Numerička metoda u procjeni cijene opcije

Malenica, Josipa

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:912802

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-23**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Josipa Malenica

NUMERIČKA METODA U PROCJENI CIJENE OPCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem obitelji i prijateljima na podršci tijekom svih godina studiranja.
Zahvaljujem mentoru na ustupljenom vremenu i pomoći.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Opcije **2**
1.1 O opcijama 2
1.2 Funkcija isplate 3
1.3 Faktori koji utječu na cijenu opcije 5

2 Proširenje Black-Scholesovog modela i svojstva **7**
2.1 Parcijalna diferencijalna jednadžba 7
2.2 Zamjena varijabli 8
2.3 Black - Scholes model 10
2.4 Egzistencija i jedinstvenost rješenja 12
2.5 Varijacijska formulacija 13

3 Metoda konačnih elemenata za Black-Scholesov model **20**

4 Primjeri **25**

Bibliografija **41**

Uvod

U današnje vrijeme se financijska imovina, kao što su dionice, obveznice i slično, koristi kao baza za složenije financijske proizvode, tzv. financijske derivate. Opcije su jedni od tih financijskih derivata i upravo su one, tj. računanje njihovih cijena, ključan dio ovoga rada. Opcija je ugovor kojim vlasnik, tj. kupac može prodati (*put* opcija) ili kupiti (*call* opcija) neku imovinu po dogovorenoj cijeni do određenog trenutka, ili u tom trenutku, na tzv. datum dospijeća. Ovisno o trenutku izvršenja, razlikujemo europske i američke opcije. Europske opcije se mogu iskoristiti samo na datum dospijeća, dok se američke opcije mogu izvršiti i u bilo kojem trenutku prije datuma dospijeća.

Cilj ovoga rada je određivanje numeričke aproksimacije cijena europskih opcija koristeći metodu konačnih elemenata.

Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju dajemo osnovne pojmove i svojstva opcija. U drugom poglavlju proširujemo Black-Scholesov model i navodimo svojstva. Metodu konačnih elemenata uvodimo u trećem poglavlju te računamo numeričku aproksimaciju cijene europske *put* opcije. U četvrtom poglavlju prikazujemo razne primjere europskih opcija te na kraju poglavlja dajemo prikaz koda za implementaciju metode u MATLAB-u.

Poglavlje 1

Opcije

1.1 O opcijama

Opcija je ugovor kojim vlasnik, tj. kupac može prodati ili kupiti neku imovinu po dogovorenoj cijeni do određenog trenutka, ili u tom trenutku. Važno svojstvo opcije je da kupac opcije ne mora kupiti ili prodati tu imovinu.

Postoje dvije vrste opcija zvane *call* i *put* opcije. *Call* opcija daje vlasniku pravo da kupi, a *put* da proda neku imovinu po određenoj cijeni do određenog datuma, ili na taj datum. Taj određeni datum se naziva datum dospijeća (eng. *maturity, expiration date*), a unaprijed dogovorena cijena kupnje ili prodaje se naziva cijena izvršenja (eng. *exercise price, strike price*).

Još jedna podjela opcija obzirom na datum izvršenja je na američke i europske opcije. Američka opcija može biti iskorištena u bilo kojem trenutku do datuma izvršenja, dok se europska opcija može iskoristiti točno na datum izvršenja i u nijednom trenutku prije.

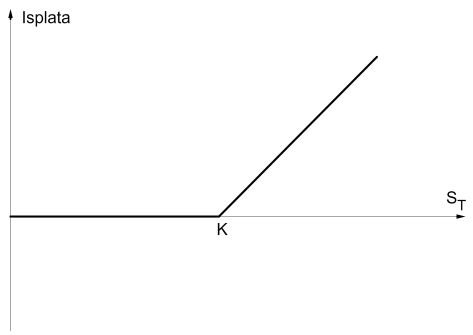
Postoje dvije strane ili pozicije kod svakog ugovora. Razlikujemo vlasnika, tj. kupca opcije (eng. *long position*) i pisca opcije (eng. *short position*). Dobit ili gubitak pisca opcije je obrnut od dobiti ili gubitka vlasnika do na cijenu opcije.

U nastavku ćemo se usredotočiti na opcije na dionice.

1.2 Funkcija isplate

Ako imovina vrijedi S_T u nekom trenutku do datuma dospijeća T, ili za europsku opciju na datum dospijeća, *call* opcija će biti korištena samo ako je $K < S_T$, stvarajući profit $S_T - K$, gdje s K označavamo cijenu izvršenja. U suprotnom, opcija neće biti korištena i profit će biti 0. Funkcija isplate vlasnika (Slika 1.1) je

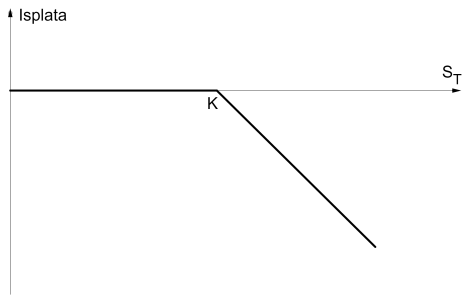
$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$



Slika 1.1: Funkcija isplate vlasnika *call* opcije

Suprotno tome, funkcija isplate pisca opcije (Slika 1.2) je

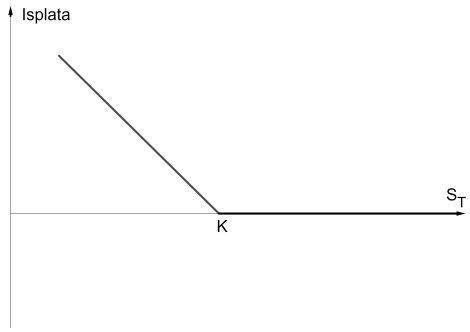
$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0).$$



Slika 1.2: Funkcija isplate pisca *call* opcije

Analogno za *put* opciju, ako imovina vrijedi S_T u nekom trenutku do datuma dospijeća T, ili za europsku opciju na datum dospijeća, *put* opcija će biti korištena samo ako je $S_T < K$, stvarajući profit $K - S_T$. U suprotnom, opcija neće biti korištena i profit će biti 0. Funkcija isplate vlasnika (Slika 1.3) je

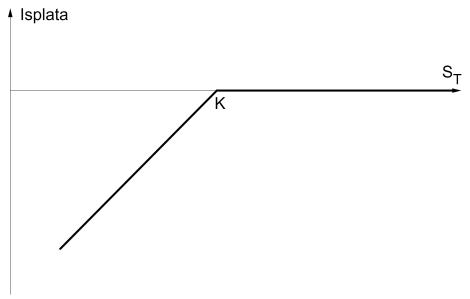
$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0).$$



Slika 1.3: Funkcija isplate vlasnika *put* opcije

Funkcija isplate pisca opcije (Slika 1.4) je

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0).$$



Slika 1.4: Funkcija isplate pisca *put* opcije

Uz pretpostavku o likvidnom tržištu i ne postojanju arbitraže (nemogućnost trenutnog profita bez rizika), cijena *call* opcije u trenutku T će biti $(S_T - K)^+$, a *put* opcije $(K - S_T)^+$.

1.3 Faktori koji utječu na cijenu opcije

Šest je faktora koji utječu na cijenu opcije:

1. trenutna cijena dionice, S_0
2. cijena izvršenja, K
3. datum dospijeća, T
4. volatilnost, σ
5. kamatna stopa na nerizičnu imovinu, r
6. dividende

Ovisnost cijene opcije o cijeni dionice i cijeni izvršenja je intuitivno jasna. Naime, za *call* opciju isplata u trenutku izvršenja je iznos za koji je cijena dionice u tom trenutku veća od cijene izvršenja. Stoga, cijena *call* opcije je veća što je navedena razlika veća. Analogno za *put* opciju; isplata u trenutku izvršenja je iznos za koji je cijena izvršenja veća od cijene dionice pa je cijena *put* opcije veća što je ta razlika veća.

Cijena američkih *call* i *put* opcija je veća kad se datum dospijeća povećava. Promotrimo dvije američke opcije koje se razlikuju samo u datumu dospijeća. Vlasnik opcije s kasnijim dospijećem ima sve mogućnosti kao i vlasnik opcije s kraćim dospijećem, ali i više zbog kasnijeg datuma dospijeća. Stoga, opcija s kasnijim dospijećem mora biti vrijedna bar koliko i opcija s kraćim dospijećem. Iako je cijena europskih opcija najčešće veća što je datum dospijeća kasniji, to nije uvijek slučaj. Npr. promotrimo europsku *call* opciju na dionice; jedna ima datum dospijeća nakon jednog mjeseca, a druga nakon dva mjeseca. Također pretpostavimo da se očekuje jako velika dividenda za šest tjedana. Dividenda će uzrokovati pad cijene dionice, stoga bi opcija s datumom dospijeća nakon jednog mjeseca mogla imati veću cijenu.

Volatilnost je, grubo rečeno, u ovom slučaju mjera koja pokazuje koliko nismo sigurni o budućem kretanju cijene dionice. Kad se volatilnost poveća, veća je mogućnost da će cijena dionice više porasti ili se smanjiti. Vlasniku *call* opcije odgovara povećanje cijene dionice i ima ograničen rizik kod smanjenja cijene dionice. Slično tome, kad je

volatilnost veća, vlasniku *put* opcije odgovara smanjenje cijene dionice i ima ograničen rizik kod povećanja cijene dionice. Stoga, cijene *put* i *call* opcija rastu prilikom povećanja volatilnosti.

Kamatna stopa na nerizičnu imovinu utječe na cijenu opcije na manje intuitivan način od prije navedenih faktora. Kada se kamatne stope u ekonomiji povećavaju, tada se investitorima očekivani povrat od dionica povećava. Dodatno, sadašnja vrijednost svakog budućeg novčanog toka se smanjuje. Zajednički učinak ova dva efekta je povećanje vrijednosti *call* opcije i smanjenje vrijednosti *put* opcije, uz pretpostavku da se ostale varijable ne mijenjaju.

Poglavlje 2

Proširenje Black-Scholesovog modela i svojstva

2.1 Parcionalna diferencijalna jednadžba

Kako bismo izračunali cijenu opcije prije datuma dospijeća, moramo imati pretpostavke o cijeni dionice S_t. Black-Scholesov model pretpostavlja postojanje nerizične imovine čija je cijena u trenutku t

$$S_t^0 = S_0^0 \exp(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s),$$

gdje je $r(t)$ kamatna stopa. Također, model pretpostavlja da cijena rizične imovine zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t), \tag{2.1}$$

gdje je B_t Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ovdje σ označava volatilnost i pozitivan je broj. S pretpostavkama Black-Scholes modela, cijena ove opcije u trenutku t je dana s

$$P_t = \exp(\int_t^T r(s)\mathrm{d}s)\, \mathbb{E}^*(P_0(S_T)|F_t), \tag{2.2}$$

uz $P_0(S_T) = (K - S_T)^+$, gdje je očekivanje $\mathbb{E}^*$ dano u odnosu na tzv. vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik, odnosno martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ (ekivalentna $\mathbb{P}$ i za koju vrijedi $\mathrm{d}S_t = S_t(r\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t)$, gdje je W_t Brownovo gibanje uz $\mathbb{P}^*$ i gdje je F_t prirodna filtracija od W_t).

Iz (2.2) i zbog toga što je S_t Markovljev proces, slijedi da je funkcija P_t funkcija od t i S_t, tj. da postoji funkcija dvije varijable P, funkcija cijene opcije, takva da $P_t = P(S_t, t)$.
Uz pretpostavku da je $\sigma_t = \sigma(S_t, t)$, gdje je σ dovoljno glatka funkcija, slijedi da funkcija cijene opcije P zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S,t)S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + r(t)S\frac{\partial P}{\partial S} - r(t)P = 0 \tag{2.3}$$

za $t \in [0, T\rangle$, $S > 0$ i zadovoljava

$$P(S, t = T) = P_0(S) \tag{2.4}$$

za $S > 0$. Jednadžba (2.3) spada u linearne paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe. Uvjet (2.4) je zadan u konačnom trenutku promatranog vremenskog intervala, pa stoga zadaću danu s (2.3)(2.4) možemo zvati završna zadaća (za razliku od početne/inicijalne).

