Geometrija za nadarene učenike u osnovnoj školi

Lucić, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Lucić

GEOMETRIJA ZA NADARENE UČENIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Lucić

GEOMETRIJA ZA NADARENE UČENIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________, pred

ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ________________________________ , predsjednik
2. _________________________________ , član
3. _________________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _________________________
2. _________________________
3. _________________________

Hvala mojim prijateljima koji su bili uz mene svih ovih godina, a posebno hvala Matiji.

Ovaj rad posvećujem svojoj divnoj obitelji; majci Olgi, ocu Zoranu i bratu Anti, koji su mi pružali podršku i ljubav te omogućili studiranje u Zagrebu. Hvala što ste vjerovali u mene!

Sadržaj

1. Uvod

Geometrijsko mišljenje je nužno u svakoj grani matematike. Povijesno gledajući, upravo je geometrija zaslužna za početak aksiomatizacije matematike (Euklid) i za precizno definiranje matematičkih pojmova. Također, geometrijsko mišljenje je duboko ukorijenjeno u svakome čovjeku te ga svakodnevno i koristimo. Jesmo li se ikada zapitali kako pri samom spomenu pojma „piramida“ u glavi odmah vizualiziramo spomenuto geometrijsko tijelo? Ili kako vizualiziramo put kojim trebamo ići dok nam netko daje upute? Zasigurno to nije vještina s kojom se pojedinac rodi, a upravo je ona produkt razvoja geometrijskog mišljenja u nama.

Želja je svakog nastavnika matematike pripremiti svoje učenike za život; pomoći im da razumiju i doživljavaju svijet oko sebe, da razvijaju matematički način mišljenja (čiji je ključan dio i geometrijsko mišljenje) te da usvoje matematičke procese, a ne samo koncepte. Geometrijska znanja koja se usvajaju tijekom procesa učenja matematike su jako bitna, ali još su važniji procesi mišljenja i matematički način pogleda na život te se temeljem tih znanja razvija geometrijsko mišljenje učenika. Nadareni učenici poseban su izazov za svakog nastavnika matematike, a geometrija je idealno područje matematike koje podupire učeničku kreativnost i zainteresiranost za nastavu matematike. Nastavnik matematike trebao bi moći prepoznati kreativne i nadarene učenike u razredu, poticati ih na samostalan rad, pomagati im da napreduju i razvijaju svoje sposobnosti.

U prvom dijelu razrade, posvetit ćemo se teoriji geometrijskog mišljenja po van Hiele-ovom modelu, razradit ćemo sve etape mišljenja i dati konkretne primjere. U drugom dijelu razrade, definirat ćemo kreativnost, opisati karakteristike nadarenih i kreativnih učenika te komentirati na koje načine možemo prepoznati takve učenike u razredu, a spomenut ćemo i potrebe rada s nadarenim učenicima u osnovnim školama u Republici Hrvatskoj. Posljednji dio razrade sadržavat će neke zanimljive nastavne sadržaje (vezane uz geometriju) koji su prikladni za nadarene učenike te za njihovo učenje otkrivanjem, obradit će se neki korisni dokazi bez riječi i riješiti interesantni zadatci koji su zamišljeni za samostalan učenički rad na dodatnoj nastavi matematike u osnovnoj školi.

2. Glavni dio rada

2.1. Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije

Dina van Hiele-Geldorf i Pierre van Hiele su 1957. godine objavili doktorski rad na nizozemskom jeziku i svijetu predstavili svoja otkrića o tome kako učenici razvijaju geometrijsko mišljenje i zašto pojedini imaju teškoće s time. Bračni par postavio je teoriju o razvoju procesa geometrijskog mišljenja, strukturirali su geometrijsko mišljenje u etape te svaku od njih detaljno razradili s uputama kako pomoći učenicima koji imaju problema sa savladavanjem pojedine etape.

2.1.1. Razvoj teorije geometrijskog mišljenja

Njihov se utjecaj na ostatak svijeta u početku odvijao sporo, vjerojatno zbog tog što je njihov rad bio napisan na nizozemskom jeziku te je stoga bio dostupan samo govornicima nizozemskog jezika. Početkom 70-ih godina prošloga stoljeća o njihovom modelu geometrijskog mišljenja počelo se pričati u Sjedinjenim Američkim Državama, a 1986. godine preveden je na engleski jezik s novim nazivom „*Structure and insight, a theory of mathematics education*“.

Specifičnost njihovog modela bila je u tome što su proces razmišljanja razmatrali općenito, a geometriju kao granu matematike koristili su kao primjer na kojem su istraživali funkcionira li njihova teorija (moguće zbog prikladnosti geometrije za naglašavanje ključnih karakteristika i zbog lakših odabira primjera). S vremenom se, van Hiele-ov model mišljenja, koji je primjenjiv na različita područja, počeo interpretirati kao teorija razvoja geometrijskog mišljenja. Stoga se veliki broj istraživanja, koja se upravo temelje na van Hiele modelu, fokusira upravo na geometriju, ali postoje pojedinci koji su ga primijenili na druga područja matematike. Tako je, primjerice, Masami Isoda primijenio van Hiele model na etape razvitka učeničke terminologije vezane za matematičku analizu (vidi [4]).

Mnogi kurikulumi u svijetu prate preporuke opisane van Hiele-ovom teorijom, a posebice dio vezan za geometriju. S obzirom da je naglasak ovog rada na geometriji, promatrat ćemo geometrijsko mišljenje i njegov razvoj. U nastavku slijedi opis modela geometrijskog mišljenja po Van Hiele-u.

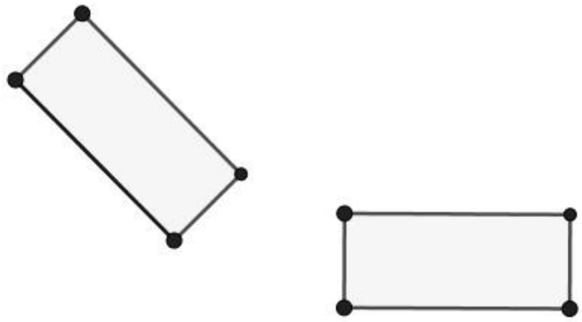
2.1.2. Model mišljenja

Van Hiele-ova teorija strukturirala je proces mišljenja u pet etapa. Svaka od tih etapa imenovana je prema najbitnijoj karakteristici. Pierre i Dina van Hiele označili su etape brojevima od nula do četiri, dok su američki istraživači tijekom godina drugačije numerirali etape od jedan do pet (pritom je postojala i razina nula na kojoj učenici uopće ne prepoznaju oblike i nemaju razvijeno geometrijsko mišljenje). Etape, redoslijedom kojim učenici razvijaju mišljenje, su: vizualizacija, analiza, neformalna dedukcija, formalna dedukcija i strogost. Prema Baranović (vidi [1]), „oni koji uče euklidsku geometriju da bi postigli odgovarajuću zrelost geometrijskog mišljenja, proces učenja bi trebali započeti prepoznavanjem određenih objekata, zatim uočavati svojstva promatranih objekata i stvarati veze među njima pa tek onda napredovati do izvođenja formalnih dokaza, a kao vrhunac učenja trebali bi postići razumijevanje i drugih, neeuklidskih geometrija.“ Za svaku etapu svojstven je i jezik i terminologija prikladan toj etapi te su drugačiji i procesi razmišljanja. Kao rezultat savladavanja procesa mišljenja određene etape nastaje produkt koji potom postaje predmet misaonog procesa iduće razine. Dakle, za prelazak na sljedeću etapu geometrijskog mišljenja, potrebno je savladati trenutnu razinu. Preciznije, da bi učenik uspješno savladao neku etapu, potrebno je steći znanja, usvojiti koncepte i terminologiju prethodnih razina. U ovom radu, etape ćemo numerirati na način kako su to činili Dina i Pierre van Hiele, to jest na sljedeći način:

- razina 0 – vizualizacija
- razina 1 – analiza
- razina 2 – neformalna dedukcija
- razina 3 – formalna dedukcija
- razina 4 – strogost

2.1.2.1. Razina 0 - Vizualizacija

Učenici na razini vizualizacije baziraju svoje misli i ideje na osnovu percepcije. Uočavaju „globalni“ izgled i po njemu prepoznaju određene geometrijske objekte, ali ne uočavaju konkretno neka njihova svojstva. Terminologiju vezanu uz neki geometrijski lik uče na temelju oblika, a ne na temelju svojstava, te ih stoga na taj način i imenuju. Neki istraživači nazivaju ovu razinu razinom prepoznavanja upravo zbog toga što učenici na toj razini samo prepoznaju geometrijske oblike. Nakon što prođe proces prepoznavanja i vizualizacije, učenik je u stanju razlikovati grupe objekata, na primjer, reći će da kvadrat i pravokutnik nisu u istoj grupi jer ne izgledaju isto po njegovome mišljenju. Proizvod mišljenja na razini vizualizacije su klase objekata koji nalikuju jedan drugome, primjerice trokuti, pravokutnici, krugovi, i tako dalje te nepotpune definicije bazirane na nekom podatku koji im je naizgled bitan. Učenici uočavaju da su svi trokuti jedan drugome nalik jer imaju tri stranice, ali im nisu poznate neke karakteristike trokuta, ne razlikuju ih po duljinama stranica ili veličinama kutova.



Slika 2.1. Pravokutnici

Primjerice, učenik koji trenutno savladava razinu vizualizacije može prepoznati pravokutnik u bilo kojem položaju, a ne samo u onom „standardnom" u kojem nam se čini da stoji uspravno. S druge strane, učenik koji nije uspješno savladao ovu razinu, pravokutnih će prepoznati samo u „standardnom" položaju (slika 2.1. desno), ali ne i u drugim položajima (na primjer slika 2.1. lijevo). Dakle, na nultoj razini van Hiele-ovog modela geometrijskog mišljenja, objekti mišljenja su geometrijski likovi i geometrijska tijela i njihov „globalni" izgled u cjelini, a rezultat (produkt) mišljenja su grupe odnosno klase objekata koje izgledaju slično, dok se svojstva objekata još ne uočavaju te se zbog toga ne mogu ni klasificirati po svojstvima.

2.1.2.2. Razina 1 - Analiza

Druga po redu je etapa analize na kojoj učenici postupno uočavaju svojstva geometrijskih objekata, analiziraju svojstva grupa u koje su ih prethodno sami klasificirali i počinju koristiti prikladnu terminologiju da bi opisali ta svojstva. Tipično je i da učenik objekte definira po svojstvima koje je uočio te da tako stvara vlastite definicije. Pri opisivanju objekta i njegovih svojstava, još uvijek učenik ne razlikuje koja su nužna, a koja dovoljna svojstva da bi opisali neki geometrijski objekt (vidi [4]). Učenici na razini analize često mogu izvoditi i neke jednostavnije zaključke, naravno nepotpunom indukcijom, na osnovu skice ili na osnovu nekoliko primjera za koje zaključak vrijedi. Očekivano je da učenici na ovoj razini ne razmišljaju deduktivno. Po Burgeru i Shaughnessyju, često će se dogoditi da učenik, koji je u procesu savladavanja etape analize, odbacuje definicije drugih ljudi jer ne odgovaraju njegovim vlastitim koje su mu postavljene kao temeljne (vidi [2]).

Na primjer, učenik koji je uspješno savladao razinu analize uočit će svojstvo pravokutnika da ima dva para paralelnih stranica, gdje su nasuprotne jednakih duljina, te da ima četiri prava kuta, ali ne će svrstati kvadrat u pravokutnike, odnosno, ne će povezati da i kvadrat zadovoljava sva ista svojstva kao i pravokutnik, već će komentirati kako su kvadratu sve stranice jednakih duljina, a pravokutniku nisu. Dakle, na razini analize, objekt mišljenja su grupe geometrijskih oblika koje su međusobno nepovezane, a produkt mišljenja su svojstva oblika (pojedinačnih oblika i onih oblika koji pripadaju nekoj grupi).

2.1.2.3. Razina 2 - Neformalna dedukcija

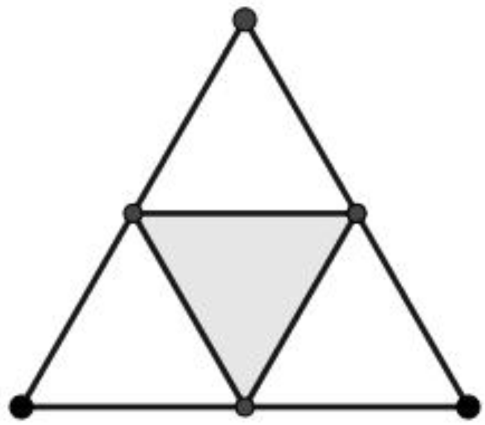
Učenici koji su dosegli razinu neformalne dedukcije uočavaju odnose među svojstvima geometrijskih objekata. „Ulazni" objekt u etapu neformalne dedukcije jest proučavanje svojstava objekta, a to je trebalo biti uspješno savladano u prethodnoj etapi. Učenici pokušavaju uočiti i razmišljaju o tome koji su nužni, a koji dovoljni uvjeti za opisivanje i definiranje nekog objekta, na primjer, svjesni su da, ako imaju zadan četverokut sa svim stranicama jednake duljine i s jednim pravim kutom, imaju posla s kvadratom. Također, nisu više defanzivni prema vlastitim definicijama, već rado prihvaćaju i tuđe, imaju mogućnosti uočiti kada je neka definicija nepotpuna te je znaju ispraviti tako da bude potpuna. Prema Baranović, „učenike bi trebalo uključiti u proces definiranja i dopustiti im da stvaraju vlastite definicije na svakoj razini" (vidi [1]). Učenici formiraju logičke odnose između svojstava jednog objekta te između svojstava sasvim različitih objekata. Zbog uspješno savladanih odnosa među svojstvima, tada uspješno klasificiraju geometrijske objekte po hijerarhiji.

Primjerice, učenici, koji su prošli procese mišljenja na razini neformalne dedukcije, svjesni su da je svaki paralelogram ujedno i četverokut, no svjesni su i da svaki četverokut nije paralelogram.

Kao što i sam naziv razine kaže, učenici mogu s razumijevanjem čitati dokaze nekih tvrdnji, izražavati se koristeći terminologiju vezano uz uzročno-posljedične veze tvrdnji (ako je… onda je…), ali još uvijek nisu u stanju sami kreirati dokaze. Dakle, na razini neformalne dedukcije, objekt mišljenja su svojstva geometrijskih likova i tijela, a rezultat mišljenja su odnosi među svojstvima (uzročno-posljedična veza) jednog objekta ili među više objekata.

2.1.2.4. Razina 3 - Formalna dedukcija

Na etapi formalne dedukcije, učenici razumiju važnost dobre definicije, uočavaju potrebu za deduktivnom izgradnjom matematike i njenih pojmova. Svjesni su da postoje aksiomi, teoremi, obrati teorema i postulati. Na ovoj su razini učenici po prvi put u mogućnosti uspješno direktno dokazati neku tvrdnju prikladnu srednjoškolskoj razini (indirektno još uvijek ne), a često to uspješno izvode i na više različitih načina. Također, uspješno i razlikuju nužne i dovoljne uvjete za neko svojstvo te shvaćaju njihovo značenje.



Slika 2.2. Površina trokuta upisanog u jednakostranični trokut

Primjerice, za osjenčani trokut (slika 2.2.) čiji su vrhovi na polovištima stranica velikog jednakostraničnog trokuta, učenici bi bili u mogućnosti dokazati da je njegova površina jednaka četvrtini površine velikog trokuta služeći se raznim teoremima (o sličnosti trokuta, o sukladnosti trokuta, o srednjici trokuta i tako dalje). Naravno, moguća je izvedba i konkretnijih dokaza, kao na primjer dokaz poučka o obodnom i središnjem kutu kružnice ili dokaz da je kateta pravokutnog trokuta geometrijska sredina hipotenuze i ortogonalne projekcije katete na hipotenuzu (Euklidov poučak).

Dakle, objekt mišljenja na razini formalne dedukcije su odnosi među svojstvima, a produkt mišljenja je deduktivni aksiomatski sustav.

2.1.2.5. Razina 4 – Strogost

Većina nastavnika matematike razmišlja na četvrtoj (trećoj) razini geometrijskog mišljenja po van Hiele-vom modelu, a učenici, koji su završili osnovnu školu i stigli u prvi razred srednje škole, nalaze se na prvoj ili drugoj razini mišljenja. U pozadini svakog nastavnog sata i sadržaja usvojenog na njemu, nalazi se strogost i matematička preciznost, dok se na satu s učenicima razgovara jezikom koji je prikladan njihovoj razini geometrijskog mišljenja, a opet da bude poticajan da napreduju (bar na razini 3).

