Istraživanja pravilnosti u nastavi matematike: mnogokutni brojevi

Mikulin, Elvira

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Elvira Mikulin

ISTRAŽIVANJA PRAVILNOSTI U NASTAVI MATEMATIKE: MNOGOKUTNI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

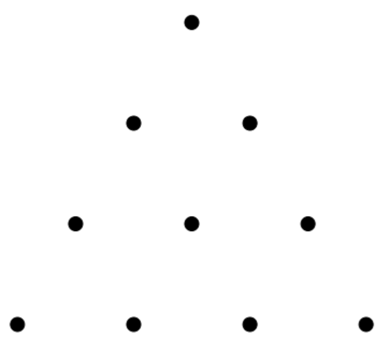
Zahvaljujem mentorici, prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš, na strpljenju, susretljivosti, razumijevanju i pomoći prilikom izrade ovog diplomskog rada.
Hvala mojim prijateljima i kolegama na potpori tijekom studiranja.
Najviše zahvaljujem svojim roditeljima i obitelji koji su mi bili najveća podrška i oslonac u svakom trenutku.

Sadržaj

Uvod

U suvremenim matematičkim kurikulumima posebno se promiče istraživanje i samostalno otkrivanje matematičkih pojmova i postupaka od strane učenika. Mnogokutni brojevi prikladna su tema za istraživanje. Učenici mogu uočavati njihova svojstva kroz geometrijsko prikazivanje, sustavno prebrojavanje, te konačno generaliziranje i formalno dokazivanje metodama koje su im dostupne. Na taj način, učenike se može zainteresirati i potaknuti na razmišljanje i samostalno zaključivanje.

Mnogokutne brojeve prvi su proučavali Pitagora i njegovi sljedbenici Pitagorejci, okupljeni u pitagorejsku školu (570.-501. pr. Kr.). Pitagorejci su koristili sitno kamenje za otkrivanje i geometrijsko prikazivanje određenih svojstava prirodnih brojeva, danas poznatih kao parnih i neparnih, prostih i složenih, savršenih i prijateljskih, te figurativnih brojeva. Figurativni brojevi dobivaju se slaganjem i preslagivanjem točkica (kvadratića ili drugih likova) u različite oblike, a ako točkice (odnosno likovi) formiraju pravilni geometrijski mnogokut, onda te brojeve nazivamo mnogokutnima.



Slika 0.1: Tetraktis

Zahvaljujući knjizi *Uvod u aritmetiku* starogrčkog filozofa i matematičara Nikomaha (oko 100. godine poslije Krista), posvećenoj aritmetičkim otkrićima Pitagorejaca, znamo da su Pitagorejci figurativne (odnosno mnogokutne) brojeve dijelili na trokutne, kvadratne, peterokutne, šesterokutne, itd. Broj 1 prikazivali su jednom točkicom, a slaganjem točkica u mnogokutne oblike dobivali su ostale mnogokutne brojeve. Uočili su da se točkice mogu pravilno rasporediti i u trodimenzionalna tijela, te da tako nastaju kockasti, piramidalni i drugi brojevi. Nikomah je napisao, kako trokutni brojevi, najjednostavniji mnogokutni brojevi, tvore niz

$$1, 3, 6, 10, 15, ...,$$

a članovi tog niza dobiveni su kao zbroj uzastopnih prirodnih brojeva, počevši od jedinice:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Trokutni broj 10 je za Pitagorejce bio poseban broj. Naime, simbol na kojem su članovi pitagorejske škole prisezali bio je tzv. Tetraktis (vidi sliku 0.1), koji je predstavljao četiri elementa: vatru, vodu, zrak i zemlju. Geometrijski je bio predstavljen jednakostraničnim trokutom koji se sastoji od deset točkica, a aritmetički brojem 10 ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$).

Problemi povezani s mogućnošću izražavanja bilo kojeg prirodnog broja kao zbroja mnogokutnih brojeva, kao i način kako se to radi, zainteresirali su mnoge poznate matematičare kroz povijest, a neki od tih problema još uvijek su neriješeni. Pierre de Fermat (1601.-1665.) je tvrdio da se svaki prirodni broj može prikazati kao zbroj od najviše k $k-$mnogokutnih brojeva. Na primjer, svaki je prirodni broj zbroj od najviše tri trokutna broja, najviše četiri kvadratna broja ili najviše pet peterokutnih brojeva. Fermatov dokaz nikad nije pronađen. Za $k = 4$ dokaze su dali Jacobi, Euler i Lagrange (1772). Slučaj $k = 3$ dokazao je Gauss (1796), a općeniti teorem Cauchy (1813). Mnogokutni brojevi spominju se i u nekim suvremenijim književnim djelima, poput *Brojka Vragolka*, autora Hans Magnus Enzensbergera (1997).

Ovaj diplomski rad sastoji se od pet poglavlja. U prvom poglavlju opisani su trokutni, kvadratni, peterokutni i šesterokutni mnogokutni brojevi, dani njihovi geometrijski prikazi i opća formula za $n-$ti $k-$mnogokutni broj, te iskazane i dokazane međusobne veze između pojedinih mnogokutnih brojeva. U drugom poglavlju opisani su centralni mnogokutni brojevi, dani njihovi geometrijski prikazi, te iskazana opća formula za $n-$ti centralni $k-$mnogokutni broj. Također, u drugom poglavlju je spomenuta posebna skupina centralnih mnogokutnih brojeva. To su zvjezdasti brojevi koji se geometrijski mogu prikazati na način da se oko jedne centralne točke grade nekonveksni mnogokuti, pri tom stvarajući oblik zvijezde. U trećem poglavlju opisane su još dvije skupine mnogokutnih brojeva: pravokutni i trapezni brojevi. U četvrtom poglavlju spomenuti su trodimenzionalni mnogokutni brojevi. U posljednjem, petom poglavlju, izneseni su primjeri aktivnosti koje se mogu provoditi u razredu s učenicima, s naglaskom na istraživačku nastavu.

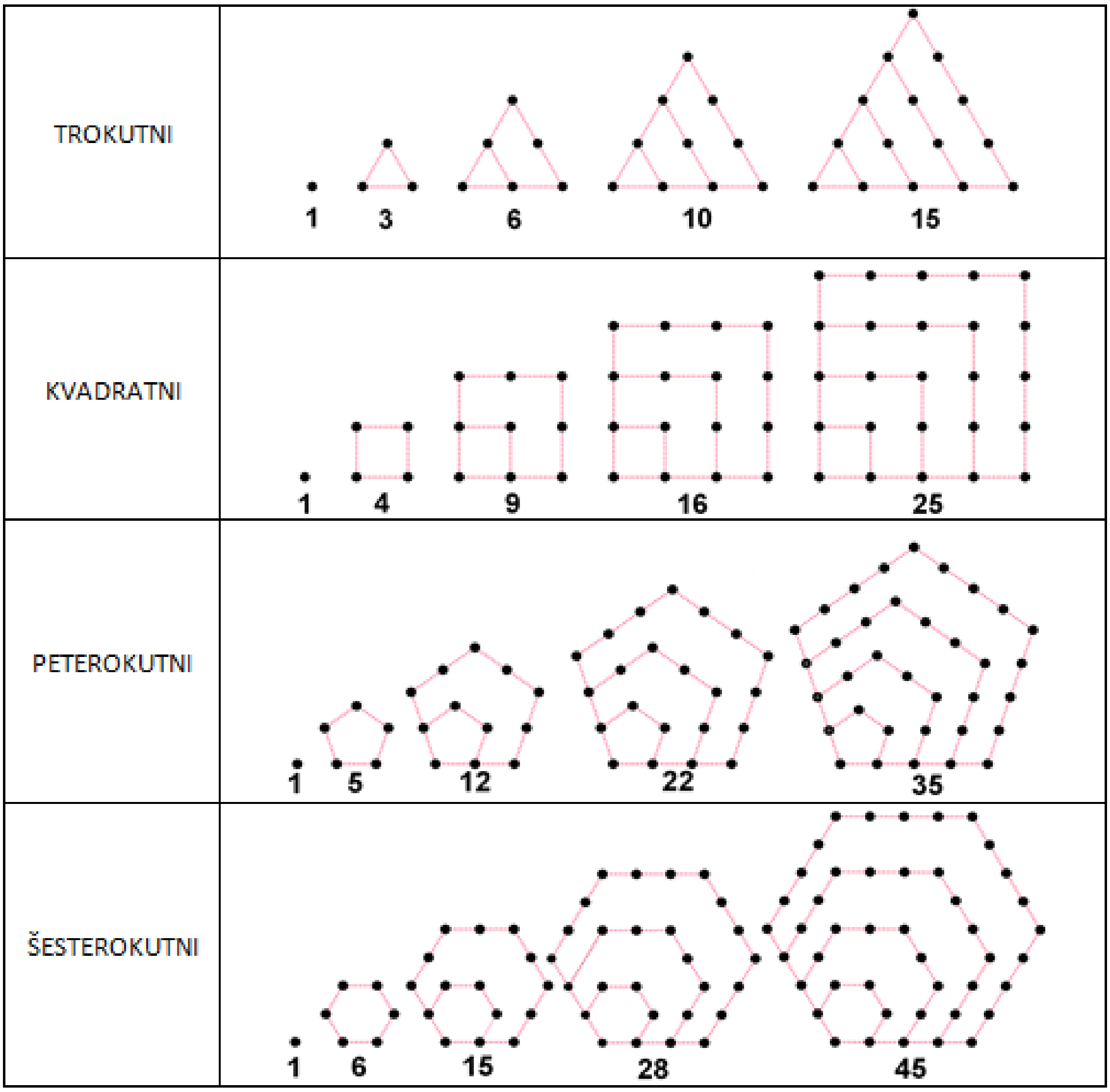
Poglavlje 1

Mnogokutni brojevi

Figurativni brojevi su brojevi koji se mogu prikazati kao geometrijski likovi sastavljeni od jednoliko raspoređenih točaka u ravnini. Mnogokutni (poligonalni) brojevi su oni figurativni brojevi, koji se mogu geometrijski prikazati rasporedom odgovarajućeg broja točaka, čavlića, kvadratića ili drugih likova u pravilne (konveksne) mnogokute (poligone). Pojedini mnogokutni brojevi naziv su dobili prema broju vrhova u pravilnom mnogokutu kojim su predstavljeni. Dakle, razlikujemo trokutne, kvadratne, peterokutne, šesterokutne i ostale mnogokutne brojeve (vidi sliku 1.2). U ovom radu govorit ćemo o $n-$tom $k-$mnogokutnom broju ili $k-$mnogokutnom broju reda n, i označit ćemo ga s $P_k(n)$, pri čemu su k i n prirodni brojevi, $k \geq 3$, $n \geq 1$.