Volatilnost je problematičan parametar Black-Scholes modela. Uobičajeno se pretpostavlja da je volatilnost konstantna funkcija, ali onda najčešće izračunate cijene opcija ne odgovaraju onima na tržištu. Postoje tri načina za poboljšavanje Black-Scholes modela s konstantnom volatilnošću:

- Koristiti lokalnu volatilnost, tj. pretpostaviti da je volatilnost funkcija vremena i cijene dionice. Tada treba kalibrirati volatilnost iz tržišnih podataka, tj naći funkciju volatilnosti kojom možemo dobiti cijene opcija dostupnih na tržištu.
- Pretpostaviti da je volatilnost stohastički proces.
- Generalizirati Black-Scholesov model uz pretpostavku da je cijena dionice npr. Levy-jev proces.

Mnogo je rasprava među stručnjacima o tome koji je od ovih pristupa najbolji. Mi ćemo se fokusirati na prvi.

2.2 Zamjena varijabli

Možemo koristiti nekoliko zamjena varijabli i supstitucija.

Prvi korak

Neka je funkcija υ takva da je $P(S,t) = \upsilon(S,t)e^{-\lambda(t)}$. Tada se (2.3) može pisati kao

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\lambda'(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)}\upsilon + \mathrm{e}^{-\lambda(t)}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \quad \frac{\partial P}{\partial S} = \mathrm{e}^{-\lambda(t)}\frac{\partial \upsilon}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \mathrm{e}^{-\lambda(t)}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial S^2}.$$

Izaberemo li funkciju $\lambda(t) = -\int_t^T r(t)ds$ dobivamo

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + rS\frac{\partial \upsilon}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial S^2} = 0.$$

Drugi korak

Neka je $x = \log S$ pa vrijedi $\frac{\partial \upsilon}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}$. Nadalje, neka je $\tau = T - t$ i $\omega(x,\tau) = \upsilon(\mathrm{e}^x, T-\tau)$. Neka su $\tilde{r}$ i $\tilde{\sigma}$ funkcije definirane s $\tilde{r} = r(t)$ i $\tilde{\sigma}(x,\tau) = \sigma(\mathrm{e}^x, t)$ pa imamo

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \frac{\tilde{\sigma}^2(x,\tau)}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \left(\tilde{r}(\tau) - \frac{\tilde{\sigma}^2(x,\tau)}{2}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R} \times \langle 0, T\rangle. \tag{2.5}$$

Treći korak

Kada σ ovisi samo o t, možemo koristiti zamjenu varijabli $(x,\tau) \mapsto (y,\tau)$, gdje je

$$y = x - \int_0^\tau (\tilde{r}(\theta) - \frac{\tilde{\sigma}^2(\theta)}{2})\mathrm{d}\theta$$

i $W(y,\tau) = \omega(x,\tau)$. Lako je vidjeti da onda vrijedi

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(y,\tau) - \frac{\tilde{\sigma}^2(\tau)}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(y,\tau) = 0, \quad \text{na} \quad \mathbb{R} \times \langle 0, T\rangle,$$

i $W(y,0) = \omega(y,0)$. Kada je $\tilde{\sigma}$ konstanta, ova jednadžba naziva se jednadžba provođenja.

Slična ideja se može iskoristiti ako je $x \mapsto \tilde{\sigma}^2(x,\tau)$ Lipschitzovo neprekidno uniformno preslikavanje obzirom na τ. Neka je $X(\theta; x, \tau)$ rješenje zadaće za običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}X(\theta; x, \tau) = \left(\tilde{r}(\theta) - \frac{\tilde{\sigma}^2(X(\theta; x,\tau), \theta)}{2}\right) \quad \theta \in \langle 0, T\rangle, \quad X(\tau; x, \tau) = x.$$

Prema Picardovom teoremu rješenje ove zadaće postoji. Uz pretpostavku da je $(x,\theta) \mapsto X(\theta; x, \tau)$ dovoljno dobro i uz $W(x,\theta) = \omega(X(\theta; x, \tau), \theta)$, dobijemo

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x,\theta) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(X(\theta; x, \tau), \theta) + \left(\tilde{r}(\theta) - \frac{\tilde{\sigma}^2(X(\theta; x, \tau), \theta)}{2}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x}(X(\theta; x, \tau), \theta)$$

i

$$\frac{\partial W}{\partial \theta}(x,\theta) = \frac{\partial \omega}{\partial x}(X(\theta; x, \tau), \theta)\frac{\partial X(\theta; x, \tau)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}(x,\theta) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(X(\theta; x, \tau), \theta)\left(\frac{\partial X(\theta; x, \tau)}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial x}(X(\theta; x, \tau), \theta)\frac{\partial^2 X(\theta; x, \tau)}{\partial x^2}.$$

Ako uzmemo $\theta = \tau - \delta t$ za mali δt, imamo $\frac{\partial X(\tau; x, \tau - \delta t)}{\partial x} \sim 1$ i $\frac{\partial^2 X(\tau; x, \tau - \delta t)}{\partial x^2} \sim 0$. Tada, koristeći (2.5), dobijemo sljedeću poludiskretnu formu:

$$\frac{1}{\delta t}(W(x,\tau) - W(x, \tau - \delta t)) - \frac{\tilde{\sigma}^2(x,\tau)}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,\tau) \sim 0,$$

odnosno

$$\frac{1}{\delta t}(\omega(x,\tau) - \omega(X(\tau - \delta t; x, \tau), \tau - \delta t)) - \frac{\tilde{\sigma}^2(x,\tau)}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,\tau) \sim 0,$$

što je poznao kao metoda karakteristika koja se često koristi u mehanici fluida.

2.3 Black - Scholes model

Neka je $P(S,t)$ cijena opcije s dospijećem u trenutku T i funkcijom isplate P_0. Kao i ranije, kamatnu stopu označavamo s r, volatilnost s σ, a Brownovo gibanje s W_t. Uz pretpostavku da su r i σ konstante, Black-Scholesova formula koja daje rješenje za (2.3),(2.4) dana je s

$$P(S,t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^*(P_0(S\mathrm{e}^{r(T-t)}\mathrm{e}^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})), \tag{2.6}$$

i uz vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$, $W_T - W_t$ ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom $T - t$,

$$P(S,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\int_{\mathbb{R}} P_0(S\mathrm{e}^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma x\sqrt{T-t}})\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Za europsku opciju, uz oznake C za cijenu *call*, a P za cijenu *put* opcije, možemo dobiti eksplicitnu formulu iz (2.2). Npr. za *call* opciju imamo:

$$\begin{aligned} C(S,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} (S\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma x\sqrt{T-t}} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)})\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} (S\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)-\sigma x\sqrt{T-t}} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)})\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.8}$$

gdje je

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Koristeći funkciju distribucije standardne normalne razdiobe N,

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

te uz (2.8) i (2.9), dobijemo Black-Scholesovu formulu.

Propozicija 2.3.1. *Kada su σ i r konstante, cijena call opcije je*

$$C(S,t) = SN(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{2.11}$$

a cijena put opcije je

$$P(S,t) = -SN(d_1) + K\,e^{-r(T-t)}N(-d_2), \tag{2.12}$$

gdje su d_1 i d_2 dani u (2.9)*, a N u* (2.10)*.*

Napomena 2.3.2. *Ako je r funkcija vremena,* (2.9) *se mora zamijeniti s*

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{log(\frac{S}{K}) + \int_t^T r(\tau)d\tau + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.4 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Kada su koeficijenti konstantni (s pozitivnom volatilnošću), vidjeli smo da (2.3) i (2.4) imaju rješenje dano u (2.7).

U ovom paragrafu, dokazujemo postojanje i jedinstvenost rezultata za problem (2.3) (2.4) u slučaju kada je $r = r(t)$ i $\sigma = \sigma(S,t)$. Potrebno je ograničiti rast rješenja kad $S \to 0$ ili $S \to +\infty$ pa ćemo stoga ovdje pretpostaviti da je rješenje ograničeno.

Neka je Ω otvoren skup. Označimo s $C^k(\Omega)$ prostor svih k-puta neprekidno derivabilnih funkcija s Ω u $\mathbb{R}$.

Definicija 2.4.1. *Fiksirajmo pozitivni broj ρ_0. Neka je α realan broj takav da $0 < \alpha < 1$. Neka je $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ prostor realnih neprekidnih funkcija $\upsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ takav da vrijedi*

$$||\upsilon||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\upsilon(x)| + \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d, |x-y|\le\rho_0} \frac{|\upsilon(x)-\upsilon(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$

Neka je $\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ prostor realnih neprekidnih funkcija $\upsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ takav da vrijedi

$$||\upsilon||_{\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^d\times[0,T])} = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]} |\upsilon(x,t)| + \sup_{\substack{(x,t),(y,s)\in\mathbb{R}^d\times[0,T],\\ |x-y|+|t-s|\le\rho_0}} \frac{|\upsilon(x,t)-\upsilon(y,s))|}{\left(|x-y|^2+|t-s|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}} < +\infty.$$

Može se pokazati da je $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ s normom $||\cdot||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ Banachov prostor te da je prostor $\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ s normom $||\cdot||_{\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^d\times[0,T])}$ također Banachov prostor.

Teorem 2.4.2. *Pretpostavimo da vrijedi:*

1. *realna funkcija $(x,y) \mapsto \sigma^2(e^x,t)$, koja je definirana na $\mathbb{R}\times[0,T]$, je iz prostora $\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$,*
2. *funkcija $t \mapsto r(t)$ je iz prostora $\mathcal{C}^{\alpha/2}([0,T])$,*
3. *za funkciju $\widetilde{P}_0$ definiranu na $\mathbb{R}$, takvu da je $\widetilde{P}_0(x) = P_0(e^x)$, vrijedi da su $\widetilde{P}_0$, $\frac{\partial\widetilde{P}_0}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2\widetilde{P}_0}{\partial x^2}$ iz prostora $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$,*
4. *postoji pozitivna konstanta $\underline{\sigma}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $t \in [0,T]$ vrijedi $\sigma(t,e^x) \ge \underline{\sigma}$.*

Uz ove pretpostavke, (2.3) (2.4) *ima jedinstveno rješenje P takvo da označimo li s $\widetilde{P}$ funkciju definiranu na $[0,T]\times\mathbb{R}$, takvu da je $\widetilde{P}(x,t) = P(e^x,t)$, vrijedi da su funkcije $\widetilde{P}$, $\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial t}$ i $\frac{\partial^2\widetilde{P}}{\partial x^2}$ iz prostora $\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}\times[0,T])$.*

Uz prethodne pretpostavke, osim za $\widetilde{P}_0$, ali pretpostavljajući da je $\widetilde{P}_0$ ograničena funkcija, (2.3) (2.4) *ima jedinstveno rješenje $\widetilde{P}$ takvo da ta svako $\tau < T$ vrijedi da su funkcije $\widetilde{P}$, $\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial t}$ i $\frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial x^2}$ iz prostora $\mathcal{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R} \times [0,\tau])$.*

Za dokaz vidjeti [5].

2.5 Varijacijska formulacija

Sobovljeve norme

Varijacijska ili slaba formulacija rubnih zadaća za diferencijalne jednadžbe je posebno korisna kada jaka rješenja, tj. klasična (dovoljno glatka), ne postoje ili zbog singularnosti u podacima, granicama domene, koeficijentima ili kod nelinearnosti. Takve situacije su jako česte u fizici i inženjerstvu. Čak kada rubna zadaća ima klasično rješenje, varijacijska teorija je korisna iz više razloga:

- omogućava globalne ocjene (energetske nejednakosti),
- jako je povezana s metodom konačnih elemenata koju koristimo u nastavku,
- najprirodniji je način proučavanja problema s preprekama, a pomoću kojih se mogu proučavati američke opcije.

Varijacijska formulacija paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi se oslanja na prikladne Sobovljeve prostore. U nastavku ćemo predstaviti Sobovljeve prostore korisne za početni problem (2.3) (2.4).