Na razini strogosti, učenici su vjerojatno već postali studenti nekog od prirodoslovnih fakulteta. Ukoliko su uspješno savladali ovu razinu, oni su svjesni da su dotada deduktivno izgradili euklidsku geometriju te da postoje i neke druge geometrije, za koje vrijede neka druga svojstva, te su u mogućnosti međusobno ih usporediti. Smatra se da tek na ovoj etapi geometrijskog mišljenja učenici (studenti) razumiju potpunost određenog sustava te da su u mogućnosti indirektno dokazivati tvrdnje (primjenom kontradikcije i obrata po kontrapoziciji). Mogu razmišljati apstraktno, skicirati neke druge sustave i uočavati njihova svojstva.

Primjerice, u hiperboličkoj geometriji, kroz jednu točku možemo povući barem dva pravca paralelna sa zadanim pravcem te je time narušen peti Euklidov postulat, no pri skiciranju nekog zadatka u hiperboličkoj geometriji, učenik (student) crtat će skicu na ravnini papira i bez problema riješiti s razumijevanjem (bez opasnosti da će ga vizualizacija na ravnini papira navesti na pogrešan zaključak).

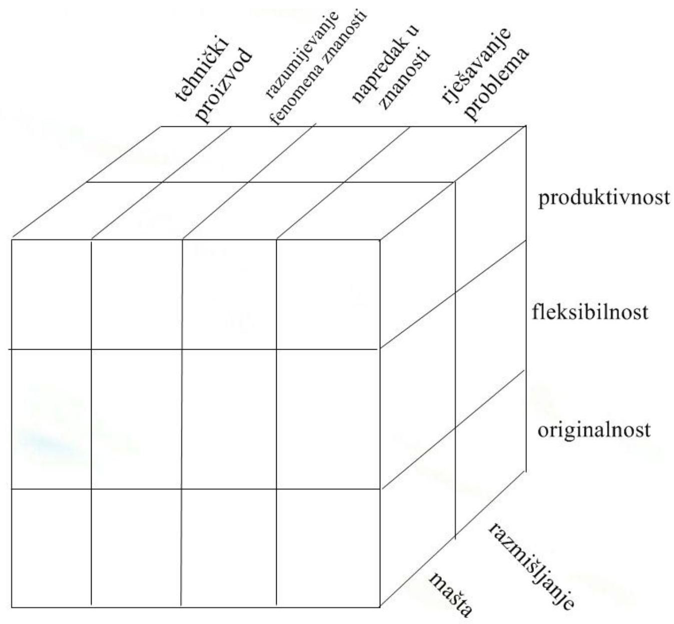
Dakle, objekt mišljenja na razini strogosti jest deduktivno izgrađen aksiomatski sustav, a rezultat mišljenja jesu odnosi između drugih sustava kao što su na primjer neeuklidske geometrije, projektivna geometrija itd.

2.1.3. Komentar za nastavu matematike

Van Hiele-ov model pomalo je idealiziran prikaz razvijanja geometrijskog mišljenja, ali najbolji pokazatelj razumijevanja ove teorije ipak je iskustvo koje nastavnik stječe provodeći naučeno o geometrijskom mišljenju u svojoj nastavi. Poznata je Euklidova uzrečica: „Nema kraljevskih putova u geometriji“ i sigurno je proces izgradnje geometrijskog mišljenja nešto što od učenika (i nastavnika) iziskuje vrijeme, trud, rad i strpljivost. Nastavnik ima zadatak olakšati učenicima razvitak mišljenja i pomoći im da pronađu put kroz mnoštvo nastavnih sadržaja. Taj je zadatak zahtjevan i odgovoran, ali i izvediv. Potvrđuju to mnoga istraživanja koja su kao predmet istraživanja imala upravo van Hiele-ov model geometrijskog mišljenja. Rezultati tih istraživanja ohrabruju nastavnike da nastoje bolje promatrati učenike, bilježiti razine na kojima se nalaze te im potom prikladno pomagati da savladaju poteškoće koje im donosi određena etapa.

2.2. Kreativnost

Iako je termin kreativnosti jedan od onih koje često čujemo u svakodnevnom razgovoru, još uvijek se traga za definicijom i raspravlja o tome što je to zapravo kreativnost, kako je precizno definirati i potom bolje razumjeti. U hrvatskoj enciklopediji (Leksikografski zavod Miroslav Krleža) kreativnost se definira kao „sposobnost stvaranja jedinstvenoga i novoga rješenja, ideja, proizvoda i sl.“ Prema Wakefieldu, kad govorimo o kreativnosti, zapravo pričamo o vještini pronalaženja novih rješenja upotrebom različitih metoda i strategija u skladu s mogućnostima osobe koja se bavi određenim problemom (vidi [19]). Komentira se kako kreativnost sadrži više aspekata kao što su kreativni procesi, kreativni pojedinci, kreativna okolina i kreativni proizvodi. U ovom dijelu rada razradit će se STEM kreativnost, posebna vrsta prirodoslovne i matematičke kreativnosti. Za početak, komentirajmo aspekte koje promatramo kada govorimo o STEM kreativnosti, a to su (po Hu i Adey): kreativan proces, kreativna osoba i kreativan proizvod (vidi [9]). To su tri dimenzije prirodoslovne i matematičke kreativnosti. Na osnovu skice viđene u radu autora Hu i Adey (vidi [9]), napravljena je sljedeća skica:



Slika 2.3. Dimenzije STEM kreativnosti

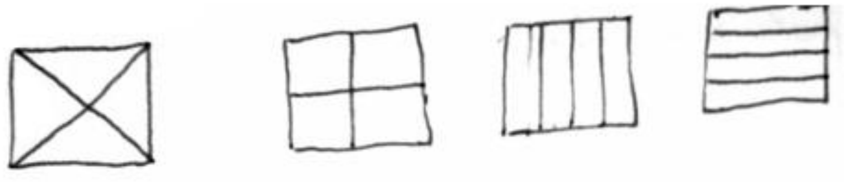
Na slici 2.3. uočavamo sve tri dimenzije STEM kreativnosti, a to su: kreativan proces (mašta i razmišljanje), kreativna osoba i njene osobine (produktivnost, fleksibilnost i originalnost) te kreativan proizvod (tehnički proizvod, napredak u znanosti, rješavanje problema i razumijevanje fenomena znanosti). Hu i Adey (vidi [9]) zaključili su da se STEM kreativnost precizno definira kao intelektualna osobina ili sposobnost proizvodnje produkta koji je originalan, jedinstven te ima društvenu ili osobnu važnost; taj produkt je osmišljen sa nekom konkretnom svrhom. Potkrijepili su svoju definiciju nekim karakteristikama za koje su smatrali da općenito vrijede za STEM kreativnost, pritom tvrdeći da je ona drugačija od svih drugih vrsta kreativnosti jer je usko povezana s kreativnim znanstvenim eksperimentima i s znanstvenim rješavanjem problema (eng. *problem* solving) i postavljanjem problema (eng. *problem posing*) te naglašavajući da se STEM kreativnost u velikom dijelu oslanja na znanje i vještine u tom području. Kreativnost je jedna od tri ključne karakteristike koju tražimo da bismo utvrdili je li neki učenik nadaren, a o tome ćemo više reći kasnije u poglavlju 2.3.

2.2.1. Testovi kreativnosti

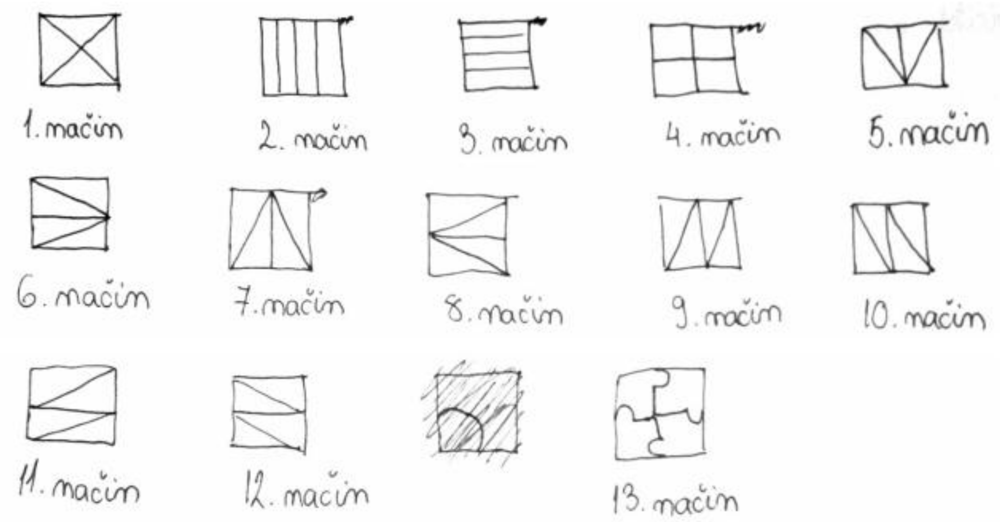
Sasvim je logično da, s obzirom na mnoge definicije pojma kreativnosti, postoje različiti testovi za uočavanje, ispitivanje i mjerenje kreativnosti. Postoji više od sto vrsta testova kreativnosti, poput Majumdarovog *Scientific Creativity Test-a* i Friedlanderovog testa koji je vrednovao ispitanikove sposobnosti rješavanja problema i planiranja eksperimenata, a jedan od poznatijih testova je Torrance Test of Creative Thinking (vidi [21]), čiji je autor američki psiholog Ellis Paul Torrance. U tom se testu promatra i vrednuje već spomenuta dimenzija STEM kreativnosti, a to je kreativna osoba i njene osobine (fleksibilnost, produktivnost i originalnost). Produktivnost se interpretira kao količina osmišljenih ideja od strane ispitanika, originalnošću smatramo rijetkost pojave nekog odgovora, dok se fleksibilnost komentira kao mogućnost promjene pristupa problemu te prilagodbe uz izmjene strategije u rješavanju problema.

Spomenuti test se piše na papiru i treba riješiti sedam zadataka (vidi [6]). Jedan od tih zadataka je i sljedeći (u slobodnom prijevodu): *„Pretpostavimo li da gravitacija ne postoji, opišite kako bi svijet tada izgledao. Na primjer, ljudi bi lebdjeli.“* Ovaj je zadatak pokazatelj učenikove originalnosti, fleksibilnosti, pa čak i produktivnosti.

Posebno je matematičarima zanimljiv sljedeći zadatak koji je dobar primjer *problem solvinga,* a glasi ovako (u slobodnom prijevodu): *„Koristeći što više metoda, podijelite kvadrat na četiri jednaka dijela (jednakih oblika).“* Zadatak je kreiran sa svrhom mjerenja kreativnosti i te sposobnosti *problem solvinga.* Pokažimo neka učenička rješenja (vidi [7]) koja su prikupili D. Glasnović Gracin i Josip Burušić.



Slika 2.4. Učeničko rješenje 1. Izvor: D. Glasnović Gracin i Burušić, 2018.



Slika 2.5. Učeničko rješenje 2. Izvor: D. Glasnović Gracin i Burušić, 2018.

Već je naočigled jasno da je drugi učenik ponudio količinski više rješenja od prvog učenika te stoga smatramo da je drugi učenik bio produktivniji od prvog. Također, drugi učenik je originalniji jer je ponudio rješenja koja nije ponudio prvi učenik. Ako promatramo fleksibilnost učenika, promatramo zapravo sposobnost promjene pristupa. U kontekstu ovog zadatka, komentiraju se kategorije rješenja, primjerice, ako pogledamo sliku 2.5., uočavamo da su 2. način i 3. način zapravo jednaki te jedan nastaje rotacijom drugog. Iz tog se razloga ta dva načina smještaju u jednu kategoriju. Analogno vrijedi i za prvog učenika, pogledajmo sliku 2.4. (3. i 4. način). Dakle, tvrdit ćemo da je drugi učenik i fleksibilniji.

Kao što smo i vidjeli u primjercima zadataka koji se koriste za testiranje STEM kreativnosti, većina tih zadataka su zadatci u kojem nema jedinstvenog rješenja, u kojem nema konkretnog broja rješenja, niti je unaprijed određen postupak rješavanja, već se vrednuju sve učenikove ideje, a naglasak je na procesu dolaska do rješenja i na diskusiji, a ne na samom rješenju. Ideja je da učenici samostalno odabiru metode rješavanja zadataka, a nastavnik je tu da usmjerava učenike. Takvi zadatci idealni su za testiranje kreativnosti, ali i za razvijanje kreativnosti, te ćemo neke zanimljive komentirati u poglavlju 2.4.

2.3. Nadarenost

Koren definira nadarenost (darovitost) kao osobinu koja omogućuje pojedincu da dosljedno postiže izrazito iznadprosječan uradak u jednoj ili više aktivnosti kojima se bavi (vidi [10]). Nadarenost je širok pojam koji obuhvaća kreativnost, kvalitetu mišljenja i memoriranja, mehaničke sposobnosti, prilagodljivost i tjelesnu spretnost. Prema Pravilniku o osnovnoškolskom odgoju i obrazovanju darovitih učenika, darovitost djeteta smatra se „spojem triju osnovnih skupina, osobina: natprosječnih općih ili specifičnih sposobnosti, motivacije i visokog stupnja kreativnosti, a prema sposobnostima područja darovitosti su: opće intelektualne sposobnosti, stvaralačke (kreativne) sposobnosti, sposobnosti za pojedina umjetnička područja te psihomotorne sposobnosti.“ (vidi [12]).

Po Renzulliju, osnovne sastavnice nadarenosti (darovitosti) su iznadprosječno razvijene sposobnosti, predanost zadatku (*eng. task commitment)* i kreativnost. Taj se model (trodijelni) nadarenosti koristi u školama i obrazovnim institucijama diljem svijeta. Model je dizajniran nakon što su provedena istraživanja u kojima su ispitanici bili veoma uspješne odrasle osobe koje su se ostvarile u različitim profesijama. Svaki od ispitanika imao je visoko razvijene sposobnosti, upornost i predanost kao osobine ličnosti te kreativnost. Naravno, nisu ih imali razvijene u jednakoj količini, ali sva su tri elementa darovitosti bila prisutna kod svakog ispitanika. Također, ne postoji idealan omjer prisutnosti tih triju elemenata, niti prisutnost svih triju garantira nadarenost. Prednost je Renzullijevog trodijelnog modela nadarenosti u tome što je, ispitivanjem tih triju sastavnica, moguće uočiti nadarene učenike pa makar oni i ne postizali uvijek najbolje rezultate na standardnim testovima i pri sumativnom vrednovanju. „Problem“ ovog modela ležao bi u nemogućnosti da se prepoznaju učenici koji su daroviti, ali nisu uspjeli još pronaći kontekst ili područje na kojem će biti uspješni te na kojem će njegovati darovitost (vidi [14]).

Za očekivati je da će se nastavnik matematike u svom radu susretati s nadarenim učenicima te da će željeti pomoći takvim učenicima, prilagoditi nastavne sadržaje za njih i njegovati njihovu darovitost.

