Picardova metoda i primjene

Kukavica, Jozo

Master's thesis / Diplomski rad

2019

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Jozo Kukavica

PICARDOVA METODA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Eduard Marušić-Paloka

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svima onima čiji je doprinos, ma koliko mali,
bio značajan za pohađanje i završavanje ovog studija

Sadržaj

Uvod

Među mnogim metodama za rješavanje diferencijalnih i integralnih jednadžbi, ističe se jedna kao koristan teorijski alat: Picardova metoda. Dok su druge metode korisne za praktičan pronalazak stvarnog rješenja, ili njegovu aproksimaciju, Picardova metoda nam je od velike koristi za dokazivanje teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja.

Postavlja se pitanje: koja je praktična korist tih teorema u rješavanju diferencijalnih i integralnih jednadžbi? Zar nebi bio dovoljan neki popis praktičnih metoda koje egzaktno rješavaju te jednadžbe? To u praksi nije tako. Naime, mnoge diferencijalne jednadžbe nemaju rješenje, ili ako ga imaju, ono nije moguće prikazati u nekoj zatvorenoj formi - koristeći konačno mnogo elementarnih operacija i neki skup elementarnih funkcija. Čak i slučaju da je jedno rješenje lako pronaći, još uvijek preostaje pitanje jedinstvenosti tog rješenja.

Sve prethodno iznesene činjenice daju na praktičnoj važnosti takvih teorema, te se ispostavlja korisnim pronaći teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja diferencijalnih i integralnih jednadžbi.

Uz pomoć njih, uz vrlo male napore, možemo saznati da li je određena integralna ili diferencijalna jednadžba uopće rješiva, a povrh toga, ukoliko smo našli jedno rješenje, onda jedinstvenost garantira da smo našli sva rješenja.

Određeni teoremi matematičke analize koje ćemo često koristiti u radu navedeni su u Poglavlju 3: Dodatak - korišteni teoremi. Radi kratkoće referenciranja, u radu ćemo se na njih pozivati kratkim oznakama **[A]**-**[I]**.

Poglavlje 1

Volterrine i Fredholmove integralne jednadžbe

1.1 Uvod u Volterrine i Fredholmove integralne jednadžbe

Integralna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija nalazi pod znakom integrala. Upoznat ćemo se za početak s dvjema vrstama integralnih jednadžbi za koje ćemo proučavati uvjete postojanja i jedinstvenosti rješenja: to su Volterrine i Fredholmove integralne jednadžbe. Neka su $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i $K\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije te neka su λ, a i b konstante iz $\mathbb{R}$. Jednadžbe glase:

$$\text{Volterrina jednadžba} \qquad y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt \tag{1.1}$$

$$\text{Fredholmova jednadžbe} \qquad y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \tag{1.2}$$

pri čemu je $x \in [a,b]$.

Rješenjem Volterrine/Fredholmove integralne jednadžbe smatramo funkciju $y(x)$ neprekidnu na $[a,b]$ koja zadovoljava pripadajuću Volterrinu/Fredholmovu integralnu jednadžbu. Za početak možemo zamjetiti razliku između dviju jednadžbi. U Volterrinoj jednadžbi gornja granica integrala funkcija je od x, dok je u Fredholmovoj jednadžbi gornja granica konstanta. Nadalje, Volterrina integralna jednadžba bi se mogla dobiti iz Fredholmove i to tako da stavimo da je $K(x,t)$=0 kad god je $t > x$ na $[a,b]^2$.

Ukoliko je $f(x) = 0$ tada tu jednadžbu zovemo još i homogenom, a ukoliko je $f(x) \neq 0$ nehomogenom. Funkciju $K(x,t)$ nazivamo jezgrom integralne jednadžbe a vrijednost λ nazivamo svojstvenom ili karakterističnom vrijednošću. U tom smislu funkciju $y = y(x)$

možemo još nazvati i svojstvenom funkcijom svojstvene vrijednosti λ. Nazivlje koje integralne jednadžbe dijele s linearnom algebrom možemo objasniti na slijedeći način. Svojstvene vrijednosti operatora M tražimo iz jednadžbe:

$$Mv = \lambda v, \tag{1.3}$$

gdje je M operator, v svojstveni vektor, a λ svojstvena vrijednost. Ako je riječ o operatoru na konačno dimenzionalnom prostoru, izborom baze jednadžba se zapiše u indeksnom matričnom obliku:

$$\sum_i M_{i,j} v_j = \lambda v_i. \tag{1.4}$$

Ukoliko ovu jednadžbu pokušamo iz njezinog diskretnog oblika pretvoriti u kontinuirani oblik zamjenjujući sumu integralom, ono što se dobiva jest:

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = \lambda y(x), \tag{1.5}$$

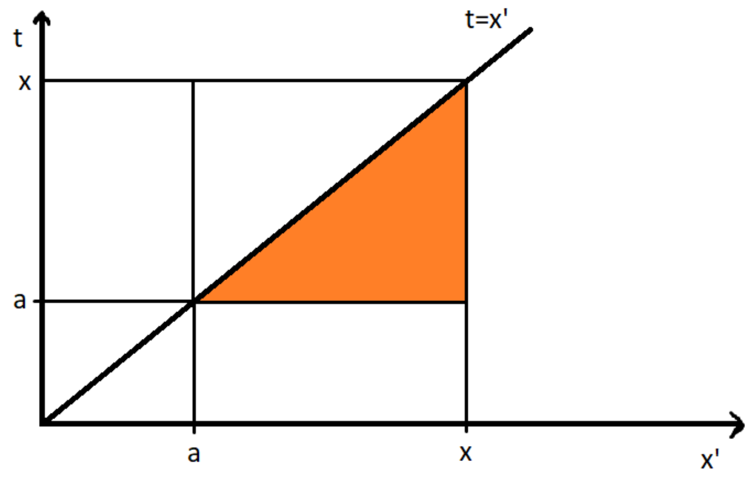
drugim riječima, homogena Fredholmova jednadžba. Dakle, neke integralne jednadžbe se mogu smatrati kontinuiranom verzijom jednadžbe za traženje svojstvene vrijednosti (1.4).

Integralne jednadžbe se pod određenim uvjetima mogu preformulirati u ekvivalentne diferencijalne jednadžbe (i obrnuto). Ukoliko je diferencijalna jednadžba ekvivalentna integralnoj, tada im je skup rješenja isti. U nakani da rješimo neku diferencijalnu zadaću, dovoljno ju je preformulirati u ekvivalentni integralni oblik, pa tada naći rješenje tog integralnog oblika. Dokažimo sada vezu između diferencijalnih i Volterrinih/Fredholmovih jednadžbi. U tom naumu ćemo trebati slijedeću lemu:

Lema 1.1.1. ***Zamjena redoslijeda integriranja*** *Neka je $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada:*

$$\int_a^x \int_a^{x'} G(x',t)dtdx' = \int_a^x \int_t^x G(x',t)dx'dt \tag{1.6}$$

Dokaz
Dokaz leme se svodi na zamjenu granica integracije na način da područje integracije ostane isto. Da bi se to postiglo, promotrimo na slijedećoj slici područje integracije:



Stoga je:

$$\int_{x'=a}^{x'=x}\int_{t=a}^{t=x'} G(x',t)dtdx' = \int_{t=a}^{t=x}\int_{x'=t}^{x'=x} G(x',t)dx'dt \tag{1.7}$$

što je i trebalo pokazati.
Zbog Leme **(1.1.1)** slijedi:

$$\int_a^x\int_a^{x'} f(t)dtdx' = \int_a^x\int_t^x f(t)dx'dt = \int_a^x (x-t)f(t)dt = h(x) \tag{1.8}$$

Ukoliko sada $h(x)$ integriramo od a do x:

$$\int_a^x h(x')dx' = \int_a^x\int_a^{x'} (x'-t)f(t)dtdx' = \int_a^x\int_t^x (x'-t)f(t)dx'dt = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f(t)dt = g(x). \tag{1.9}$$

Mogli bismo sada funkciju g(x) ponovno integrirati no dokažimo općenitu tvrdnju:

$$\underbrace{\int_a^x\int_a^{x_{n-1}}\cdots\int_a^{x_1}}_{n} u(t)dtdx_1...dx_{n-1} = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Tvrdnja vrijedi za $n = 1$ (trivijalno) i $n = 2$ prema (1.8), a uz pretpostavku da vrijedi za neki $k = n - 1$ slijedi:

$$\underbrace{\int_a^x \int_a^{x_{n-1}} \cdots \int_a^{x_1}}_{n} u(t)dtdx_1...dx_{n-1} = \int_a^x \int_a^{x'} \frac{(x'-t)^{n-2}}{(n-2)!} u(t)dtdx' = \tag{1.11}$$

$$= \int_a^x \int_t^x \frac{(x'-t)^{n-2}}{(n-2)!} u(t)dtdx' = \tag{1.12}$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt, \tag{1.13}$$

pa smo induktivno dokazali da vrijedi tvrdnja (1.10). Višestrukom primjenom Leme (**2.1.1**) o zamjeni redoslijeda integriranja dobili smo pravilo (1.10) za reduciranje višestrukog integrala u jednostruki. Ovo pravilo za reduciranje višestrukog integrala u jednostruki omogućit će nam da dobijemo integralne jednažbe iz diferencijalnih. U tom smislu promotrimo slijedeći primjer:

Primjer 1.1.2. *Zadana je linearna diferencijalna jednadžba 2.reda:*

$$y'' + \lambda y = g(x), \quad (x \in [0, L]). \tag{1.14}$$

Pronađimo integralnu jednadžbu ekvivalentnu ovoj diferencijalnoj jednadžbi uz zadane početne uvjete y(0)=0 i y'(0)=A ili rubne uvjete y(0)=0 i y(L)=B.