Neka je $L^2(\mathbb{R}_+)$ Hilbertov prostor kvadratno integrabilnih funkcija na $\mathbb{R}_+$ s normom

$$||\upsilon||_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (\int_{\mathbb{R}_+} \upsilon(S)^2 \mathrm{d}S)^{\frac{1}{2}}$$

i skalarnim produktom

$$(\upsilon, \omega)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} \upsilon(S)\omega(S)\mathrm{d}S$$

. Za prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, tj. prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem u $\mathbb{R}_+$, znamo da je gust u $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Neka je

$$V = \left\{ \upsilon \in L^2(\mathbb{R}_+) : S\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}S} \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\},$$

gdje se derivacija shvaća u smislu slabe derivacije na prostoru distrbucija na $\mathbb{R}_+$. Prirodni skalarni produkt za V je $(v,\omega)_V = (v,\omega) + (S\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}S}, S\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}S})$, a prostor V s normom $||v||_V = \sqrt{(v,\omega)_V}$ je Hilbertov prostor.

Vrijede sljedeća svojstva.

Teorem 2.5.1.

- *Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ je gust u V.*
- *(Poincaréova nejednakost) Ako je $v \in V$, onda vrijedi*

$$||v||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq 2||S\frac{dv}{dS}||_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

  pa je stoga polunorma dana s $|v|_V = 2||S\frac{dv}{dS}||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$ također norma na V, ekvivalentna normi $||\cdot||_V$.

- *Za bilo koji $\omega \in L^2(\mathbb{R}_+)$, funkcija*

$$S \to v(S) = \frac{1}{S}\int_0^S \omega(s)ds$$

  je iz V te

$$||v||_V \leq C||\omega||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

  za neku pozitivnu konstantu C koja ne ovisi o ω.

Za dokaz vidjeti [1].

Označimo s V' dualni prostor od V i za $\omega \in V'$, $||\omega||_{V'} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{(\omega,v)}{|v|_V}$.

Slaba formulacija Black-Scholesove jednadžbe

Promotrimo europsku *put* opciju s dospijećem u trenutku T i funkcijom isplate u_0. Neka je u funkcija cijene opcije, tj. cijena opcije u trenutku $T-t$ kada je je cijena dionice S, $u = u(S,t)$. Prema Teoremu 2.4.2. funkcija u je jedinstveno rješenje početne zadaće

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - rS\frac{\partial u}{\partial S} + ru = 0 \text{ na } \mathbb{R}_+ \times \langle 0,T\rangle, \quad u(S,0) = u_0(S) \text{ na } \mathbb{R}_+. \tag{2.14}$$

Pomnožimo (2.14) glatkom realnom funkcijom ω definiranom na $\mathbb{R}_+$. Uz pretpostavku da je integracija po dijelovima dopuštena, dobijemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}_+} u(S,t)\omega(S)dS\right) + a_t(v,\omega) = 0$$

gdje je bilinearna forma a_t jednaka

$$\begin{aligned} a_t(\upsilon,\omega) = &\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{2} S^2 \sigma^2(S,t) \frac{\partial \upsilon}{\partial S} \frac{\partial \omega}{\partial S} + r(t) \upsilon \omega \right) dS \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} \left(-r(t) + \sigma^2(S,t) + S\sigma(S,t) \frac{\partial \sigma}{\partial S}(S,t) \right) S \frac{\partial \upsilon}{\partial S} \omega dS. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Neka je koeficijent $r \geq 0$ ograničen i σ dovoljno dobar tako da sljedeće pretpostavke imaju smisla.

Pretpostavka 2.1.

1. Postoje pozitivne konstante $\underline{\sigma}$ i $\overline{\sigma}$ takve da za sve $t \in [0,T]$ i sve $S \in \mathbb{R}_+$ vrijedi

$$0 < \underline{\sigma} \leq \sigma(S,t) \leq \overline{\sigma}. \tag{2.16}$$

2. Postoji pozitivna konstanta C_σ takva da za sve $t \in [0,T]$ i sve $S \in \mathbb{R}_+$ vrijedi

$$|S \frac{\partial \sigma}{\partial S}(S,t)| \leq C_\sigma. \tag{2.17}$$

Lema 2.5.2. *Ako vrijedi Pretpostavka 2.1, bilinearna forma a_t je neprekidna na V, tj. postoji pozitivna konstanta μ takva da za sve $\upsilon, \omega \in V$,*

$$|a_t(\upsilon,\omega)| \leq \mu |\upsilon|_V |\omega|_V. \tag{2.18}$$

Također, vrijedi Gårdingova nejednakost: postoji konstanta λ koja nije negativna i takva da za sve $\upsilon \in V$,

$$a_t(\upsilon,\upsilon) \geq \frac{\underline{\sigma}^2}{4} |\upsilon|_V^2 - \lambda ||\upsilon||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \tag{2.19}$$

S bilinearnom formom a_t povezujemo neprekidni linearni operator $A_t : V \to V'$; za sve $\upsilon, \omega \in V$, $(A_t \upsilon, \omega) = a_t(\upsilon,\omega)$. Stoga je A_t je dan s

$$A_t \upsilon = -\frac{1}{2} \sigma^2(S,t) S^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial S^2} - r(t) S \frac{\partial \upsilon}{\partial S} + r(t) \upsilon.$$

Neka je $\mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}_+))$ prostor neprekidnih funkcija na $[0,T]$ s vrijednostima u $L^2(\mathbb{R}_+)$, a neka je $L^2(0,T;V)$ prostor kvadratno integrabilnih funkcija na $\langle 0,T \rangle$ s vrijednostima u V. Uz pretpostavku da je $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ može se dobiti slaba formulacija

od (2.14):

Slaba formulacija od (2.14)

Naći $u \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}_+)) \cap L^2(0,T;V)$ takav da je $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V')$ i

$$u_{|t=0} = u_0 \quad \text{u } \mathbb{R}_+, \tag{2.20}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), \upsilon\right) + a_t(u(t), \upsilon) = 0 \ \text{ s.s. } \ t \in \langle 0, T\rangle, \ \upsilon \in V. \tag{2.21}$$

Teorem 2.5.3. *Uz Pretpostavku 2.1 i ako $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+)$, slaba formulacija* (2.20),(2.21) *ima jedinstveno rješenje. Također, za sve t, takve da $0 < t < T$, vrijedi*

$$e^{-2\lambda t}||u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2 \int_0^t e^{-2\lambda t}|u(\tau)|^2_V d\tau \leq ||u_0||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \tag{2.22}$$

Za dokaz vidjeti [6].

Teorem 2.5.3 se ne može primijeniti na europske *call* opcije jer za njih funkcija isplate nije iz $L^2(\mathbb{R}_+)$. U tom slučaju se koristi *put-call* paritet (vidi (2.29)) pa preko njega dobije cijena *call* opcije iz cijene *put* opcije, ili se koriste drugačiji Sobovljevi prostori.

Regularnost slabih rješenja

Ako su kamatna stopa, volatilnost i funkcija isplate dovoljno glatke, moguće je dokazati regularnost rješenja od (2.20),(2.21). Posebno, za sve $t \in [0,T]$ i za λ iz Leme 2.5.2, domena operatora $A_t + \lambda$ je

$$D = \{\upsilon \in V; S^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial S^2} \in L^2(\mathbb{R}_+)\}. \tag{2.23}$$

Pretpostavimo sljedeće:

Pretpostavka 2.2 *Postoji pozitivna konstanta C i $0 \leq \alpha \leq 1$ takvi da za sve $t_1, t_2 \in [0,T]$ i $S \in \mathbb{R}_+$ vrijedi*

$$|r(t_1) - r(t_2)| + |\sigma(S,t_1) - \sigma(S,t_2)| + S\left|\frac{\partial \sigma}{\partial S}(S,t_1) - \frac{\partial \sigma}{\partial S}(S,t_2)\right| \leq C|t_1 - t_2|^\alpha. \tag{2.24}$$

Teorem 2.5.4. *Uz Pretpostavke 2.1 i 2.2, za sve t, $0 < t \leq T$, za rješenje u od* (2.20),(2.21) *vrijedi $u \in \mathcal{C}^0([t,T]; L^2(\mathbb{R}_+))$ i $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([t,T]; L^2(\mathbb{R}_+))$ te postoji konstanta C takva da za sve t, $0 < t \leq T$, vrijedi*

$$||A_t u(t)||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{C}{t}.$$

Ako je $u_0 \in D$, onda rješenje u od (2.20),(2.21) je iz $\mathcal{C}^0([0,T];D)$ i $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{R}_+))$.

Nadalje, ako je $u_0 \in V$, onda rješenje u od (2.20),(2.21) je iz $\mathcal{C}^0([0,T];V) \cap L^2(0,T;D)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}_+))$ te postoji konstanta $\tilde{\lambda}$ koja nije negativna i takva je da vrijedi

$$e^{-2\tilde{\lambda}t}||S\frac{\partial u}{\partial S}(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t e^{-2\tilde{\lambda}\tau}|S\frac{\partial u}{\partial S}(\tau)|^2_V d\tau \leq ||S\frac{\partial u_0}{\partial S}||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \tag{2.25}$$

Princip maksimuma za slaba rješenja

Rješenja od (2.14) ne moraju težiti k nuli kad $S \to +\infty$, stoga ćemo navesti princip maksimuma za puno širu klasu funkcija od V, a to je

$$\mathcal{V} = \{\upsilon : \forall \epsilon > 0,\ \upsilon(S)e^{-\epsilon \log^2(S+2)} \in V\}. \tag{2.26}$$

Teorem 2.5.5. *(Slabi princip maksimuma) Neka je $u(S,t)$ takav da za sve pozitivne brojeve ϵ vrijedi*

- $ue^{-\epsilon log^2(S+2)} \in \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{R}_+)) \cap L^2(0,T;V)$,
- $u|_{t=0} \geq 0$ *g.s.,*
- $\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u \geq 0$ *(u smislu distribucija).*

Tada je $u \geq 0$ gotovo svugdje.

Princip maksimuma je jako moćan alat za dokazivanje ocjena rješenja eliptičkih i paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U nastavku ćemo vidjeti primjere primjene na računanje cijena opcija.

Propozicija 2.5.6. *Uz Pretpostavku 2.1, neka je u slabo rješenje od (2.14), $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ograničena pozitivna funkcija, tj. $0 \leq \underline{u_0} \leq u_0(S) \leq \overline{u_0}$. Tada vrijedi*

$$\underline{u_0}e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} \leq u(S,t) \leq \overline{u_0}e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} \ \ s.s. \tag{2.27}$$

Dokaz. Znamo da su $\underline{u_0}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau}$ i $\overline{u_0}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau}$ dva rješenja od (2.14). Stoga, možemo primijeniti princip maksimuma na $u - \underline{u_0}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau}$ i $\overline{u_0}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau} - u$. □

Napomena 2.5.7. *U slučaju europske put opcije, $u_0(S) = (K-S)^+$, Propozicija 2.5.6 zapravo kaže da vrijedi $0 \leq u(S,t) \leq Ke^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}$.*

Za europsku *put* opciju kao u Napomeni 2.5.7, imamo više informacija.

Propozicija 2.5.8. *Neka je u slabo rješenje od* (2.14), $u_0(S) = (K - S)^+$ *uz Pretpostavku 2.1, tada vrijedi*

$$(Ke^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} - S)^+ \leq u(S,t) \leq Ke^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}. \tag{2.28}$$

Dokaz. Primijetimo da je $K\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau} - S$ rješenje od (2.14). Primijenimo princip maksimuma na $u(S,t) - (K\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau} - S)$ te dobijemo $K\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau} - S \leq u(S,t)$. Tada se (2.28) dobije kombiniranjem ove ocjene i one dane Napomenom 2.5.7. Uočimo da (2.28) daje $u(0,t) = K\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau}$ za sve $t \leq T$. □

Put-call paritet Ponovo, neka je u funkcija cijene opcije za europsku *put* opciju s cijenom izvršenja K i neka je $C(S,t)$ dana s

$$C(S,t) = S - K\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau} + u(S,t). \tag{2.29}$$

Zbog toga što u i $S - K\mathrm{e}^{-\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau}$ zadavoljavaju (2.14), očito je C rješenje od (2.14), uz početni uvjet $C(S,0) = (S-K)^+$. Ovo je rubna zadaća za europsku *call* opciju. Na taj način dobivene rezultate za *put* opciju možemo prenijeti na *call* opciju.