Slika 1.1: Žetoni, matematičke pločice i standardni set Cuisenaireovih štapića

Na sljedećim stranicama opisani su i prikazani neki mnogokutni brojevi, iskazana neka njihova svojstva i međusobne veze u vidu zadataka primjerenih učenicima. Napomenimo kako se svi zadaci mogu riješiti uz pomoć neke vrste didaktičkog materijala. Primjeri takvih materijala su žetoni, matematičke pločice ili Cuisenaireovi štapići (vidi sliku 1.1 [1], a konkretna aktivnost s Cuisenaireovim štapićima navedena je u potpoglavlju 5.2.



Slika 1.2: Prvih pet članova prva četiri mnogokutna broja

[1]Žetoni: `https://www.google.com/imgres?imgurl`, matematičke pločice: `http://baleia.me/color-tiles-math/66af8/gallery/color-tiles.asp`, set Cuisenaireovih štapića: `https://www.amazon.com/Learning-Resources-Cuisenaire-Small-Group/dp/B000F8R5N2`, (kolovoz 2019.)

1.1 Trokutni brojevi

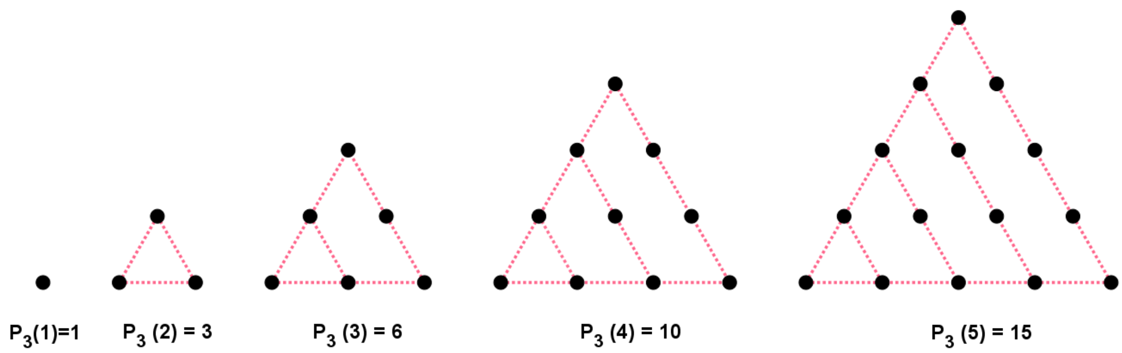
Trokutni brojevi su najjednostavniji mnogokutni brojevi koji se geometrijski mogu predočiti točkama raspoređenim u ravnini u obliku trokuta. Niz prvih nekoliko trokutnih brojeva je:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$$

Na slici 1.3 je prikazano prvih pet trokutnih brojeva.

Slijede zadaci, primjereni učenicima, u kojima će na temelju geometrijskog prikaza trokutnih brojeva uočavati njihova svojstva, opisivati $n-$ti trokutni broj $P_3(n)$ formulom, dobivene formule i svojstva geometrijski prikazivati, te provoditi formalne dokaze matematičkom indukcijom.

Zadatak 1.1.1. *Trokutni brojevi $P_3(n)$ dobivaju se postupkom opisanim na slici. Napišite rekurzivnu relaciju za niz $(P_3(n))$ i odredite eksplicitnu formulu za broj $P_3(n)$.*



Slika 1.3: Prvih pet trokutnih brojeva

Rješenje. Možemo uočiti da trokutni brojevi tvore niz

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

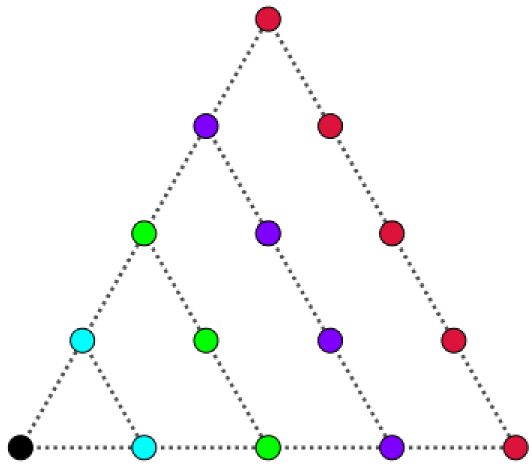
Utvrdimo rekurzivnu relaciju za taj niz algebarski. Imamo:

$$\begin{aligned}
P_3(1) &= 1\\
P_3(2) &= 3 = 1 + 2 = P_3(1) + 2\\
P_3(3) &= 6 = 3 + 3 = P_3(2) + 3\\
P_3(4) &= 10 = 6 + 4 = P_3(3) + 4\\
P_3(5) &= 15 = 10 + 5 = P_3(4) + 5\\
&\vdots\\
P_3(n) &= P_3(n-1) + n.
\end{aligned}$$

Dakle, za $n-$ti trokutni broj $P_3(n)$ vrijedi rekurzivna relacija:

$$P_3(1) = 1, P_3(n) = P_3(n-1) + n. \tag{1.1}$$

Rekurzivnu relaciju (1.1) mogli smo odrediti i uz pomoć slike 1.4 (različitim bojama su označeni novi elementi, odnosno točke).



Slika 1.4: Peti trokutni broj 15

Opću formulu za $n-$ti trokutni broj učenici mogu odrediti pomoću slike 1.3. Proučavanjem trokuta, kojima su predstavljeni pojedini trokutni brojevi, moguće je uočiti da svaki trokut ima jedan red više nego prethodni, te da svaki sljedeći red ima jednu točku više nego prethodni. Drugim riječima, broj točaka u pojedinom redu raste kao niz prirodnih brojeva:

$1, 2, 3, 4, \ldots$ Ovu pravilnost možemo uočiti sustavnim raspisivanjem trokutnih brojeva:

$$\begin{aligned}
P_3(1) &= 1\\
P_3(2) &= 3 = 1 + 2\\
P_3(3) &= 6 = 1 + 2 + 3\\
P_3(4) &= 10 = 1 + 2 + 3 + 4\\
P_3(5) &= 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5\\
&\vdots\\
P_3(n) &= 1 + 2 + \cdots + n.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $n-$ti trokutni broj jednak sumi prvih n prirodnih brojeva, pa slijedi formula:

$$P_3(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Učenici su mogli i na drugačiji način doći do formule za $n-$ti trokutni broj. Iz geometrijskog prikaza 1.3 se može uočiti da se broj točaka u svakom redu povećava na isti način kao članovi aritmetičkog niza. Suma tih članova čini aritmetički red koji je predstavljen ukupnim brojem točaka u trokutu kojim je prikazan pojedini trokutni broj. Kako bismo našli opći izraz za $n-$ti trokutni broj, možemo primijeniti opću formulu za sumu prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)\,d]\,, \tag{1.3}$$

pri čemu je n broj članova sume, a_1 prvi član sume, a d razlika između dva susjedna člana niza. Uočimo, u našem primjeru je $a_1 = 1$ i $d = 1$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\,[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1]\\
&= \frac{n}{2}\,[2 + n - 1]\\
&= \frac{n}{2}\,(n+1)\,.
\end{aligned}$$

Na taj način, odredili smo formulu (1.2) za $n-$ti trokutni broj. □

Opću formulu za određivanje $n-$tog trokutnog broja učenici mogu dokazati koristeći princip matematičke indukcije, kao što je prikazano u idućem zadatku.