Integriranje od 0 do x ($x \in [0,L]$) daje:

$$y'(x) - y'(0) + \lambda \int_0^x y(t)dt = \int_0^x g(t)dt \tag{1.15}$$

Još jedna integracija od 0 do x ($x \in [0,L]$) te primjena pravila (1.11) za redukciju daje:

$$y(x) - y(0) - y'(0)x + \lambda \int_0^x (x-t)y(t)dt = \int_0^x (x-t)g(t)dt \tag{1.16}$$

Sada u ovisnosti od toga kako su zadani uvjeti na rješenje, dolazimo do Volterrine ili Fredholmove jednadžbe. Ukoliko su uvjeti na rješenje $y(x)$ zadani kao vrijednosti funkcija $y(x)$ te $y'(x)$ u početnoj točci (tzv. početni uvjeti), tada ćemo dobiti Volterrinu jednadžbu. Pretpostavimo da su zadani početni uvjeti $y(0) = 0$ i $y'(0) = A$, gdje je A neka realna konstanta. Sada slijedi:

$$y(x) = Ax + \int_0^x (x-t)g(t)dt - \lambda \int_0^x (x-t)y(t)dt \tag{1.17}$$

I ono što je dobiveno je Volterrina nehomogena jednadžba pri čemu je:

$$K(x,t) = \lambda(t-x) \tag{1.18}$$

$$f(x) = Ax + \int_0^x (x-t)g(t)dt \tag{1.19}$$

koja postaje homogena ako i samo ako A i g zadovoljavaju:

$$f(x) = Ax + \int_0^x (x-t)g(t)dt = 0 \tag{1.20}$$

No, ukoliko zadamo rubne uvjete, tj. vrijednost funkcije $y(x)$ na oba kraja intervala, tada dobivamo Fredholmovu nehomogenu jednadžbu. Neka su rubni uvjeti $y(0)$=0 i $y(L)$=B. Tada stavljajući x=L u (1.16) dobivamo:

$$y'(0) = \frac{1}{L}\left(\lambda \int_0^L (L-t)y(t)dt - \int_0^L (L-t)g(t)dt + B\right) \tag{1.21}$$

Uvrstimo li to sada ponovno u (1.16) dobivamo:

$$y(x) - \frac{x}{L}\left(\lambda \int_0^L (L-t)y(t)dt - \int_0^L (L-t)g(t)dt + B\right) + \lambda \int_0^x (x-t)y(t)dt = \int_0^x (x-t)g(t)dt. \tag{1.22}$$

Sada grupirajući jednadžbu po izrazima uz $g(t)$ i $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{x}{L}\int_0^L (L-t)g(t)dt + \int_0^x (x-t)g(t)dt - \frac{Bx}{L} + \lambda\frac{x}{L}\int_0^L (L-t)y(t)dt - \lambda\int_0^x (x-t)y(t)dt \tag{1.23}$$

Koristivši činjenicu da se određeni integral može rastaviti na dva integrala:

$$\int_0^L h(t)dt = \int_0^x h(t)dt + \int_x^L h(t)dt, \tag{1.24}$$

te grupirajući pripadajuće integrale uz $g(t)$ i $y(t)$ dobiva se:

$$y(x) = \int_0^x \frac{t}{L}(x-L)g(t)dt - \int_x^L \frac{x}{L}(L-t)g(t)dt - \frac{Bx}{L} + \int_0^x \frac{t}{L}(L-x)y(t)dt + \int_x^L \frac{x}{L}(L-t)y(t)dt \tag{1.25}$$

Sada uz oznake:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{L}(L-x), & \text{kada} \quad 0 \le t \le x \le L \\ \frac{x}{L}(L-t), & \text{kada} \quad 0 \le x \le t \le L \end{cases} \tag{1.26}$$

$$f(x) = \frac{Bx}{L} - \int_0^L K(x,t)g(t)dt,$$

imamo:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^L K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [0, L], \tag{1.27}$$

drugim riječima, Fredholmovu integralnu jednadžbu. Iz dobivenih integralnih jednadžbi, lako se možemo vratiti u diferencijalnu jednadžbu sa pripadajućim početnim ili rubnim uvjetima, a to je najlakše uočiti na način da su svaka dva susjedna retka u koracima izvoda bila ekvivalentna. Prikazali smo izvod u jednom smjeru počevši od diferencijalne jednadžbe do integralne, no, izvod u drugom smjeru je također moguć upravo zato jer su svaka dva susjedna retka u koracima izvoda bila ekvivalentna. Drugim riječima, diferencijalna jednadžba sa početnim uvjetima pokazala se ekvivalentnom Volterrinoj jednadžbi, a diferencijalna jednadžba sa rubnim uvjetima se pokazala ekvivalentnom Fredholmovoj jednadžbi.

Ukoliko želimo rješiti diferencijalnu jednadžbu s početnim ili rubnim uvjetima, na način da ju reformuliramo u integralnu - upravo je ključno da smo poveli računa o tome da su te jednadžbe ekvivalentne, jer će jedino tada te jednadžbe dijeliti skup rješenja. Nadalje, ukoliko dokazujemo uvjete egzistencije i jedinstvenosti rješenja integralne jednadžbe, ti uvjeti će se prenositi na pripadajuću diferencijalnu jednadžbu samo ako su ekvivalentne.

Dokažimo sada u općenitom slučaju vezu između linearne diferencijalne jednadžbe n-tog stupnja te Volterrine jednadžbe. Promotrimo linearnu diferencijalnu jednadžbu n-tog stupnja:

$$y^{(n)}(x) + \alpha_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_{n-1}(x)y'(x) + \alpha_n(x)y(x) + F(x) = 0, \quad \text{za} \quad x \in [a, b]. \tag{1.28}$$

Gdje su $F(x)$ te $\alpha_1(x)$,...,$\alpha_n(x)$ funkcije neprekidne na $[a, b]$. Uvedimo sada supstituciju:

$$u(x) = y^{(n)}(x) \tag{1.29}$$

Pretpostavimo da su $y(x), y'(x), ..., y^{(n)}$ neprekidne funkcije. Neprekidnost implicira integrabilnost, pa po Osnovnom teoremu analize **[E]** te pravilu (1.10) za redukciju višestrukog integrala u jednostruki slijedi:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x u(t)dt + c_{n-1} \tag{1.30}$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} u(t)dtdx_1 + (c_{n-2} + c_{n-1}x) \tag{1.31}$$

$$\tag{1.32}$$

$$y^{(n-3)}(x) = \int_a^x\int_a^{x_2}\int_a^{x_1} u(t)dtdx_1dx_2 + (c_{n-3} + c_{n-2}x + c_{n-1}\frac{x^2}{2}) \tag{1.33}$$

$$\vdots$$

$$y(x)^{(n-k)} = \underbrace{\int_a^x\int_a^{x_{k-1}}\cdots\int_a^{x_1}}_{k} u(t)dtdx_1...dx_{k-1} + (\sum_{j=0}^{k-1} c_{n-k+j}\frac{x^j}{j!}) \tag{1.34}$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}u(t)dt + (\sum_{j=0}^{k-1} c_{n-k+j}\frac{x^j}{j!}) \tag{1.35}$$

$$\vdots$$

$$y(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt + (\sum_{j=0}^{n-1} c_j\frac{x^j}{j!}) \tag{1.36}$$

Ako sada napišemo diferencijalnu jednadžbu (1.28) u povoljnijem obliku:

$$u(x) + \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k(x)y^{(n-k)}(x)\Big) + F(x) = 0, \tag{1.37}$$

uvrstimo $y(x)^{(n-k)}$ i pritom razdvojimo sumu na dva dijela:

$$u(x) + \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k(x)\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}u(t)dt\Big) + \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k(x)\sum_{j=0}^{k-1} c_{n-k+j}\frac{x^j}{j!}\Big) + F(x) = 0, \tag{1.38}$$

te uz pomoć linearnosti integrala zamjenimo poredak integrala i sume u prvoj sumi, opažamo:

$$u(x) + \int_a^x \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k(x)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\Big)}_{-K(x,t)}u(t)dt + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\alpha_k(x)c_{n-k+j}\frac{x^j}{j!}\Big) + F(x)}_{-f(x)} = 0, \tag{1.39}$$

drugim riječima, dobili smo nehomogenu Volterrinu jednadžbu:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt. \tag{1.40}$$

1.2 Dokaz egzistencije i jedinstvenosti rješenja Volterrine jednadžbe Picardovom metodom

U prethodnom poglavlju smo pokazali ekvivalenciju između određenih diferencijalnih jednadžbi i Volterrinih i Fredholmovih jednadžbi s početnim ili rubnim uvjetima. Ekvivalencija između tih jednadžbi znači da te jednadžbe imaju isti skup rješenja. Drugim riječima, ukoliko znamo rješiti integralnu jednadžbu, time smo odmah rješili pripadajući diferencijalnu jednadžbu s početnim ili rubnim uvjetima. Nadalje, uvjeti egzistencije i jedinstvenosti rješenja integralne jednadžbe se prenose i na pripadajuću diferencijalnu zadaću. Metoda koja je najprimjerenija za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja integralnih jednadžbi je Picardova metoda.