Konveksnost

Pretpostavka 2.3 Postoji pozitivna konstanta C takva da

$$|S^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2}(S,t)| \leq C, \quad \text{g.s.} \tag{2.30}$$

Propozicija 2.5.9. *Uz Pretpostavke 2.1 i 2.3, neka je u slabo rješenje od* (2.14) *gdje je $u_0 \in V$ konveksna funkcija takva da $\frac{\partial^2 u_0}{\partial S^2}$ ima kompaktan nosač. Tada, za sve $t > 0$, je $u(S,t)$ konveksna funkcija od S.*

Kao posljedicu, uz Pretpostavke 2.1. i 2.3, vidimo da je cijena europske *put* opcije konveksna s obzirom na S i zbog *put-call* pariteta to vrijedi i za europsku *call* opciju.

Još ograničenja
Fokusiramo se na europsku *put* opciju s volatilnošću σ. Koristeći Propoziciju 2.5.9, moguće je usporediti u s funkcijom cijene europske *put* opcija s konstantnom volatilnošću.

Propozicija 2.5.10. *Uz Pretpostavku 2.1, za sve $t \in [0,T]$ i za sve $S > 0$ vrijedi*

$$\underline{u}(S,t) \leq u(S,t) \leq \overline{u}(S,t), \tag{2.31}$$

gdje je $\underline{u}$ ($\overline{u}$) rješenje od (2.14) *s $\sigma = \underline{\sigma}$, ($\sigma = \overline{\sigma}$).*

Lokalizacija
Ponovo, fokusiramo se na europsku *put* opciju. Za numeričku aproksimaciju od u, moramo ograničiti granice domene varijable S, tj. uzeti u obzir samo $S \in \langle 0, \bar{S}\rangle$ za $\bar{S}$ dovoljno velik i postaviti neke umjetne rubne uvjete u $S = \bar{S}$. Uz pretpostavku da nova funkcija nestaje na toj granici, dobivamo novu rubnu zadaću:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial S^2} - rS\frac{\partial \tilde{u}}{\partial S} + r\tilde{u} = 0,\ t \in \langle 0,T],\ S \in \langle 0, \bar{S}\rangle, \\ \tilde{u}(\bar{S},t) = 0,\ t \in \langle 0,T], \end{aligned} \tag{2.32}$$

s $\tilde{u}(S,0) = (K-S)^+$ na $\langle 0, \bar{S}\rangle$. Neka je $\tilde{V}$ novi Sobovljev prostor:

$$\tilde{V} = \{\upsilon, S\frac{\partial \upsilon}{\partial S} \in L^2(\langle 0, \bar{S}\rangle),\ \upsilon(\bar{S}) = 0\}.$$

Teorija slabih rješenja iz ovog odjeljka se može primijeniti na zadaću (2.32), ali je potrebno ocijeniti grešku između u i $\tilde{u}$.

Propozicija 2.5.11. *Uz Pretpostavku 2.1, greška $max_{t\in[0,T],S\in[0,\bar{S}]}|u(S,t) - \tilde{u}(S,t)|$ se smanjuje brže od bilo koje negativne potencije od $\bar{S}$ kad $\bar{S} \to \infty$, tj. brže od $\bar{S}^{-\eta}$ za bilo koji pozitivni broj η.*

Dokaz. Iz principa maksimuma primijenjenog na slaba rješenja od (2.14) na $\langle 0, \bar{S}\rangle \times \langle 0,T]$, možemo vidjeti da $u \geq \tilde{u}$ na $\langle 0, \bar{S}\rangle \times \langle 0,T\rangle$ jer $u(\bar{S},t) \geq \tilde{u}(\bar{S},t) = 0$. Ipak, po Propoziciji 2.5.10 je $u \leq \bar{u}$, što implicira $u(\bar{S},t) \leq \bar{u}(\bar{S},t)$. Neka je $\pi(\bar{S}) = \max_{t\in[0,T]}\bar{u}(\bar{S},t)$. Princip maksimuma primijenjen na funkciju $E(S,t) = \pi(\bar{S}) - u(S,t) + \tilde{u}(S,t)$ daje $\pi(\bar{S}) \geq u - \tilde{u}$ na $[0,\bar{S}] \times [0,T]$. Time smo dokazali

$$0 \leq u - \tilde{u} \leq \pi(\bar{S}), \quad \text{na } [0,\bar{S}] \times [0,T].$$

Međutim, $\pi(\bar{S})$ se može izračunati iz Black-Scholesove formule (2.12) i lako je vidjeti da za sve $\eta > 0$, $\lim_{\bar{S}\to\infty} \pi(\bar{S})\bar{S}^{\eta} = 0$.

Stoga, $\max_{t\in[0,T],S\in[0,\bar{S}]}|u(S,t) - \tilde{u}(S,t)|$ se brže smanjuje od bilo koje negativne potencije $\bar{S}^{-\eta}$ kad $\bar{S} \to \infty$. □

Poglavlje 3

Metoda konačnih elemenata za Black-Scholesov model

Razmotrimo rubnu zadaću:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - \alpha(t)S\frac{\partial u}{\partial S} + \beta(t)u = 0, \quad t \in \langle 0, T\rangle, \quad S \in \langle 0, \bar{S}\rangle, \\ &u(S,0) = u_0(S) \quad S \in \langle 0, \bar{S}\rangle, \quad u(\bar{S},t) = 0 \quad t \in \langle 0, T]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ova generalizacija od (2.32) se koristi za procjenjivanje cijena europskih *put* opcija s mogućom isplatom dividendi: odgovara izboru $\alpha = r(t) - q(t)$ i $\beta = r(t)$, gdje je r kamatna stopa, a q prinos na dividende.

Kako bi primijenili metodu konačnih elementa s elementima prvog stupnja, počinjemo s varijacijskom formulacijom danoj u (2.20) i (2.21).

Prvo ćemo podijeliti interval $[0, \bar{S}]$ na podintervale $\kappa_i = [S_{i-1}, S_i]$, $1 \leq i \leq N+1$, takve da $0 = S_0 < S_1 < \cdots < S_N < S_{N+1} = \bar{S}$. Neka je $h_i = S_i - S_{i-1}$ i $h = \max_{i=1,\ldots,N+1} h_i$. Definiramo mrežu $\mathcal{T}_h$ od $[0, \bar{S}]$ kao skup $\{\kappa_1, ..., \kappa_{N+1}\}$. U nastavku ćemo pretpostaviti da se cijena izvršenja K poklapa s nekim od čvorova od $\mathcal{T}_h$, tj. da vrijedi $S_{k_0} = K$ za neki odgovarajući k_0.

Definiramo diskretan prostor V_h

$$V_h = \left\{ \upsilon_h \in \mathcal{C}^0([0, \bar{S}]),\ \upsilon_h(\bar{S}) = 0;\ \forall \kappa \in \mathcal{T}_h,\ \upsilon_{h|\kappa} \text{ je afina} \right\}. \tag{3.2}$$

Pretpostavka mreže osigurava da je $u_0 \in V_h$ za $u_0 = (K - S)^+$. Uzet ćemo M koraka vremenske diskretizacije, a za korake vremenske diskretizacije uzimamo δt, $m = 1, ..., M$. Diskretna zadaća dobivena primjenom Eulerove implicitne metode

glasi:

$$\begin{aligned}&\text{naći } (u_h^m)_{1\le m\le M}, u_h^m \in V_h \text{ i } u_h^0(S_i) = u_0(S_i),\ i = 0...N+1,\ \text{i}\\ &\quad \text{za } m = 1...M,\ \forall \upsilon_h \in V_h, \quad \left(u_h^m - u_h^{m-1}, \upsilon_h\right) + \delta t_m a_{t_m}(u_h^m, \upsilon_h) = 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

gdje je

$$\begin{aligned}a_t(\upsilon,\omega) &= \int_0^{\bar{S}} \frac{1}{2}S^2\sigma^2(S,t)\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial \omega}{\partial S}\\ &+ \int_0^{\bar{S}} \left(-\alpha(t) + \sigma^2(S,t) + S\sigma(S,t)\frac{\partial \sigma}{\partial S}\right)S\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega + \beta(t)\int_0^{\bar{S}} \upsilon\omega.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Primijetimo da $a_t(\upsilon,\omega)$ možemo drugačije napisati:

$$\begin{aligned}a_t(\upsilon,\omega) = &\underbrace{\int_0^{\bar{S}} \frac{1}{2}S^2\sigma^2(S,t)\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial \omega}{\partial S} + \int_0^{\bar{S}} \left(\sigma^2(S,t) + S\sigma(S,t)\frac{\partial \sigma}{\partial S}\right)S\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega}_{\Delta}\\ &- \alpha(t)\int_0^{\bar{S}} S\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega + \beta(t)\int_0^{\bar{S}} \upsilon\omega.\end{aligned}$$

Računamo Δ posebno, uzevši u obzir da je υ po dijelovima afina.

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i=1}^{N+1}\int_{S_{i-1}}^{S_i} \underbrace{\frac{1}{2}S^2\sigma^2(S,t)\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial \omega}{\partial S}}_{\square} + \sum_{i=1}^{N+1}\int_{S_{i-1}}^{S_i} \left(\sigma^2(S,t) + S\sigma(S,t)\frac{\partial \sigma}{\partial S}\right)S\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega\\ &= [\text{iskoristimo parcijalnu integraciju na } \square]\\ &= \sum_{i=1}^{N+1}\frac{1}{2}S^2\sigma^2(S,t)\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega\Bigg|_{S_{i-1}}^{S_i}\\ &- \sum_{i=1}^{N+1}\int_{S_{i-1}}^{S_i}\left(S\sigma^2(S,t) + S^2\sigma(S,t)\frac{\partial \sigma}{\partial S}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega - \sum_{i=1}^{N+1}\int_{S_{i-1}}^{S_i}\frac{1}{2}S^2\sigma^2(S,t)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial S^2}\omega\\ &+ \sum_{i=1}^{N+1}\int_{S_{i-1}}^{S_i}\left(S\sigma^2(S,t) + S^2\sigma(S,t)\frac{\partial \sigma}{\partial S}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\omega\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \left(\frac{1}{2} S_i^2 \sigma^2(S_i,t) \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_i^-,t)\omega(S_i) - \frac{1}{2} S_{i-1}^2 \sigma^2(S_{i-1},t) \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_{i-1}^+,t)\omega(S_{i-1}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} S_i^2 \sigma^2(S_i,t) \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_i^-,t)\omega(S_i) - \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{2} S_{i-1}^2 \sigma^2(S_{i-1},t) \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_{i-1}^+,t)\omega(S_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} S_i^2 \sigma^2(S_i,t) \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_i^-,t) - \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_i^+,t) \right) \omega(S_i).$$

Stoga imamo:

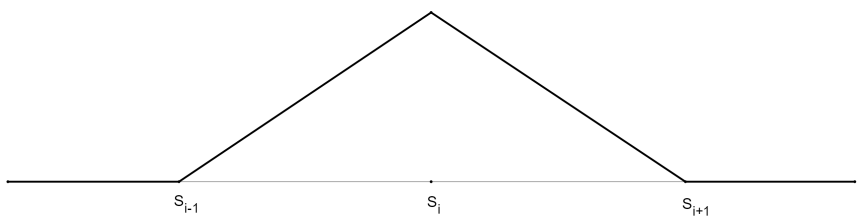
$$a_t(\upsilon,\omega) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} S_i^2 \sigma^2(S_i,t) [\frac{\partial \upsilon}{\partial S}](S_i)\omega(S_i) - \alpha(t) \int_0^{\bar{S}} S \frac{\partial \upsilon}{\partial S} \omega + \beta(t) \int_0^{\bar{S}} \upsilon\omega, \quad (3.5)$$

gdje $[\cdot]$ označava

$$[\frac{\partial \upsilon}{\partial S}](S_i) = \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_i^+,t) - \frac{\partial \upsilon}{\partial S}(S_i^-,t). \quad (3.6)$$