Zadatak 1.1.2. *Dokažite da za trokutne brojeve vrijedi:*

$$P_3(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po n.
(Baza indukcije): Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$. Znamo da je $P_3(1) = 1$, pa dobivamo:

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
(Pretpostavka indukcije): Pretpostavimo da za neki $n \in N$ vrijedi:

$$P_3(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

(Korak indukcije): Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1 \in N$, tj. da vrijedi:

$$P_3(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

Primjenom pretpostavke indukcije, te sređivanjem izraza dobivamo:

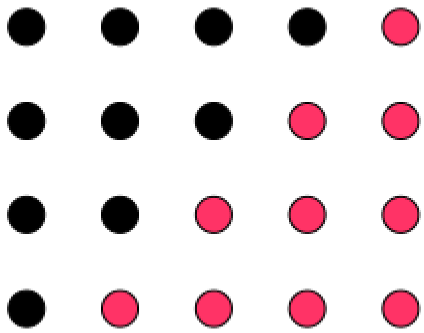
$$\begin{aligned} P_3(n+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) \\ &= [\text{pretpostavka indukcije}] \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

S obzirom da tvrdnja vrijedi za broj 1, te iz pretpostavke da ona vrijedi za neki prirodan broj n slijedi da vrijedi i za prirodan broj $n + 1$, prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Osim dokaza matematičkom indukcijom, formula (1.2) se može i geometrijski prikazati (vidi sliku 1.5).

Naime, ako složimo dva jednaka trokutna broja jedan do drugog, na način da se „spoje“u jedan pravokutnik, dobit ćemo pravokutnik koji ima jednak broj redova kao i promatrani trokutni broj, a stupaca za jedan više. Uočimo, ako spojimo dva trokuta kojima je predstavljen četvrti trokutni broj 10, dobit ćemo pravokutnik s četiri reda i pet stupaca. Dakle, četvrti trokutni broj je polovina pravokutnika sa stranicama duljine 4 i 5, odnosno:

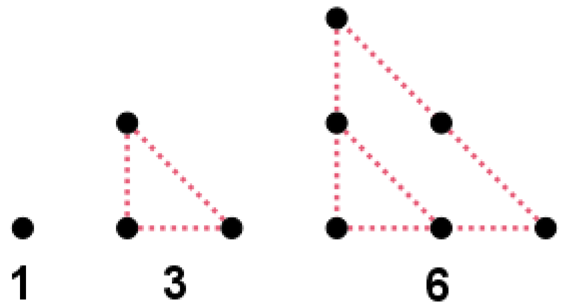
$$P_3(n) = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$



Slika 1.5: Geometrijski prikaz formule (1.2)

Zaključujemo, $n-$ti trokutni broj je polovina pravokutnika sa duljinama stranica n i $n + 1$.

Općenito, slika 1.3 nije jedini način prikazivanja trokutnih brojeva. Naime, trokutni brojevi mogu se prikazati i kao pravokutni trokuti (vidi sliku 1.6).



Slika 1.6: Prva tri trokutna broja

Sljedeći zadatak pokazuje kako se svaki trokutni broj parnog indeksa može prikazati kao linearna kombinacija dva uzastopna trokutna broja.

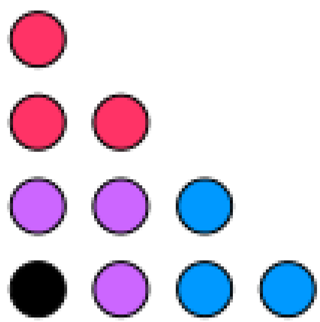
Zadatak 1.1.3. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_3(2n) = 3P_3(n) + P_3(n-1). \tag{1.4}$$

Rješenje. Tvrdnja se može dokazati koristeći princip matematičke indukcije ili direktnim algebarskim raspisivanjem, kojim dobivamo:

$$\begin{aligned} 3P_3(n) + P_3(n-1) &= 3 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{(n-1)\,n}{2} \\ &= \frac{n}{2}\,(3n+3+n-1) \\ &= \frac{n}{2}\,(4n+2) \\ &= \frac{2n\,(2n+1)}{2} \\ &= P_3(2n), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Na slici 1.7 dan je geometrijski prikaz tvdnje za $n = 2$.



Slika 1.7: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.4) za $n = 2$

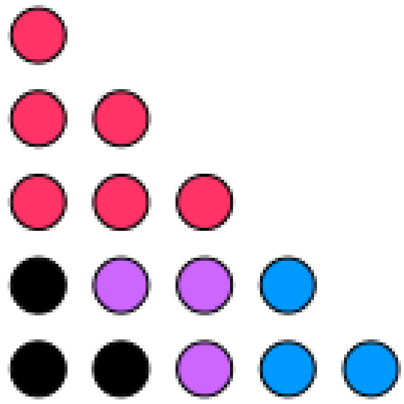
□

Idući zadatak pokazuje kako se svaki trokutni broj neparnog indeksa može prikazati kao linearna kombinacija dva uzastopna trokutna broja.

Zadatak 1.1.4. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_3(2n+1) = 3P_3(n) + P_3(n+1). \tag{1.5}$$

Rješenje. Analogno prethodnom zadatku, dokaz se može provesti matematičkom indukcijom ili direktnim algebarskim raspisivanjem, a na slici 1.8 je dan geometrijski prikaz.



Slika 1.8: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.5) za $n = 2$

□

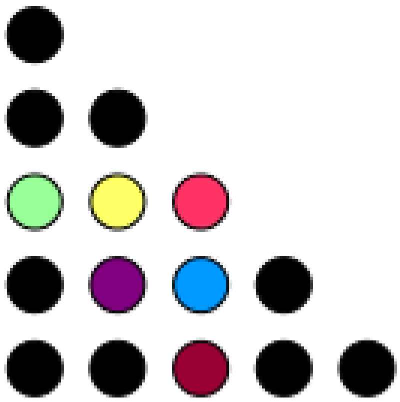
Zadatak 1.1.5. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_3(3n-1) = 3P_3(n) + 6P_3(n-1). \tag{1.6}$$

Rješenje. Direktnim algebarskim raspisivanjem lako vidimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} 3P_3(n) + 6P_3(n-1) &= 3 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + 6 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} \\ &= \frac{n}{2}\,(3n + 3 + 6n - 6) \\ &= \frac{n}{2}\,(9n-3) \\ &= \frac{(3n-1)\,3n}{2} \\ &= P_3(3n-1). \end{aligned}$$

Potpuni dokaz provodi se matematičkom indukcijom. Na slici 1.9 dan je geometrijski prikaz tvrdnje (1.6). Uočimo, trokutni broj 15 prikazan je kao kombinacija trokutnih brojeva 1 i 3.



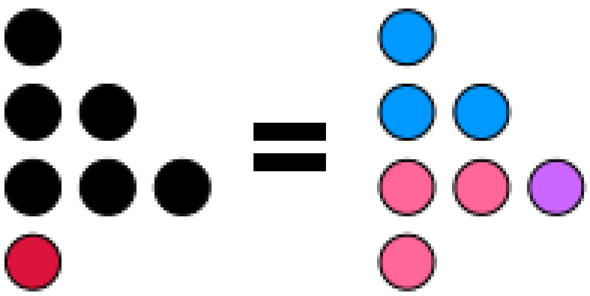
Slika 1.9: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.6) za $n = 2$

□

Zadatak 1.1.6. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_3(n-1) + P_3(n+1) = 2P_3(n) + 1. \tag{1.7}$$

Rješenje. Raspisivanjem se, kao u prethodnim zadacima, lako pokaže da tvrdnja vrijedi, a potpuni dokaz provodi se matematičkom indukcijom. Na slici 1.10 dan je geometrijski prikaz tvrdnje.



Slika 1.10: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.7) za $n = 2$

□

1.2 Kvadratni brojevi

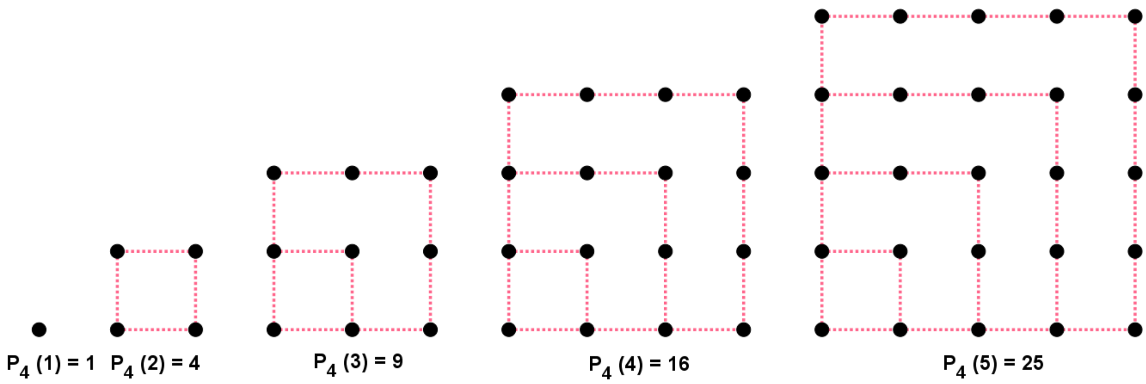
Kvadratni brojevi su mnogokutni brojevi koji se geometrijski mogu prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku kvadrata (u jednak broj redova i stupaca). Prvih nekoliko kvadratnih brojeva čini niz:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots,$$

što je prikazano na slici 1.11.

Na idućim stranicama dani su zadaci, primjereni učenicima, u kojima će na temelju geometrijskog prikaza kvadratnih brojeva uočavati njihova svojstva, opisivati $n-$ti kvadratni broj formulom, te dobivene formule i svojstva dokazivati matematičkom indukcijom i geometrijski prikazivati.