Picardova metoda je metoda sukcesivnih aproksimacija, pa ne čudi da će u samoj metodi biti riječ o nizu $y_0, y_1, y_3..., y_n$ iteracijom dobivenih funkcija. Promotrimo ponovno Volterrinu jednadžbu:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad \text{gdje je} \quad x \in [a,b], \tag{1.41}$$

Gdje je f neprekidna na $[a,b]$ te $K(x,t)$ neprekidna na $[a,b]^2$. Tražimo neprekidna rješenja $y(x)$ ove jednadžbe. Promotrimo sada Picardovu iteraciju za ovu Volterrinu integralnu jednadžbu:

$$y_0(x) = f(x) \tag{1.42}$$

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y_{n-1}(t)dt, \quad \text{gdje je} \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.43}$$

Možemo se pitati, koja bi bila motivacija za prethodnu iteraciju? Kako bi nam ona mogla dati rješenje od Volterrine jednadžbe? Motivacija bi se mogla pronaći u slijedećem. Od iteracije očekujemo da će nam dati niz funkcija $y_n(x)$ neprekidnih na $[a,b]$ koje će uniformno konvergirati u neku neprekidnu funkciju $y(x)$ na $[a,b]$ za koju bismo htjeli postići da je rješenje Volterrine jednadžbe. Lako se može pokazati zašto bi funkcija $y(x)$, u koju bi niz $y_n(x)$ uniformno konvergirao, bila rješenje Volterrine jednadžbe. Naime, ukoliko uzmemo limes definicije iterativnog niza (1.43) te osim uniformne konvergencije y_n u y se ispuni i da $\int_a^x K(x,t)y_{n-1}(t)dt$ uniformno konvergira u $\int_a^x K(x,t)y(t)dt$ tada bi vrijedilo:

$$\lim_{n\to\infty}(y_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\{f(x) + \int_a^x K(x,t)y_{n-1}(t)dt\} \tag{1.44}$$

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad \text{za svaki} \quad x \in [a,b] \tag{1.45}$$

gdje upravo dobivamo Volterrinu jednadžbu, što potvrđuje da je $y(x)$ traženo rješenje. Mogli bismo reći da je motivacija za Picardovu iteraciju upravo to da u limesu definicije iterativnog niza dobivamo Volterrinu jednadžbu. U nastavku slijedi dokaz da Picardova iteracija (1.42)-(1.43) daje jedinstveno rješenje Volterrine jednadžbe.

Teorem 1.2.1. *Volterrina jednadžba:*

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{1.46}$$

gdje je $f(x)$ funkcija neprekidna na [a,b] te $K(x,t)$ i $\frac{\partial K}{\partial x}$ funkcije neprekidne na [a,b]^2, ima jedinstveno rješenje y(x) koje je neprekidno na [a,b].

Dokaz.

Za početak treba dokazati da je svaki član niza (y_n) neprekidna funkcija na [a,b] jer to garantira da će i funkcija $y(x)$ u koju niz uniformno konvergira (ukoliko uniformno konvergira) biti neprekidna funkcija na $[a,b]$ po teoremu **[I](a)**(i). Induktivno, tvrdnja vrijedi za $n = 0$ jer je $y_0(x)$ neprekidna zbog izbora funkcije f. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = n - 1$. Tada slijedi da je za svaki $x \in [a,b]$ funkcija $K(x,t)y_{n-1}$ neprekidna, pa je onda i integrabilna te integral $\int_a^x K(x,t)y(t)dt$ postoji za svaki $x \in [a,b]$. Funkcija $y_n(x)$ dobro je definirana na $[a,b]$. Konačno, po **[G]** je integral $\int_a^x K(x,t)y(t)dt$ diferencijabilan pa time i neprekidan, pa je i y_n neprekidna na $[a,b]$. Po principu matematičke indukcije svaki član niza (y_n) neprekidna je funkcija na $[a,b]$. Dokažimo, nadalje, da niz (y_n) uniformno konvergira. Tu ćemo se okoristiti slijedećom činjenicom:

$$y_N - y_0 = \sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1}) \tag{1.47}$$

$$y_N = y_0 + \sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1}) \tag{1.48}$$

Ukoliko bi suma $\sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1})$ uniformno konvergirala u neki u kada $N \to \infty$ tada bi slijedilo:

$$\lim_{N\to\infty} y_N = \lim_{N\to\infty}(y_0 + \sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1})), \tag{1.49}$$

$$y = y_0 + u, \tag{1.50}$$

da i (y_n) uniformno konvergira k nekoj funkciji y. Dakle, uniformna konvergencija niza (y_n) svodi se na uniformnu konvergentnost reda $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1})$. Konvergenost tog reda ćemo dokazati Weierstrassovim M-testom **[H]**, pronalazeći gornju među M_n za svaki član niza $\left(\left|y_n - y_{n-1}\right|\right)$, dakle:

$$\left|y_n - y_{n-1}\right| \leq M_n, \tag{1.51}$$

za koju bi vrijedilo da

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{konvergira.} \tag{1.52}$$

Tada bi po Weierstrassovom M-testu **[H]** slijedilo da je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) \quad \text{uniformno konvergentan,} \tag{1.53}$$

te bi slijedila uniformna konvergencija od (y_n).

Uniformna konvergencija niza (y_n) se, dakle, svodi na pronalazak te gornje međe M_n koja ispunjava (1.51) i (1.52). U svrhe nalaženja te gornje međe M_n, podsjetimo se da su funkcije $K(x,t)$ i f neprekinute pa po **[A]** i omeđene. Neka je:

$$\left|K(x,t)\right| \leq L, \quad \left|f(x)\right| \leq M \quad \text{za sve} \quad x, t \in [a,b]. \tag{1.54}$$

gdje su L i M nenegativne konstante. Pokušajmo sada odrediti gornju među M_n promatrajući prva dva člana niza $\left(\left|y_n - y_{n-1}\right|\right)$:

$$\begin{aligned}
\left|y_1(x) - y_0(x)\right| &= \left|\int_a^x K(x,t) y_0(t) dt\right| && (1.55)\\
&\leq \int_a^x \left|K(x,t)\right| \left|y_0(t)\right| dt && (1.56)\\
&\leq LM(x-a), \quad x \in [a,b], && (1.57)\\
\left|y_2(x) - y_1(x)\right| &= \left|\int_a^x K(x,t)(y_1(t) - y_0(t)) dt\right| && (1.58)\\
&\leq \int_a^x \left|K(x,t)\right| \left|y_1(t) - y_0(t)\right| dt && (1.59)\\
&\leq L^2 M \frac{(x-a)^2}{2}, \quad x \in [a,b]. && (1.60)
\end{aligned}$$

Iz prva dva člana bismo mogli pretpostaviti da općenita gornja međa M_n glasi:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq L^n M \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.61}$$

Kada se $\left|y_1(x) - y_0(x)\right|$ ne bi uzela kao funkcija od t u (1.58) tada bi najmanja gornja međa bila veća, ne bi se pojavio faktor $\frac{1}{2}$ u (1.58) koji proistječe od integracije, tj. faktor $\frac{1}{n!}$ u općenitom slučaju koji proistječe od integracije te bismo dobili lošiju gornju među:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq L^n M(x-a)^n, \quad x \in [a,b], n \in \mathbb{N}. \tag{1.62}$$

što je lošija gornja međa upravo za taj faktor $\frac{1}{n!}$ koji proistječe od uzimanja $\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right|$ za funkciju od t pod integralom. Dokažimo da (1.61) vrijedi za $n \in \mathbb{N}$. Baza indukcije je već dokazana, a sada pretpostavimo da tvrdnja (1.61) vrijedi za neki $k = n-1$, $k \geq 1$. Sada slijedi:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| = \left|\int_a^x K(x,t)(y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t))dt\right| \tag{1.63}$$

$$\leq \int_a^x \left|K(x,t)\right|\left|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\right| dt \tag{1.64}$$

$$\leq \int_a^x L \cdot L^{n-1}\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}dt \tag{1.65}$$

$$\leq L^n M\frac{(x-a)^n}{n!}, \quad \text{za svaki} \quad x \in [a,b], \tag{1.66}$$

pa po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja (1.61). Ponovno se uzelo da je $\left|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)\right|$ funkcija od t a ne od x, iz istih razloga kao što je prethodno objašnjeno. Prethodnim smo dobili traženi M_n:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq L^n M\frac{(x-a)^n}{n!} \leq L^n M\frac{(b-a)^n}{n!} \equiv M_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.67}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(b-a)^n}{n!} = M(e^{L(b-a)} - 1). \tag{1.68}$$