Za $i = 0, ..., N+1$, neka je ω_i po dijelovima linearna funkcija na $[0, \bar{S}]$, takva da poprima vrijednost 1 u čvoru S_i i 0 u S_j, $j \neq i$, $j = 0, ..., N+1$. Primjer funkcije ω_i, tzv. krović funkcije, se nalazi na slici 3.1. Funkcije $(\omega_i)_{i=0,...,N}$ su nodalna baza od V_h i vrijedi

$$u_h^m(S) = \sum_{0}^{N} u_h^m(S_i)\omega_i(S). \quad (3.7)$$



Slika 3.1: Primjer funkcije ω_i

Neka je $\boldsymbol{M}$ matrica takva da $\boldsymbol{M}_{i,j} = (\omega_i, \omega_j)$ za $0 \leq i,j \leq N$. Također, neka je $\boldsymbol{A}$ matrica takva da je $\boldsymbol{A}_{i,j} = a_{t_m}(\omega_j, \omega_i)$ za $0 \leq i,j \leq N$. Uz $\boldsymbol{u}^m = (u_h^m(S_0), ..., u_h^m(S_N))^T$, (3.3) je ekvivalentno

$$(\boldsymbol{M} + \delta t_m \boldsymbol{A}^m) u^m = \boldsymbol{M} \boldsymbol{u}^{m-1}. \quad (3.8)$$

Zbog načina definiranja funkcija ω_i, matrice $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{A}^m$ su tridijagonalne, tj. kada vrijedi $|i-j|>1$, presjek nosača od ω_i i ω_j je prazan skup pa su odgovarajući matrični elementi jednaki 0. Nadalje, za $i \leq N$, vrijedi

$$\begin{aligned} \omega_i(S) &= \frac{S-S_{i-1}}{h_i}, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial S} = \frac{1}{h_i}, \quad \forall S \in \langle S_{i-1}, S_i \rangle, \\ \omega_i(S) &= \frac{S_{i+1}-S}{h_{i+1}}, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial S} = -\frac{1}{h_{i+1}}, \quad \forall S \in \langle S_i, S_{i+1} \rangle, \end{aligned} \tag{3.9}$$

pa vrijedi:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\bar{S}} \omega_{i-1}\omega_i = \frac{h_i}{6}, && \int_0^{\bar{S}} S\omega_i \frac{\partial \omega_{i-1}}{\partial S} = -\frac{S_{i-1}}{6} - \frac{S_i}{3}, \\ &\int_0^{\bar{S}} \omega_i\omega_i = \frac{h_i+h_{i+1}}{3}, && \int_0^{\bar{S}} S\omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial S} = -\frac{h_i+h_{i+1}}{6}, \quad \text{ako je } i>0, \\ &\int_0^{\bar{S}} \omega_0\omega_0 = \frac{h_1}{3}, && \int_0^{\bar{S}} S\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial S} = -\frac{h_1}{6}, \\ &\int_0^{\bar{S}} \omega_{i+1}\omega_i = \frac{h_{i+1}}{6}, && \int_0^{\bar{S}} S\omega_i \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial S} = \frac{S_{i+1}}{6} + \frac{S_i}{3}. \end{aligned}$$

Pomoću gornjih izračuna dobijemo elemente matrica $\boldsymbol{A}^m$ i $\boldsymbol{M}$.

Elementi od $\boldsymbol{A}^m$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m_{i,i-1} &= -\frac{S_i^2\sigma^2(S_i,t_m)}{2h_i} + \frac{\alpha(t_m)S_i}{2} + (\beta(t_m)-\alpha(t_m))\frac{h_i}{6}, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \boldsymbol{A}^m_{i,i} &= \frac{S_i^2\sigma^2(S_i,t_m)}{2}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \frac{\alpha(t_m)}{2}(h_{i+1}+h_i) \\ &\qquad + (\beta(t_m)-\alpha(t_m))\frac{h_i+h_{i+1}}{3}, \ 1 \leq i \leq N, \\ \boldsymbol{A}^m_{0,0} &= \frac{\alpha(t_m)}{2}h_1 + (\beta(t_m)-\alpha(t_m))\frac{h_1}{3}, \\ \boldsymbol{A}^m_{i,i+1} &= -\frac{S_i^2\sigma^2(S_i,t_m)}{2h_{i+1}} - \frac{\alpha(t_m)S_i}{2} \\ &\qquad + (\beta(t_m)-\alpha(t_m))\frac{h_{i+1}}{6}, \ 0 \leq i \leq N-1. \end{aligned}$$

Elementi od $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{i,i-1} &= \frac{h_i}{6}, \quad 1 \leq i \leq N, \\
\boldsymbol{M}_{i,i} &= \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \boldsymbol{M}_{0,0} = \frac{h_1}{3}, \\
\boldsymbol{M}_{i,i+1} &= \frac{h_{i+1}}{6}, \quad 0 \leq i \leq N-1.
\end{aligned}$$

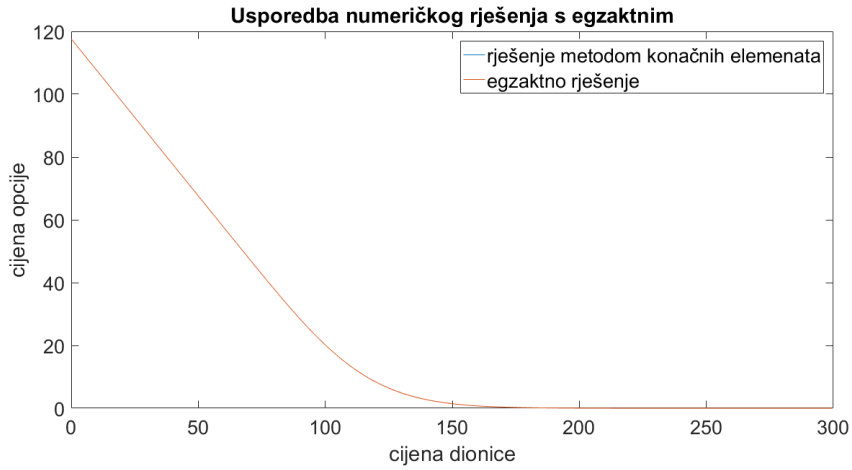
Poglavlje 4

Primjeri europskih opcija

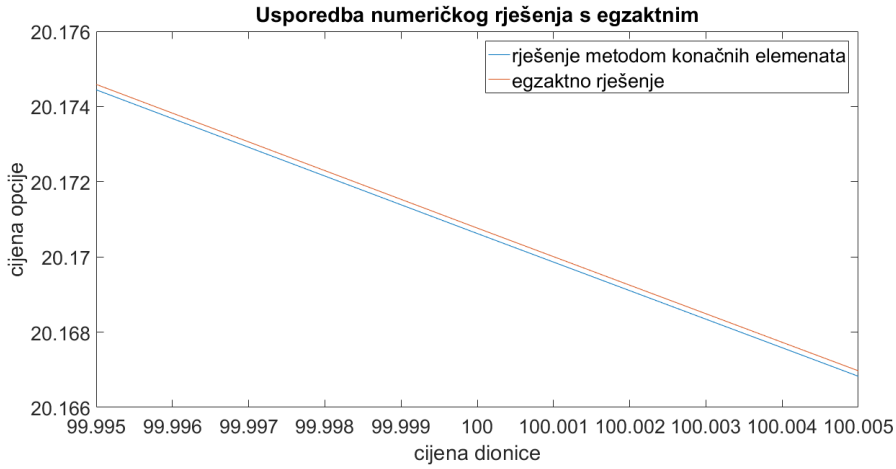
U ovom poglavlju ćemo prikazati nekoliko rezultata izračuna cijena europskih opcija s različitim parametrima, tj. svojstvima. Izračun je rađen u MATLAB-u i kod je dan na kraju poglavlja.

Cijenu izvršenja označavamo s K, vrijeme dospijeća s T, vremenski trenutak t, kamatnu stopu s r, volatilnost s σ, cijenu dionice s S, gornju granicu cijene dionice s $\bar{S}$. Kamatna stopa i volatilnost su dane godišnje. Koristimo ekvidistantnu mrežu $\mathcal{T}_h$, tj. $h_i = S_i - S_{i-1}$ je jednak za sve $i = 1, ..., N+1$. Pretpostavljamo da nema prinosa na dividende. U svim primjerima radimo s tisuću koraka vremenske diskretizacije.

Primjer 1. Neka je $K = 120$, $T = 1$, $\bar{S} = 300$, $h = \frac{1}{3}$, $r = 0.02$, $\sigma = 0.2$. Tražimo cijenu europske *put* opcije. Na Slici 4.1 prikazana je usporedba numeričkog rješenja dobivenog metodom konačnih elemenata i egzaktnog rješenja. Egzaktno rješenje možemo izračunati jer su u ovom primjeru kamatna stopa i volatilnost konstante. Na Slici 4.2 je prikazana cijena opcije za dionicu kojoj je sadašnja cijena $S = 100$. Greška je reda veličine 10^{-4}.

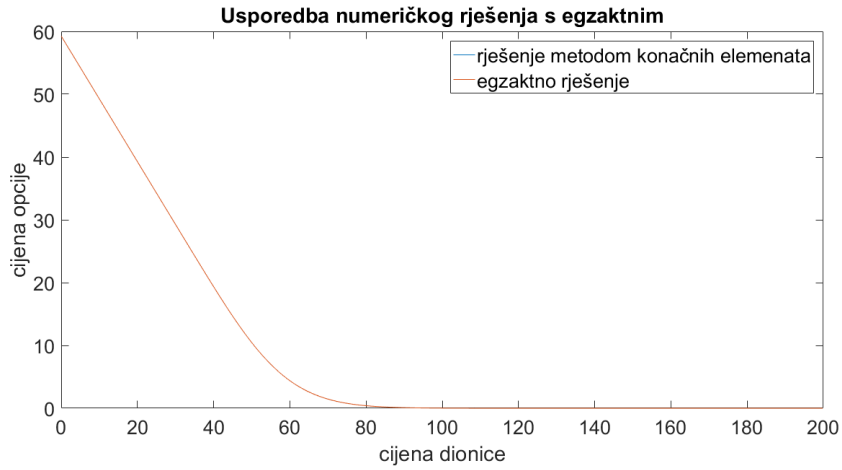


Slika 4.1: Cijena europske *put* opcije u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 300]$.

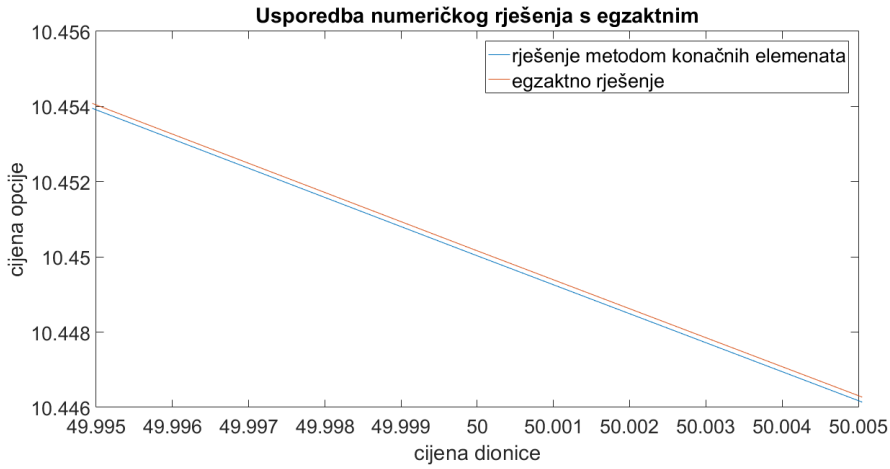


Slika 4.2: Cijena europske *put* opcije u trenutku $t = 0$ u okolini cijene dionice $S = 100$.

Primjer 2. Neka je $K = 60$, $T = 0.25$, $\bar{S} = 200$, $h = 0.2$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.4$. Tražimo cijenu europske *put* opcije. Na Slici 4.3 prikazana je usporedba numeričkog rješenja dobivenog metodom konačnih elemenata i egzaktnog rješenja. Kao i u Primjeru 1, egzaktno rješenje možemo izračunati jer su u ovom primjeru kamatna stopa i volatilnost konstante. Na Slici 4.4 je prikazana cijena opcije za dionicu kojoj je sadašnja cijena $S = 50$. Greška je reda veličine 10^{-4}.