2.3.1. Prepoznavanje matematički nadarenih učenika

Maloprije smo spomenuli kako nije dovoljno gledati samo učeničke rezultate pri sumativnom vrednovanju da bismo zaključili da je neki učenik nadaren te moramo gledati i ostale sastavnice nadarenosti (kreativnost i predanost zadatku) uz razvijene sposobnosti. George usmjerava pažnju nastavnika matematike na razlike u ponašanju i osobinama između bistre djece i nadarene djece (vidi [6]). Bistra djeca nekad više i brže okupiraju našu pozornost, postavljaju više pitanja te su im ruke često prve u zraku, dok nadarena djeca nekad znaju biti i samozatajna i odbijaju komunikaciju. Praksa je pokazala da se često zbog toga događa da se nadarenost djeteta ne uoči pa takva djeca bivaju neshvaćena u svojim postupcima. Gledajući povijesno, mogli bismo nabrojati veliki broj poznatih uspješnih nadarenih znanstvenika koji su se u početcima svog obrazovanja susretali s brojnim poteškoćama, i to baš u onim područjima i granama znanosti u kojima su kasnije, za svoga života, postigli velike uspjehe. Razlog tomu vjerojatno je neprilagodba nastavnih sadržaja njihovoj darovitosti. Sasvim prirodno, i dan-danas postoje učenici koji će za vrijeme svog obrazovanja postizati prosječne i iznadprosječne rezultate, imati visoke ocjene iz većine predmeta u školi i bivat će zapažena od strane svojih nastavnika upravo zbog brojnih dobrih ocjena, ali za svog života nastavljaju drugim putevima i ne ostvaruju se toliko uspješno u svojim karijerama (vidi [5]). Tragajući za matematički darovitim učenicima u osnovnoškolskom obrazovanju, nije korisno da nastavnik matematike usmjerava svoju pozornost isključivo na učenike koji ostvaruju visoke ocjene na testovima jer svaki zainteresirani prosječni učenik može uvježbati nastavne sadržaje svojim trudom i radom kod kuće te dobro zapamtiti mehanizme rješavanja zadataka. Također, nastavnika visoke ocjene mogu i zavarati i uvjeriti da će učenik biti uspješan i na školskim, županijskim i državnim natjecanjima (što se, naravno, može dogoditi) jer će se tada učenik susresti s nestandardnim zadatcima, bogatim zadatcima i zadatcima otvorenog tipa na kojima se on nije „izvježbao“. Nadareni učenik, koji možda nije uvijek pokazao sjajan rezultat na školskom testu, često će na natjecanju pružiti drugačije rješenje koje je originalnije od drugih (vidi [15]). Svakako bi se kao jedan od faktora za procjenjivanje nadarenosti mogao promatrati i uspjeh na natjecanju, ali definitivno ne bismo to uzeli kao jedini pokazatelj nadarenosti te je bitno odabrati neke druge metode izlučivanja matematički nadarenih učenika od ostatka razreda.

Neke od zabluda i predrasuda koje se mogu čuti od prosvjetnih djelatnika (a i ostalih) su sljedeće:

- Nadarena djeca će se uspjeti ostvariti i bez dodatne izobrazbe i potpore nastavnika.
- Nadareni učenici dobivaju visoke ocjene iz svih školskih predmeta.
- Izdvojimo li nadarenu djecu i radimo li s njima na drugačijim nastavnim sadržajima, uobrazit će se i misliti da su bolja od svojih vršnjaka.

Matematička nadarenost ne smije se pogrešno shvatiti kao dar koji je dan učeniku, već kao „potencijal koji je u većoj ili manjoj mjeri podložan razvoju i napredovanju“ (vidi [15]). Nužno je da nastavnik matematike prati svoje učenike i njihov rast i razvoj te da potiče njihovu kreativnost. Naravno, to se može odvijati samo uz suradnju s učenikom (i s roditeljima). Pri otkrivanju i poticanju nadarenih učenika najbitnije je pronaći način kako zadržati učenika u području matematike (naravno, ne pod svaku cijenu).

Po Pavleković, učenike možemo podijeliti u četiri kategorije: potencijalno daroviti učenici, učenici iznadprosječnih matematičkih sposobnosti, učenici prosječnih matematičkih sposobnosti i učenici s nedovoljno razvijenim sposobnostima za matematiku (vidi [15]).

Navedimo neke bitne karakteristike svake kategorije učenika s obzirom na stupanj razvijenosti sposobnosti za matematiku. Za početak, *učenik s nedovoljno razvijenim sposobnostima za matematiku* je učenik čija stečena znanja i vještine iz matematike, unatoč pomoći nastavnika i ostalih, ne prate znanja i vještine učenika vršnjaka prosječnih matematičkih sposobnosti. Zatim, *učenik prosječnih matematičkih sposobnosti* je učenik čija su postignuća, znanja i vještine ispunila očekivanja onog što bi učenik te dobi trebao postići te možda i ne mora iskazivati pretjerani interes za matematiku. *Učenik iznadprosječnih matematičkih sposobnosti* je učenik kojeg bismo opisno nazvali bistrim jer svojim vještinama, znanjem i sposobnostima nadilazi ostatak vršnjaka. Također, takav je učenik motiviran i vrijedan, uspješno rješava mnoge zadatke vukući analogiju sa zadatcima koje zna riješiti, ali se ne snalazi u zadatcima otvorenog tipa i nestandardnim zadatcima jer treba još razvijati apstraktno mišljenje. *Potencijalno daroviti učenik* je onaj učenik koji uočljivo brže uči od ostalih učenika i to s dubljim razumijevanjem i mogućnošću složenijeg apstraktnog mišljenja. Osim što je motiviran i marljiv, snalazi se i u nestandardnim zadatcima, kritički razmišlja i nudi više metoda rješavanja problema. Bitan je faktor u prepoznavanju nadarenosti učenika i nastavnikova kompetencija i informiranost o radu s nadarenim učenicima. Nekada se priprema nastavnika matematike za rad s nadarenim učenicima svodila samo na traženje nestandardnih zadataka te njihovo rješavanje prilagođeno dobi učenika. Dodatna nastava bi se izvodila na način da se s učenicima rješavaju zadatci koji, gledajući razinu složenosti zadatka, pripadaju kategoriji „složenije povezivanje i rješavanje nestandardnih problema". Promjene, koje su se dogodile u planu i programu nastavničkih studija na prirodoslovnim fakultetima, su rezultirale boljom informiranošću o svim faktorima o kojima treba voditi računa kada promatraju nadarenost i kreativnost učenika. Također, utjecale su i na to da se sadržaj prilagođava nadarenim učenicima i time realizira njihova darovitost.

2.3.2. Stanje rada s darovitim učenicima u osnovnim školama u RH

Po Nikčević-Milković, Jerković i Rukavina (vidi [13]), „skrb o darovitim i talentiranim učenicima u Republici Hrvatskoj još uvijek nije na zadovoljavajućoj razini". Autorice rada provele su 2017. godine istraživanje kojim su ispitivale stanje i potrebe rada s nadarenim učenicima u osnovnim školama Republike Hrvatske, formirale su upitnik koji su popunjavali predmetni nastavnici i učitelji razredne nastave iz triju različitih regija Republike Hrvatske, različitih godina radnog staža te različite informiranosti o radu s nadarenim učenicima. Zaokružujući brojeve od 1 do 5 koji predstavljaju stupanj slaganja s nekom tvrdnjom, nastavnici su dali svoj osobni uvid o radu s nadarenim učenicima. Neke od tvrdnji su:

- Teško mi je prepoznati darovitog ili talentiranog učenika u razredu.
- Identifikacija darovitog učenika provodi se u nižim razredima.
- Sam daroviti učenik je procjenitelj svoje nadarenosti.

Istraživanje je rezultiralo saznanjima da učitelji i nastavnici srednje i sjeverne regije Hrvatske više brinu o nadarenim učenicima u odnosu na južnu regiju. Zatim, identifikacija nadarenih učenika je veća u južnoj i srednjoj regiji Hrvatske u odnosu na sjevernu. Svi profili učitelja i nastavnika najviše s darovitim učenicima rade posebne metode rada, posebne nastavne programe uz prilagodbu sadržaja (akceleracija, klasificiranje nadarenih po sposobnostima, mentorstvo, dodatni izborni predmeti), a statistički najmanje sudjeluju u otkrivanju nadarenih učenika (vidi [13]).

Po Vojnović (vidi [18]), među predmetnim nastavnicima i učiteljima razredne nastave postoji interes i potreba za usavršavanjem u području nadarenosti, a posebno među stručnjacima u osnovnim školama jer pravovremeno (rano) otkrivanje nadarenosti učenika pomaže lakšem usmjeravanju učenika i razvoju njihove darovitosti. Do početka ovoga stoljeća, dodiplomsko obrazovanje o darovitosti učenika nije bilo dovoljno ili uopće organizirano, kako za nastavnike i odgojitelje, tako i za stručne suradnike škole. Praksa u školi je zahtijevala usavršavanje djelatnika škole u ovom području. Otada se stanje popravilo; danas su u programe nastavničkih studija integrirani pedagoški predmeti te su postali bitan dio visokoobrazovne nastave. Istraživanje je također pokazalo da je „planski i sustavni postupak identifikacije darovitih učenika u hrvatskim školama također daleko od poželjnog.“ Naime, samo je 17% ispitanika potvrdilo da se u njihovim osnovnim školama provodi postupak identifikacije nadarenih učenika. Razlog tomu je što su procjenjivači nadarenosti najčešće nastavnici i učitelji, a ukoliko nisu dovoljno informirani o radu s nadarenim učenicima, nailazimo na probleme pri otkrivanju takvih učenika. Proporcionalno su vezani educiranost nastavnika o radu s nadarenima te uspješnost procjene i otkrića nadarenih učenika.

Međutim, rad s nadarenim učenicima je zahtjevan jer za sobom povlači uvjet prilagodljive okoline djeteta te su metode rada kvalitativno različite od metoda u redovnom nastavnom programu. Problem leži i u nedovoljnom diferenciranju redovne nastave na mjestima gdje bi se trebalo učiti otkrivanjem (o tome više u poglavlju 2.4.1.). Prilikom osmišljavanja strukturiranog programa za nadarene učenike, potrebno je osigurati da se nadareni učenici druže i s vršnjacima i s učenicima sličnih sposobnosti, da su programi prilagođeni njihovim sposobnostima, da budu samostalni u procesu učenja, da su podlegnuti izazovima, da se nauče nositi s ponekim neuspjehom te da sudjeluju u programima u kojima se potiče njihov cjelokupni rast i razvoj (vidi [13]).

2.4. Nastavni sadržaji i metode poučavanja matematički nadarenih učenika

2.4.1. Učenje otkrivanjem

Prije no što definiramo učenje otkrivanjem, trebalo bi definirati istraživački usmjereno učenje, čija je jedna tehnika ujedno i učenje otkrivanjem. *Istraživački usmjereno učenje* je oblik aktivnog učenja na nastavi koji proizlazi iz rješavanja problema umjesto da se samo usvajaju unaprijed poznate činjenice i uče napamet. Učenik kao istraživač samostalno ili u grupi traži rješenje problema, dok je nastavnik samo usmjerivač u procesu učenja.

Učenje otkrivanjem jedna je od metoda istraživački usmjerenog učenja. Prema Winsløwu (vidi [20]), „učenje otkrivanjem odvija se u situacijama rješavanja problema u kojima se učenik oslanja na vlastito iskustvo i prethodno znanje. Radi se o metodi poučavanja u kojoj su učenici u interakciji sa svojim okruženjem tako što istražuju i upravljaju objektima, razmišljaju o pitanjima ili prijeporima i izvode eksperimente.“

S obzirom da u ovom radu obrađujemo nastavu matematike za nadarene osnovnoškolce, potrebno je razjasniti i dogovoriti što smatramo pod terminom otkriće kada govorimo o osnovnoškolskoj matematici. Pogledamo li otkrića kroz povijest, sve od Arhimedovog otkrića u kadi do Descartesove metode koordinata, jasno nam je da je izraz *otkriće* malo ambiciozan (vidi [15]). Matematička otkrića takvog razmjera znatno su utjecala na matematiku kao znanost jer su se nekad iz takvih otkrića javljale nove grane matematike (sjetimo se samo svih pokušaja negacije Euklidovog petog postulata). U tome kontekstu ne možemo usporediti otkrića velikih matematičara kroz povijest s učenikovim otkrićem tijekom procesa učenja u nastavi matematike. No, s obzirom da su otkrića sama po sebi rezultat nekog rada, upornosti i kontinuiteta, oni koji otkriju nešto su zapravo radoznali, uporni i marljivi pojedinci. Ne vidimo li tu sličnosti između djeteta i velikih matematičara? Naglasimo, kada je u pitanju nastava matematike i njeni nastavni sadržaji, nije nam zapravo toliko bitan produkt otkrića koliko nam je bitan taj proces koji vodi prema otkriću, proces aktivnog učenja kojim se učenik neprestano razvija. Vođeno učenje matematike otkrivanjem i istraživanjem je izrazito pogodna metoda za nadarene učenike. U nižim razredima osnovne škole ne možemo očekivati da će svi učenici (pa čak ni oni iznadprosječni) biti u mogućnosti samostalno učiti istraživanjem i otkrivanjem te je prihvatljivije da u toj dobi nastavnik koristi vođeno učenje otkrivanjem uz kombinaciju frontalne nastave, dok se u višim razredima, nakon što učenici steknu navike aktivnog učenja na satu, može minimalizirati pasivno prepisivanje s ploče. Što se tiče nastavnih sadržaja u matematici, nastavnik treba dobro istražiti one koje su prikladne za učenikovo eksperimentiranje i za istraživanje te treba steći naviku proučavanja informacija o detaljima vezanim za otkriće i koristima tog otkrića.

2.4.2. Nastavnik u istraživačkoj nastavi matematike

Uloga nastavnika matematike u istraživačkoj nastavi odmiče se od uloge predavača i teži ka ulozi vodiča kroz proces učenja. Naglasak je u istraživačkoj nastavi matematike upravo na aktivnosti učenika i na načinima na koje učenici stječu znanje, a samo neki od brojnih ciljeva istraživačkog učenja matematike jesu kreativnost, suočavanje s nedostatkom informacija, suradnja, razgovor i povezivanje. Nastavnik matematike stoga ima ključnu ulogu kao vodič kroz taj proces. Prema Winsløwu (vidi [20]), važan zadatak nastavnika je zapravo podupiranje (eng. *scaffolding*) istraživanja učenika pomoću unaprijed isplaniranih pitanja. Kad govorimo o podupiranju, pritom mislimo na „brižnost" i „iščezavanje". *Brižnost* u kontekstu istraživačke nastave matematike shvaćamo kao prilagodbu potrebama učenika, a *iščezavanje* kao podupiranje koje eventualno i postupno prestaje proporcionalno učenikovom napretku. Nastavnici matematike će pojačati intenzitet svog podupiranja slabijim učenicima i postavljati im pitanja. Također, bitno je da se u razredu postigne atmosfera u kojoj se učenici ne ustručavaju izreći svoje misli i ideje te da se ne boje da će napraviti pogrešku. Takav se pozitivan stav prema matematičkoj komunikaciji treba razvijati od početka.

Nakon što se neki problem predstavi učenicima, nastavnik ih pušta da se za početak sami upoznaju s problemom te potom ih pita pitanja poput „Kako bismo formulirali ovaj problem jednostavnije?" te, nakon što učenici prijeđu taj korak, nastavnik propitkuje učenike kako bi oni bilježili i zapisivali podatke koje će prikupiti dok sami budu istraživali problem. Time smo učenicima dali dobru smjernicu i pomogli im da krenu osmišljavati neki sustavan pristup problemu. Nakon toga, nastavnik promatra učenike i njihove radove, sugerira im da traže nekakve pravilnosti ili zaključke te na kraju potiče da donesu neki konkretan i jasan zaključak.

Winsløw (vidi [20]) navodi tri ključna čimbenika koja bi trebala biti ostvarena sa strane nastavnika tako da bi istraživački usmjerena nastava matematike bila uspješna, a to su:

- dostupnost resursa i scenarija poučavanja (sa svrhom demonstriranja kako se nastavni sadržaji mogu obraditi)
- prostor i dostupno vrijeme (pritom je potrebno osigurati i usklađenost sa službenim uvjetima rada i ograničenjima)
- suradnja nastavnika (potpora nastavniku koji želi primjenjivati istraživačku nastavu matematike uvijek je dobrodošla jer se može razgovarati o iskustvima i dijeliti profesionalno znanje)

Postoje dva teorijska okvira koji se odnose na istraživački usmjerenu nastavu matematike. Prvi je teorija didaktičkih situacija (skraćeno TDS), a drugi realistično matematičko obrazovanje (skraćeno RMO).