Zadatak 1.2.1. *Kvadratni brojevi $P_4(n)$ dobivaju se postupkom opisanim na slici. Napišite rekurzivnu relaciju za niz $(P_4(n))$ i odredite eksplicitnu formulu za broj $P_4(n)$.*



Slika 1.11: Prvih pet kvadratnih brojeva

Rješenje. Možemo uočiti da kvadratni brojevi tvore niz

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots.$$

Odredimo rekurzivnu relaciju za taj niz. Imamo:

$$\begin{aligned}
P_4(1) &= 1\\
P_4(2) &= 4 = 1 + 3 = P_4(1) + (2 \cdot 2 - 1)\\
P_4(3) &= 9 = 4 + 5 = P_4(2) + (2 \cdot 3 - 1)\\
P_4(4) &= 16 = 9 + 7 = P_4(3) + (2 \cdot 4 - 1)\\
P_4(5) &= 25 = 16 + 9 = P_4(4) + (2 \cdot 5 - 1)\\
&\vdots\\
P_4(n) &= P_4(n-1) + (2 \cdot n - 1)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, za $n-$ti kvadratni broj $P_4(n)$ vrijedi rekurzivna relacija:

$$P_4(1) = 1, P_4(n) = P_4(n-1) + (2n - 1)\,.$$

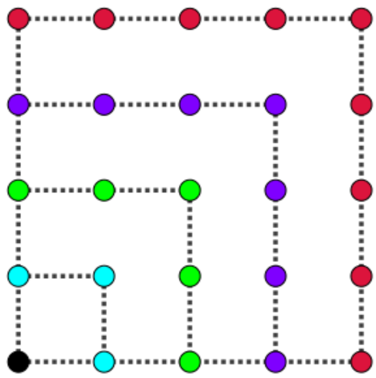
Učenici već po riječi „kvadratni"mogu naslutiti da se $n-$ti kvadratni broj dobiva kao kvadrat broja n, a u to će se uvjeriti raspisivanjem:

$$\begin{aligned}
P_4(1) &= 1\\
P_4(2) &= 4 = 2^2\\
P_4(3) &= 9 = 3^2\\
P_4(4) &= 16 = 4^2\\
P_4(5) &= 25 = 5^2\\
&\vdots\\
P_4(n) &= n^2.
\end{aligned}$$

Dakle, opća formula za $n-$ti kvadratni broj glasi:

$$P_4(n) = n^2. \tag{1.8}$$

Formulu (1.8) učenici mogu odrediti i pomoću geometrijskog prikaza. Proučavanjem kvadrata, kojima su predstavljeni pojedini kvadratni brojevi, moguće je uočiti da broj rubnih točaka raste kao niz neparnih brojeva: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ (vidi sliku 1.12).



Slika 1.12: Peti kvadratni broj 25

Istu pravilnost uočavamo sustavnim ispisivanjem kvadratnih brojeva:

$$
\begin{aligned}
P_4(1) &= 1 \\
P_4(2) &= 4 = 1 + 3 \\
P_4(3) &= 9 = 1 + 3 + 5 \\
P_4(4) &= 16 = 1 + 3 + 5 + 7 \\
P_4(5) &= 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\
&\vdots \\
P_4(n) &= 1 + 3 + \cdots + (2n - 1)\,.
\end{aligned}
$$

Dobili smo da je $n-$ti kvadratni broj jednak sumi prvih n neparnih brojeva, pa slijedi formula:

$$P_4(n) = 1 + 2 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Ukoliko učenici ne znaju napamet formulu za sumu prvih n neparnih brojeva, opću formulu (1.8) mogu odrediti i primjenom formule za sumu prvih n članova aritmetičkog niza (1.3), slično kao u (1.1.1). Uočimo, $a_1 = 1$ i $d = 2$, pa dobivamo:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\,[2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2] \\
&= \frac{n}{2}\,[2 + 2n - 2] \\
&= \frac{n}{2}\,(2n) \\
&= n^2.
\end{aligned}
$$

□

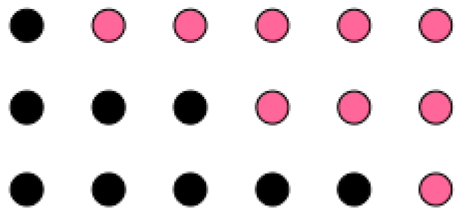
Analogno situaciji s trokutnim brojevima, formula za određivanje $n-$tog kvadratnog broja može se dokazati matematičkom indukcijom, a mi ćemo ju prikazati geometrijski.

Zadatak 1.2.2. *Geometrijski prikažite da opća formula za određivanje $n-$tog kvadratnog broja glasi:*

$$P_4(n) = n^2.$$

Rješenje. Geometrijski prikaz, za slučaj kada je $n = 3$, pokazuje da dva treća kvadratna broja formiraju pravokutnik sa stranicama duljine 3 i 6. Zaključujemo, dva $n-$ta kvadratna broja formiraju pravokutnik sa stranicama duljine n i $2n$, pa slijedi formula (1.8):

$$P_4(n) = \frac{2n \cdot n}{2} = n^2.$$



Slika 1.13: Geometrijski prikaz formule (1.8) za $n = 3$

□

Slijedi zadatak u kojem će učenici dokazati poveznicu između dva uzastopna trokutna broja i kvadratnog broja.

Zadatak 1.2.3. *Dokažite da je zbroj dva uzastopna trokutna broja jednak zbroju uzastopnih neparnih brojeva, odnosno:*

$$P_3(n) + P_3(n+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po n.
(Baza indukcije): Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$. Imamo:

$$P_3(1) + P_3(1+1) = P_3(1) + P_3(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
(Pretpostavka indukcije): Pretpostavimo da za neki $n \in N$ vrijedi:

$$\begin{aligned} P_3(n) + P_3(n+1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

(Korak indukcije): Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1 \in N$, tj. da vrijedi:

$$\begin{aligned} P_3(n+1) + P_3(n+2) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\,(n+1) + 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+3) \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$

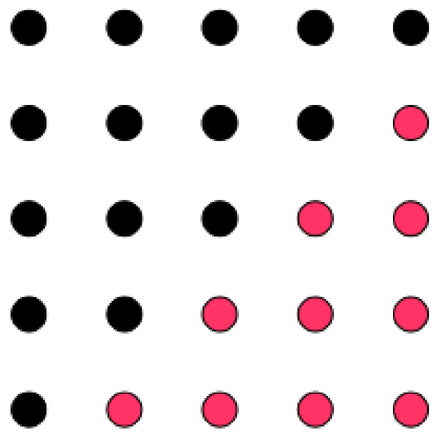
Primjenom pretpostavke indukcije, te sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} P_3(n+1) + P_3(n+2) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) + (2n+3) \\ &= [\text{pretpostavka indukcije}] \\ &= (n+1)^2 + (2n+3) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$

S obzirom da tvrdnja vrijedi za broj 1, te iz pretpostavke da ona vrijedi za neki prirodan broj n slijedi da vrijedi i za prirodan broj $n + 1$, prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Učenici su ovu tvrdnju mogli prikazati i geometrijski. Na slici 1.14 se može vidjeti da je zbroj dva uzastopna trokutna broja 10 i 15, odnosno četvrtog i petog trokutnog broja, jednak 25 (peti kvadratni broj). Uočimo, tvrdnja zadatka 1.2.3 može se zapisati i na idući način:

$$P_3(n) + P_3(n+1) = P_4(n+1). \tag{1.9}$$



Slika 1.14: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.9) za $n = 4$

Postoji još jedna veza između trokutnih i kvadratnih brojeva, iskazana i dokazana u idućem zadatku.

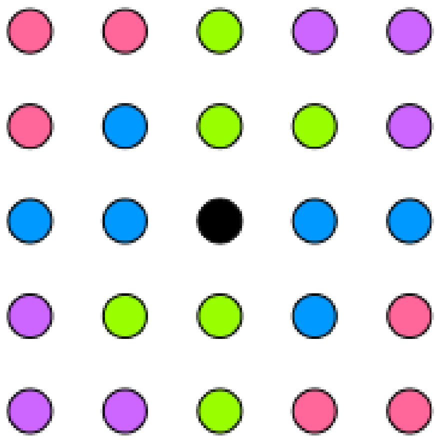
Zadatak 1.2.4. *Dokažite da vrijedi formula poznata pod nazivom Diofantova ili Plutarhova formula :*

$$P_4(2n+1) = 8P_3(n) + 1. \tag{1.10}$$

Rješenje. Lako se pokaže da Diofantova formula vrijedi ako ju raspišemo primjenom opće formule za $n-$ti kvadratni i trokutni broj. Imamo:

$$\begin{aligned} 8P_3(n) + 1 &= 8 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= (2n+1)^2 \\ &= P_4(2n+1). \end{aligned}$$

Potpuni dokaz provodi se matematičkom indukcijom, a geometrijski prikaz za slučaj kada je $n = 2$ dan je na slici 1.15.