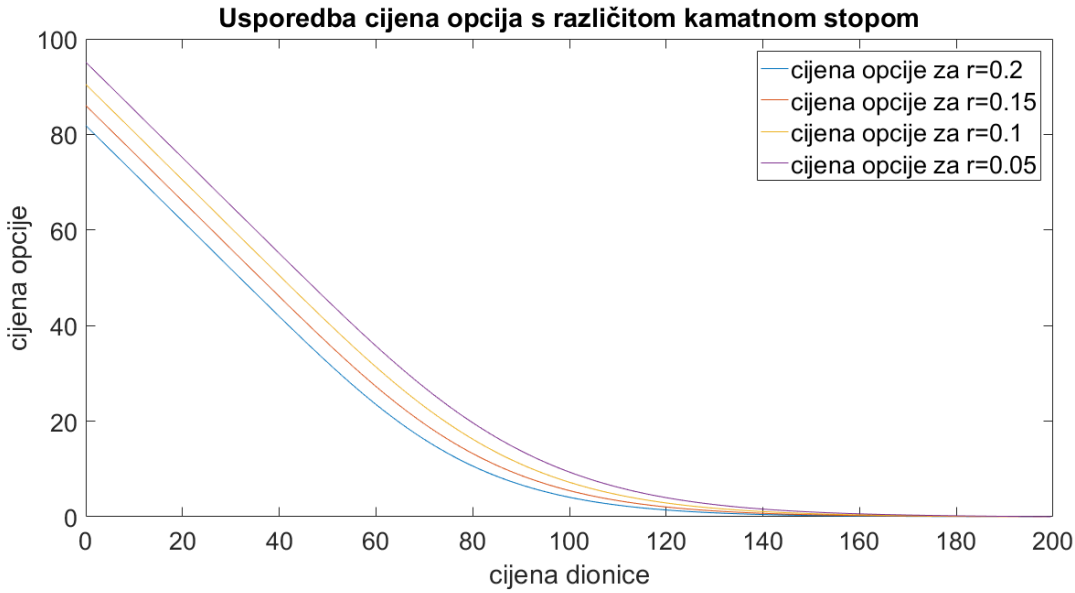


Slika 4.3: Cijena europske *put* opcije u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 200]$.



Slika 4.4: Cijena europske *put* opcije u trenutku $t = 0$ u okolini cijene dionice $S = 50$.

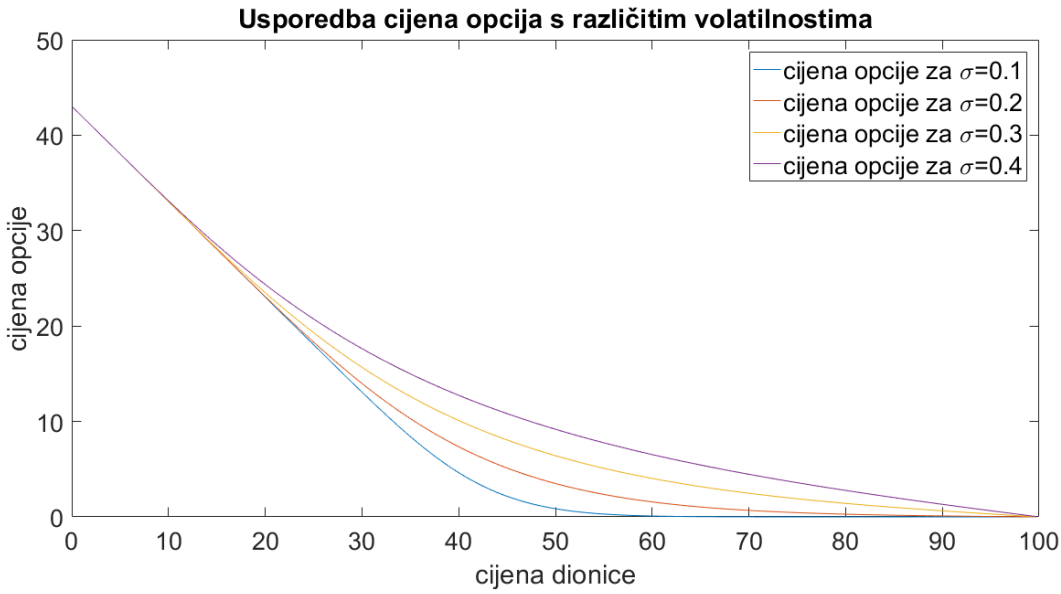
Primjer 3. Promotrimo četiri europske *put* opcije kojima je različita jedino kamatna stopa r. Za sve vrijedi $K = 100$, $T = 1$, $\tilde{S} = 200$, $h = 0.5$, $\sigma = 0.3$. Usporedba se može vidjeti na Slici 4.5.



Slika 4.5: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 200]$.

Iz slike se može vidjeti da s većom kamatnom stopom r, europska *put* opcija ima nižu cijenu, uz nepromijenjene ostale parametre.

Primjer 4. Promotrimo četiri europske *put* opcije kojima je različita jedino volatilnost σ. Za sve vrijedi $K = 50$, $T = 3$, $\bar{S} = 100$, $h = 0.25$, $r = 0.05$. Usporedba se može vidjeti na Slici 4.6.

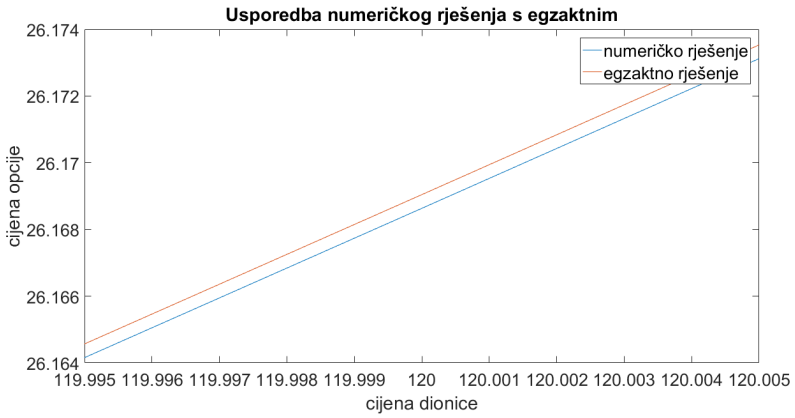


Slika 4.6: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 100]$.

Na gornjoj slici imamo navedene četiri opcije sa svim jednakim parametrima, ali različitom volatilnošću σ. Jasno se vidi da europska *put* opcija ima nižu cijenu kada joj je volatilnost manja, uz ostale parametre nepromijenjene.

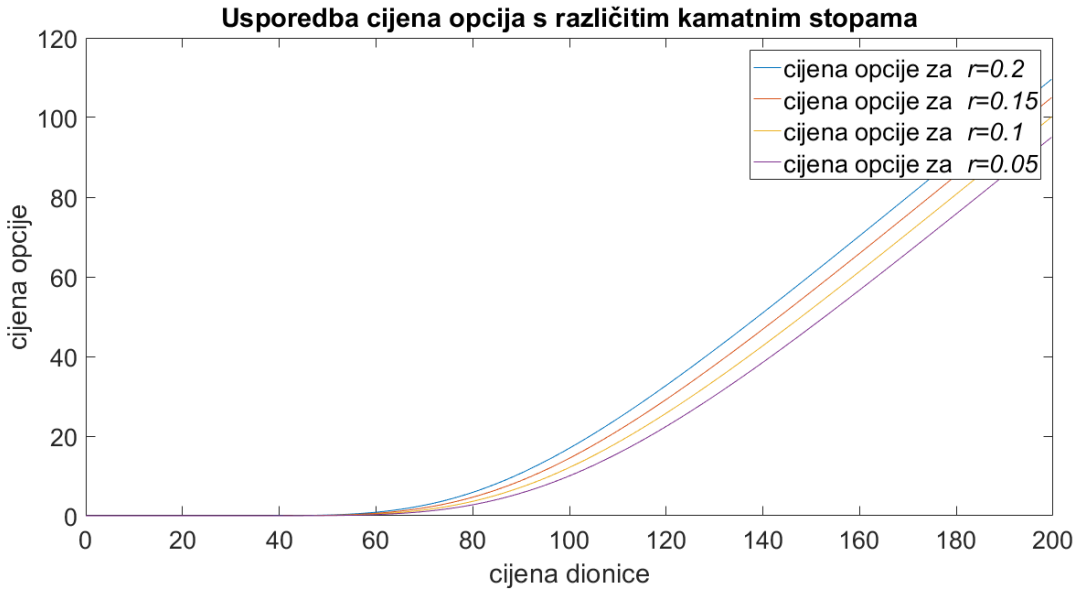
Primjer 5. Neka je $K = 100$, $T = 1$, $\bar{S} = 200$, $h = \frac{1}{3}$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$. Tražimo cijenu europske *call* opcije. Cijenu europske *put* opcije, za koju vrijede isti parametri kao za navedenu *call* opciju, računamo metodom konačnih elemenata. Iz *put-call* pariteta (2.29) dobijemo cijenu početne *call* opcije. Na Slici 4.7 prikazana je usporedba numeričkog i egzaktnog rješenja. Egzaktno rješenje možemo izračunati jer su u ovom primjeru kamatna stopa i volatilnost konstante. Na Slici 4.8 je prikazana cijena europske *call* opcije za dionicu kojoj je sadašnja cijena $S = 120$. Greška je reda veličine 10^{-3}.

Slika 4.7: Cijene europske *call* opcije u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 200]$.



Slika 4.8: Cijena europske *call* opcije u trenutku $t = 0$ u okolini cijene dionice $S = 120$.

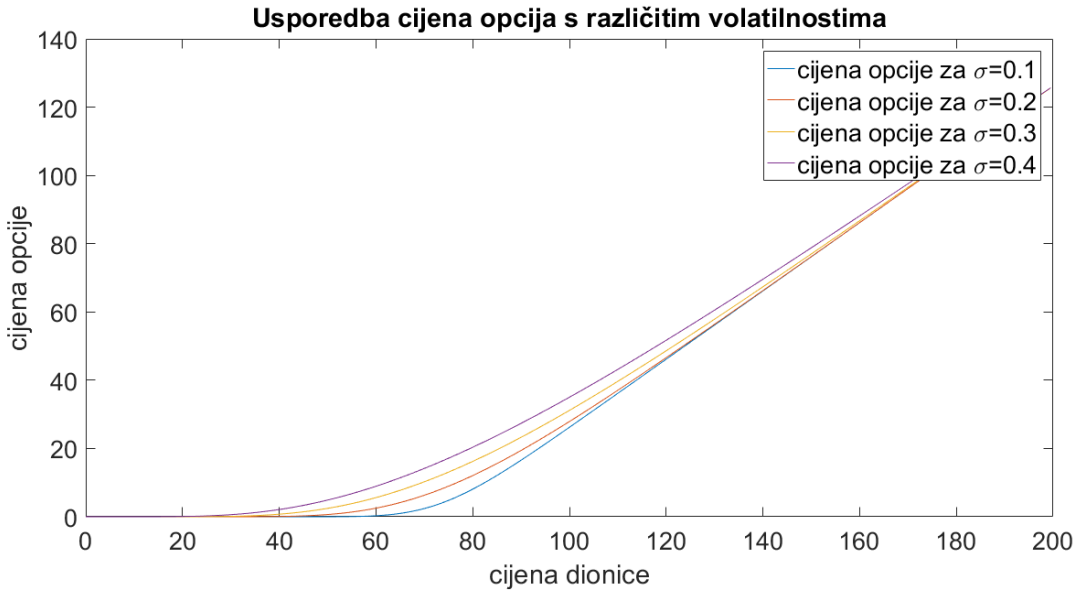
Primjer 6. Neka za četiri europske *call* opcije vrijedi $K = 110$, $T = 1$, $\bar{S} = 200$, $h = \frac{1}{3}$, a neka svaka ima drugačiju kamatnu stopu r. Cijenu europske *put* opcije, za koju vrijede isti parametri kao za navedenu *call* opciju, računamo primjenom metode konačnih elemenata. Cijenu početne europske *call* dobijemo iz *put-call* pariteta (2.29). Na slici 4.9 prikazana je usporedba europskih *call* opcija s različitim kamatnim stopama.



Slika 4.9: Cijene europskih *call* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 200]$.

Iz Slike 4.9 se vidi da europska *call* opcija s kamatnom stopom r, vrijedi više od europske *call* opcije s manjom kamatnom stopom od r, a ostalim parametrima nepromijenjenim. Iz Slike 4.5 smo vidjeli da ne vrijedi isti zaključak za europsku *put* opciju.