Kad govorimo o TDS-u, razlikujemo dvije vrste znanja; institucionalizirano znanje i osobno znanje. Institucionalizirano znanje odnosi se na službeno znanje koje se nalazi u udžbenicima i na internetu, a možemo ga mjeriti nekom vanjskom provjerom znanja. Osobno znanje predstavlja znanje koje učenici grade dok se bave nekim matematičkim problemom. Dobar je primjer upravo Pitagorin poučak, tvrdi Winsløw (vidi [20]). Kao institucionalizirano znanje o Pitagorinom poučku smatramo iskaz $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su a, b duljine kateta pravokutnog trokuta te c duljina hipotenuze. Osobnim znanjem o Pitagorinom poučku smatramo kontekstom u kojem su učenici otkrili da taj iskaz vrijedi; bilo to koristeći Lego kockice ili nekakav model koji koristi prelijevanje vode. Te dvije vrste znanja pomažu nastavniku, koji promiče TDS, da bolje razumije stadije učenikovog napretka te da ukomponira igru i didaktičko okruženje u proces učenja. Termin didaktičkog okruženja definirali bismo kao okruženje s kojim je učenik u direktnom kontaktu sa svrhom stjecanja novog znanja te je ključan dio planiranja istraživački usmjerenog učenja. Okruženje ima veliki potencijal da potiče učenike i ukazuje na potrebu za stjecanjem novih znanja, ali i ono može biti više ili manje prikladno. Nastavnik o tome treba voditi računa. Postoji i adidaktičko okruženje u kojem učenici bez uključivanja nastavnika sudjeluju u istraživanju problema, razvijaju svoje osobno znanje i formuliraju nove ideje. Ideja je TDS-a da učenici samostalno grade svoje institucionalizirano znanje dok sudjeluju u rješavanju problema (u adidaktičkom okruženju). Kako bi nastavnik učenika podučio nečem novom, on osmišljava situaciju, koja je učeniku zasad nepoznata, u kojoj on može steći to znanje. Dakle, nastavnik treba dobro poznavati nastavne sadržaje, ali i situacije koje ukazuju potrebu za usvajanjem novih nastavnih sadržaja da bi mogao kreirati scenarije poučavanja. Osvrnimo se sada na RMO. Dvije glavne ideje vodilje RMO-a su:

- Matematika je ljudska djelatnost.
- Smislena matematika je izgrađena na bogatim realnim kontekstima.

RMO je teorija koja zagovara da proces učenja ne mora imati toliko formalan pristup te da se učenike ne mora u tolikoj mjeri izlagati aksiomatizaciji matematike. Znanje se treba temeljiti na onome što je za učenike stvarno i realistično. Dakle, didaktičko okruženje treba stvoriti uvjete da se novo znanje razvije na osnovu onoga što je učenicima smisleno, a to je ono što smatraju zdravorazumskim (ne nužno i svakodnevnim). Često to povlači za sobom da scenariji poučavanja nemaju matematičke strukture te da obuhvaćaju upravo nematematičke situacije. Nastavnik na kraju takvih situacija pomaže u formalizaciji neformalnih pristupa učenika.

2.4.3. Prikladne geometrijske teme za dodatnu nastavu

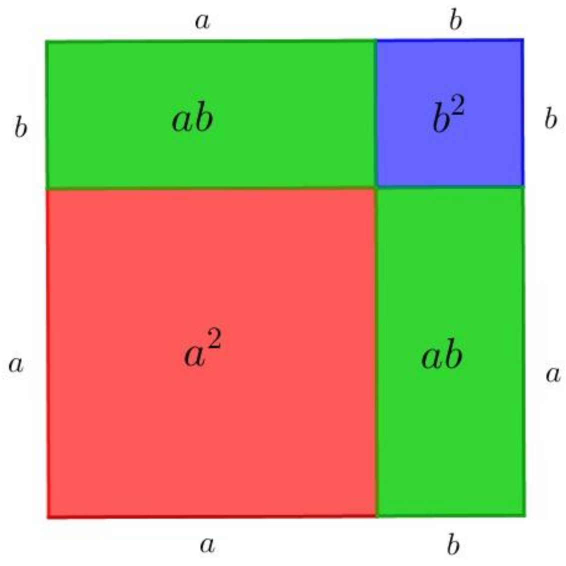
U ovom ćemo dijelu rada obraditi neke nastavne sadržaje koji su prikladni za dodatnu nastavu s nadarenim učenicima.

2.4.3.1. Neki geometrijski dokazi bez riječi

Dokaz bez riječi je trend u matematici koji se pojavio 70-ih godina prošlog stoljeća. „Izraziti neki poučak i njegov dokaz slikom, bez opisa riječima i sa što manje oznaka i simbola, smisao je ovog vizualnog izričaja,“, tvrdi Dakić (vidi [3]). Neke od ovih dokaza učenici mogu sami sprovesti istraživanjem, a neke uz pomoć nastavnika i njegovo vođenje.

Kvadrat zbroja

Kao nastavnici matematike ne bismo voljeli da naši učenici napamet i bez razumijevanja uče formule. Kvadrat zbroja jedna je od takvih „problematičnih“ formula jer često viđamo greške poput $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ (bez člana $2ab$) jer je to djeci prirodno zapisati tako. Formula, koja se naizgled čini kao da pripada samo algebri, može biti pojašnjena pomoću geometrijskog prikaza te se tako može bolje razumjeti. Sljedeća skica poslužit će tako da vizualizira ovu formulu, to jest, da algebarski „problem“ dokažemo geometrijski. Ova slika



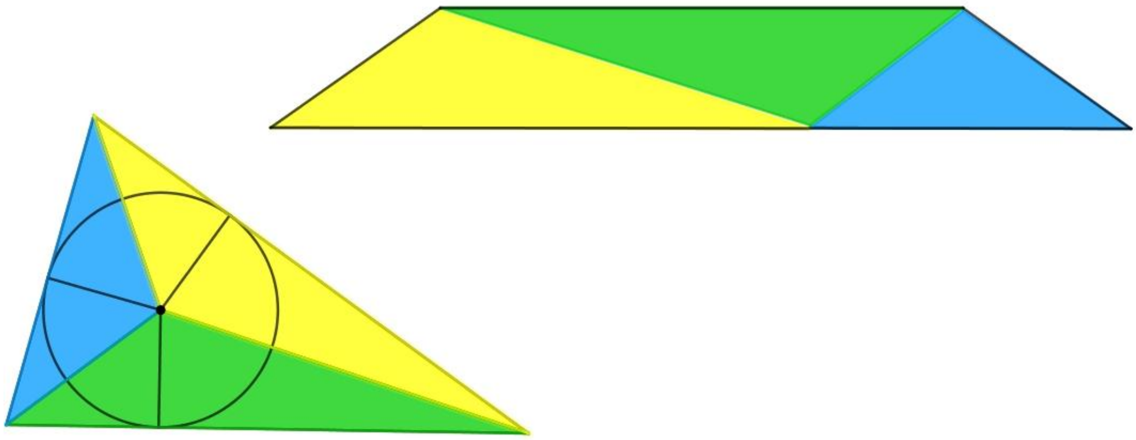
Slika 2.6. Kvadrat zbroja

dokaz je sama po sebi i može se učenicima dati kao gotova za interpretiranje. Pojasnimo sliku. Ako su a, b pozitivni realni brojevi, možemo ih interpretirati kao duljine stranica kvadrata te tada a^2, b^2 predstavljaju iznose njihovih površina. Zatim, $a+b$ možemo interpretirati kao duljinu stranice kvadrata i tada $(a+b)^2$ predstavlja površinu kvadrata stranice $a+b$. Koraci u crtanju skice su sljedeći: Na pravac nanesemo dvije proizvoljne dužine duljina a i b jednu pored druge. Zbroj tih dviju dužina je dužina duljine $a+b$. Konstruiramo kvadrat kojem je to duljina stranice. Potom unutar tog kvadrata uz vrhove konstruiramo kvadrate sa stranicama a i b na način da vizualno dijagonale obaju kvadrata leže na istom pravcu.

Kvadrat duljine stranice a označili smo crvenom bojom, a kvadrat duljine stranice b plavom bojom. Tada uočavamo dva nova lika; dva pravokutnika duljine a i širine b. Njih smo označili zelenom bojom. Površina jednog takvog pravokutnika iznosi ab. Skicom smo zapravo dokazali da vrijedi $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Površina trokuta

Tipični izvodi formule za površinu trokuta svode se na nadopunjavanje do pravokutnika. Još je jedan zanimljivi dokaz bez riječi za površinu trokuta je sljedeći:

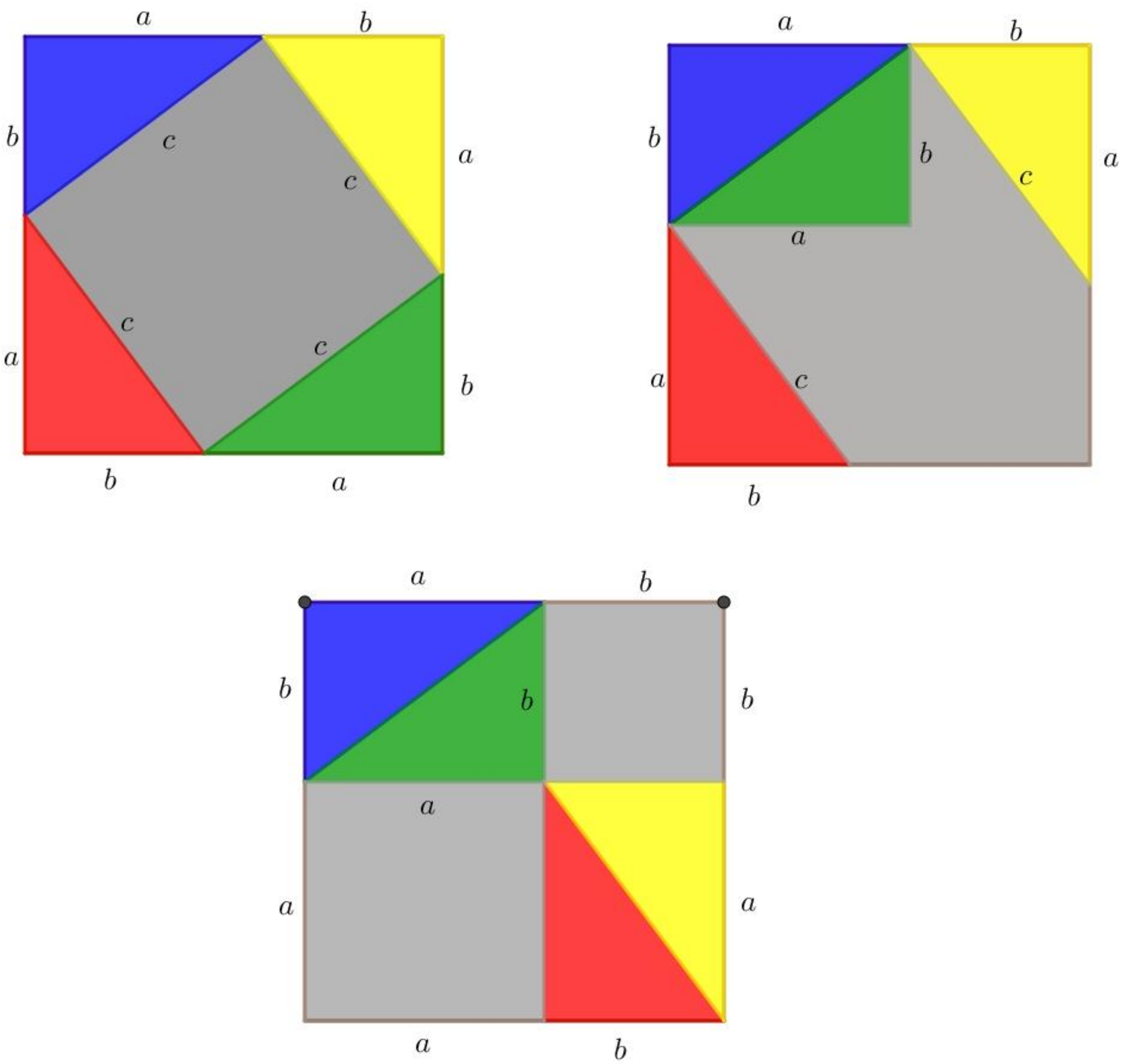


Slika 2.7. Površina trokuta

Učenici interpretiraju površinu velikog trokuta kao zbroj površina plavog, zelenog i žutog trokuta. Ti se šareni trokuti preslaguju u trapez, čiju površinu lako računamo ako znamo duljine osnovica trapeza i njegovu visinu. Na slici 2.7. (lijevo) vidimo da plavi, zeleni i žuti trokut imaju istu visinu, tj. visinu duljine r (radijus upisane kružnice velikom trokutu). Neka je duljina žute stranice velikog trokuta jednaka a, duljina plave stranice b te duljina zelene stranice c. S obzirom na to da smo male trokute samo presložili, znamo da su šareni trokuti međusobno sukladni. To je ključan korak u razumijevanju dokaza. Odredimo površinu trapeza koji smo dobili preslagivanjem trokuta. Donja osnovica trapeza ima duljinu $a+b$, a gornja duljinu c. Uvrštavanjem u sljedeću formulu za površinu trapeza $\frac{(prva\ osnovica + druga\ osnovica) \cdot visina}{2}$ dobivamo $\frac{[(a+b)+c] \cdot r}{2}$. Znamo da je $\frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta (označavamo ga sa s) te smo dokazali da je površina početnog velikog trokuta jednaka $P = r \cdot s$. ■

Pitagorin poučak

Učenicima se na dodatnoj nastavi može na promatranje dati sljedeća skica (trodijelna):



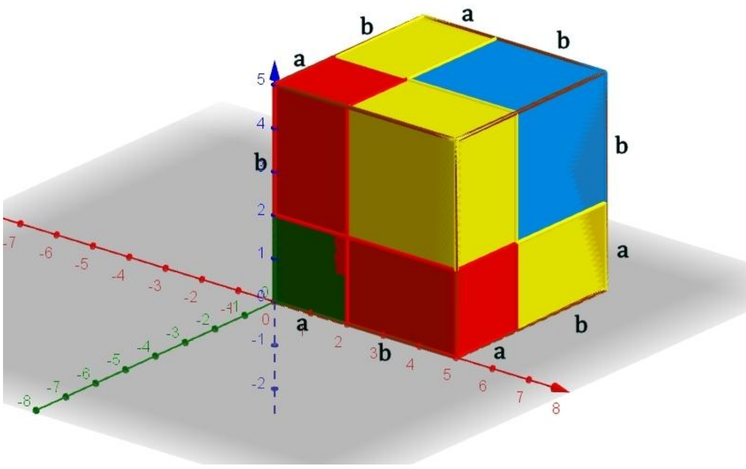
Slika 2.8. Pitagorin poučak

Te tri skice zapravo prikazuju dokaz (bez riječi) Pitagorinog poučka. Učenici bi mogli samostalno doći do tog zaključka tražeći poveznice između svake slike. Na nastavniku je da dade uputu da svaka skica nastaje od prethodne te da sami odgonetnu koja tvrdnja je u pozadini. U čemu je zapravo „trik“? Naime, na prvoj skici vidimo kvadrat u kojeg je upisan manji kvadrat duljine stranice c te četiri sukladna pravokutna trokuta s duljinama kateta $a\ i\ b$. Sivom je bojom obojan kvadrat čija je površina jednaka c^2. Druga se skica iz prve dobije na način da „premjestimo“ zeleni pravokutni trokut tako da njegova hipotenuza leži na hipotenuzi plavog pravokutnog trokuta. Uočavamo da se površina sivog dijela skice nije promijenila. Treća se skica iz druge dobije na način da žuti pravokutni trokut „spustimo dolje“, a crveni pravokutni trokut „pomaknemo udesno“. Još jednom uočavamo da se površina sivog dijela skice nije promijenila. Na kraju smo dobili dva siva kvadrata čije su površine a^2 i b^2. S obzirom da se površina sivog dijela skice nije mijenjala, zaključujemo da vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. ■

2.4.3.2. Dokazi (novih) geometrijskih tvrdnji

Kub zbroja

S obzirom da učenici u osmom razredu osnovne škole uče o geometrijskim tijelima (prizma, piramida, valjak,…) , tada se susreću s računom volumena tijela. Iako su volumen kao pojam spominjali u sedmom razredu na satovima fizike, ovdje se prvi put u matematici pojavljuje računanje volumena tijela. Također, učenici osmog razreda od potenciranja rade samo kvadriranje i korjenovanje (kubiranje još ne), ali zbog računanja volumena znaju da je mjerna jedinica za obujam primjerice m^3. Stoga, s nadarenim učenicima osmog razreda, zgodno bi bilo otkriti formulu za kub zbroja na dodatnoj nastavi. Pritom naravno, nastavnik je taj koji vodi proces otkrivanja. S obzirom na to da će učenici probati zaključak izvesti analogno s kvadratom zbroja, možemo očekivati zaključak: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$. Tada, učenike navodimo da skiciraju u prostoru kocku duljine brida $a+b$ te da pokušaju analogno, tražeći male kocke i kvadre unutra nje izvedu zaključak. Za vizualizaciju tih tijela zgodno bi bilo koristiti GeoGebru te zajedno s učenicima skicirati korak po korak u programu; od velike kocke popunjavanjem dobiti manja tijela. Jedna od mogućih skica je sljedeća:



Slika 2.9. Kub zbroja

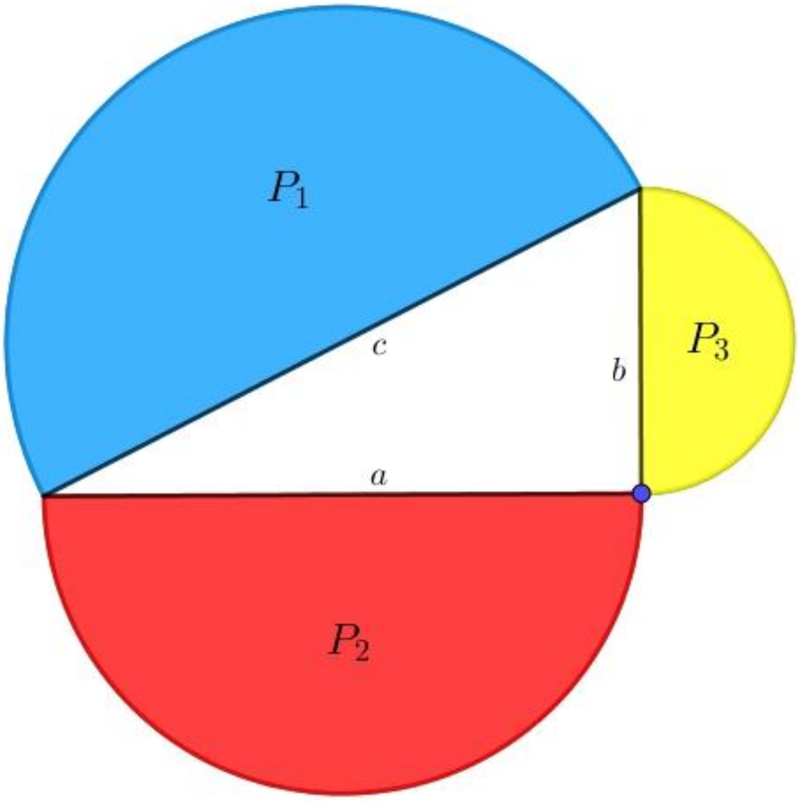
Rotiranjem danog prikaza moguće je vidjeti od kojih se sve „malih" tijela (kocki i kvadara) sastoji naša početna kocka. Trenutno je na skici vidljivo samo 5 kvadara, ali uključivanjem opcije rotacije, vidjeli bismo ih svih 6. Tri su crvene boje, a tri žute boje. Za početak promotrimo kvadre crvene boje; dva su mu brida duljine a, dok mu je treći brid duljine b. Volumen jednog crvenog kvadra je jednak umnošku duljine, širine i visine kvadra te iznosi $V_{crveni} = a^2b$. Potom se osvrnimo na žuti kvadar; dva su mu brida duljine b, a jedan duljine a. Tada je volumen jednog žutog kvadra jednak $V_{žuti} = ab^2$. Dakle, početka kocka brida duljine $a + b$ unutar sebe sadrži zelenu kocku brida a, plavu kocku brida b, 3 žuta kvadra i 3 crvena kvadra. Pišemo tada:

$$V_{početna} = V_{zelena} + 3 \cdot V_{crveni} + 3 \cdot V_{žuti} + V_{plava},$$

odnosno $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Velika je vrijednost ovog grafičkog prikaza za otkrivanje formule, razvijat će učenikov osjećaj za prostor i orijentaciju u njemu te poticati razvijanje učenikovih sposobnosti.

Polukrugovi i lunule – Pitagorin poučak

S učenicima osmog razreda na dodatnoj nastavi, s obzirom da su obradili Pitagorin poučak na redovnoj nastavi, možemo promatrati i generalizacije geometrijskih likova nad katetama i hipotenuzom pravokutnog trokuta te donositi zaključke o odnosima površina. Primjerice, učenici mogu sami uočiti da Pitagorin poučak vrijedi za jednakostranične trokute nad katetama i hipotenuzom ili primjerice za pravilne šesterokute. Interesantno je potom s nadarenim učenicima razgovarati o tome moraju li se nad stranicama trokuta nalaziti poligoni. Učenike navedemo da istražuju, da ispituju slučajeve nadopunjavanjem likova nad stranicama pravokutnog trokuta, nadajući se da će se eventualno dosjetiti (polu)krugova, te im damo naputak da sami istraže hoće li vrijediti Pitagorin poučak. Učenici će sigurno uspjeti izvesti površine polukrugova jer bez problema znaju računati površine krugova. Nakon što su učenici uspješno došli do zaključaka, nastavnik matematike još jednom tvrdnju dokazuje na ploči uz aktivnu diskusiju s učenicima. Crtamo skicu.

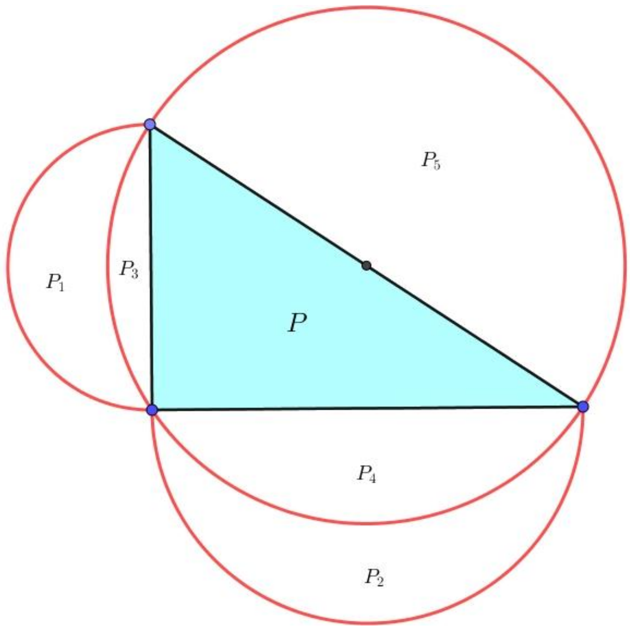


Slika 2.10. Poopćenje Pitagorinog poučka na polukrugove

Prvo nacrtamo pravokutan trokut s duljinama kateta a i b te hipotenuzom c. Nad katetama i hipotenuzom nacrtamo polukrugove i njihove površine označimo s $P_1, P_2\ i\ P_3$ (redom su to površine plavog, crvenog i žutog polukruga).

S obzirom da je ovaj trokut pravokutan, vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$. Promotrimo kakvi su odnosi površina polukrugova nad stranicama tog trokuta. Radijusi tih polukrugova imaju duljinu upola manju od duljine stranice nad kojom su konstruirani. Stoga, vrijedi $P_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} \cdot c^2$. Potom imamo $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} \cdot a^2$. I na kraju, imamo $P_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} \cdot b^2$. Provjerimo vrijedi li $P_1 = P_2 + P_3$. Uvrštavanjem izraza za površine dobivamo $\frac{\pi}{8} \cdot c^2 = \frac{\pi}{8} \cdot a^2 + \frac{\pi}{8} \cdot b^2$ te naposljetku množenjem dobivene jednakosti s $\frac{8}{\pi}$ dobivamo $c^2 = a^2 + b^2$, što znamo da vrijedi. ■

Osvrnimo se sada na lunule, dijelove ravnine koji su omeđeni kružnim lukovima pa oblikom podsjećaju na polumjesec (*lat. luna* znači Mjesec), vidi [3]. Nadarenim učenicima možemo nacrtati ovu skicu i postaviti sljedeći problem: *Dokažite da je zbroj površina dviju lunula nad katetama pravokutnog trokuta jednaka površini tog trokuta.*



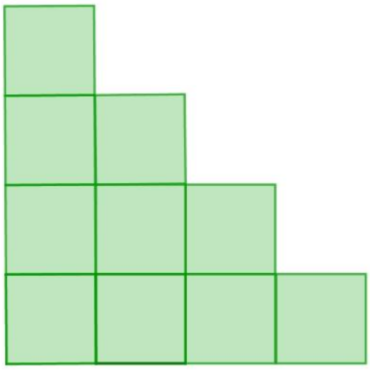
Slika 2.11. Lunule

Promotrimo skicu. Za početak je potrebno vidjeti od kojih su kružnih lukova nastale lunule. Uočavamo da je jedna kružnica opisana pravokutnom trokutu. Dvije polukružnice konstruirane su nad katetama pravokutnog trokuta na način da duljine kateta odgovaraju promjerima polukružnica. P_1 *i* P_2 predstavljaju površine dviju lunula nad katetama pravokutnog trokuta površine P. P_5 predstavlja površinu polukruga nad hipotenuzom, a P je površina trokuta. Želimo dokazati $P_1 + P_2 = P$. Iz prethodno dokazane tvrdnje (poopćenje Pitagorinog poučka na polukrugove) slijedi da je $(P_1 + P_3) + (P_2 + P_4) = P_5$. Sa skice je jasno da vrijedi $P_5 = P_3 + P_4 + P$.

Uvrštavanjem dobivenog u početnu jednakost dobivamo sljedeću jednakost: $P_1 + P_3 + P_2 + P_4 = P_3 + P_4 + P$, odnosno $P_1 + P_2 = P$. ■

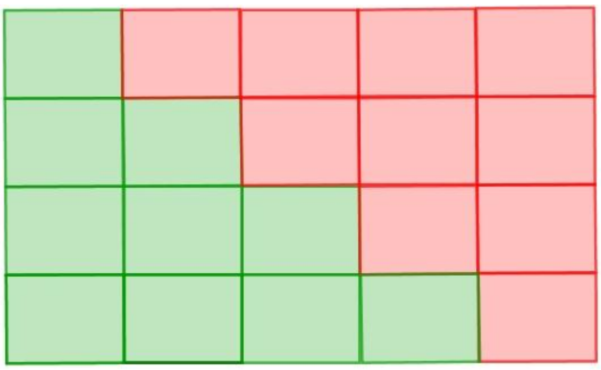
Suma prvih n uzastopnih prirodnih brojeva

Zbroj prvih n uzastopnih prirodnih brojeva iznosi $\frac{n(n+1)}{2}$. Kako bismo to dokazali? Mnogo je načina za dokazati tu tvrdnju, a većina nadarenih učenika prvo će se sjetiti Gaussove dosjetke i na taj način je dokazati. Prezentirajmo jedan od načina koje možemo raditi s učenicima na dodatnoj nastavi, već u petom razredu osnovne škole. Dakle, taj zbroj možemo predočiti kao slog kvadratića pri čemu svaki kvadratić predstavlja broj 1 (vidi [3]). Na vrhu sloga nalazi se jedan kvadratić, ispod njega su dva, ispod toga tri,… Tako nastavljamo s slaganjem kvadratića do nekog broja n. Nacrtajmo skicu za $n = 4$.



Slika 2.12.

Da bismo odredili koliki je zbroj $1 + 2 + \ldots n$ moramo odrediti koliko je ukupno kvadratića u slogu na čijoj je osnovici n kvadratića. Taj jedan slog (izgledom podsjeća na stepenice) zapravo je jednakokračan pravokutan trokut koji ima „nazubljenu“ hipotenuzu. Pored našeg zelenog sloga, nacrtajmo još jedan njemu sukladan crvene boje. Složimo ih jednog na drugog tako da nemamo nijedan „nazubljeni“ rub.



Slika 2.13.

Složili smo pravokutnik sa stranicama n i $n + 1$. Taj se pravokutnik sastoji od $n(n + 1)$ kvadratića, no nas zanima koliko ima zelenih kvadratića. S obzirom da smo duplicirali broj kvadratića onda kad smo nadodali crvene sukladne kvadratiće, zaključujemo da je broj zelenih kvadratića upola manji i iznosi $\frac{n(n+1)}{2}$. ■

2.4.3.2. Izoperimetrijski problemi

Izoperimetrijski problemi geometrijskih likova u ravnini istražujuju koji geometrijski lik iz neke grupe likova zadanog opsega ima najveću površinu i koji geometrijski lik iz neke grupe likova zadane površine ima najmanji opseg. Također, postoji i varijanta u kojem od svih tijela u prostoru zadanog oplošja tražimo ono koje ima najveći volumen. Rješenje izoperimetrijskih problema nije možda sasvim tako prirodno te je stoga zgodno da učenici ispituju slučajeve. Također, takvim zadatcima postižemo da učenici razmišljaju apstraktno, crtaju veliki broj skica, a svoje rješenje moraju detaljno obrazložiti i dokazati. Na osnovu određenog broja slučaja koje učenik nacrta, treba donijeti zaključak o tome koje je rješenje ispravno te matematički korektno argumentirati svoj odgovor. U pozadini izoperimetrijskih problema nalazi se zapravo određivanje ekstrema funkcije (površine ili volumena), ali s obzirom da su djeca s gradivom još daleko od derivacija i određivanja minimuma i maksimuma funkcija, ovi se zadatci rješavaju geometrijski i ispitivanjem slučajeva, skiciranjem i razmišljanjem. Nastavnik matematike, naravno, uvijek može sam za sebe provjeriti rješenje izoperimetrijskog problema zapisujući problem zadatka pomoću funkcija. Ova je tema zaista jako vrijedna za vođeno učenje otkrivanjem, tvrdi Pavleković (vidi [15]). Za početak zgodno je učenicima za motivaciju ispričati legendu o princezi Dido iz Tyre (današnja država Libanon). Legenda kaže da je princeza 814. godine prije Krista stigla na tlo današnjeg Tunisa i sa lokalnim starješinom dogovorila da dobije dio zemlje koji je dovoljno velik da se prekrije kožom bika. Zahvaljujući njenoj domišljatosti i matematičkom znanju, princeza Dido pronašla je optimalno rješenje i volovu kožu izrezala na tanke trake te njima okružila zemlju. Na taj je način ona okružila Kartagu i riješila jedan od prvih spomenutih izoperimetrijskih problema.

Za dodatnu nastavu s nadarenim učenicima osmog razreda osnovne škole, zgodno bi bilo proučavati jedan od jednostavnijih izoperimetrijskih problema: *„Koji od svih pravokutnika zadanog opsega ima najveću površinu?“* Za početak, s učenicima pokrenemo diskusiju oko toga jesmo li zadavanjem opsega pravokutnika zadali i njegov izgled/oblik. Uzeli bismo konkretan primjer (npr. opseg pravokutnika iznosi $20\ cm$) i prisjetili se kako se računa opseg pravokutnika, tj. formule. Učenici bi sugerirali $o = 2a + 2b$, gdje je a duljina pravokutnika, a b širina pravokutnika. Na ploču pišemo $20 = 2a + 2b$, tj. imamo $a + b = 10$. Uočavamo da mnogi brojevi a i b (npr. 2 i 8, 4 i 6) zadovoljavaju taj uvjet te bi zamolili učenike da sami odrede nekolicinu te da nacrtaju pravokutnike s tim stranicama. Neki bi bili uži, a neki širi. Time bi smo učenike naveli do zaključka da zadavanjem opsega pravokutnika nismo odredili i njegov oblik. Pokazali bismo to još jednom pomoću užeta stalne duljine; dvojica učenika bi pomagala i fiksirala vrhove pravokutnika na različitim mjestima i tako bi dobili različite pravokutnike.

Potom, učenici isprobavaju moguće slučajeve, crtaju pravokutnike ili ih rade pomoću užeta u grupama te im računaju površine. Vratimo li se potom na formulu za opseg pravokutnika $o = 2a + 2b$, zaključujemo da mora vrijediti $a + b = \frac{o}{2}$. Učenici su svjesni da su odabirom jedne veličine (a ili b) jednoznačno odredili i drugu veličinu jer mora vrijediti uvjet $a + b = \frac{o}{2}$. Metodom istraživanja slučajeva, učenici će naslutiti da će najveću površinu imati kvadrat, ali to treba i dokazati. Naravno, nećemo to dokazivati pomoću ekstrema funkcije s učenicima, ali kao nastavnik uvijek znamo da se to nalazi u pozadini. Recimo da će učenik odabrati varijablu a. Za tu varijablu postoje tri slučaja i raspisat ćemo svaki od njih. Napomenimo, o je zadani opseg pravokutnika.

