedno čine pravi kut.

Označimo točku G na sljedeći način: najprije produljimo stranicu $\overline{DE}$ preko točke E tako da vrijedi: $|KG| = |AB| = |DE|$. Tada je $|GE| = |KD| = |BC|$. Pokažimo još da vrijedi $\triangle AEG \cong \triangle GKF \cong \triangle ABC$. Već imamo $|GE| = |FK| = |BC|$, sva tri trokuta su pravokutna te $|AE| = |GK| = |AB|$ pa je po S-K-S poučku o sukladnosti $\triangle AEG \cong \triangle GKF \cong \triangle ABC$. Zbog tranzitivnosti sukladnosti trokuta vrijedi:

$$\triangle ABC \cong \triangle CHF \cong \triangle GKF \cong \triangle AEG.$$

Sada nacrtajmo dužinu $\overline{LM}$ okomitu na pravac AE tako da vrijedi $\overline{BC} \cong \overline{ME}$. Pritom se točka M nalazi na dužini $\overline{AE}$, a točka L na dužini $\overline{AG}$.

Rastavimo kvadrat $ACFG$ na pet dijelova koji su na slici 4.1 označeni s P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5 te ostale dijelove kao na slici označimo s P_1', P_2' i P_3'.



Slika 4.1: Rastav kvadrata

Primijetimo da smo dva manja kvadrata rastavili na dijelove sukladne dijelovima od kojih je sastavljen veći kvadrat, pa možemo reći da je unija manjih kvadrata jednakosastavljiva s većim kvadratom. Iz propozicije 3.2 slijedi da je površina dvaju manjih kvadrata jednaka površini većeg kvadrata. Idemo i izračunati površinu kvadrata nad katetama danog trokuta.

$$\alpha(ABDE)+\alpha(DHFK) = \left(P_1'+P_3'+P_5\right)+\left(P_2'+P_4\right) = P_1+P_3+P_5+P_2+P_4 = \alpha(ACFG),$$

odnosno

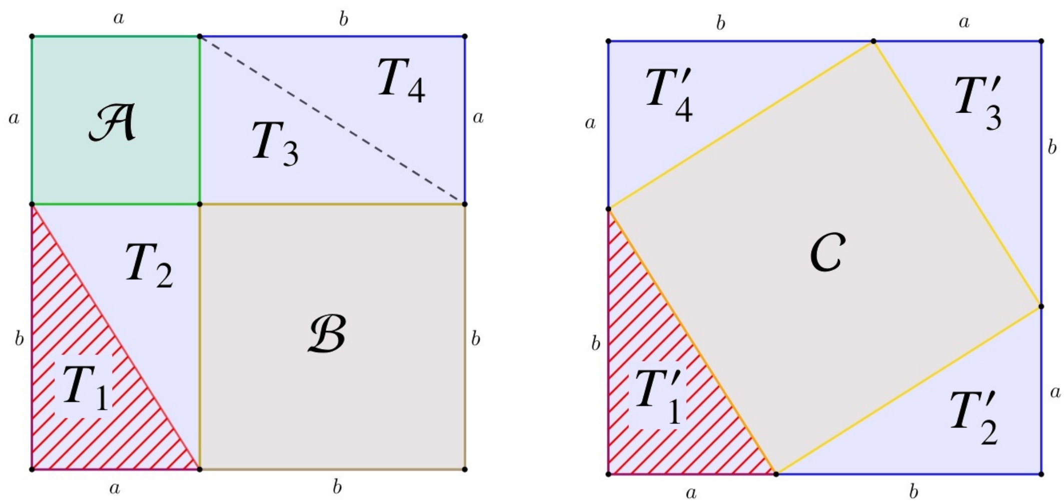
$$\alpha(ABDE)+\alpha(DHFK)=\alpha(ACFG).$$

Ovime je tvrdnja dokazana. □

Pogledajmo dokaz Pitagorina poučka pomoću jednakog sadržaja.

Dokaz. Neka je zadan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s duljinama kateta a i b, te hipotenuzom c. Stranicu a produljimo za b te smo dobili jednu dužinu duljine $a + b$ nad kojom konstruiramo kvadrat. Konstruiramo drugi kvadrat sa stranicom duljine $a + b$. Takva dva sukladna kvadrata (oba sa stranicama duljine $a + b$) vidimo na slici 4.2.

Prvi kvadrat je rastavljen na dva manja kvadrata i četiri sukladna pravokutna trokuta. Jedan kvadrat ima stranicu a, označimo ga $\mathcal{A}$, a drugom je stranica b, označimo ga s $\mathcal{B}$. Sukladni pravokutni trokuti imaju katete duljina a i b, označimo ih s T_1, T_2, T_3 i T_4. Drugi kvadrat je podijeljen na četiri ista takva sukladna pravokutna trokuta koje označimo s T'_1, T'_2, T'_3 i T'_4 (sa katetama duljina a i b) i kvadrat kojemu su stranice hipotenuze malih pravokutnih trokuta, označimo ga s C. Želimo pokazati da vrijedi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \doteq C$.