Primjer 7. Neka za četiri europske *call* opcije vrijedi $K = 80$, $T = 2$, $\bar{S} = 200$, $h = 0.5$, $r = 0.04$, a neka svaka ima drugačiju volatilnost σ. Cijenu europske *put* opcije, za koju vrijede isti parametri kao za *call* opciju, računamo primjenom metode konačnih elemenata. Vrijednost početne europske *call* opcije dobijemo iz *put-call* pariteta (2.29). Na Slici 4.10 prikazana je usporedba europskih *call* opcija s različitim volatilnostima.



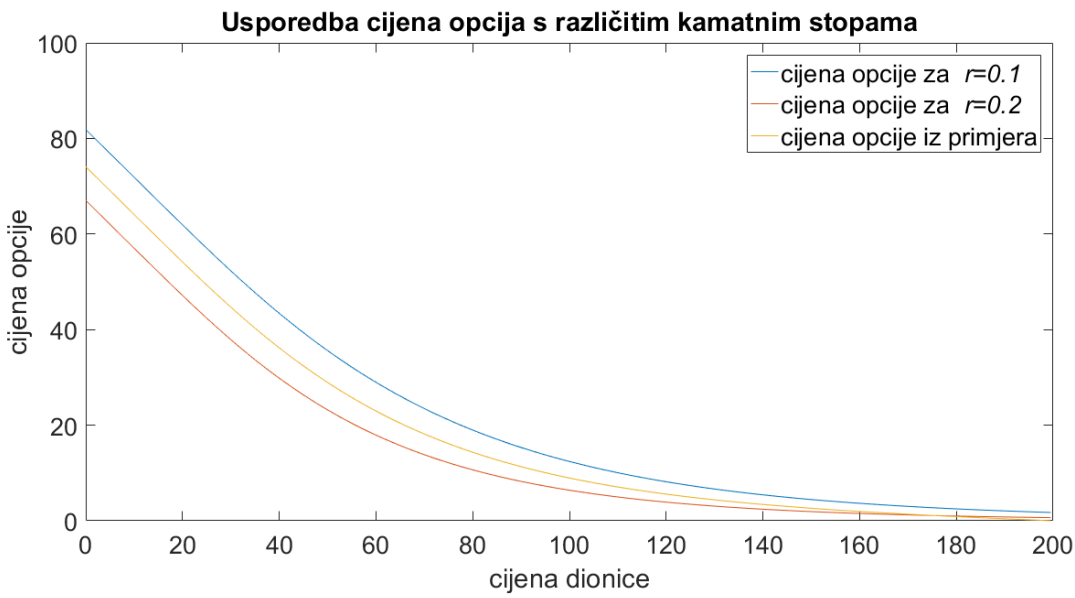
Slika 4.10: Cijene europskih *call* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 200]$.

Iz Slike 4.10 vidimo da za veću volatilnost σ, europska *call* opcija vrijedi više od jednake europske *call* opcije koja ima manju volatilnost. Iz Slike 4.6 smo vidjeli da vrijedi isti zaključak za europsku *put* opciju.

Primjer 8. Neka je $K = 100$, $T = 2$, $\bar{S} = 200$, $h = 0.5$, $\sigma = 0.4$. Tražimo cijenu europske *put* opcije. Neka je kamatna stopa r funkcija koja ovisi o t, takva da

$$r = 0.2 \text{ za } t \leq 1,$$
$$r = 0.1 \text{ za } t > 1.$$

Uvedimo još dvije europske *put* opcije koje imaju konstantnu kamatnu stopu i jednake sve ostale parametre kao i navedena opcija. Neka su te opcije takve da jedna ima kamatnu stopu $r = 0.1$, a druga $r = 0.2$. Na Slici 4.11 prikazana je usporedba navedenih triju opcija.



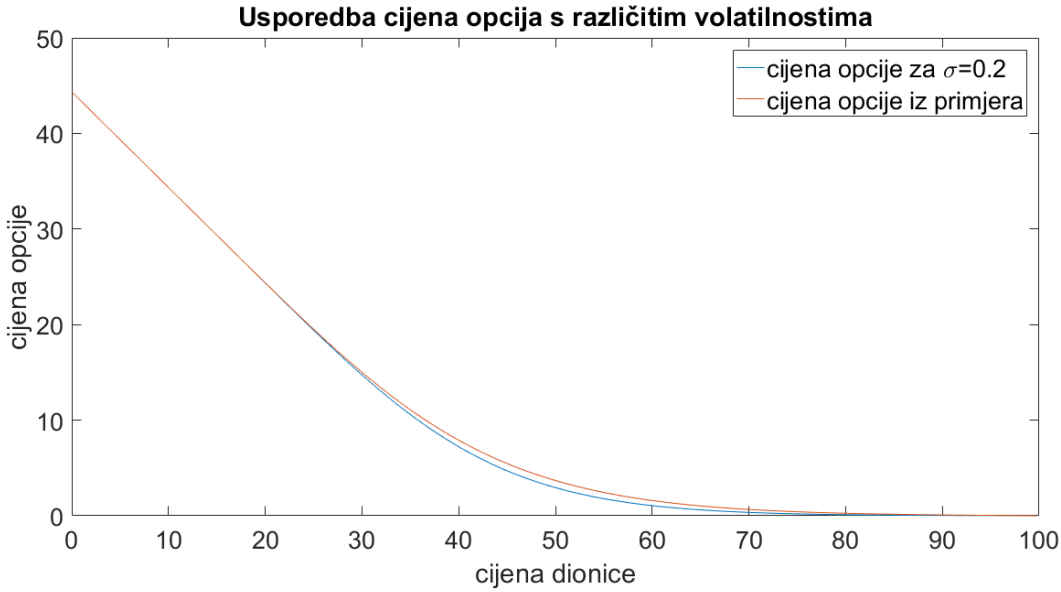
Slika 4.11: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 200]$.

Iz Slike 4.11 vidimo da europska *put* opcija s konstantnom kamatnom stopom $r = 0.1$ ima veću cijenu od opcije s kamatnom stopom $r = 0.2$, što je očekivan rezultat. Iz slike također vidimo da je cijena opcije s kamatnom stopom ovisnoj o t, manja od cijene opcije za koju je $r = 0.1$, ali veća od opcije za koju je $r = 0.2$.

Primjer 9. Neka je $K = 100$, $T = 2$, $\bar{S} = 200$, $h = 0.5$, $r = 0.06$. Tražimo cijenu europske *put* opcije. Neka je volatilnost σ funkcija koja ovisi o vremenu t, takva da

$$\sigma(t) = 0.03t + 0.2.$$

Uvedimo europsku *put* opciju koja ima konstantnu volatilnost $\sigma = 0.2$ i jednake sve ostale parametre kao navedena opcija. Na Slici 4.12 prikazana je usporedba ovih dviju opcija.



Slika 4.12: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 100]$.

Iz Slike 4.12 možemo vidjeti da europska *put* opcija s konstantnom volatilnošću ima manju cijenu od navedene opcije ovisne o vremenu. To nije neočekivan rezultat jer funkcija volatilnosti $\sigma(t) = 0.03t + 0.2$ je u svakom trenutku veća ili jednaka 0.2, pa time i pripadajuća opcija ima veću cijenu.

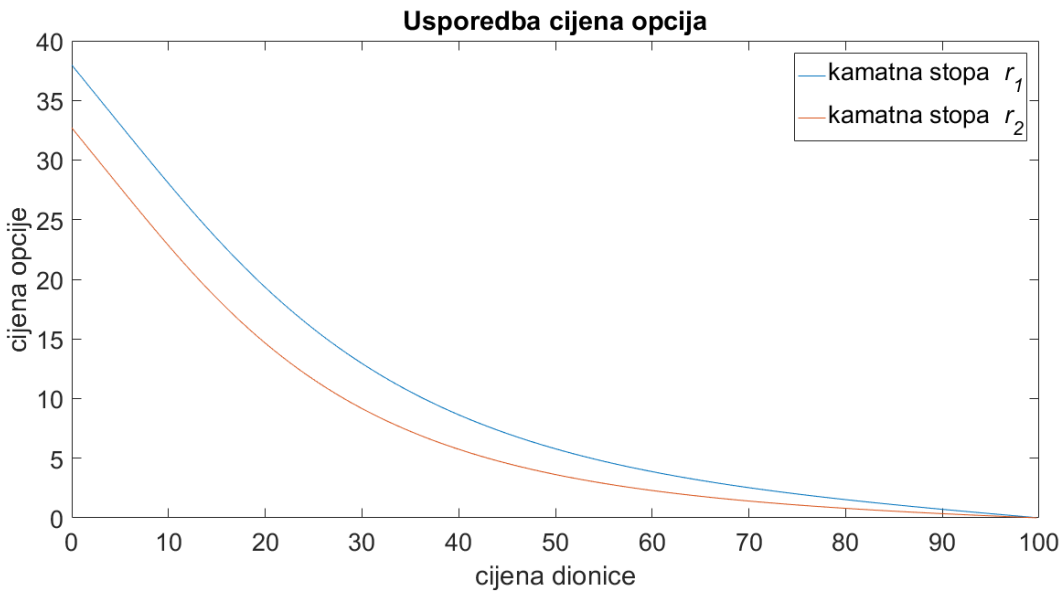
Primjer 10. Neka vrijedi $K = 50$, $T = 3$, $\bar{S} = 100$, $h = 0.25$. Tražimo vrijednost europske *put* opcije. Neka su volatilnost σ i kamatne stope r_1 i r_2 funkcije koja ovise o vremenu t, takve da

$$\sigma(t) = 0.02t^2 + 0.3 \text{ za } t \leq 3,$$

i

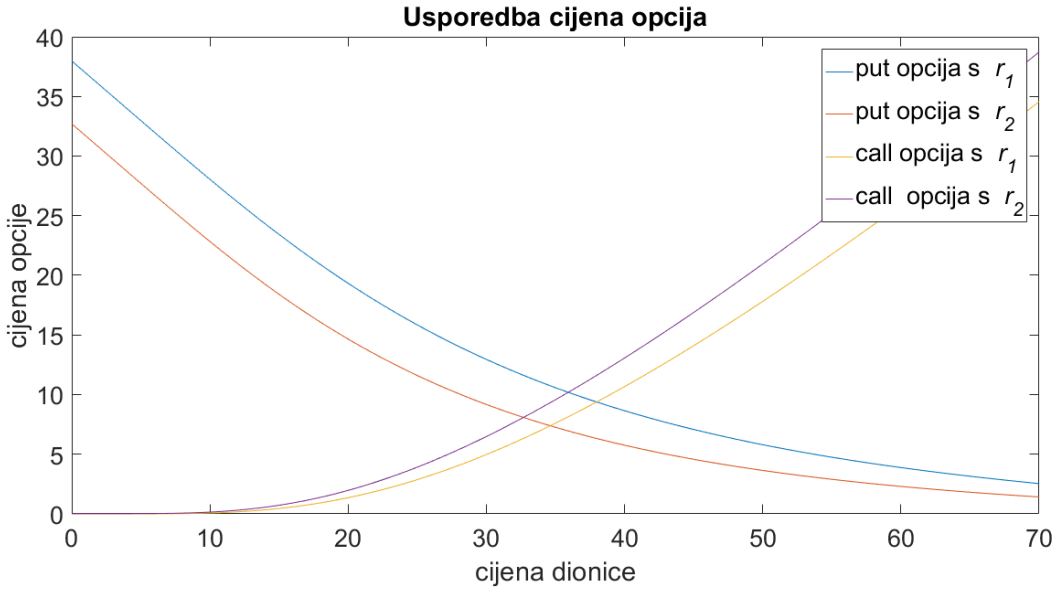
$$\begin{aligned} &r_1 = 0.2 \text{ za } t \leq 0.5, && r_2 = 0.05 \text{ za } t \leq 0.5, \\ &r_1 = 0.1 \text{ za } 0.5 < t \leq 1.5, && r_2 = 0.1 \text{ za } 0.5 < t \leq 1.5, \\ &r_1 = 0.05 \text{ za } t > 1.5, && r_2 = 0.2 \text{ za } t > 1.5. \end{aligned}$$

Na Slici 4.13 prikazana je usporedba dviju opcija.