Slijedi da (y_n) uniformno konvergira na $[a,b]$ u neku funkciju $y(x)$. Kako je svaki član niza (y_n) neprekidna funkcija, to povlači da je i y neprekidna funkcija na $[a,b]$. Činjenica da (y_n) uniformno konvergira u funkciju y na $[a,b]$ sada omogućuje da za svaki proizvoljno mali $\varepsilon = \varepsilon' L > 0$ možemo naći N, takav da čim je $n > N$ slijedi:

$$\left|y(t) - y_n(t)\right| < \varepsilon', \quad \text{za svaki } t \in [a,b], \tag{1.69}$$

a onda i:

$$\left|K(x,t)y(t) - K(x,t)y_n(t)\right| < L\frac{\varepsilon'}{L} = \varepsilon, \quad \text{za svaki } t \in [a,b]. \tag{1.70}$$

Time je zapravo pokazano da za svaki fiksni $x \in [a,b]$ funkcija $K(x,t)y_n(t)$ uniformno konvergira u $K(x,t)y(t)$ na $[a,b]$ kao funkcija od t. Sada zbog teorema **[I](a)** slijedi da za svaki fiksni $x \in [a,b]$ integral $\int_a^x K(x,t)y_n(t)dt$ konvergira u $\int_a^x K(x,t)y(t)dt$ na $[a,b]$.

Uzimanjem limesa obiju strana definicije $y_n(x)$, baš kao u (1.42) i (1.43), sada slijedi da je funkcija $y(x)$ rješenje Volterrine jednadžbe. Da bismo imali tvrdnju teorema još preostaje dokazati da je rješenje jedinstveno. U tom smislu, pretpostavimo suprotno, da postoje dva rješenja Volterrine jednadžbe u oznaci y(x) i Y(x). Po definiciji rješenja Volterrine jednadžbe to su neprekidne funkcije na $[a, b]$, pa je i njihova razlika neprekidna funkcija na $[a, b]$. Slijedi da je njihova razlika omeđena po **[A]**. Neka je:

$$\left|y(x) - Y(x)\right| \leq P, \quad \text{za sve x} \in [a, b], \tag{1.71}$$

gdje je P nenegativna konstanta. Kako obje funkcije $y(x)$ i $Y(x)$ zadovoljavaju Volterrinu jednadžbu, sada slijedi:

$$\left|y(x) - Y(x)\right| = \left|\int_a^x K(x,t)(y(t) - Y(t))dt\right| \tag{1.72}$$

$$\leq \int_a^x \left|K(x,t)\right|\left|(y(t) - Y(t))\right| dt \tag{1.73}$$

$$\leq LP(x - a), \text{za sve } x \in [a, b]. \tag{1.74}$$

Dokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\left|y(x) - Y(x)\right| \leq L^n P \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad \text{za sve x} \in [a, b]. \tag{1.75}$$

Tvrdnja vrijedi za $n = 1$ a iz pretpostavke da vrijedi za neki $n = k - 1$ slijedi:

$$\left|y(x) - Y(x)\right| = \left|\int_a^x K(x,t)(y(t) - Y(t))dt\right| \tag{1.76}$$

$$\leq \int_a^x L \cdot L^{n-1} P \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} dt \tag{1.77}$$

$$\leq \int_a^x L^n \frac{(x-a)^n}{n!} dt, \text{za sve x} \in [a, b]. \tag{1.78}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja (1.75) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Znajući da desna strana nejednakosti (1.75) iščezava u 0 kada $n \to \infty$ sada slijedi:

$$y(x) = Y(x), \quad \text{za sve } x \in \text{[a,b]}. \tag{1.79}$$

Drugim riječima, rješenje je jedinstveno i imamo tvrdnju **Teorema 1.2.2**.
Promotrimo sada dva primjera.

Primjer 1.2.2. *Pronađimo rješenje Volterrine jednadžbe:*

$$y(x) = e^x + 4\int_0^x (x-t)y(t)dt, \tag{1.80}$$

i to tako da ju prvo prevedemo u diferencijalnu jednadžbu sa početnim uvjetima a potom dobivenu diferencijalnu jednadžbu riješimo.

S obzirom da jednadžba (1.80) zadovoljava uvjete Teorema **1.2.2**, slijedi da postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe. Prevedimo ju sada u diferencijalni oblik. Jednadžbu (1.80) možemo derivirati po x. Koristeći **[G]** dobivamo:

$$y'(x) = e^x + 4\int_0^x y(t)dt. \tag{1.81}$$

Dobivenu jednadžbu možemo ponovno derivirati pa dobivamo:

$$y''(x) - 4y(x) = e^x \tag{1.82}$$

drugim riječima, dobili smo običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda, uz početne uvjete:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \tag{1.83}$$

Diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetima rješavamo standardnom metodom. Prvo tražimo rješenje pripadajućeg homogenog sustava, stavljajući $y(x) = e^{\alpha x}$. Rješenje glasi:

$$y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}. \tag{1.84}$$

Partikularno rješenje glasi:

$$y_p(x) = Ae^x. \tag{1.85}$$

Kada partikularno rješenje uvrstimo u jednadžbu (1.82) dobivamo da je:

$$A = -\frac{1}{3}. \tag{1.86}$$

Generalno rješenje glasi:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + -\frac{1}{3}e^x, \tag{1.87}$$

gdje nam još nedostaju c_1 i c_2. Uvrstivši generalno rješenje u dva početna uvjeta (1.83) dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koji nam daje iznos c_1 i c_2, iz čega konačno slijedi jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe (1.82) s početnim uvjetima (1.83.):

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + e^{2x} + -\frac{1}{3}e^x. \tag{1.88}$$

Kako je diferencijalna jednadžba (1.82) s početnim uvjetima (1.83) ekvivalentna polazišnoj Volterrinoj jednadžbi, ovo je ujedno i rješenje te Volterrine jednadžbe.

Primjer 1.2.3. *Pronađimo rješenje Volterrine jednadžbe:*

$$y(x) = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\int_0^x sin(x-t)y(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{1.89}$$

i to tako da ju prvo prevedemo u diferencijalnu jednadžbu sa početnim uvjetima a potom dobivenu diferencijalnu jednadžbu riješimo.

S obzirom da jednadžba (1.89) zadovoljava uvjete Teorema **1.2.2**, slijedi da postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe. Prevedimo ju sada u diferencijalni oblik. Jednadžbu (1.89) možemo derivirati po x. Koristeći **[G]** dobivamo:

$$y'(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\int_0^x cos(x-t)y(t)dt \tag{1.90}$$

Dobivenu jednadžbu možemo ponovno derivirati po x čime dobivamo:

$$y''(x) = \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^x sin(x-t)y(t)dt}_{-4y(x)+5x}, \tag{1.91}$$

drugim riječima, linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda:

$$y''(x) + y(x) = \frac{5}{4}x, \tag{1.92}$$

uz početne uvjete:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{5}{4}. \tag{1.93}$$

Diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetima rješavamo standardnom metodom. Prvo tražimo rješenje pripadajućeg homogenog sustava, stavljajući $y(x) = e^{\alpha x}$. Rješenje glasi:

$$y_c(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix}. \tag{1.94}$$

Partikularno rješenje glasi:

$$y_p(x) = Ax + B. \tag{1.95}$$

Kada partikularno rješenje uvrstimo u jednadžbu (1.92) dobivamo da je:

$$A = -\frac{5}{4}, \quad B = 0. \tag{1.96}$$

Generalno rješenje glasi:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} - \frac{5}{4}x, \tag{1.97}$$

gdje nam još nedostaju c_1 i c_2. Uvrstivši generalno rješenje u dva početna uvjeta (1.93) dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koji nam daje iznos c_1 i c_2, iz čega konačno slijedi jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe (1.92) s početnim uvjetima (1.93.):

$$y(x) = \frac{5}{4}ie^{-i2x} - \frac{5}{4}ie^{i2x} - \frac{5}{4}x. \tag{1.98}$$

Rješenje možemo sređivanjem prikazati u ljepšem obliku:

$$y(x) = \frac{5}{4}(x - 2sin(2x)). \tag{1.99}$$

Kako je diferencijalna jednadžba (1.92) s početnim uvjetima (1.93) ekvivalentna polazišnoj Volterrinoj jednadžbi, ovo je ujedno i rješenje te Volterrine jednadžbe.