Prvi slučaj: $0 < a < \frac{o}{4}$

U tom slučaju, postoji pozitivan realan broj x takav da je $a = \frac{o}{4} - x$. S obzirom da mora vrijediti uvjet $a + b = \frac{o}{2}$, slijedi da je $b = \frac{o}{2} - a = \frac{o}{2} - \left(\frac{o}{4} - x\right) = \frac{o}{4} + x$. Tada je površina pravokutnika jednaka $P = ab = \left(\frac{o}{4} - x\right)\left(\frac{o}{4} + x\right) = \frac{o^2}{16} - x^2$.

Drugi slučaj: $a = \frac{o}{4}$

U tom slučaju, s obzirom da mora vrijediti $a + b = \frac{o}{2}$, slijedi da je $b = \frac{o}{2} - a = \frac{o}{2} - \frac{o}{4} = \frac{o}{4}$. Tada je površina pravokutnika jednaka $P = ab = \frac{o}{4} \cdot \frac{o}{4} = \frac{o^2}{16}$.

Treći slučaj: $\frac{o}{4} < a < \frac{o}{2}$

U tom slučaju, postoji pozitivan realan broj y takav da je $a = \frac{o}{4} + y$. S obzirom da mora vrijediti uvjet $a + b = \frac{o}{2}$, slijedi da je $b = \frac{o}{2} - a = \frac{o}{2} - \left(\frac{o}{4} + y\right) = \frac{o}{4} - y$. Tada je površina pravokutnika jednaka $P = ab = \left(\frac{o}{4} + y\right)\left(\frac{o}{4} - y\right) = \frac{o^2}{16} - y^2$.

Dokažimo da smo time pokrili sve slučajeve. Pretpostavimo da postoji još jedan slučaj, a to je $\frac{o}{2} < a < o$. Tada postoji pozitivan realan broj z takav da je $a = \frac{o}{2} + z$. S obzirom da mora vrijediti uvjet $a + b = \frac{o}{2}$, slijedi da je $b = \frac{o}{2} - a = \frac{o}{2} - \left(\frac{o}{2} + z\right) = -z$. Dobili smo negativan broj $-z$. Dolazimo do kontradikcije jer je b širina pravokutnika koja ne može biti negativna. Dakle, sigurno smo obuhvatili sve slučajeve. Nastavimo sada dokaz. S obzirom da su x, y pozitivni realni brojevi, zaključujemo da su površine pravokutnika u prvom i trećem slučaju sigurno manje od površine pravokutnika u drugom slučaju zbog oduzimanja članova x^2 i y^2. Zaključujemo da pravokutnik ima najveću površinu kad mu je duljina jednaka $a = \frac{o}{4}$ i širina jednaka $b = \frac{o}{4}$, to jest, zaključujemo da od svih pravokutnika zadanog opsega najveću površinu ima upravo kvadrat. ■

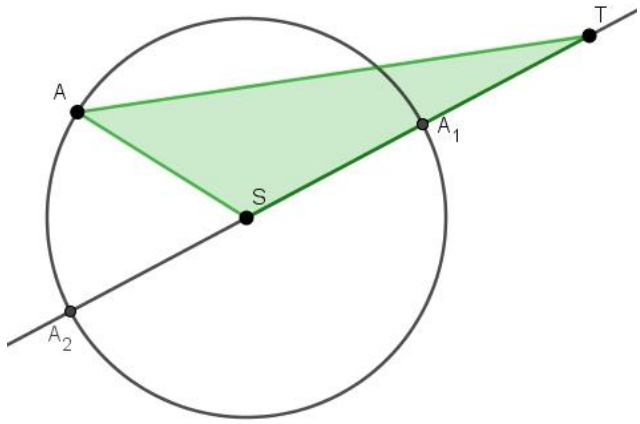
Još je jedno interesantno (slično) pitanje sljedeće: *„Koji od svih pravokutnika zadane površine ima najmanji opseg?“* S obzirom da je ovaj rad napisan u kontekstu osnovne škole, ovo pitanje ne možemo riješiti primjenom derivacije funkcije (za to trebamo čekati četvrti razred srednje škole), već je najbolje da se riješi metodom ispitivanja slučajeva i nepotpunom indukcijom. Učenicima zadamo iznos površine, npr. $P = 4$. Damo im naputak da vrijedi $ab = 4$, gdje su a, b duljine stranica kvadrata, te da moraju pronaći takve a i b za koje to vrijedi te za koje će opseg pravokutnika s tim stranicama biti najmanji. Učenici će sigurno prvo krenuti raspisivati cjelobrojne duljine a, b, a potom će vjerojatno prijeći i na racionalne, kao na primjer $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{16}{3}$. Izračunavanjem opsega uočit će da za $a = b = 2$ zaista imamo najmanji opseg koji iznosi 8, a time smo dokazali da taj pravokutnik zapravo kvadrat duljine stranice 2.

Analogna bi se aktivnost mogla provesti za maksimalnu površinu za proizvoljan trokut i pritom bi se došlo do zaključka da među svim trokutima istog opsega najveću površinu ima jednakostranični trokut.. Time se dolazi do zaključka da ako imamo zadane mnogokute istog opsega i s jednakim brojem stranica, tada najveću površinu ima pravilni mnogokut (Zenodorusov teorem). Također, zanimljiv je i rezultat da među bilo kojim konačnim skupom pravilnih mnogokuta istog opsega, najveću površinu ima mnogokut s najvećim brojem stranica. Učenicima se na istraživanje može dati i sljedeći izoperimetrijski problem: *„Koji od svih pravokutnika iste površine ima najkraću dijagonalu?“* Ispitivanjem slučajeva, učenici bi otkrili da je rješenje tog problema kvadrat.

Još bi se, kad se već s učenicima radi na izoperimetrijskim problemima, mogli promatrati likovi istog opsega (trokut, kvadrat, pravilni šesterokut, krug…). Računom bi se moglo pokazati da najveću površinu ima krug. Također, pomoću programa dinamičke geometrije GeoGebra, mogu se konstruirati navedeni likovi i pomoću alata Površina izračunati njihove površine. Tada bi učenici uočili da najveću površinu ima upravo krug.

Izoperimetrijski problemi nalaze se i u svakodnevnom životu, a jedan prikladan primjer bi bio sljedeći: *„Dana je ograda duga 50 metara. Trebamo ju iskoristiti da ogradimo zemljište pravokutnog oblika s triju strana tako da je njegova površina najveća. Kako ćemo to učiniti?“*

Nadarenim učenicima šestog razreda, nakon obrađene nastavne cjeline Trokut (koja u sebi sadrži i jedinicu Nejednakost trokuta), može se na istraživanje dati sljedeći problem: *„Dana je kružnica i točka T koja joj ne pripada. Koja je od svih dužina kojima je jedan kraj točka T, a drugi kraj točka na kružnici, najkraća/najdulja?"* Nacrtajmo skicu.



Slika 2.14. Skica izoperimetrijskog problema (kružnica)

Ovaj se problem rješava primjenom nejednakosti trokuta. Sjecišta pravca TS i kružnice su točke A_1 i A_2 te je točka A proizvoljna točka na kružnici. Zbog nejednakosti trokuta vrijedi:

$$|ST| < |AS| + |TA| \Leftrightarrow |TA_1| + |A_1S| < |AS| + |TA|$$

$$\Leftrightarrow |TA_1| + r < r + |TA| \Leftrightarrow |TA_1| < |TA|$$

Također, vrijedi i:

$$|TA| < |AS| + |ST| \Leftrightarrow |TA| < r + |TS|$$

$$\Leftrightarrow |TA| < |SA_2| + |TS| \Leftrightarrow |TA| < |TA_2|$$

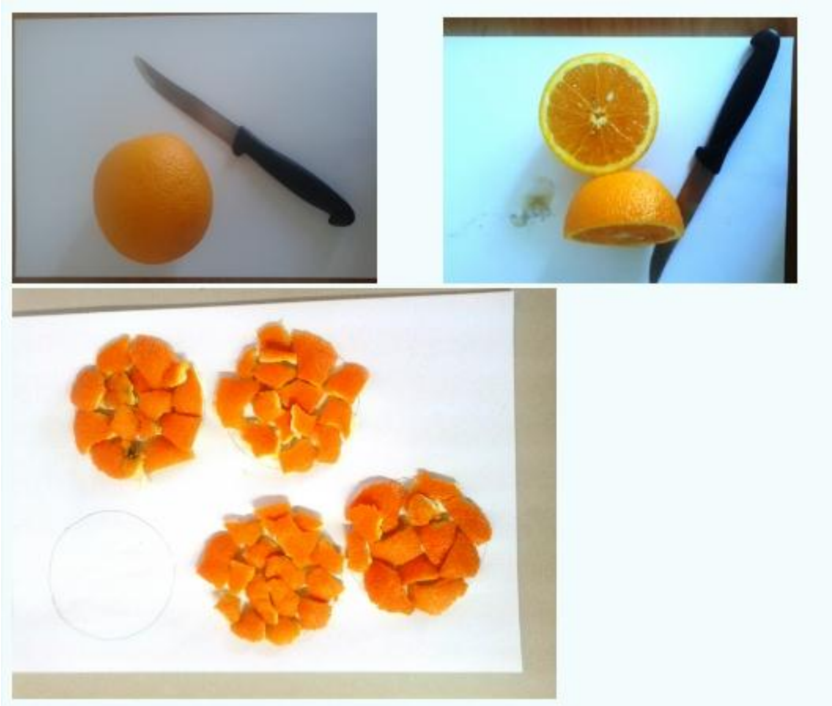
Dakle, zaista je najkraća dužina $\overline{TA_1}$, a najdulja $\overline{TA_2}$.

Ova je tema bogata i vrijedna za obradu s nadarenim učenicima jer ih potiče na apstraktnije razmišljanje te na osmišljavanje dokaza geometrijskih tvrdnji.

2.4.3.3. Oplošje kugle

Vrlo interesantan dokaz formule za oplošje kugle izvodi se upravo vlastitim rukama i jednim rekvizitom: narančom. Ova aktivnost pogodna je zapravo za sve učenike na redovnoj nastavi matematike te bi nastavnik trebao izvesti pokus za sve svoje učenike. No, zanimljivo bi bilo problem prikazati učenicima na dodatnoj nastavi bez danog rješenja. Nakon što su učenici otkrili i izveli formule za oplošje kugle, idući sat na redovnoj nastavi prezentiraju svoje otkriće ostatku razreda. S nadarenim učenicima osmog razreda, na satu dodatne nastave nastavnik razgovara o oplošjima nekih geometrijskih tijela (prizme, piramide, stošci,..) te komentira kako se oplošje najbolje vidi kad tijelo razvijemo u ravninu. Komentirali bi da je mreža uspravne piramide njena baza i jednakokračni trokuti, a mreža stošca kružni isječak i krug. Tada nastavnik postavlja pitanje: „Koji lik dobijemo kada razvijemo kuglu u ravninu ako je to moguće?“ Očekivani odgovor od strane učenika jest „razvijanjem kugle u ravninu dobit ćemo krug“, što smatramo čak i dobrim zaključkom od strane učenika. Učenike tada treba pohvaliti, ali komentirati kako kuglinu plohu zapravo nije moguće razviti u ravninu u cijelosti. No, vratimo se na učenikov prijedlog kruga kao oplošja kugle. Kako mu izračunati površinu? S obzirom da kod kugle imamo poznatu samo jednu veličinu (radijus R), s učenicima zaključujemo da će oplošje upravo biti povezano s tom veličinom. Gdje na kugli možemo pronaći radijus R? Učenici će sugerirati da naranču presiječemo na pola i tada ćemo dobiti dvije polukugle koje imaju za baze krugove radijusa upravo R. Te krugove želimo nekako „očuvati“ jer nam trebaju za veličinu R. Razgovorom s učenicima o tome kako želimo imati vizualno reprezentiranu veličinu R, dolazimo do zaključka da želimo imati vizualno reprezentiran upravo taj krug radijusa R. To možemo učiniti dva načina. Prvi način je da kemijskom olovkom prođemo po rubu baze nakon što naranču naslonimo na papir ili da jednostavno ostavimo trag od narančina soka na papiru tako da malo „stisnemo“ naranču uz papir. Moramo osvijestiti što zapravo predstavlja oplošje kugle, a to je površina „obruba“ te kugle. Na naranči bi oplošje predstavljala upravo njena kora. Nakon što smo s učenicima zaključili da promatramo koru, sugeriramo im da lagano krenu guliti svoju naranču, nastojeći da su komadići kore što manji. Sugeriramo učenicima da narančinom korom pokušaju popuniti krug čiji su trag ostavili na papiru. Zasigurno će u tome uspjeti, ali će im ostati viška kore. Nastavnik treba stalno naglašavati da komadići kore budu što manji zbog bolje preciznosti. Tada učenicima govorimo da ponove postupak popunjavanja krugova sve dok ne ostanu bez kore

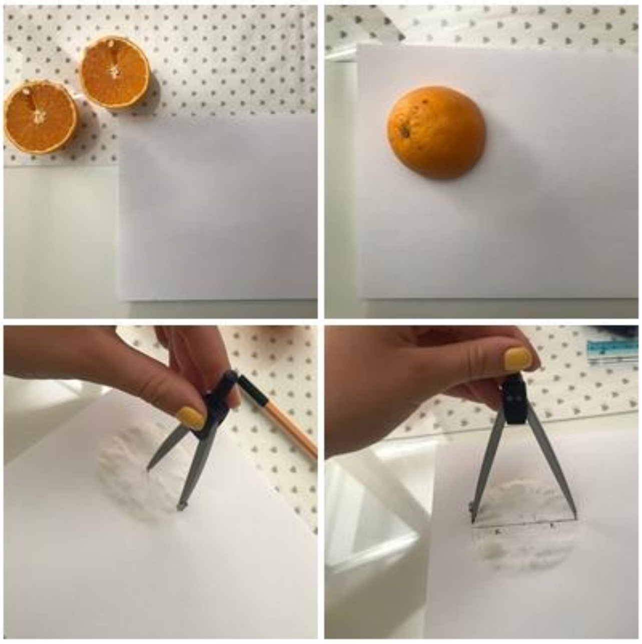
Uspješno će taj postupak ponoviti još tri puta, odnosno, s komadićima kore popunit će upravo četiri kruga radijusa R. U početku smo očekivali jedan krug, a dobili smo četiri (slika 2.13.). Naša pretpostavka išla je u dobrom smjeru, ali nismo kvantitativno pogodili koliko će krugova biti. Učenici tada interpretiraju dobiveni rezultat na sljedeći način: oplošje kugle radijusa R odgovara površini četiriju krugova radijusa R te vrijedi $O = 4R^2\pi$.



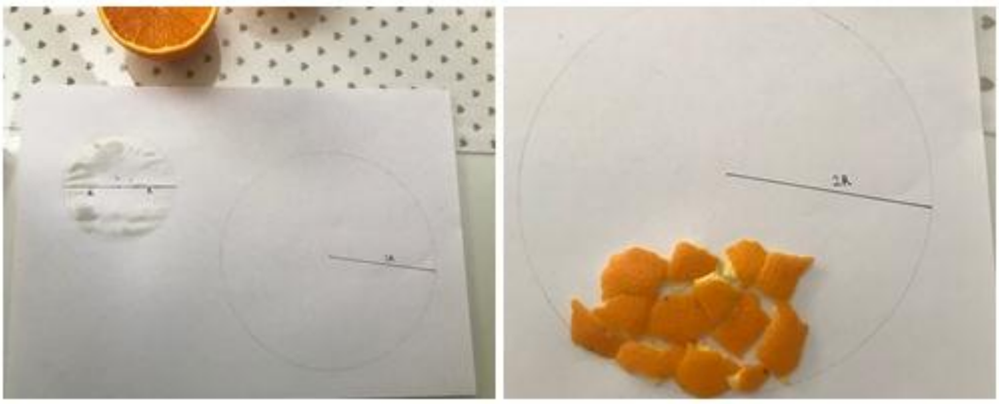
Slika 2.15. Oplošje kugle (1), slika preuzeta sa:
http://os-sesvete-zg.skole.hr/?news_id=550

Postoji i drugi način. Naime, $4R^2\pi$ možemo interpretirati kao površina kruga radijusa $2R$. Dokaz isto možemo izvesti koristeći narančinu koru. Za početak, naranču presiječemo na pola i ostavimo trag na papiru u obliku kruga radijusa R.