Slika 4.2: Kvadrati jednake površine

Neka je $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ i $\mathcal{P}' = C$. Uzmimo da je $Q = \bigcup_{i=1}^{4} T_i$ i $Q' = \bigcup_{j=1}^{4} T'_j$. Očito se $\mathcal{P}$ i Q ne preklapaju, kao ni $\mathcal{P}'$ i Q'. Vrijedi $Q \equiv Q'$ jer se oba sastoje od četiri sukladna pravokutna trokuta koja se ne preklapaju. Još vrijedi i $\mathcal{P} \cup Q \equiv \mathcal{P}' \cup Q'$ jer su dva velika kvadrata sukladna. Prema definiciji 2.6 sada imamo $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$, odnosno

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \doteq C.$$

Dakle, unija kvadrata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ima jednak sadržaj kao kvadrat C pa prema (c) dijelu propozicije 3.2 imaju i jednake površine. $\square$

Dokažimo Pitagorin poučak i algebarski.

Dokaz. Promotrimo površine dvaju kvadrata stranice $(a+b)$ iz prethodnog dokaza. Površinu prvog kvadrata možemo zapisati na sljedeći način:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab \tag{4.1}$$

Drugi kvadrat:

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2 \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) imamo

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

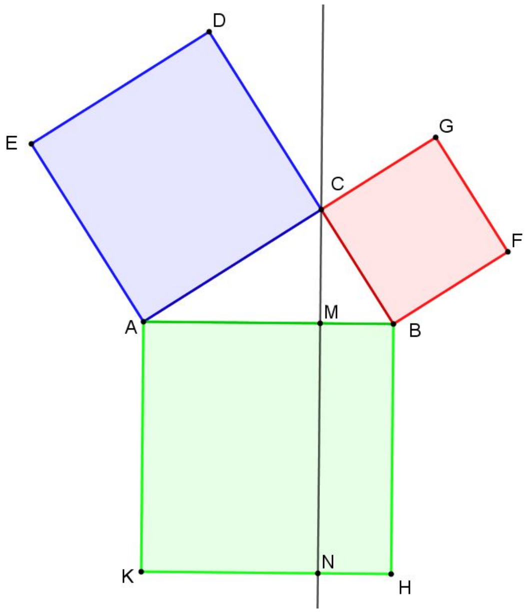
Još jedan dokaz Pitagorina poučka prema Euklidovim *Elementima*, propozicija I47. [10]

Dokaz. Neka je zadan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom u vrhu C. Neka je $ACDE$ kvadrat nad stranicom $\overline{AC}$, $CBFG$ kvadrat nad stranicom $\overline{BC}$ i $AKHB$ kvadrat nad stranicom $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta.

Kroz točku C povucimo paralelu sa AK i označimo s M sjecište te paralele sa dužinom $\overline{AB}$, a s N njeno sjecište s dužinom $\overline{KH}$. Primijetimo da kvadrat $AKHB$ možemo rastaviti na pravokutnike $AKNM$ i $NHBM$. Također, vrijedi $\overline{DC} \cong \overline{AC}$ i $\overline{CB} \cong \overline{CG}$ jer su to po konstrukciji kvadrati.
Pokažimo da su kvadrat $ACDE$ i pravokutnik $AKNM$ jednakih površina. Prema propoziciji 2.7 kvadrat $ACDE$ i paralelogram s osnovicom $\overline{EA}$ kojemu stranica nasuprot osnovice leži na pravcu BC imaju jednak sadržaj. Vrijedi $\angle BAE \cong \angle KAC$ jer se oba sastoje od pravog kuta i kuta $\angle BAC$. Označimo paralelogram sa susjednim stranicama $\overline{EA}$ i $\overline{AB}$ s $\mathcal{P}$, a paralelogram sa susjednim stranicama $\overline{CA}$ i $\overline{AK}$ s $\mathcal{Q}$. $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ su sukladni jer je $\overline{EA} \cong \overline{CA}$, $\overline{AB} \cong \overline{AK}$ i $\angle BAE \cong \angle KAC$. Ovi paralelogrami imaju i jednak sadržaj.
Paralelogram $\mathcal{Q}$ i pravokutnik $AKNM$ prema 2.7 imaju jednak sadržaj, a zbog tranzitivnosti slijedi da kvadrat $ACDE$ i pravokutnik $AKNM$ imaju jednak sadržaj. Po propoziciji 3.2 imaju i jednake površine.
Na analogan način se pokaže da kvadrat $CBFG$ i pravokutnik $NHBM$ imaju jednake površine. Vrijedi