Poglavlje 2

Teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi

U prethodnom poglavlju primjenili smo Picardovu metodu na pokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja Volterrine jednadžbe. To dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja za Volterrinu jednadžbu daje motivaciju da se Picardova metoda počne smatrati korisnim teorijskim alatom u dokazivanju teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja u općenitijem smislu. Nadalje, ti teoremi su od velike praktične koristi. Za većinu diferencijalnih jednadžbi teško je naći uopće bilo kakvo rješenje, a i kada se ono nađe, postavlja se pitanje da li je ono jedinstveno.

Povrh toga, većina diferencijalnih jednadžbi nema rješenje koje je moguće prikazati u zatvorenom obliku: koristeći određeni skup elementarnih funkcija te konačan skup elementarnih operacija među njima. Sve to upućuje na to da su teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti iznimno korisni u praksi. Uz male napore može se saznati da li je određena diferencijalna zadaća uopće rješiva, a ako je već rješena, onda jedinstvenost upućuje na to da se ne treba tražiti dalje druga rješenja već da je zadaća rješena u cjelosti. Slijede teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

2.1 Diferencijalne jednadžbe prvog reda u jednoj nezavisnoj varijabli

U ovom potpoglavlju razmatramo jedinstvenost i postojanje rješenja $y = y(x)$ diferencijalne jednadžbe:

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

koja zadovoljava početni uvjet:

$$y(a) = c, \tag{2.2}$$

gdje je a neka točka u domeni funkcije $y(x)$ te c neka konstanta. Potrebna su neka ograničenja na f da bi se postiglo postojanje i jedinstvenost rješenja. Ta ograničenja su:

(a) f je neprekidna u području $U \subseteq \mathbb{R}^2$ koje sadrži pravokutnik Ω:

$$\Omega = \left\{(x, y) : |x - a| \leq h, \left|y - c\right| \leq k\right\} \tag{2.3}$$

(b) f zadovoljava slijedeći Lipschitzov uvjet (Lipschitz neprekinutost) za sve parove točaka (x,y_1), (x,y_2) unutar U:

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq A\left|y_1 - y_2\right|, \tag{2.4}$$

gdje je A neka pozitivna konstanta.

(c) M, h, k su takve konstante da:

$$Mh \leq k, \tag{2.5}$$

gdje je $M = \sup\{\left|f(x, y)\right| : (x, y) \in R\}$.

Promotrimo motivaciju dokaza, koja je slična kao u slučaju sa Volterrinom jednadžbom. Diferencijalna jednadžba (2.1) sa početnim uvjetom (2.2) može se reformulirati u integralnu jednadžbu. Da bi to postigli, pretpostavimo da postoji rješenje diferencijalne jednadžbe (2.1) sa uvjetom (2.2), neprekinuta funkcija $y(x) : [a-h, a+h] \to [k-c, k+c]$ gdje je $y(a) = c$. Funkcija $f(t, y(t))$ neprekidna je jer su funkcije t i $y(t)$ neprekidne te $(t, y(t)) \in \Omega$. Po tome je $f(t, y(t))$ i integrabilna pa sada možemo integrirati obje strane (2.1). Dobivamo:

$$y(x) - y(a) = \int_a^x f(t, y(t))dt, \quad x \in [a - h, a + h] \tag{2.6}$$

a uključivši uvjet (2.2) slijedi:

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y(t))dt, \quad x \in [a - h, a + h] \tag{2.7}$$

Dakle, bilo koje rješenje diferencijalne zadaće (2.1) sa uvjetom (2.2) odmah zadovoljava i integralnu jednadžbu (2.7). Ako sada krenemo obrnuto, da postoji neka neprekidna funkcija $y(x) : [a - h, a + h] \to [k - c, k + c]$ koja zadovoljava integralnu jednadžbu (2.7), tada po Osnovnom teoremu analize **[E]**, slijedi da je $y(x)$ primitivna funkcija od $f(x,y(x))$ na $[a - h, a + h]$. Znajući to sada slijedi da je:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{te} \quad y(a) = c. \tag{2.8}$$

Drugim riječima, svako rješenje integralne jednadžbe (2.7) je i rješenje diferencijalne jednadžbe (2.1) sa uvjetom (2.2). Skup rješenja tih dvaju sustava je isti. Sada tu činjenicu možemo iskoristiti da umjesto rješavanja diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetima rješavamo integralnu jednadžbu.

Teorem 2.1.1. ***(Cauchy-Picardov teorem)*** *Neka su uvjeti (a), (b) i (c) ispunjeni. Tada postoji $h > 0$ i funkcija $y : [a-h, a+h] \to \mathbb{R}$ koja je rješenje Cauchyjevog problema (2.1) i (2.2). Štoviše, rješenje je jedinstveno među funkcijama čiji grafovi koje leže u Ω.*

Dokaz

Definirajmo niz funkcija (y_n) na $[a-h, a+h]$ sa:

$$y_0(x) = c, \tag{2.9}$$

$$y_n(x) = c + \int_a^x f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad (n \geq 1). \tag{2.10}$$

Provjeravamo da li niz (y_n) zadan iteracijom (2.10) ima željena svojstva: neprekidnost svakog člana y_n na $[a-h, a+h]$ te uniformna konvergencija niza u neku funkciju y.

Prvo dokažimo neprekidnost svakog člana (y_n). U tom smislu dokažimo induktivno da je svaka funkcija $y_n(x)$ neprekidna na $[a-h, a+h]$ te da joj graf leži u Ω. Ova dodatna pretpostavka o grafu će se pokazati bitnom u koraku indukcije. $y_0(x)$ je neprekidna na $[a-h, a+h]$ po definiciji te joj graf leži u Ω. Pretpostavimo sada da su funkcije $y_0(x), y_1(x), ..., y_{n-1}(x)$ neprekidne na $[a-h, a+h]$ te da im graf leži u Ω.

Sada je $f(t, y_{n-1}(t))$ neprekidna na $[a-h, a+h]$ jer su t i $y_{n-1}(t)$ neprekidne na $[a-h, a+h]$ te je $(t, y_{n-1}(t)) \in \Omega$ za svaki $t \in [a-h, a+h]$. Primjetimo da uvjet je da je $(t, y_{n-1}(t)) \in \Omega$ za svaki $t \in [a-h, a+h]$ isto što i uvjet da graf od $y_{n-1}(t)$ leži u Ω. Dakle, uvjet da se graf od $y_0(x), y_1(x), ..., y_{n-1}(x)$ nalazi u Ω osigurava neprekidnost od $f(t, y_{n-1}(t))$. Funkcija $f(t, y_{n-1}(t))$ je sada neprekidna pa i integrabilna pa:

$$\int_a^x f(t, y_{n-1}(t))dt \tag{2.11}$$

postoji za $x \in [a-h, a+h]$. Po Osnovnom teoremu analize **[E]** iz definicije y_n (2.10) sada slijedi:

$$y_n'(x) = f(x, y_{n-1}(x)), \quad x \in [a-h, a+h], \tag{2.12}$$

drugim riječima, $y_n(x)$ je diferencijalna pa po tome i neprekidna. Nadalje, provjerimo da li graf od $y_n(x)$ leži u Ω. Iz razmatranja:

$$\left|y_n(x) - c\right| \leq \left|\int_a^x f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \leq \int_a^x \left|f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \leq Mh \overset{*}{\leq} k, \quad x \in [a-h, a+h] \tag{2.13}$$

slijedi da graf od y_n leži u Ω. U zadnjoj nejednakosti ($\overset{*}{\leq}$) smo primjenili i time opravdali potrebu za ograničenjem (c). Sada po principu matematičke indukcije slijedi da je svaki član niza (y_n) neprekidna funkcija na $[a-h, a+h]$ te da joj graf leži u Ω.

Dokažimo uniformnu konvergenciju niza (y_n). Baš kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju u (1.47)-(1.53), to se svodi na uniformnu konvergenciju niza $(y_n - y_{n-1})$ koju dokazujemo Weierstrassovim M-testom **[H]**, omeđujući niz $\left(\left|y_n - y_{n-1}\right|\right)$ odozgo nekim M_n čiji red konvergira. Da bismo pronašli taj M_n promotrimo prva dva elementa niza $\left(\left|y_n - y_{n-1}\right|\right)$:

$$\begin{align}
\left|y_1(x) - y_0(x)\right| &= \left|\int_a^x f(t, y(t))dt\right| \tag{2.14}\\
&\leq \left|\int_a^x \left|f(t, y(t))\right| dt\right| \tag{2.15}\\
&\leq M|x-a|, \quad x \in [a-h, a+h] \tag{2.16}\\
\left|y_2(x) - y_1(x)\right| &= \left|\int_a^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))dt\right| \tag{2.17}\\
&\leq \left|\int_a^x \left|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\right| dt\right| \tag{2.18}\\
&\leq \left|\int_a^x |A|\left|y_1(t) - y_0(t)\right| dt\right| \tag{2.19}\\
&\leq \left|\int_a^x |A||t-a|\, dt\right| \tag{2.20}\\
&\leq MA\frac{|x-a|^2}{2!}, \quad x \in [a-h, a+h]. \tag{2.21}
\end{align}$$