Slika 4.13: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 100]$.

Također, možemo usporediti i gornje dvije europske *put* opcije s odgovarajućim *call* opcijama dobivenim *put-call* paritetom (2.29). Prikaz se može vidjeti na Slici 4.14.



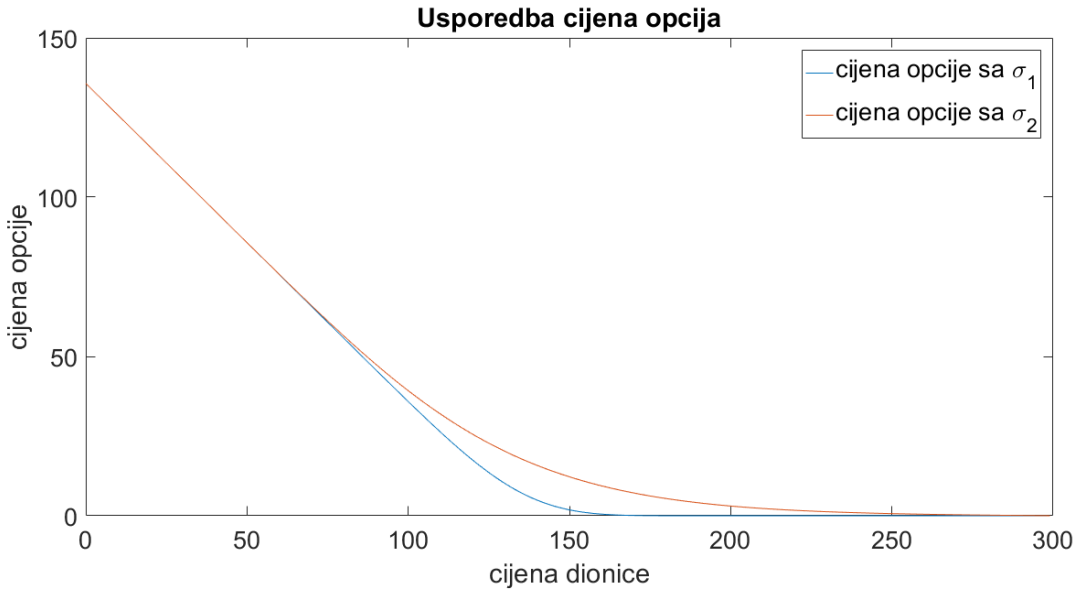
Slika 4.14: Cijene europskih *put* i *call* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionica $S \in [0, 100]$.

Primjer 11. Neka vrijedi $K = 150$, $T = 2$, $\bar{S} = 300$, $h = 0.5$, $r = 0.05$. Tražimo vrijednost europske *put* opcije. Neka su volatilnosti σ_1 i σ_2 takve da

$$\sigma_1(S,t) = 0.03t - S \cdot 10^{-3} + 0.2,$$
$$\sigma_2(S,t) = 0.03t + 0.2.$$

za $t \in [0, T]$.

Na Slici 4.15 prikazana je usporedba dviju opcija.



Slika 4.15: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 300]$.

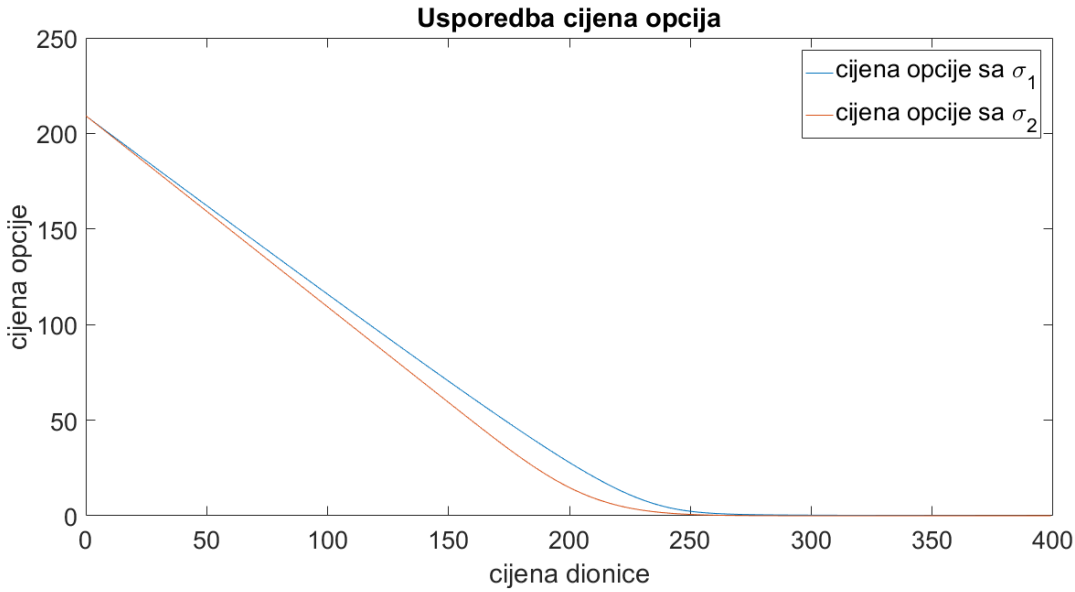
Iz slike vidimo da opcija s volatilnošću σ_1 ima nižu cijenu, što je očekivan rezultat.

Primjer 12. Neka vrijedi $K = 220$, $T = 1$, $\bar{S} = 400$, $h = 0.5$, $r = 0.05$. Tražimo vrijednost europske *put* opcije. Neka su volatilnosti σ_1 i σ_2 takve da

$$\sigma_1(S,t) = 0.03t + (S - 250)^2 \cdot 10^{-4} + 0.1,$$
$$\sigma_2(S,t) = 0.03t + 0.1.$$

za $t \in [0, T]$.

Na Slici 4.16 prikazana je usporedba dviju opcija.



Slika 4.16: Cijene europskih *put* opcija u trenutku $t = 0$ za različite cijene dionice $S \in [0, 400]$.

Iz slike vidimo da opcija s volatilnošću σ_1 ima višu cijenu.

Kod u MATLAB-u

```
% S     %% cijena dionice
% K     %% cijena izvršenja
% S_max %% gornja granica cijene dionice
% T     %% maturity
% r     %% kamatna stopa
% q     %% volatilnost
% m     %% broj koraka vremenske diskretizacije
% t     %% vremenski trenutak
format long

h=S_max/n;
part=0:h:S_max;
len=length(part);
dt=T/m;

%matrica M
mi_plus_minus=h/6;
mii=2*h/3;
m00=h/3;

m1=repmat(mi_plus_minus,1,len-2);
m2=repmat(mii,1,len-1);
M=diag(m1,-1)+diag(m2)+diag(m1,1);
M(1,1)=m00;

%koeficijenti u0

u0=zeros(1,len-1);
u0(1,:)=max(K-part(1:len-1),0);

%Eulerova implicitna metoda
u=u0';
t=0;

for i=1:m
ai_i_min1=@(si,t)( (-(si.^2)*( q(t,si)^2)/(2*h)) + r(t)*si/2);
aii=@(si,t)((si.^2).*(q(t,si).^2)/h + r(t)*h);
a00=@(t)(r(t)*h/2);
```

```
ai_i_plus1=@(si,t)(-(si.^2).*(q(t,si).^2)/(2*h) - r(t)*si/2);

a1=ai_i_min1(part,t);
a2=aii(part,t);
a3=ai_i_plus1(part,t);
A=diag(a1(2:len-1),-1)+diag(a2(1:len-1))+diag(a3(1:len-2),1);
A(1,1)=a00(t);

d=M+dt*A;
[L,U,P]=lu(d);
pom=(M)*u;
z=L\pom;
u=U\z;
t=t+dt;
end

%cijena call opcije
call=u+part(1:n)'-K*exp(-r(T)*T);

%rezultat za cijenu put opcije za početnu cijenu dionice S
if  mod(S,h)==0
rez=u(S/h+1,1);
else
rez=u(floor(S/h)+1,1)*(ceil(S/h)-S)/h +
         u(floor(S/h)+2,1)*(S-floor(S/h))/h;
end

%rezultat za cijenu call opcije, ako je r konstanta, za početnu
%cijenu dionice S
if  mod(S,h)==0
rez_call=call(S/h+1,1);
else
rez_call=call(floor(S/h)+1,1)*(ceil(S/h)-S)/h +
          call(floor(S/h)+2,1)*(S-floor(S/h))/h;
end
```

Bibliografija

[1] Y. Achdou i O. Pironneau, *Computational Methods for Option Pricing. Frontiers in Applied Mathematics, vol. 30*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005.

[2] Y. Achdou i O Pironneau, *Handbook of Numerical Analysis, vol. XV*, pogl. Partial Differential Equations for Option Pricing, Elsevier, 2009.

[3] F. Black i M Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Pol. Econ. (1973), br. 81, 637–659.

[4] J. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Pearson education, 2018.

[5] O.A. Ladyženskaja, V.A. Solonnikov i N.N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.

[6] J.L. Lions i E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. I and II*, Dunod, Paris, France, 1968.

[7] M.H. Protter i H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, NY, 1984.

Sažetak

Opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da kupi (*call*) ili proda (*put*) određenu financijsku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni, do određenog datuma ili na taj datum, na tzv datum dospijeća. Ovisno o trenutku izvršenja, razlikujemo europske i američke opcije. Europske opcije se mogu iskoristiti samo na datum dospijeća, dok se američke opcije mogu izvršiti i u bilo kojem trenutku prije datuma dospijeća. U ovom radu određujemo cijenu europske opcije.

U prvom poglavlju se upoznajemo s osnovnim pojmovima u teoriji opcija, funkcijama isplata te čimbenicima koji utječu na kretanje cijena opcija.

U drugom poglavlju proširujemo Black-Scholesov model i navodimo svojstva. Model je opisan linearnom paraboličkom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom koju zadovoljava funkcija cijene europske *put* opcije. Zatim vršimo potrebnu zamjenu varijabli te navodimo rezultat egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Na kraju poglavlja dajemo varijacijsku formulaciju zadaće za europsku put opciju.

U trećem poglavlju primijenjujemo metodu konačnih elemenata s elementima prvog stupnja na model zapisan u obliku varijacijske jednadžbe te računamo numeričku aproksimaciju rješenja modela.

U četvrtom poglavlju prikazujemo razne primjere cijena europskih opcija s različitim parametrima. Cijene *call* opcija računamo iz *put-call* pariteta. Uspoređujemo cijene europskih opcija dobivene metodom konačnih elemenata s egzaktnim cijenama ukoliko je to moguće. Također, promatramo promjene cijena europskih opcija u ovisnosti o promjenama određenih parametara. Na kraju poglavlja prikazujemo implementaciju metode u MATLAB-u.

Summary

Option on a given asset is a contract that gives its holder the right, but not the obligation, to buy (*call*) or sell (*put*) the asset for a predetermined price, until a certain future time or at that time. That future time moment is called *the maturity*. Depending on the time of exercise, we differentiate between European and American options. European options can only be excercised on the maturity date, while American options can be excercised earlier. In this work we determine the price of European option.

In the first chapter we introduce the basic concepts of option theory, payoff functions and factors affecting option prices.

In the second chapter we extend the Black-Scholes model and list some its properties. Model is described by a linear parabolic partial differential equation which can be solved for the pricing function of the European *put* option. Then we use change of variables and formulate existence and uniqueness result of the solution. At the end of the chapter we give the variational formulation of the European *put* option value problem.

In the third chapter we use finite-element method of degree 1 on the model written as variational equation and we calculate the numerical approximation of the solution of the model.

In the fourth chapter we present various examples of prices of European options with different parameters. European *call* option price is calculated from *put-call* parity. We compare prices obtained by finite-element method with exact solutions when possible. Also, we observe changes of European options prices depending on parameters changes. At the end of the chapter we give the implementation code written in MATLAB.

Životopis

Rođena sam u 17. travnja 1995. godine u Splitu. Osnovnu školu Strožanac u Podstrani završavam 2009. godine. Zatim upisujem III. gimnaziju Split prirodoslovno-matematičkog usmjerenja koju završavam 2013. godine. Potom upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2016. završavam preddiplomski studij i upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom odsjeku.