$$\alpha(ACDE) + \alpha(CBFG) = \alpha(AKNM) + \alpha(NHBM) = \alpha(AKHB),$$

a to je upravo ono što smo i trebali pokazati. □



Slika 4.3: Kvadrati nad stranicama pravokutnog trokuta

Jedan od najpoznatijih matematičkih teorema, Pitagorin poučak, osim Euklidovog dokaza smo dokazali na još tri različita načina, pomoću jednakosastavljivosti i jednakog sadržaja te algebarski. U ovom radu smo na moderan način koristeći se Hilbertovom aksiomatikom dokazali tvrdnje dane u Euklidovoj knjizi. Pomoću novih pojmova, jednakosastavljivosti poligona i poligona jednakog sadržaja, smo došli do konkretnih rezultata vezanih uz površinu.

Bibliografija

[1] Alm, Johan: *The Aritmetic field implicit in Geometry*. studeni 2018. http://www2.math.uu.se/~thomase/GeometryoverFields.pdf.

[2] Baldwin, John T.: *From Geometry to Algebra*. Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Illinois at Chicago, 2014.

[3] Balošić, Lorena: *Dehn-Hadwigerov teorem*. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2018. https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:900436.

[4] Brückler, Franka Miriam: *Povijest matematike I*. Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.

[5] Brückler, Franka Miriam: *Povijest matematike II*. Odjel za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera, Osijek, 2010.

[6] Červar, Branko, Erceg, Goran i Lekić, Ivan: *Osnove geometrije*, 2013.

[7] Grattan-Guinness, Ivor: *Alfred Tarski: Early Work in Poland—Geometry and Teaching*. Springer, 2014.

[8] Hartshorne, Robin: *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer, 2005.

[9] Hilbert, David: *The Foundations of Geometry*. Open court publishing Company, La-Salle, Illinois, 1950. https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf.

[10] Hudoletnjak Grgić, Maja: *Euklid: Elementi I-VI*. KruZak, Zagreb, 1999.

[11] Ilišević, Dijana i Bombardelli, Mea: *Elementarna geometrija - skripta*. PMF - Matematički odsjek, 2007. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf.

[12] Lukanović, Ivana: *Neeuklidska geometrija*. Diplomski rad, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2017. https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:735699.

[13] Pavković, Boris i Veljan, Darko: *Elementarna matematika I : skupovi, funkcije, brojevi, polinomi i neke elementarne funkcije, planimetrija - geometrija ravnine*. Tehnička knjiga Zagreb, 1992.

[14] Pavleković, Margita: *Bolyai-Gerwienov teorem*. Mathematical Communications, 1(1):75–78, 1996.

[15] Rothe, Franz: *Several Topics from Geometry*, 2010. https://math2.uncc.edu/~frothe/3181all.pdf.

[16] Szczerba, L. W.: *Tarski and Geometry*. The Journal of Symbolic Logic, 51(4):907–912, 1986. http://www.jstor.org/stable/2273904.

Sažetak

Površina je pojam za koji čujemo već od malih nogu i kroz osnovnu školu učimo računati površinu nekog lika bez razmišljanja o tome što je ona zapravo. Ukratko, pridružujemo joj neki broj, a potom uspoređujemo različite likove na temelju tog broja. U ovom radu najprije definiramo trokut i poligon pritom navodeći njihova svojstva. Do pojma površine dolazimo preko pojma jednakosastavljivosti poligona i poligona jednakog sadržaja. U trećem poglavlju definiramo funkciju površine pomoću koje računamo površinu poligona te dokazujemo neka njena svojstva. Naposljetku, dokazujemo Pitagorin poučak pomoću gore definiranih pojmova.

Summary

From an early age, we have heard about the notion of area. Throughout elementary school, we are taught to calculate an area of a geometric figure without thinking what it really represents. In short, we associate a number to an area and then compare various figures based on that number. In this thesis, we first define what is a triangle and a polygon presenting their respective properties as we do so. Area of a figure (polygon) is explained through notions of equidecomposable figures and figures of equal content. In the third chapter we define area function which is used to calculate area of a given polygon and prove some of its properties. Finally, we prove the Pythagorean theorem using aforementioned notions.

Životopis

Rođena sam 29. kolovoza 1993. godine u Busovači u Bosni i Hercegovini. Pohađala sam II. Osnovnu školu Knin (danas Osnovna škola dr. Franje Tuđmana) do 2008. godine kada sam upisala Srednju školu Lovre Montija u Kninu, smjer: opća gimnazija.
Tijekom srednje škole moj interes za matematiku je postajao sve veći te sam naposljetku odlučila upisati Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu i Preddiplomski studij Matematike; smjer: nastavnički 2012. godine. Nakon završetka predidplomskog studija 2015. godine nastavila sam u istom smjeru upisavši Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na istom fakultetu.