Dodatne apsolutne zagrade koje smo stavili u (2.15) i (2.18) izvan integrala postavljene su za slučaj da je $x < a$, jer bi u tom slučaju integral nenegativne funkcije bio negativan, pa se ograđujemo od toga stavljajući dodatnu apsolutnu zagradu. Također, funkciju $\left|y_1(x) - y_0(x)\right|$ smo shvatili kao funkciju od t u (2.19) iz istih razloga kao u prethodnom poglavlju, a to je da dobijemo manju gornju među. Iz ta dva slučaja se nazire da općenita međa glasi:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| = A^{n-1}M\frac{|x-a|^n}{(n-1)!} \quad \text{za svaki} \quad x \in [a-h, a+h], n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Dokažimo (2.22) indukcijom. Baza vrijedi po (2.16), a uz pretpostavku da tvrdnja vrijedi za neki $k = n - 1$ slijedi:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| = \left|\int_a^x f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))dt\right| \tag{2.23}$$

$$\leq \left|\int_a^x \left|f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))\right| dt\right| \tag{2.24}$$

$$\leq \left|\int_a^x |A|\left|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\right| dt\right| \tag{2.25}$$

$$\leq \left|\int_a^x |A||A|^{n-1}\frac{|x-a|^{n-1}}{(n-1)!}dt\right| \tag{2.26}$$

$$\leq MA^n\frac{|x-a|^n}{n!}, \quad x \in [a-h, a+h], \tag{2.27}$$

pa po principu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja (2.22) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada po ispunjenju kriterija Weierstrassovog M-testa **[H]**:

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq \frac{A^{n-1}Mh^n}{n!} \equiv M_n \tag{2.28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{M}{A}(e^{Ah} - 1) \tag{2.29}$$

slijedi da je red $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1})$ uniformno konvergentan na $[a-h, a+h]$ što povlači uniformnu konvergentnost niza (y_n) u neku funkciju y na $[a-h, a+h]$. Sada zbog uniformne konvergencije (y_n) za svaki zadani $\varepsilon = A\varepsilon'$ možemo naći N, takav da čim je $n > N$ vrijedi:

$$\left|y_n(x) - y(x)\right| \leq \varepsilon', \quad \text{za svaki} \quad x \in [a-h, a+h], \tag{2.30}$$

no to zbog Lipschitz neprekidnosti od f u drugoj varijabli, uvjet (b), povlači:

$$\left|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))\right| \overset{*}{\leq} A\left|y_n(x) - y(x)\right| \leq A\varepsilon' \leq \varepsilon, \quad \text{za svaki} \quad x \in [a-h, a+h], \tag{2.31}$$

drugim riječima, uniformnu konvergenciju $f(t, y_n(t))$ u $f(t, y(t))$ na $[a-h, a+h]$. Sada po **[I](a)**(ii) za svaki fiksni x vrijedi:

$$\int_a^x f(t, y_n(t))dt \quad \text{konvergira u} \quad \int_a^x f(t, y(t))dt, \quad \text{kada} \quad n \to \infty. \tag{2.32}$$

Ukoliko sada uzmemo limes definicije iterativnog niza:

$$\lim_{n\to\infty}(y_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\{c + \int_a^x f(t, y_{n-1}(t))dt\}, \quad x \in [a-h, a+h] \tag{2.33}$$

dobivamo:

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y(t))dt, \quad [a-h, a+h]. \tag{2.34}$$

Time vidimo da je $y(x)$ rješenje integralne jednadžbe (2.7), za koju je već pokazano da je ekvivalentna sa diferencijalnom zadaćom (2.1) i (2.2).

Time smo dokazali egzistenciju rješenja, te preostaje dokaz jedinstvenosti. Jedinstvenost se, kao i u slučaju sa Volterrinom jednadžbom dokazuje tako da pretpostavimo suprotno. Pretpostavimo da osim $y(x)$ postoji još neko rješenje diferencijalne zadaće (2.1) i (2.2) u oznaci $Y(x)$. Te dvije funkcije su neprekidne, pa im je i razlika neprekidna, a time i omeđena po **[A]**:

$$\left|y(x) - Y(x)\right| \leq N \quad \text{za sve } x \in [a-h, a+h]. \tag{2.35}$$

Dokaz jedinstvenosti se svodi na postizanje kontradikcije sa pretpostavkom da postoje dva rješenja, a to ćemo postići omeđivanjem $\left|y(x) - Y(x)\right|$ nekim nizom koji iščezava:

$$\left|y(x) - Y(x)\right| \leq A^n N \frac{|x-a|^n}{n!} \quad \text{za sve } x \in [a-h, a+h]. \tag{2.36}$$

Tvrdnju (2.36) treba dokazati indukcijom. S obzirom da funkcije $y(x)$ i $Y(x)$ ispunjavaju integralnu jednadžbu, slijedi:

$$\begin{aligned} \left|y(x) - Y(x)\right| &= \left|\int_a^x f(t, y(t)) - f(t, Y(t))dt\right| && (2.37)\\ &\leq \left|\int_a^x \left|y(t) - Y(t)\right| dt\right| && (2.38)\\ &\leq AN|x-a|, \quad \text{za sve} \quad x \in [a-h, a+h], && (2.39) \end{aligned}$$

drugim riječima, baza indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja (2.36) vrijedi za neki $k = n-1$ slijedi:

$$\begin{aligned} \left|y(x) - Y(x)\right| &= \left|\int_a^x f(t, y(t)) - f(t, Y(t))dt\right| && (2.40)\\ &\leq \left|\int_a^x \left|f(t, y(t)) - f(t, Y(t))dt\right|\right| && (2.41)\\ &\leq \left|\int_a^x |A|\left|y(t) - Y(t)\right| dt\right| && (2.42)\\ &\leq \left|\int_a^x |A||A|^{n-1} \frac{|x-a|^{n-1}}{(n-1)!} dt\right| && (2.43)\\ &\leq NA^n \frac{|x-a|^n}{n!}, \quad x \in [a-h, a+h]. && (2.44) \end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, slijedi da tvrdnja (2.36) vrijedi za svaki n $\in \mathbb{N}$. S obzirom da desna strana u nejednakosti (2.36) iščezava u 0 kada $n \to \infty$ za svaki $x \in [a - h, a + h]$, tada slijedi da je $y(x) = Y(x)$ i to dokazuje jedinstvenost rješenja diferencijalne zadaće (2.1)-(2.2). Time je dokazana tvrdnja **Teorema 3.1.1.**

2.2 Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi

Cauchyjeva zadaća iz prethodnog poglavlja sadržavala je jednu običnu diferencijalnu jednadžbu u jednoj varijabli x, a u ovom poglavlju promotrit ćemo sustav od konačnog broja običnih diferencijalnih jednadžbi u jednoj varijabli x. Ispostavit će se da se u dokazu postojanja i jedinstvenosti rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi možemo okoristiti prethodnim Teoremom **2.1.1**, jer su koraci u dokazu, formalno govoreći, isti. U naumu da povežemo i opravdamo vezu među koracima tih dvaju teorema, promotrimo prvo sustav od dvije diferencijalne jednadžbe:

$$y' = f(x, y, z) \tag{2.45}$$

$$z' = g(x, y, z), \tag{2.46}$$

uz početne uvjete

$$y(a) = c, \tag{2.47}$$

$$z(a) = d. \tag{2.48}$$

Rješenje koje tražimo su neprekidne funkcije $y = y(x)$, $z = z(x)$ koje zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe (2.45)-(2.46) te početne uvjete (2.47)-(2.48). Pri tome je a točka u domeni funkcija $y(x)$ i $z(x)$, a c i d su fiksne konstante iz $\mathbb{R}$. Da bi rješenje ove Cauchyjeve zadaće postojalo te bilo jedinstveno, nužno je kao i u prethodnom poglavlju staviti neka ograničenja na funkcije f i g:

(a) f i g su neprekidne u području $V \subseteq \mathbb{R}^3$ koje sadrži kvadar:

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) : |x - a| \leq h, \quad max(|y - c|, |z - d|) < k\Big\} \tag{2.49}$$

(b) f i g zadovoljavaju slijedeće Lipschitzove uvjete na svake dvije točke u V:

$$\Big|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)\Big| \leq A \max(|y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|) \tag{2.50}$$

$$\Big|g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)\Big| \leq B \max(|y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|) \tag{2.51}$$

gdje su A i B pozitivne konstante,

(c) te vrijedi

$$\max(M, N) \cdot h \leq k, \tag{2.52}$$

gdje su M i N:

$$M = \sup\left\{ \left| f(x, y, z) \right| : (x, y, z) \in S \right\} \tag{2.53}$$

$$N = \sup\left\{ \left| g(x, y, z) \right| : (x, y, z) \in S \right\} \tag{2.54}$$