Slika 1.15: Geometrijski prikaz formule (1.10) za $n = 2$

□

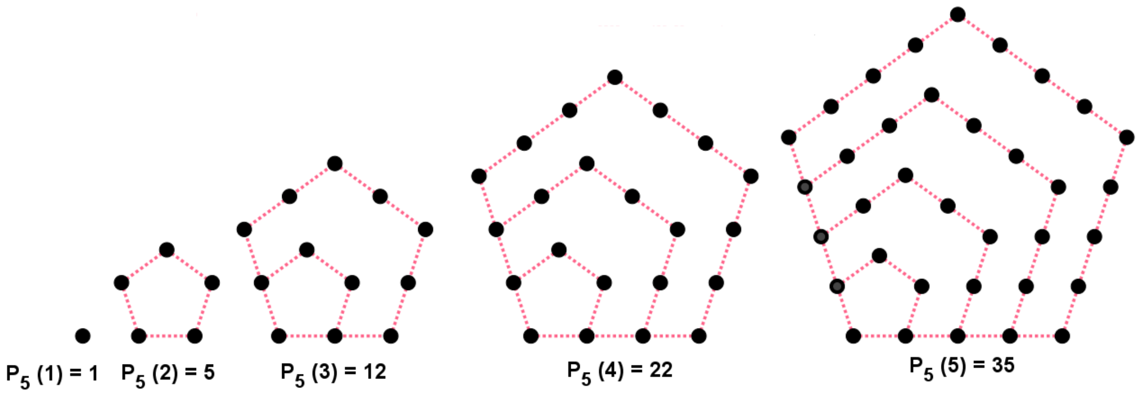
1.3 Peterokutni brojevi

Peterokutni brojevi su brojevi koji se geometrijski mogu prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku peterokuta. Niz prvih nekoliko peterokutnih brojeva glasi:

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \ldots$$

Na slici 1.16 je prikazano prvih pet peterokutnih brojeva. Na idućim stranicama dani su zadaci, u kojima se na temelju geometrijskog prikaza peterokutnih brojeva određuje opća formula za $n-$ti peterokutni broj $P_5(n)$, uočavaju se svojstva peterokutnih brojeva i geometrijski prikazuju.

Zadatak 1.3.1. *Peterokutni brojevi $P_5(n)$ dobivaju se postupkom opisanim na slici. Napišite rekurzivnu relaciju za niz $(P_5(n))$ i odredite eksplicitnu formulu za broj $P_5(n)$.*



Slika 1.16: Prvih pet peterokutnih brojeva

Rješenje. Možemo uočiti da peterokutni brojevi tvore niz

$$1, 5, 12, 22, 35, \ldots .$$

Odredimo rekurzivnu relaciju za taj niz. Imamo:

$$\begin{aligned}
&P_5(1) = 1\\
&P_5(2) = 5 = 1 + 4 = P_5(1) + (3 \cdot 2 - 2)\\
&P_5(3) = 12 = 5 + 7 = P_5(2) + (3 \cdot 3 - 2)\\
&P_5(4) = 22 = 12 + 10 = P_5(3) + (3 \cdot 4 - 2)\\
&P_5(5) = 35 = 22 + 13 = P_5(4) + (3 \cdot 5 - 2)\\
&\qquad\vdots\\
&P_5(n) = P_5(n-1) + (3n - 2)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, za $n-$ti peterokutni broj $P_5(n)$ vrijedi rekurzivna relacija:

$$P_5(1) = 1, P_5(n) = P_5(n-1) + (3n - 2)\,.$$

Opću formulu za $n-$ti peterokutni broj možemo izvesti na isti način kao kod trokutnih i kvadratnih brojeva, primjenom formule (1.3). Raspišimo prvih pet peterokutnih brojeva:

$$\begin{aligned}
&P_5(1) = 1\\
&P_5(2) = 5 = 1 + 4\\
&P_5(3) = 12 = 1 + 4 + 7\\
&P_5(4) = 22 = 1 + 4 + 7 + 10\\
&P_5(5) = 35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Uočimo, kreće se od jedinice, i redom se dodaju brojevi $4, 7, 10, 13$ (članovi aritmetičkog niza koji se razlikuju za 3). U ovom primjeru je $a_1 = 1$ i $d = 3$, pa primjenom formule (1.3) dobivamo:

$$\begin{aligned}
P_5(n) &= \frac{n}{2}\left[2\cdot 1 + (n-1)\cdot 3\right]\\
&= \frac{n}{2}(2 + 3n - 3)\\
&= \frac{n}{2}(3n-1)\\
&= \frac{3n^2-n}{2}.
\end{aligned}$$

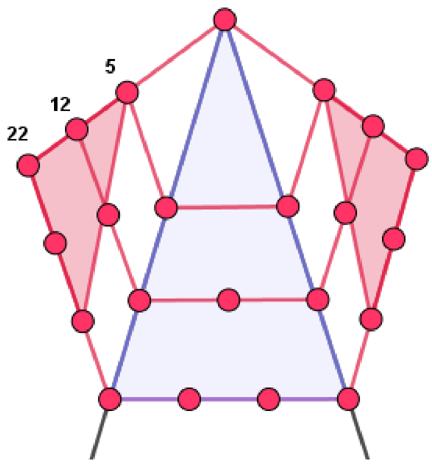
Dakle, opća formula za $n-$ti peterokutni broj glasi:

$$P_5(n) = \frac{3n^2-n}{2}. \tag{1.11}$$

Formula (1.11) se može odrediti i pomoću geometrijskog prikaza 1.17. Naime, ako povučemo dvije dijagonale iz jednog vrha peterokuta, uočavamo da smo time peterokut podijelili na tri trokuta. Konkretno, četvrti peterokutni broj 22 sastavljen je od dvostrukog trećeg trokutnog broja 6 i četvrtog trokutnog broja 10. Dakle, $n-$ti peterokutni broj je kombinacija $n-1-$og i $n-$tog trokutnog broja:

$$\begin{aligned}
P_5(n) &= 2P_3(n-1) + P_3(n)\\
&= 2\cdot\frac{(n-1)\,n}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2}\\
&= n\left(\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \frac{3n^2-n}{2}.
\end{aligned}$$

□



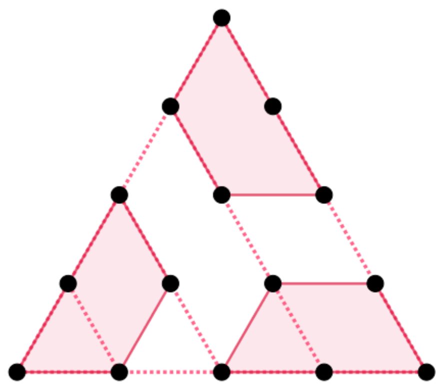
Slika 1.17: Četvrti peterokutni broj 22

Veza peterokutnih i trokutnih brojeva iskazana je i geometrijski prikazana u idućem zadatku.

Zadatak 1.3.2. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_5(n) = \frac{1}{3}P_3(3n-1). \tag{1.12}$$

Rješenje. Na slici 1.18 dan je geometrijski prikaz tvrdnje, a potpuni dokaz provodi se matematičkom indukcijom.



Slika 1.18: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.12) za $n = 2$

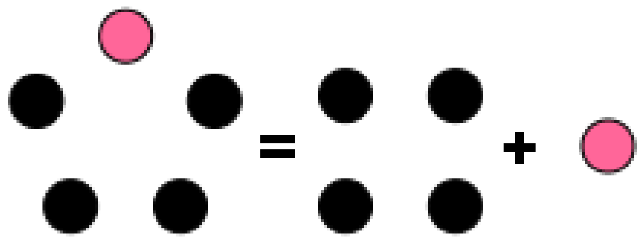
□

Svaki peterokutni broj sastoji se od četverokutnog i trokutnog broja, kao što je prikazano u sljedećem zadatku.

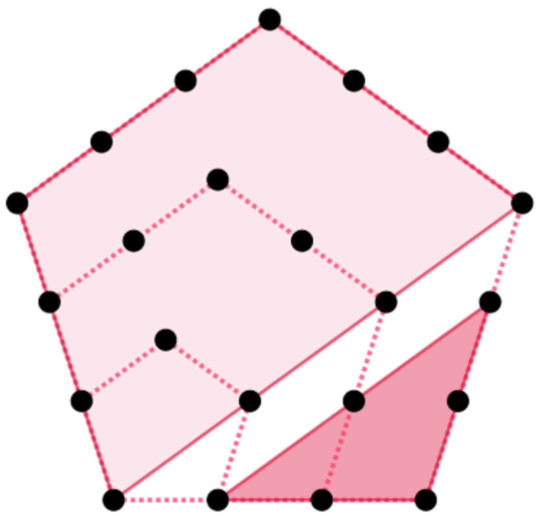
Zadatak 1.3.3. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_5(n) = P_4(n) + P_3(n-1). \tag{1.13}$$

Rješenje. Potpuni dokaz provodi se matematičkom indukcijom, a u nastavku su dani geometrijski prikazi. Uočimo, možemo na više načina geometrijski prikazati tvrdnju (1.13). Na slici 1.19 je geometrijski prikaz za $n = 2$, a na slici 1.20 za $n = 4$.