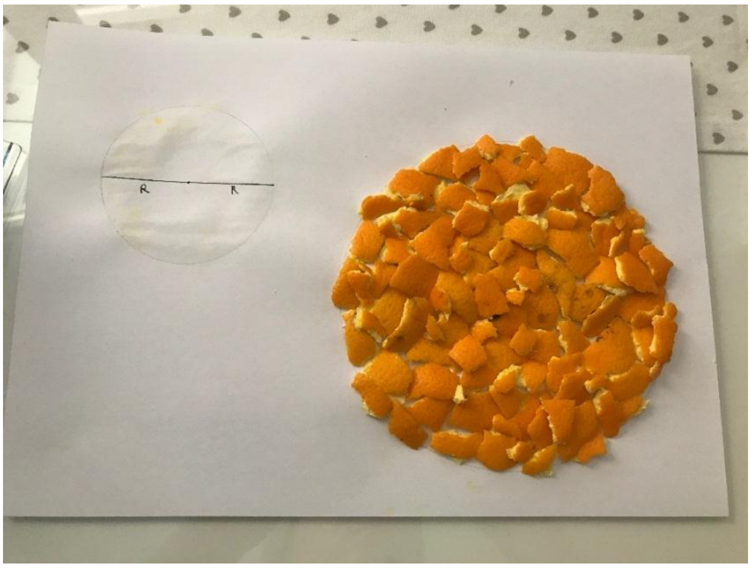
Šestarom ocrtamo rub naranče i označimo promjer baze kruga duljine $2R$. Tu duljinu uzmemo u šestar i nacrtamo kružnicu radijusa $2R$. Potom ponavljamo postupak guljenja narančine kore i popunjavanja tog kruga. I zaista, kora je sasvim popunila krug radijusa $2R$.



Slika 2.16. Oplošje kugle (2)



Slika 2.17. Oplošje kugle (3)



Slika 2.18. Oplošje kugle (4)

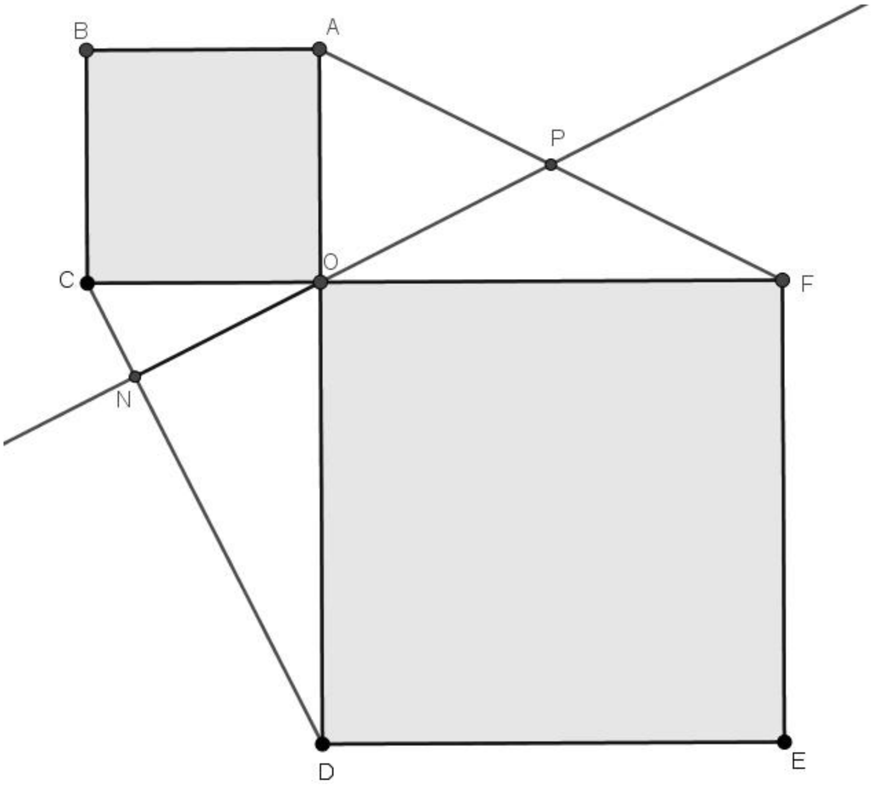
2.4.3.4. Neki zanimljivi zadatci za dodatnu nastavu

Sljedeći zadatci odabrani su jer predstavljaju izazov za učenikovo rješavanje na dodatnoj nastavi. Zasigurno, njihova rješenja nisu naočigled jasna te učenik treba dobro razmisliti i isprobati razne metode rješavanja te odabrati pogodnu. U ovim zadatcima nisu dane upute za rješavanje, već učenik sam bira svoj put rješavanja. Neki od njih rješavali su se na natjecanjima, a sigurno su ušli u izbor zadataka za natjecanje zbog svoje složenosti i zbog korištenja brojnih matematičkih činjenica pri rješavanju te su se njima utvrdila razna matematička znanja. Važan je korak crtanje skice u kojoj se prikazuju zadane veličine i posebno označavaju tražene. Nekada se veza među veličinama može lako uočiti te se problem može brzo riješiti, ali ponekad to nije tako. Neki od zadataka, koje ćemo riješiti u ovom poglavlju, rješavaju se metodom pomoćnih likova. Pritom se skica ili dio skice nadopunjava novim elementima i dobivaju se neki novi likovi koji pomažu da se dođe do rješenja. Za neke od ovih zadataka sigurno postoji i više načina rješavanja, ali se autorica rada odlučila za ono koje je smatrala najefikasnijim. Kad je učenik u pitanju, svaki način rješavanja je važan i vrijedan, a onaj najefikasniji i najjednostavniji posebno se izdvaja na kraju. Prirodno je zapitati se zašto uopće razmatrati više načina rješavanja zadatka. Sasvim je jasno da je dovoljno pronaći jedan način rješavanja zadatka. No, za jedan način rješavanja koristimo jedne činjenice, za drugi način koristimo neke druge činjenice itd. Zaključujemo da je za pronalaženje više načina dolaska do rješenja potrebna veća količina znanja i teorije te poznavanje različitih metoda rješavanja. Time se postiže da se na jednom zadatku ponovi veliki broj činjenica, da se produbljuje znanje i da se povećava učenikova aktivnost.

Zadatak 2.1. (Metodika nastave matematike 4, 2019., PMF-MO)

Neka su $ABCO$ i $DEFO$ kvadrati takvi da se $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$ sijeku u vrhu O. Ako je $\overline{ON}$ visina trokuta CDO, dokažite da pravac ON siječe dužinu $\overline{AF}$ u njenom polovištu.

Rješenje: Nacrtajmo skicu.



Slika 2.19. Skica zadatka 2.1.

Neka je točka P sjecište pravca ON i dužine $\overline{AF}$. Zapravo želimo pokazati $|AP| = |PF|$. Promotrimo trokute ΔCOD i ΔAOF. Za njih vrijedi:

- $\measuredangle COD = \measuredangle AOF = 90°$ (jer je $\overline{AD} \perp \overline{CF}$)
- $|OD| = |OF|$ (jer je $DEFO$ kvadrat)
- $|OC| = |OA|$ (jer je $ABCO$ kvadrat)

Po SKS teoremu o sukladnosti trokuta, zaključujemo da su trokuti ΔCOD i ΔAOF sukladni i pišemo $\Delta COD \cong \Delta AOF$. Neka je $\measuredangle OCD = \alpha$. Zbog sukladnosti trokuta ΔCOD i ΔAOF, slijedi da je također $\measuredangle OAF = \alpha$. S obzirom na to da je ΔCOD pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu O, a jedan šiljasti kut mu je $\measuredangle OCD = \alpha$, tada je drugi šiljasti kut $\measuredangle ODC = 90° - \alpha$.

S obzirom na to da je dužina $\overline{ON}$ visina trokuta CDO, znamo da je $= \measuredangle OND = 90°$. Kako je ΔOND pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu N kojem je jedan šiljasti kut $\measuredangle ODN = \measuredangle ODC = 90° - \alpha$, slijedi da je drugi šiljasti kut $\measuredangle DON = \alpha$.

Kutovi $\measuredangle DON$ i $\measuredangle AOP$ su vršni kutovi između pravaca AD i PN te zbog toga slijedi da je $\measuredangle DON = \measuredangle AOP = \alpha$. Zbog sukladnosti trokuta ΔCOD i ΔAOF, tj. zbog $\measuredangle OAF = \alpha$, slijedi $\measuredangle OAP = \measuredangle AOF = \measuredangle AOP = \alpha$. Dakle, ΔAOP je jednakokračan trokut te iz toga proizlazi $|AP| = |OP|$.

Iz $\measuredangle AOF = 90°$ slijedi $\measuredangle POF = \measuredangle AOF - \measuredangle AOP = 90° - \alpha$. Zbog sukladnosti trokuta ΔCOD i ΔAOF, tj. zbog $\measuredangle AFO = 90° - \alpha$, slijedi $\measuredangle AFO = \measuredangle POF = 90° - \alpha$. Dakle, ΔPOF je jednakokračan trokut je iz toga proizlazi $|OP| = |PF|$.

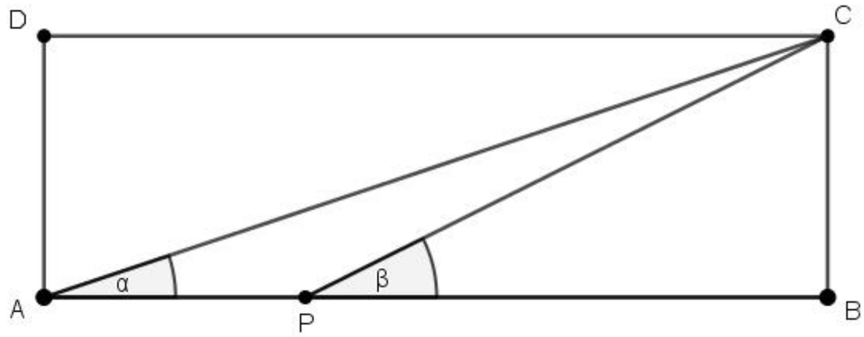
S obzirom da smo dobili da vrijedi $|AP| = |OP|$ i $|OP| = |PF|$, po tranzitivnosti vrijedi $|AP| = |PF|$, što smo i trebali dokazati. ■

Ovaj zadatak je zgodan jer nigdje u tekstu ne navodi na to da se jednakost duljina nekih dužina dokazuje traženjem jednakokračnih trokuta čiji su krakovi promatrane dužine. Prikladan je za one satove dodatne nastave nakon što se obradila sukladnost trokuta u 6. razredu osnovne škole. Nadareni učenici bi rado prihvatili izazov rješavanja ovakvog zadatka koji zaista zahtijeva dobro poznavanje kutova i odnosa među kutovima.

Zadatak 2.2. (Državno natjecanje, 2008., 8. razred, vidi [11])

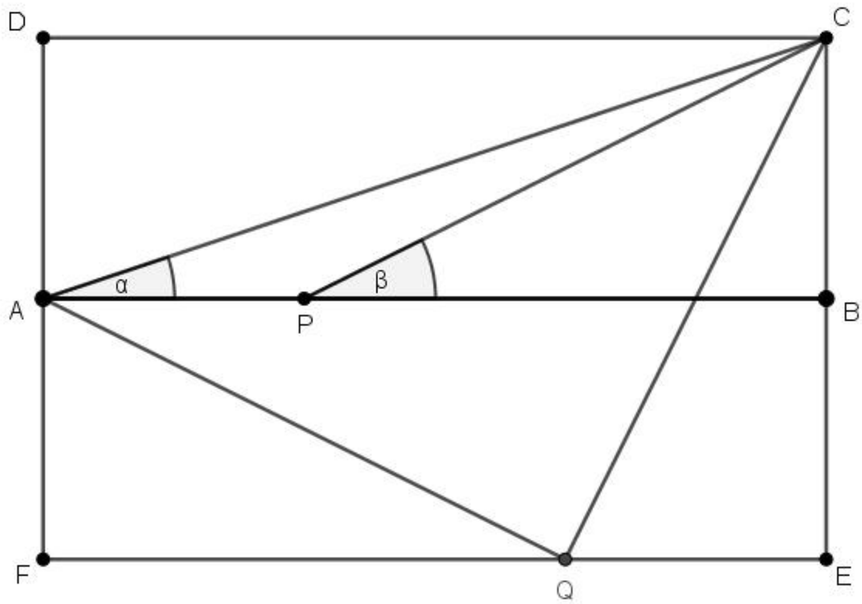
Zadan je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB| = 3|BC|$. Na stranici $\overline{AB}$ dana je točka P takva da je $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$. Dokažite da je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CPB = 45°$.

Rješenje: Potrebno je prvo nacrtati skicu. Neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$ i $\sphericalangle CPB = \beta$.



Slika 2.20. Skica zadatka 2.2

Želimo zapravo pokazati da je $\alpha + \beta = 45°$. Zadatak ćemo riješiti metodom pomoćnih likova, a prvi korak u rješenju bit će nacrtati još jedan pravokutnik sukladan pravokutniku $ABCD$ koji leži na stranici $\overline{AB}$. Neka se taj pravokutnik zove $AFEB$. Na stranici $\overline{FE}$ odabrat ćemo točku Q takvu da vrijedi analogno svojstvo kao za točku P, a to je $|QE| = \frac{1}{3}|FE|$. Nacrtajmo skicu nadopunjeno s našim pomoćnim likom.



Slika 2.21. Nadopunjena skica zadatka 2.2.

Promotrimo pravokutne trokute ΔAFQ i ΔQEC. Za njih vrijedi:

- $\measuredangle AFQ = \measuredangle QEC = 90°$ (jer su $ABCD$ i $AFEB$ pravokutnici)
- $|AF| = |QE|$ (jer je $|AF| = |BC| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3}|FE| = |QE|$)
- $|FQ| = |EC|$ (jer je $|FQ| = \frac{2}{3}|FE| = \frac{2}{3}|AB| = \frac{2}{3} \cdot 3|BC| = 2|BC| = |EC|$)

Po SKS teoremu o sukladnosti trokuta, zaključujemo da vrijedi $\Delta AFQ \cong \Delta QEC$. Zbog sukladnosti trokuta ΔAFQ i ΔQEC, vrijedi da je $|AQ| = |QC|$. Stoga je ΔAQC jednakokračan trokut. Pokažimo i da je taj trokut pravokutan s pravim kutom u vrhu Q. S obzirom na sukladnost trokuta ΔAFQ i ΔQEC, slijedi da su i njihovi odgovarajući kutovi sukladni, tj. $\measuredangle AQF = \measuredangle QCE$ i $\measuredangle FAQ = \measuredangle CQE$. Sa skice uočavamo da će vrijediti sljedeće: $180° = \measuredangle AQF + \measuredangle AQC + \measuredangle CQE$. S obzirom da je $\measuredangle AQF = QCE$, imamo da je prethodna tvrdnja ekvivalentna sljedećoj: $180° = (\measuredangle QCE + \measuredangle CQE) + AQC = 90° + \measuredangle AQC$, odnosno $\measuredangle AQC = 90°$. Time smo pokazali da je ΔAQC jednakokračan pravokutan trokut. Kao posljedicu toga imamo da su kutovi uz osnovicu $\overline{AC}$ sukladni i njihova veličina iznosi 45°. Želimo pokazati da je $\measuredangle CPB = \measuredangle BAQ$, odnosno $\measuredangle BAQ = \beta$. Prvo promotrimo ΔAFQ i ΔCBP. Za njih vrijedi:

- $\measuredangle AFQ = \measuredangle CBP = 90°$ (jer su $ABCD$ i $AFEB$ pravokutnici)
- $|AF| = |BC|$
- $|FQ| = |PB|$ (jer je $|FQ| = \frac{2}{3}|FE| = \frac{2}{3}|AB| = |PB|$

Po SKS teoremu o sukladnosti trokuta, zaključujemo da vrijedi $\Delta AFQ \cong \Delta CBP$. Zbog sukladnosti slijedi i da su im odgovarajući kutovi sukladni, odnosno $\measuredangle AQF = \measuredangle CPB = \beta$. S obzirom da je ΔAFQ pravokutan trokut, vrijedi $\measuredangle FAQ = 90° - \measuredangle AQF = 90° - \beta$. Kako je $AFEB$ pravokutnik, tako je $\measuredangle FAB = 90°$. Dakle, vrijedi $\measuredangle BAQ = \measuredangle FAB - \measuredangle FAQ$, to jest, $\measuredangle BAQ = 90° - (90° - \beta) = \beta$. Stoga, vrijedi $\measuredangle CPB = \measuredangle BAQ = \beta$.