Da bi uvidjeli vezu između sustava dviju diferencijalnih jednadžbi i primjera s jednom diferencijalnom jednadžbom iz prethodnog poglavlja, zapišimo prethodnu zadaću u vektorskom obliku. Neka je:

$$\mathbf{y} = (y, z), \quad \mathbf{f} = (f, g), \quad \mathbf{c} = (c, d), \quad \mathbf{A} = (A, B), \quad \mathbf{M} = (M, N), \tag{2.55}$$

te uvedimo normu:

$$\left\| \mathbf{y} \right\| = \max\left(\left| y \right|, |z| \right). \tag{2.56}$$

Uz pomoć ovakvog zapisa sada možemo prethodnu zadaću zapisati u povoljnijem obliku. Tražimo neprekidnu vektorsku funkciju $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y(x), z(x))$ koja zadovoljava:

$$\mathbf{y'} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \tag{2.57}$$

pri čemu vrijedi početni uvjet

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{c}. \tag{2.58}$$

Da bismo to postigli, moramo postaviti neka ograničenja na $\mathbf{f}$:

(a) $\mathbf{f}$ je neprekidna u području $V \subseteq \mathbb{R}^3$ koja sadrži kuboid:

$$\Omega = \left\{ (x, \mathbf{y}) : |x - a| \leq h, \quad \left\| \mathbf{y} - \mathbf{c} \right\| \leq k \right\} \tag{2.59}$$

(b) $\mathbf{f}$ ispunjava slijedeći Lipschitzov uvjete na sve točke u V:

$$\left\| \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2) \right\| \leq \|\mathbf{A}\| \left\| \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \right\|, \tag{2.60}$$

(c) te neka su M, h i k takvi da vrijedi:

$$Mh \leq k, \tag{2.61}$$

gdje je $\mathrm{M} = \sup\left\{ \left\| \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \right\| : (x, \mathbf{y}) \in V \right\}$.

Zapis (2.45)-(2.54) identičan je zapisu (2.57)-(2.61), no ovaj novi vektorski zapis puno jasnije prikazuje vezu između zadaće s više diferencijalnih jednadžbi i zadaće s jednom diferencijalnom jednadžbom. Iskažimo sada generalizaciju prethodnog sustava od dvije jednadžbe na sustav od n diferencijalnih jednadžbi. Za zadane funkcije F_1,...,F_n, gdje je $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tražimo funkcije $U_1(x)$,...,$U_n(x)$ neprekidne na $[a-h, a+h]$ koje zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$U_1'(x) = F_1(x, U_1, ..., U_n) \tag{2.62}$$
$$U_2'(x) = F_2(x, U_1, ..., U_n) \tag{2.63}$$
$$... \tag{2.64}$$
$$U_n'(x) = F_n(x, U_1, ..., U_n) \tag{2.65}$$

uz početne uvjete:

$$U_1'(a) = c_1 \tag{2.66}$$
$$U_2'(a) = c_2 \tag{2.67}$$
$$... \tag{2.68}$$
$$U_n'(a) = c_n. \tag{2.69}$$

Ili ekvivalentno u vektorskom obliku, za zadanu neprekidnu funkciju $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ tražimo neprekidnu funkciju $\mathbf{U}(x)$: $[a-h, a+h] \to \mathbb{R}^n$ koja zadovoljava slijedeću vektorsku diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathbf{U'}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{U}(x)), \tag{2.70}$$

s početnim uvjetom:

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{c}. \tag{2.71}$$

Moramo staviti neka ograničenja na **F**. Neka je:

(a) **F** je neprekidna u $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ koja sadrži skup:

$$\Omega = \Big\{(x, \mathbf{U}) : |x-a| \leq h, \quad \|\mathbf{U} - \mathbf{c}\| \leq k\Big\} \tag{2.72}$$

(b) **F** ispunjava slijedeći Lipschitzov uvjete na sve točke u V:

$$\Big\|\mathbf{F}(x, \mathbf{U}_1) - \mathbf{F}(x, \mathbf{U}_2)\Big\| \leq L \|\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2\|, \tag{2.73}$$

(c) te neka su M, h i k takvi da vrijedi:

$$Mh \leq k, \tag{2.74}$$

gdje je $\mathrm{M} = \sup\Big\{\Big\|\mathbf{F}(x, \mathbf{U})\Big\| : (x, \mathbf{U}) \in \Omega\Big\}$.
Prethodna diferencijalna zadaća se može pretvoriti u ekvivalentni integralni oblik:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{c} + \int_a^x \mathbf{F}(t, \mathbf{U}(t))dt. \tag{2.75}$$

To je moguće jer integral svake jednakosti iz sustava (2.62)-(2.65) postoji, pa smo to još samo zapisali u vektorskom obliku. Picardova iteracija za prethodni integralni oblik bi glasila:

$$\mathbf{U}_0(x) = \mathbf{c} \tag{2.76}$$

$$\mathbf{U}_n(x) = \mathbf{c} + \int_a^x \mathbf{F}(t, \mathbf{U}_{n-1})(t)dt, \tag{2.77}$$

Gdje je, ponovno, učinjeno ništa drugo nego to da smo konstruirali n Picardovih iteracija: po jednu za svaku integralnu jednadžbu sustava, pa ponovno to zapisali u vektorski oblik. Iskažimo teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyjeve zadaće (2.70) i (2.71).

Teorem 2.2.1. *Neka $\mathbf{F}$ zadovoljava uvjete (2.72)-(2.74). Tada postoji $h > 0$ takav da Cauchyjeva zadaća (2.70) i (2.71) na intervalu $[a-h, a+h]$ ima rješenje. Štoviše, rješenje je jedinstveno među funkcijama čiji graf leži u Ω.*

Dokaz se svodi na to da dokažemo da su koraci ovog dokaza formalno jednaki koracima dokaza Teorema **2.1.1**. Prva preinaka je činjenica da koristimo dogovorenu normu a ne standardnu euklidsku u koracima gdje dokazujemo neprekidnost i uniformnu konvergenciju, no to ne ometa dokaz jer su svake dvije norme ekvivalentne. Nadalje, zamjenjujemo pojam neprekidnosti i uniformne konvergencije skalarne funkcije jedne varijable $y(x)$ sa pojmom neprekidnosti i uniformne konvergencije vektorske funkcije jedne varijable $\mathbf{U}(x)$=$(U_1(x), ..., U_n(x))$.

Induktivno pokazujemo da je svaka $\mathbf{U}_n$(x) neprekidna na $[a-h, a+h]$ te da joj graf leži u Ω. Potom da niz ($\mathbf{U}_n$(x)) uniformno konvergira ka funkciji $\mathbf{U}(x)$, neprekidnoj na $[a-h, a+h]$ s grafom u Ω. Konačno, zbog Lipschitzivosti $\mathbf{F}$ po $\mathbf{U}$, slijedi da $\mathbf{F}(x, \mathbf{U}_n(x))$ uniformno konvergira prema $\mathbf{F}(x, \mathbf{U}(x))$ na $[a-h, a+h]$ a time i da integral $\int_a^x \mathbf{F}(t, \mathbf{U}_n(t))dt$ konvergira prema $\int_a^x \mathbf{F}(t, \mathbf{U}(t))dt$, što potvrđuje da je dobivena neprekidna funkcija $\mathbf{U}$(x) rješenje integralne jednadžbe (2.75) ekvivalentne diferencijalnoj zadaći (2.70)-(2.71). Time imamo tvrdnju Teorema **2.2.1**.

Lako se može pokazati da je vektorska funkcija jedne varijable $\mathbf{U}(x) = (U_1(x), ..., U_n(x))$ neprekidna akko je neprekidna po svakoj komponentnoj funkciji $U_1(x), ..., U_2(x)$. Prethodni komentar dodatno osvjetljava činjenicu da neprekidno rješenje $\mathbf{U}(x)$ od (2.75), tj. (2.70) i (2.71), zaista znači i neprekidna rješenja $U_1, ..., U_n$ sustava (2.62)-(2.65).