Slika 1.19: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.13) za $n = 2$



Slika 1.20: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.13) za $n = 4$

□

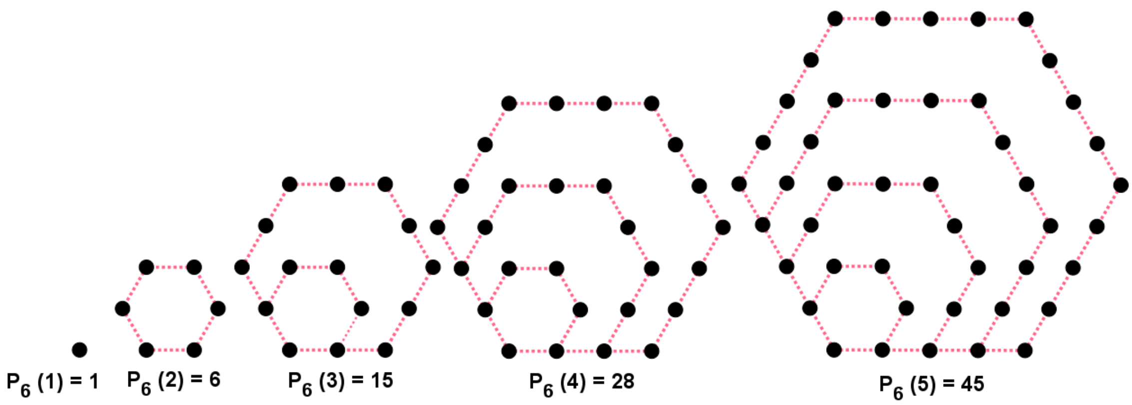
1.4 Šesterokutni brojevi

Šesterokutni brojevi su mnogokutni brojevi koji se geometrijski mogu prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku šesterokuta. Niz prvih nekoliko šesterokutnih brojeva glasi:

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, \dots$$

Na slici 1.21 je prikazano prvih pet šesterokutnih brojeva. Slijede zadaci u kojima se na temelju geometrijskog prikaza uočavaju svojstva šesterokutnih brojeva, izvodi opća formula za $n-$ti šesterokutni broj $P_6(n)$, te se iskazana svojstva geometrijski prikazuju.

Zadatak 1.4.1. *Šesterokutni brojevi $P_6(n)$ dobivaju se postupkom opisanim na slici. Napišite rekurzivnu relaciju za niz $(P_6(n))$ i odredite eksplicitnu formulu za broj $P_6(n)$.*



Slika 1.21: Prvih pet šesterokutnih brojeva

Rješenje. Možemo uočiti da šesterokutni brojevi tvore niz

$$1, 6, 15, 28, 45, \dots .$$

Odredimo rekurzivnu relaciju za taj niz. Imamo:

$$
\begin{aligned}
&P_6(1) = 1\\
&P_6(2) = 6 = 1 + 5 = P_6(1) + (4 \cdot 2 - 3)\\
&P_6(3) = 15 = 6 + 9 = P_6(2) + (4 \cdot 3 - 3)\\
&P_6(4) = 28 = 15 + 13 = P_6(3) + (4 \cdot 4 - 3)\\
&P_6(5) = 45 = 28 + 17 = P_6(4) + (4 \cdot 5 - 3)\\
&\qquad\vdots\\
&P_6(n) = P_6(n-1) + (4n - 3)\,.
\end{aligned}
$$

Dakle, za $n-$ti šesterokutni broj $P_6(n)$ vrijedi rekurzivna relacija:

$$P_6(1) = 1, P_6(n) = P_6(n-1) + (4n - 3)\,.$$

Odredimo opću formulu za $n-$ti šesterokutni broj sustavnim ispisivanjem šesterokutnih brojeva. Imamo:

$$
\begin{aligned}
&P_6(1) = 1\\
&P_6(2) = 6 = 1 + 5\\
&P_6(3) = 15 = 1 + 5 + 9\\
&P_6(4) = 28 = 1 + 5 + 9 + 13\\
&P_6(5) = 45 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

Uočimo, kreće se od jedinice, i redom se dodaju brojevi 5, 9, 13, 17 (članovi aritmetičkog niza koji se razlikuju za 4). U ovom primjeru je $a_1 = 1$ i $d = 4$, pa primjenom formule (1.3) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P_6(n) &= \frac{n}{2}\,[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 4]\\
&= \frac{n}{2}\,(2 + 4n - 4)\\
&= \frac{n}{2}\,(4n - 2)\\
&= \frac{1}{2} n \cdot 2 \cdot (2n - 1)\\
&= n\,(2n - 1)\,.
\end{aligned}
$$

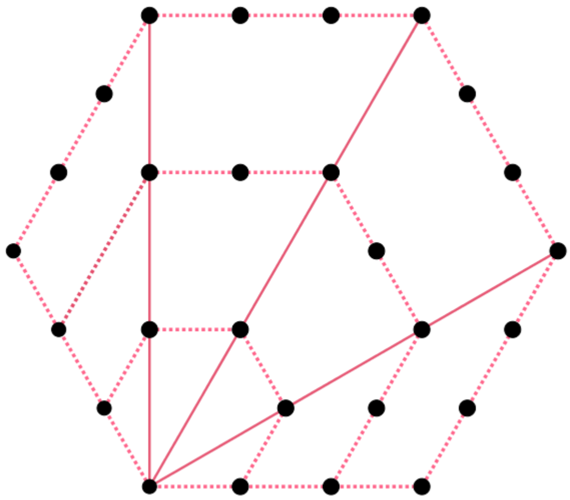
Dakle, opća formula za $n-$ti šesterokutni broj glasi:

$$P_6(n) = n\,(2n-1)\,.$$

Opću formulu moguće je odrediti i pomoću geometrijskog prikaza 1.22. Naime, povučemo li dijagonale iz jednog vrha šesterokuta, taj ćemo šesterokut podijeliti na četiri trokuta. Slijedi, broj $P_6(n)$ možemo odrediti kao sumu četiriju trokutnih brojeva umanjenu za broj točaka na dijagonalama, jer smo njih dvaput prebrojali:

$$\begin{aligned} P_6(n) &= 4P_3(n) - 3n \\ &= 4 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} - 3n \\ &= 2n\,(n+1) - 3n \\ &= n\,(2n+2-3) \\ &= n\,(2n-1)\,. \end{aligned}$$

□



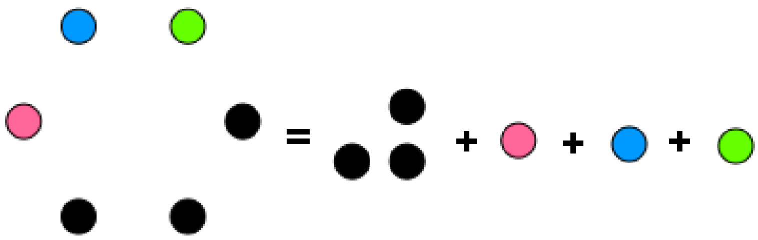
Slika 1.22: Šesterokutni broj 28

Slijede tri zadatka u kojima su geometrijski prikazana svojstva šesterokutnih brojeva. Potpuni dokazi provode se matematičkom indukcijom, a kao i kod prethodnih mnogokutnih brojeva, postoje i drugi načini dokazivanja.

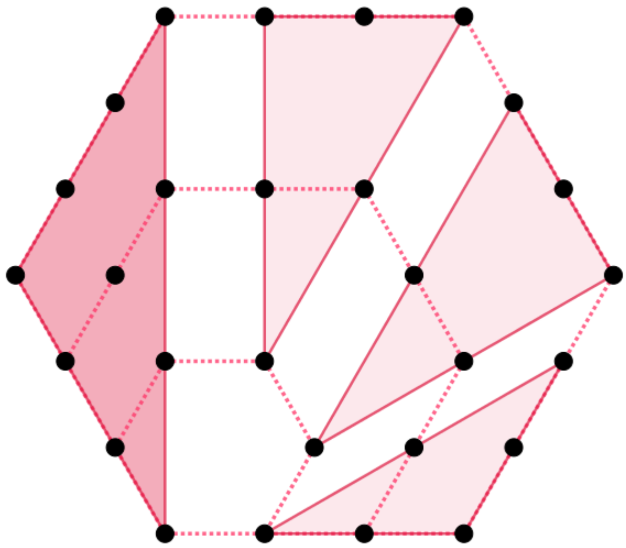
Zadatak 1.4.2. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_6(n) = P_3(n) + 3P_3(n-1). \tag{1.14}$$

Rješenje. Uočimo, tvrdnja zadatka je da se svaki šestrokutni broj može napisati kao linearna kombinacija dva uzastopna trokutna broja. Moguće je na više načina geometrijski prikazati ovu tvrdnju. Na slikama 1.23 i 1.24 dana su dva načina.



Slika 1.23: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.14) za $n = 2$



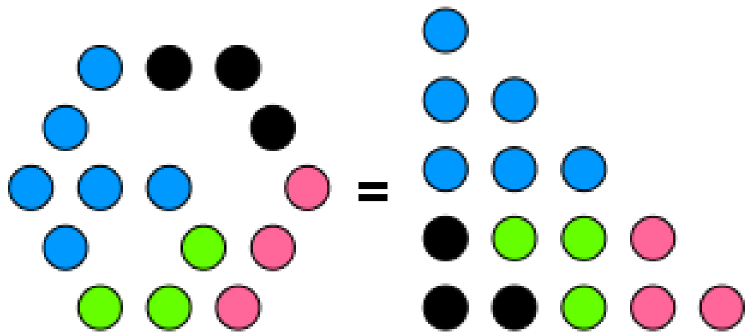
Slika 1.24: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.14) za $n = 4$

□

Zadatak 1.4.3. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_6(n) = P_3(2n - 1). \tag{1.15}$$

Rješenje. Geometrijski ćemo prikazati da se svaki šesterokutni broj može zapisati u obliku trokutnog broja (vidi sliku 1.25).