Imamo na kraju $\measuredangle CAB + \measuredangle CPB = \alpha + \beta = \measuredangle CAB + \measuredangle CAQ = 45°$. ■

Ovaj zadatak, gledajući razinu složenosti zadatka, pripada kategoriji „složenije povezivanje i rješavanje nestandardnih problema“ jer zahtijeva crtanje pomoćnih likova u i snalaženje u crtežu koji dosad učenik nije susreo. Na natjecanju ga je uspješno i u cjelovitosti riješilo 4/42 učenika (vidi [11]), što je i očekivano s obzirom na složenost i na „količinu posla“ kojeg treba obaviti. Matematičko znanje u ovome zadatku nije ništa osim sukladnosti trokuta te znanje o kutovima, ali , ako učenik upotrijebi metodu pomoćnih likova i pritom pogrešno nacrta početnu skicu, skica može zavarati i navesti na pogrešni smjer rješavanja zadatka. Ovaj bi se zadatak mogao riješiti s učenicima osmih razreda (čak i na redovnoj nastavi, ali uz aktivnu diskusiju i pomoć nastavnika), ali bi se definitivno mogao vježbati i s nadarenim učenicima sedmog razreda osnovne škole zbog neobične metode rješavanja i pristupa zadatku.

Zadatak 2.3. (Natjecanje Klokan bez granica, 2018., Cadet, vidi [8])

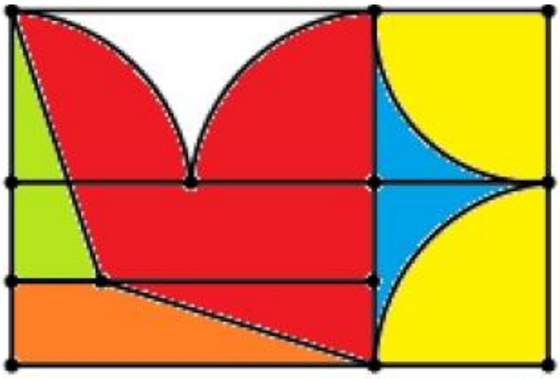
Frankin letački klub dizajnirao je zastavu s motivom golubice u letu na kvadratnoj mreži prikazanoj na slici. Površina golubice je $192\ cm^2$. Svaki dio ruba golubice pripada ili kružnici ili pravcu. Koje su dimenzije zastave?

A) 6 cm x 4 cm B) 12 cm x 8 cm C) 20 cm x 12 cm D) 24 cm x 16 cm

E) 30 cm x 20 cm

Slika 2.22. Golubica

Rješenje: Nacrtajmo skicu ponovo i obojimo dijelove golubice da bismo lakše uočili od kojih je dijelova napravljena.



Slika 2.23. Golubica (obojena)

Površina golubice je $P = P_{pravokutnik} - P_{zeleni} - P_{narančasti} - P_{bijeli} - P_{žuti}$. Neka je R radijus kružnice čiji lukovi čine neke od rubova golubice. Na skici R odgovara duljini dvaju stranica kvadratić. Odredimo površinu zelenog dijela golubice (pravokutan trokut). Njegove katete imaju duljinu $\frac{1}{2}R$ i $\frac{3}{2}R$. Stoga je površina zelenog trokuta jednaka $P_{zeleni} = \frac{\frac{1}{2}R \cdot \frac{3}{2}R}{2} = \frac{3}{8}R^2$.

Odredimo površinu narančastog dijela golubice (pravokutan trapez). Duljina kraće osnovice trapeza je $\frac{1}{2}R$, a duže $2R$. Duljina visine tog trapeza jednaka je $\frac{1}{2}R$. Stoga je površina trapeza jednaka $P_{narančasti} = \frac{(\frac{1}{2}R + 2R) \cdot \frac{1}{2}R}{2} = \frac{5}{8}R^2$.

Odredimo površinu bijelog dijela golubice tako da od površine kvadrata duljine stranice R oduzmemo površinu četvrtine kruga radijusa R te dobiveni rezultat udvostručimo. Tako ćemo dobiti da je $P_{bijeli} = 2 \cdot \left(R^2 - \frac{1}{4}R^2\right) = 2 \cdot \frac{3}{4}R^2 = \frac{3}{2}R^2$.

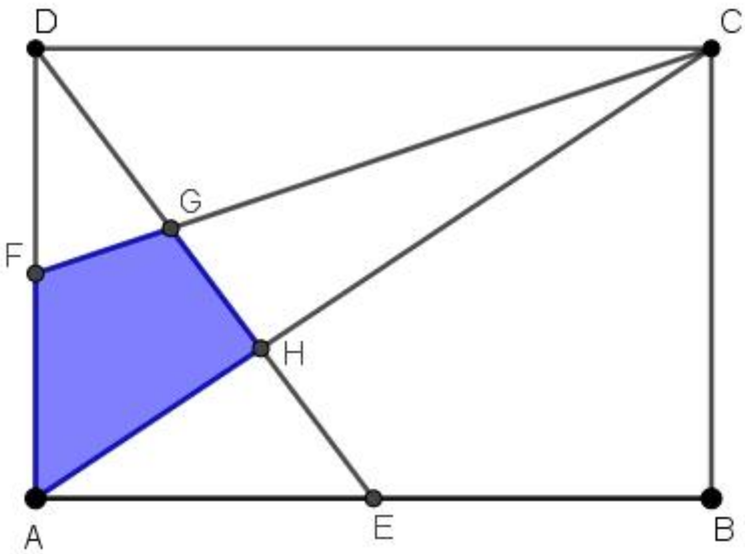
Odredimo površinu žutog dijela golubice. Zapravo je to polovina kruga radijusa R. Tada je $P_{žuti} = \frac{1}{2}R^2$. Preostaje još izračunati površinu pravokutnika. Dobivamo $P_{pravokutnik} = 3R \cdot 2R = 6R^2$. Površina golubice je tada $P = 6R^2 - \frac{3}{8}R^2 - \frac{5}{8}R^2 - \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2 = 3R^2$. Uvjet zadatka kaže $P = 192\ cm^2$. Tada je $3R^2 = 192\ cm^2$, odnosno $R = 8\ cm$.

Dakle, duljine zastavice odgovaraju duljini i širini pravokutnika. Duljina pravokutnika iznosi $3R = 24\ cm$, a širina $2R = 16\ cm$. Stoga je točan odgovor D). ■

Zadatak 2.4. (Državno natjecanje, 2018., 7. razred)

Duljine stranica pravokutnika su $ABCD$ su $|AB| = 3$ i $|BC| = 2$. Neka su točke E i F redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Neka je G sjecište dužina $\overline{FC}$ i $\overline{DE}$, a H sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{DE}$. Izračunaj površinu četverokuta $AHGF$.

Rješenje: Nacrtajmo skicu.

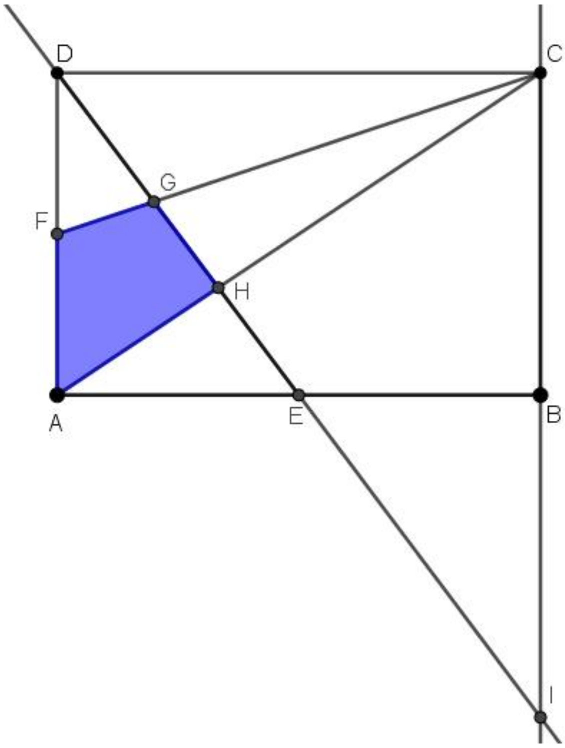


Slika 2.24. Skica zadatka 2.4.

Površinu četverokuta $AHGF$ dobit ćemo tako da od površine trokuta AHD oduzmemo površinu trokuta FGD. Promotrimo trokute AEH i CDH. Za njih vrijedi:

- $\measuredangle AEH = \measuredangle CDH$ (jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu DE)
- $\measuredangle EAH = \measuredangle HCD$ (isti razlog)

Po KK teoremu o sličnosti trokuta, zaključujemo da su trokuti AEH i CDH slični s koeficijentom sličnosti $k_1 = \frac{1}{2}$ (jer je $|AE| = \frac{1}{2}|CD|$ zbog tog što je E polovište $\overline{AB}$). Dakle, vrijedi i $\frac{|AH|}{|CH|} = \frac{1}{2}$. Osim toga, imamo da je $|AH| = \frac{1}{3}|AC|$ i $P_{AHD} = \frac{1}{3}P_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 1$. Nadopunimo skicu tako da povučemo pravce DE i CB. Presjek tih pravaca je točka I.



Slika 2.25. Skica zadatka 2.4. (nadopunjena)

Promotrimo trokute AED i BEI. Za njih vrijedi:

- $\measuredangle AED = \measuredangle BEI$ (vršni kutovi)
- $\measuredangle EAD = \measuredangle EBI = 90°$
- $|AE| = |BE|$

Po KSK teoremu o sukladnosti trokuta, zaključujemo da su trokuti $AED\ i\ BEI$ sukladni. Stoga je $|BI| = |AD|$ pa slijedi $|CI| = 2 \cdot |AD| = 2 \cdot 2 = 4$. Promotrimo još trokute DFG i ICG. Za njih vrijedi:

- $\measuredangle FDG = \measuredangle CIG$ (jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu DE)
- $\measuredangle DFG = \measuredangle GIC$ (isti razlog)

Prema KK teoremu o sličnosti trokuta, zaključujemo da su trokuti $DFG\ i\ ICG$ slični s koeficijentom sličnosti $k_2 = \frac{1}{4}$ (jer je $\frac{|DF|}{|IC|} = \frac{1}{4}$). Tada je $\frac{|FG|}{|CG|} = \frac{1}{4}$.

Imamo $|FG| = \frac{|CG|}{4} = \frac{|CF|}{5}$. Stoga je $P_{DFG} = \frac{1}{5} P_{DFC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{10}$.

I na kraju je $P_{AHGF} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. ■

3. Literatura

[1] **Baranović, N.** O razvoju geometrijskog mišljenja u nastavi matematike prema van Hiele-ovoj teoriji, Simpozijum *Matematika i primene,* Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2015., dostupno na: O_razvoju_geometrijskog_misljenja_u_nast.pdf (srpanj 2019.)

[2] **Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M**. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 31-48.

[3] **Dakić, B.** (2018) *Matematika u boji: dokazi bez riječi.* Element

[4] **De Villers, M.** (2010). Some reflections on the Van Hiele theory. Invited plenary presented at the 4th Congress of teachers of mathematics of the Croatian Mathematical Society.

[5] **Elezović, N.** (2005). *Matematička natjecanja i rad s darovitim učenicima,* Element, Zagreb

[6] **George, D.** (1995). *Gifted Education, Identification and Provision.* London: David Fulton Publishers.

[7] **Glasnović Gracin, D., & Burušić, J**. (2018). ELEMENTI STEM KREATIVNOSTI. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, *19*(75), 9-14.

[8] **Horvatek, A.** Natjecanja iz matematike u RH, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan-bez-granica.htm (srpanj 2019.)

[9] **Hu, W., & Adey, P**. (2002.) A scientific creativity test for secondary school students. *International Journal of Science Education*, *24*(4), 389-403.

[10] **Koren, I.** (1989). *Kako prepoznati i identificirati nadarenog učenika*. Školske novine.

[11] **Kurnik, Z.** (2010). *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*. Element.

[12] **Ministarstvo prosvjete i kulture** (1990). Pravilnik o osnovnoškolskom odgoju i obrazovanju darovitih učenika. Narodne novine, 59.

[13] **Nikčević-Milković, A., Jerković, A., & Rukavina, M.** (2017). Stanje, problemi i potrebe rada s darovitim učenicima u osnovnim školama u Republici Hrvatskoj. *Magistra Iadertina*, *11*(1.), 9-34.

[14] **Page, A.** (2006). Three Models for Understanding Gifted Education. *Kairaranga*, *7*(2), 11-15.

[15] **Pavleković, M.** (2009). *Matematika i nadareni učenici: razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Element.

[16] **Renzulli, J. S.** (1986). The Three-ring conception of giftedness: A developmental model for creative productivity. U: Sternberg, R. J.; Davidsom, J. E. (ur.). *Conception of Giftedness*. New York: University Press.

[17] **Romano, D. A.** (2009). Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije. *Metodički obzori: časopis za odgojno-obrazovnu teoriju i praksu*, *4*(7-8), 95-103

[18] **Vojnović, N.** (2005). Stanje, problemi i potrebe u području skrbi o darovitim učenicima u hrvatskom školskom sustavu. U: Vlahović-Štetić, V. (ur.). *Daroviti učenici: Teorijski pristup i primjena u školi,* Znanost i društvo, Zagreb: IDIZ

[19] **Wakefield, J. F.** (1992) *Creative thinking: Problem solving skills and the arts orientation*. Ablex Publishing Corporation Norwood
[20] **Winsløw, C**. (2017). Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike. Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb.
[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Torrance_Tests_of_Creative_Thinking (srpanj 2019.)

4. Sažetak

Geometrijsko mišljenje bitan je dio u procesu učenja matematike. Moguće ga je razvijati na više načina; vizualizacijom matematičkih problema, crtanjem skica i zornim prikazivanjem geometrijskih tvrdnji te općenito rješavanjem geometrijskih problemskih zadataka. Nadareni učenici su poseban izazov za svakog nastavnika matematike koji ima želju pripremiti učenike da razumiju svijet oko sebe i da razvijaju matematički način mišljenja. S obzirom na veliko „bogatstvo“ područja geometrije, nadareni učenici mogu unaprijediti svoje geometrijsko mišljenje i kreativnost, raditi na produbljivanju svoga znanja te, uz pomoć nastavnika, učiti otkrivanjem. U prvom dijelu rada, razradili smo teoriju geometrijskog mišljenja po van Hiele-ovom modelu. Potom se u drugom dijelu rada definirala kreativnost te su se razradile njene značajke, a komentirani su i testovi kreativnosti koji pomažu otkrivanju kreativnih učenika u školi. Spomenuli su se i nadareni učenici i načini otkrivanja nadarenih učenika u školama. U posljednjem dijelu nalaze se zanimljivi osnovnoškolski nastavni sadržaji pogodni za učenikovo učenje otkrivanjem na dodatnoj nastavi matematike, spomenuti su neki dokazi (bez riječi) te su riješeni zadatci koji su zamišljeni za samostalan rad učenika na satima dodatne nastave u osnovnoj školi.

5. Summary

Geometric thinking has an essential part in the process of learning mathematics. It's possible to develop geometric thinking through visualization of mathematical problems and theorems and also through drawing various sketches while working on problem solving tasks in geometry. Gifted students represent a special challenge for math professors who want to prepare their students to understand the world around them and develop mathematical way of thinking. Because of the variety and richness of the field of geometry, gifted students can develop and work on their knowledge, geometric thinking skills and creativity. In the first part of this paper, we elaborated the theory of geometric thinking based on van Hiele model. Secondly, we defined creativity and its features. Also we mentioned some creativity tests, which help in the process of determining creative students in school, and discussed how to find out which students are gifted. The last part contains some interesting geometry topics (in elementary school) intended for inquiry-based learning, some proofs without words and tasks which can be used for additional mathematics classes in elementary school.

6. Životopis

Maja Lucić rođena je 28. studenog 1995. godine u Šibeniku. Po završetku OŠ Vidici, upisuje prirodoslovno-matematički smjer gimnazije Antuna Vrančića u Šibeniku. Postala je studenticom preddiplomskog studija matematike (nastavnički smjer) Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu 2014. godine te ga je završila 2017. godine. Svoj obrazovni put nastavlja na diplomskom studiju matematike (nastavnički smjer) Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu te u sklopu studija obavlja metodičku praksu u osnovnoj školi Remete te u IX. gimnaziji.