2.3 Diferencijalna jednadžba n-tog reda

Pokušajmo sada iskoristiti prethodni Teorem **2.2.1** za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja slijedeće Cauchyjeve zadaće. Zadana je obična diferencijalna jednadžba n-tog reda:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.78}$$

uz početne uvjete:

$$y^{(k)} = c_k, \quad k = 0, ..., n-1. \tag{2.79}$$

Dokaz egzistencije i jedinstvenosti rješenja ove zadaće može se izvesti primjenom prethodnog Teorema **2.2.1**. Da bismo to postigli, moramo nekako dobiti sustav jednadžbi prvog reda iz jednadžbe (2.78). Znamo da je $(y^{(n)})'$=$y^{(n+1)}$ (očito) pa sustav možemo dobiti kao:

$$(y)' = y' \tag{2.80}$$
$$(y')' = y'' \tag{2.81}$$
$$\vdots$$
$$(y^{(n-3)})' = y^{(n-2)} \tag{2.82}$$
$$(y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} \tag{2.83}$$
$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.84}$$

Sada uz zamjenu oznaka $U_n = y^{(n-1)}$ na lijevoj strani te $F_n = y^{(n)}$ na desnoj strani (2.80)-(2.84) opažamo da je:

$$U_1' = F_1(x, U_1, U_2, ..., U_n) \tag{2.85}$$
$$U_2' = F_2(x, U_1, U_2, ..., U_n) \tag{2.86}$$
$$\vdots$$
$$U_n' = F_n(x, U_1, U_2, ..., U_n), \tag{2.87}$$

čime postaje očito da je (2.80)-(2.84) zapravo sustav od n diferencijalnih jednadžbi uz pripadajuće početne uvjete:

$$U_{k+1} = c_k, \quad k = 0, ..., n-1. \tag{2.88}$$

Da bismo primjenili Teorem **2.2.1** na ovaj sustav, potrebno je provjeriti da su ispunjeni uvjeti tog teorema. Funkcije F_i moraju biti neprekidne i Lipschitz neprekidne u zadnjih $(n-1)$ varijabli. To se svodi na neprekidnost i Lipschitz neprekidnost u zadnjih $n-1$ varijabli funkcije f s obzirom da za ostale F_i to vrijedi trivijalno. Dakle, potrebni uvjeti su:

(a) f je neprekidna u području $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ koje sadrži skup:

$$\Omega = \Big\{(x, \mathbf{U}) : |x - a| \leq h, \quad ||\mathbf{U} - \mathbf{c}|| \leq k\Big\} \tag{2.89}$$

(b) f je Lipschitz neprekinuta po zadnjih $(n-1)$ varijabli:

$$\Big|f(x, \mathbf{U}_a) - f(x, \mathbf{U}_b)\Big| \leq L|\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b|, \quad \text{za svaka dva} \quad \mathbf{U}_a, \mathbf{U}_b \in \Omega, \tag{2.90}$$

(c) te neka su M, h i k takvi da vrijedi:

$$Mh \leq k, \tag{2.91}$$

gdje je $\mathrm{M} = \sup\Big\{\Big\|\mathbf{F}(x, \mathbf{U})\Big\|: (x, \mathbf{U}) \in \Omega\Big\}$.

Teorem 2.3.1. *Neka su ispunjeni uvjeti (2.89)-(2.91). Tada postoji $h > 0$ takav da Cauchyjev problem (2.78), (2.79) ima rješenje na $[a-h, a+h]$. Rješenje je jedinstveno među među funkcijama čiji grafovi leže u $[a-h, a+h] \times [c_0 - k, c_0 + k]$.*

Poglavlje 3

Dodatak - korišteni teoremi

U ovom poglavlju navodimo određene rezultate matematičke analize koje smo često koristili u ovom radu.

Definicija 3.0.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ te $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Funkcija f: $A \to \mathbb{R}$ glatka je (neprekidno diferencijabilna) na A ukoliko derivacija f' postoji i neprekidna je na A. Funkcija g: $B \to \mathbb{R}$ glatka je na B ako parcijalne derivacije g_x, g_y postoje i neprekidne su na B.*

[A] Ako je funkcija f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ neprekidna, tada je i omeđena. Nadalje, ako je

$$m = inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}, \quad M = sup\{f(x) : a \leq x \leq b\},$$

tada postoje x i X u $[a,b]$ takvi da $f(x) = m$ i $f(X) = M$. Na sličan način je i neprekidna funkcija dviju varijabli omeđena na zatvorenom i omeđenom podskupu $\mathbb{R}^2$, te poprima svoj minimum i maksimum.

[B] Lagrangeov teorem srednje vrijednosti Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i glatka na (a, b) tada postoji $x_0 \in (a, b)$ za koji je

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0).$$

[C] Lančano pravilo Ako je F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $F = F(x_1, x_2, x_3)$, gdje je $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (i = 1,2,3) su neprekidne, tada , za svaki x_0 u $\mathbb{R}$,

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = \frac{dF}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx}(x_0) + \frac{dF}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dx}(x_0) + \frac{dF}{dx_3} \cdot \frac{dx_3}{dx}(x_0)$$

gdje je vrijednost $\frac{dF}{dx}$ izračunata u točki u $(x_1(x_0), x_2(x_0), x_3(x_0))$.

[D] Ako je f integrabilna na $[a,b]$, tada je i $|f|$ integrabilna na $[a,b]$ te vrijedi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|.$$

[E] Osnovni teorem analize Ako je f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ glatka (klase C^1), tada;

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

[F] Fubinijev teorem Ako je $f : [a, b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidna, tada integrali:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,t)dtdx, \qquad \int_c^d\int_a^b f(x,t)dtdx$$

postoje i jednaki su.

[G] Ako su $a : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $b : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidne funkcije te ako su $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i $\frac{\partial f}{\partial x}$ neprekidne funkcije tada je:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

[H] Weierstrassov M-test Neka su u_n: [a,b] $\to \mathbb{R}$ te M_n ne-negativne realne konstante za svaki $n \in \mathbb{N}$ te neka vrijedi:

$$|u_n(x)| \leq M_n \quad \text{za sve} \quad x \in [a,b]. \tag{3.1}$$

Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergentan, tada je i red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uniformno konvergentan na [a,b].

[I](a) Ako je s_n niz neprekidnih funkcija s_n: [a,b] $\to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira ka s: [a,b] $\to \mathbb{R}$ na $[a,b]$, tada:

(i) s je također neprekinuta na [a,b].
(ii) $\int_a^b s_n$ konvergira ka $\int_a^b s$;

[I](b) Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ red neprekidnih funkcija u_n: [a,b] $\to \mathbb{R}$, koji uniformno konvergira ka u: [a,b]$\to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ tada:

(i) u je također neprekinuta funkcija na $[a,b]$,
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b u$.

Bibliografija

[1] Peter J Collins, *Differential and integral equations*, Oxford University Press, 2006.

[2] Matiur Rahman, *Integral equations and their applications*, WIT press, 2007.

[3] Abdul Majid Wazwaz, *Linear and nonlinear integral equations*, sv. 639, Springer, 2011.

Sažetak

U ovom radu primjenili smo Picardovu metodu u dokazivanju teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja integralnih i diferencijalnih jednadžbi. Važnost teorema o egzistenciji i jedinstvenosti nije teško uočiti. Naime, većina diferencijalnih jednadžbi uopće nema rješenja, ili ako ga ima, tada ga nije moguće prikazati u zatvorenom obliku: koristeći neki skup elementarnih funkcija i konačan broj elementarnih operacija. Ako i nađemo određeno rješenje, još uvjek ostaje pitanje jedinstvenosti. Iz prethodnog je jasno da su teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti integralnih i diferencijalnih jednadžbi vrlo korisni u praktičnom smislu, a dokazuju se upravo Picardovom metodom, što čini Picardovu metodu korisnim teorijskim alatom.

U prvom poglavlju proučili smo dvije vrste integralnih jednadžbi: Volterrine i Fredholmove jednadžbe. Potom smo dokazali teorem o egzistenciji i jedinstvenosti Volterrine jednadžbe.

U drugom poglavlju prenosimo logiku tog dokaza na dokazivanje teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja obične diferencijalne jednadžbe prvog reda sa početnim uvjetom. Nadalje, generalizirajući metode iz teorema za jednu običnu diferencijalnu jednadžbu dokazali smo teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja sustava od n običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda sa početnim uvjetima. Konačno, iskoristivši prethodni teorem za sustav od n diferencijalnih jednadžbi, dokazali smo teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja obične diferencijalne jednadžbe n-tog reda sa početnim uvjetima.

U trećem poglavlju navedeni su određeni teoremi matematičke analize koje smo često koristili u radu i na koje smo se u radu referencirali.

Summary

In this work we applied Picard's iterative method in deriving a number of existence and uniqueness theorems for integral and differential equations. The importance of such theorems is not hard to see. Many differential equations do not possess a solution at all, and even when they do, the solution is not a closed-form one: meaning that it can be expressed with a certain set of elementary functions and using finite number of standard operations. Even if a solution is found, the question of uniqueness remains. From these considerations, it is obvious that existence and uniqueness theorems are of great importance in practice. These theorems are derived using Picard method, which makes Picard method a useful theoretical tool.

In first chapter we considered two integral equations: Volterra and Fredholm equations. Later on we proved an existence and uniqueness theorem for the Volterra integral equation.

Utilizing the method used in proving the theorem for Volterra equation, in second chapter, we proved existence and uniqueness theorem for an ordinary differential equation with initial conditions. Later on, we generalized that theorem to a sistem of n ordinary differential equations with initial conditions. Lastly, we derived an existence and uniqueness theorem for a Cauchy problem consisting of an n-th order differential equation with initial conditions.

In the third chapter we listed a number of results from real analysis often used in this work, which we referenced to in a number of places throughout the work.

Životopis

Rođen sam dana 13. rujna 1992. godine u Zagrebu. Pogađao sam Osnovnu školu Dragutina Tadijanovića u Zagrebu. Po završetku osnovne škole upisao sam Gimnaziju Lucijana Vranjanina, gdje sam i maturirao 2011. godine na smjeru opće gimnazije. 2012. godine upisao sam integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij Matematika i fizika; smjer: nastavnički.