Slika 1.25: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.15) za $n = 3$

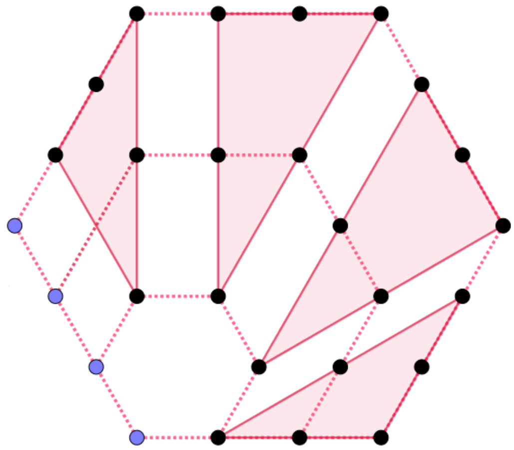
□

Još jedno svojstvo šesterokutnih brojeva je da se svaki šesterokutni broj može zapisati kao linearna kombinacija trokutnog broja i danog broja n. Geometrijski prikaz ovog svojstva dan je u sljedećem zadatku.

Zadatak 1.4.4. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_6(n) = n + 4P_3(n - 1). \tag{1.16}$$

Rješenje. Geometrijski prikaz tvrdnje (1.16) vidimo na slici 1.26.



Slika 1.26: Geometrijski prikaz tvrdnje (1.16) za $n = 4$

□

1.5 Ostali mnogokutni brojevi

Ostali mnogokutni brojevi (sedmerokutni, osmerokutni, deveterokutni, ...) definiraju se analogno kao i prethodno spomenuti brojevi. Opću formulu (1.17) za određivanje $n-$tog $k-$mnogokutnog broja $P_k(n)$ prvi je dao starogrčki matematičar Hipokrat s Hiosa.

Teorem 1.5.1. *Neka su n i k prirodni brojevi, $n, k \geq 2$. $n-$ti $k-$mnogokutni broj $P_k(n)$ definiramo kao sumu prvih n elemenata aritmetičkog niza s početnim članom 1 i razlikom $k-2$. Vrijedi:*

$$P_k(n) = \frac{n}{2}\left[n(k-2) - k + 4\right]. \tag{1.17}$$

Dokaz. Opća formula za sumu prvih n elemenata aritmetičkog niza glasi:

$$P_k(n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\,d\right].$$

Uočimo, $a_1 = 1$, $d = k-2$, pa slijedi:

$$\begin{aligned} P_k(n) &= \frac{n}{2}\left[2 \cdot 1 + (n-1)(k-2)\right] \\ &= \frac{n}{2}(2 + nk - 2n - k + 2) \\ &= \frac{n}{2}\left[n(k-2) - k + 4\right]. \end{aligned}$$

□

Propozicija 1.5.2. *Niz k−mnogokutnih brojeva zadovoljava rekurziju:*

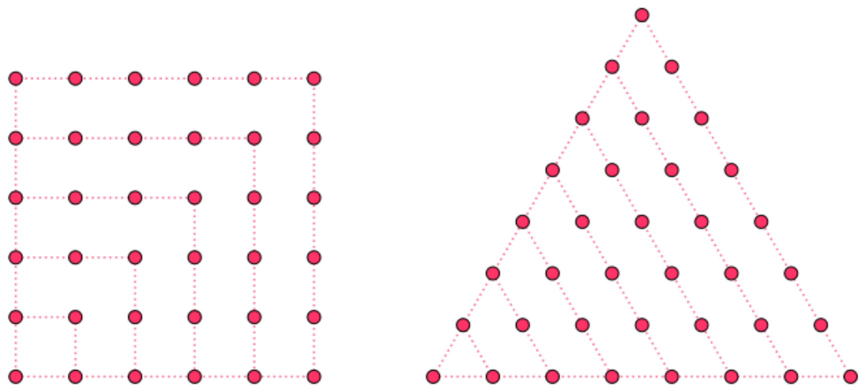
$$P_k(n+1) = P_k(n) + [1 + (k-2)\,n]\,, P_k(1) = 1.$$

U tablici 1.1 je prikazano prvih 20 mnogokutnih brojeva. Redom su navedeni nazivi mnogokutnih brojeva, pripadna opća formula za određivanje $n-$tog člana, te prvih nekoliko članova niza.

NAZIV	FORMULA	PRIPADNI NIZ
Trokutni	$\frac{1}{2}n\,(n+1)$	1,3,6,10,15,21, 28, 36, 45, ...
Kvadratni	n^2	1,4,9, 16,25, 36, 49, 64, 81,...
Peterokutni	$\frac{1}{2}\left(3n^2 - n\right)$	1,5,12,22,35,51,70,92, 117,...
Šesterokutni	$\frac{1}{2}\left(4n^2 - 2n\right)$	1,6,15,28,45,66,91,120,153, ...
Sedmerokutni	$\frac{1}{2}\left(5n^2 - 3n\right)$	1,7,18,34,55,81,112,148, 189, ...
Osmerokutni	$\frac{1}{2}\left(6n^2 - 4n\right)$	1,8,21,40,65,96,133, 176, 225, ...
Deveterokutni	$\frac{1}{2}\left(7n^2 - 5n\right)$	1,9, 24, 46, 75 111, 154, 204, 261, ...
Deseterokutni	$\frac{1}{2}\left(8n^2 - 6n\right)$	1,10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, ...
Jedanaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(9n^2 - 7n\right)$	1,11,30, 58, 95, 141, 196, 260, 333, ...
Dvanaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(10n^2 - 8n\right)$	1,12, 33, 64, 105, 156, 217, 288, 369, ...
Trinaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(11n^2 - 9n\right)$	1,13,36, 70, 115, 171, 238, 316, 405, ...
Četrnaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(12n^2 - 10n\right)$	1,14,39,76,125,186,259,344,441, ...
Petnaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(13n^2 - 11n\right)$	1,15,42,82,135,201,280,372,477,...
Šesnaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(14n^2 - 12n\right)$	1,16,48,88,145,216,301,400,513, ...
Sedamnaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(15n^2 - 13n\right)$	1,17,48,94,155,231,322,428,549, ...
Osamnaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(16n^2 - 14n\right)$	1,18,51,100,165,246,343,456,585, ...
Devetnaesterokutni	$\frac{1}{2}\left(17n^2 - 15n\right)$	1,19,54,106,175,261,364,484,621, ...
Dvadeseterokutni	$\frac{1}{2}\left(18n^2 - 16n\right)$	1,20,57,112,185,276,385,512,657, ...

Tablica 1.1: $P_k(n), k \leq 20$

Ako se prouči tablica 1.1, može se uočiti da su neki brojevi multimnogokutni, odnosno, mnogokutni su na više načina. Na slici 1.27 je prikazan broj 36 koji je istodobno trokutan i kvadratan.



Slika 1.27: Broj 36 prikazan u obliku trokuta i kvadrata

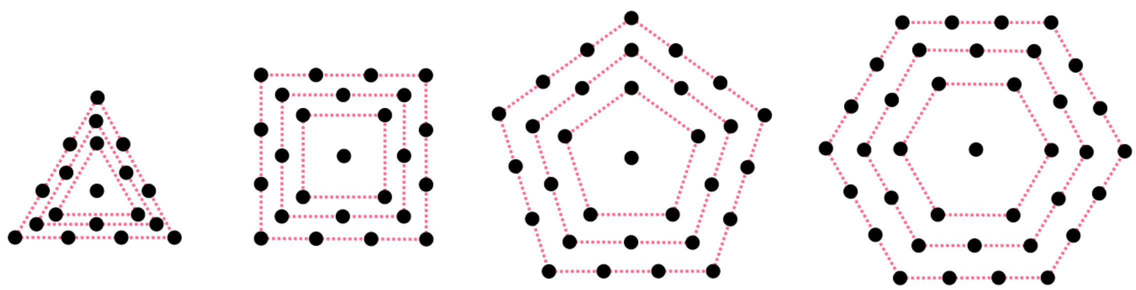
Osim dosad spomenutih mnogokutnih brojeva, postoji još nekoliko vrsta mnogokutnih brojeva koji se mogu reprezentirati u ravnini pomoću točaka (ili nekih drugih likova). Na idućim stranicama opisane su tri vrste takvih brojeva: centralni, pravokutni i trapezni brojevi.

Poglavlje 2

Centralni mnogokutni brojevi

Za razliku od dosad opisanih mnogokutnih brojeva, centralni mnogokutni brojevi su složenija skupina brojeva. To su brojevi koji se geometrijski mogu prikazati točkama ili čavlićima raspoređenim u ravnini, na način da se oko jedne centralne točke (čavlića) grade mnogokuti s konstantnim brojem stranica. Drugim riječima, za fiksirani broj strane k svaki idući omotač centralnog $k-$mnogokutnog broja ima k točaka (čavlića) više nego prethodni omotač (jer dodajemo po jednu točku, odnosno čavlić na svaku stranu). Označimo s $CP_k(n)$ $n-$ti centralni $k-$mnogokutni broj.

Razlikujemo centralne trokutne, kvadratne, peterokutne, i ostale mnogokutne brojeve. Na slici 2.1 su prikazana prva četiri centralna mnogokutna broja.



Slika 2.1: Centralni trokutni, kvadratni, peterokutni i šesterokutni mnogokutni brojevi

Teorem 2.0.1. *Neka su n i k prirodni brojevi, $n \geq 1, k \geq 3$. $n-$ti centralni $k-$mnogokutni broj $CP_k(n)$ definiramo kao sumu prvih n elemenata niza $1, k, 2k, 3k, 4k, \ldots$. Vrijedi:*

$$CP_k(n) = \frac{kn^2 - kn + 2}{2}. \tag{2.1}$$

Propozicija 2.0.2. *Niz centralnih k−mnogokutnih brojeva zadovoljava rekurziju:*

$$CP_k(n+1) = CP_k(n) + kn, CP_k(1) = 1.$$

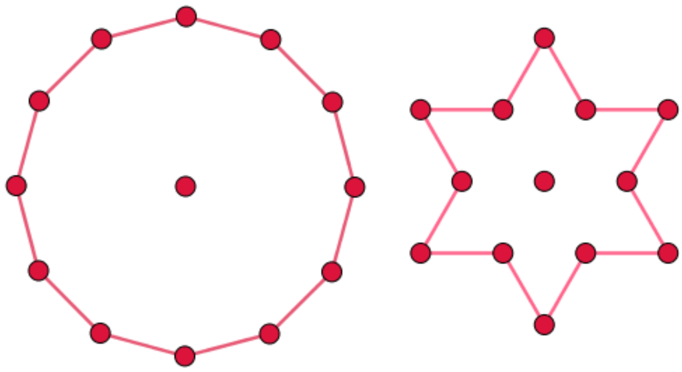
U tablici 2.1 je prikazano prvih 20 centralnih mnogokutnih brojeva. Redom su navedene oznake mnogokutnih brojeva, pripadna opća formula za određivanje $n-$tog člana, te prvih nekoliko članova niza.

Naziv	Formula	Pripadni niz
$CP_3(n)$	$\frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$	1,4,10,19,31,46,64,...
$CP_4(n)$	$2n^2 - 2n + 1$	1,5,13,25,41,61,85,...
$CP_5(n)$	$\frac{1}{2}(5n^2 - 5n + 2)$	1,6,16,31,51,76,106,...
$CP_6(n)$	$3n^2 - 3n + 1$	1,7,19,37,61,91,127,...
$CP_7(n)$	$\frac{1}{2}(7n^2 - 7n + 2)$	1,8,22,43,71,106,148,...
$CP_8(n)$	$4n^2 - 4n + 1$	1,9,25,49,81,121,169,...
$CP_9(n)$	$\frac{1}{2}(9n^2 - 9n + 2)$	1,10,28,55,91,136,190,...
$CP_{10}(n)$	$5n^2 - 5n + 1$	1,11,31,61,101,151,211,...
$CP_{11}(n)$	$\frac{1}{2}(11n^2 - 11n + 2)$	1,12,34,67,111,166,232,...
$CP_{12}(n)$	$6n^2 - 6n + 1$	1,13,37,73,121,181,253,...
$CP_{13}(n)$	$\frac{1}{2}(13n^2 - 13n + 2)$	1,14,40,79,131,196,274,...
$CP_{14}(n)$	$7n^2 - 7n + 1$	1,15,43,85,141,211,295,...
$CP_{15}(n)$	$\frac{1}{2}(15n^2 - 15n + 2)$	1,16,46,91,151,226,316,...
$CP_{16}(n)$	$8n^2 - 8n + 1$	1,17,49,97,161,241,337,...
$CP_{17}(n)$	$\frac{1}{2}(17n^2 - 17n + 2)$	1,18,52,103,171,256,358,...
$CP_{18}(n)$	$9n^2 - 9n + 1$	1,19,55,109,181,271,379,...
$CP_{19}(n)$	$\frac{1}{2}(19n^2 - 19n + 2)$	1,20,58,115,191,286,400,...
$CP_{20}(n)$	$10n^2 - 10n + 1$	1,21,61,121,201,301,421,...

Tablica 2.1: $CP_k(n), k \leq 20$

2.1 Zvjezdasti brojevi

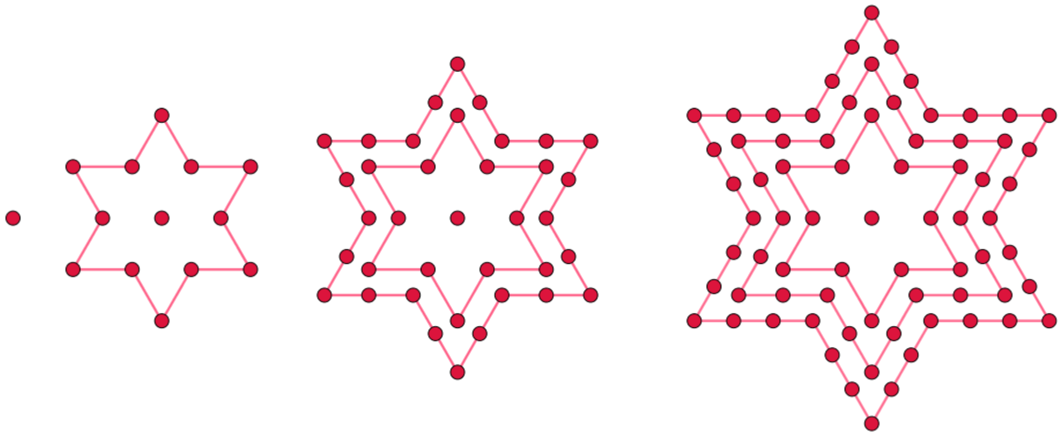
Ukoliko se točke (čavlići) rasporede u ravnini oko jedne centralne točke u obliku zvijezde, dobivamo zvjezdaste brojeve. Na taj se način, oko jedne centralne točke grade nekonveksni mnogokuti s konstantnim brojem stranica. U literaturi se najčešće zvjezdastim brojevima smatraju oni brojevi koji se mogu prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku šesterokrake zvijezde. Tada je $n-$ti zvjezdasti broj jednak $n-$tom centralnom dvanaesterokutnom broju, ali s drugačije raspoređenim točkama u ravnini (vidi sliku 2.2). Općenito, zvijezde mogu imati m krakova, te je tada $n-$ti zvjezdasti broj jednak $n-$tom centralnom $2m-$terokutnom broju.



Slika 2.2: Dva načina geometrijskog prikaza centralnog dvanaesterokutnog broja 13

Slijedi primjer zadatka u kojem učenici otkrivaju opću formulu za $n-$ti centralni dvanaesterokutni mnogokutni broj (šesterokraka zvijezda).

Zadatak 2.1.1. *Zvjezdasti brojevi su brojevi čavlića (vidi sliku 2.3) potrebnih kako bi se napravio rub zvijezde i njeno središte. Neka je prva zvijezda predstavljena točkom, a za konstrukciju ruba druge zvijezde oko njenog središta potrebno je* 12 *čavlića. Koliko je čavlića potrebno za konstrukciju ruba treće,četvrte, ..., $n-$te zvijezde? Koliko ukupno čavlića treba za konstrukciju popunjene zvijezde (zvijezde sa rubom i unutrašnjosti)? Napomena: Prikazanim zvijezdama predstavljeni su centralni dvanaesterokutni brojevi.*



Slika 2.3: Centralni dvanaesterokutni brojevi

Rješenje. Zadatak se može riješiti na više načina. Budući da je dan geometrijski prikaz prva četiri centralna dvanaesterokutna broja, učenici jednostavno mogu prebrojiti ukupan broj čavlića potrebnih za konstrukciju pojedine zvijezde. Označimo s $CP_{12}(n)$ $n-$ti centralni dvanaesterokutni broj koji odgovara broju čavlića potrebnih za konstrukciju $n-$te „popunjene“zvijezde. Prebrojavanjem ukupnog broja čavlića (točaka) u danim zvijezdama dobivamo:

$$\begin{aligned}
CP_{12}(1) &= 1\\
CP_{12}(2) &= 1 + 12 = 13\\
CP_{12}(3) &= 1 + 12 + 24 = 37\\
CP_{12}(4) &= 1 + 12 + 24 + 36 = 73.
\end{aligned}$$

Možemo uočiti da se broj 12 pojavljuje u svakom koraku, te dodatnim raspisivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
CP_{12}(1) &= 1 + 0 \cdot 12 \\
CP_{12}(2) &= 1 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 12 \\
CP_{12}(3) &= 1 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 24 \\
CP_{12}(4) &= 1 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 36 \\
&= 1 + [(1-1) \cdot 12 + (2-1) \cdot 12 + (3-1) \cdot 12 + (4-1) \cdot 12] .
\end{aligned}$$

Ovakvim načinom zapisivanja možemo zaključiti da je $n-$ti centralni dvanaesterokutni broj oblika:

$$\begin{aligned}
CP_{12}(n) &= 1 + [0 \cdot 12 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 12 + \cdots + (n-1) \cdot 12] \\
&= 1 + 12 \cdot [0 + 1 + 2 + \cdots (n-1)] .
\end{aligned}$$

Faktor koji množi broj 12 jednak je sumi prvih $(n-1)$ prirodnih brojeva, pa slijedi:

$$\begin{aligned}
CP_{12}(n) &= 1 + 12 \cdot [1 + 2 + \cdots (n-1)] \\
&= 1 + 12 \cdot \frac{(n-1)\,[(n-1)+1]}{2} \\
&= 1 + 12 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, opća formula za određivanje $n-$tog centralnog dvanaesterokutnog broja glasi:

$$CP_{12}(n) = 1 + 12 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} = 1 + 6\,(n-1)\,n, \tag{2.2}$$

a to je ujedno ukupan broj čavlića potrebnih za konstrukciju popunjene zvijezde.

Važno je s učenicima raspraviti zašto se broj 12 pojavljuje u općoj formuli i kako je on povezan s prikazanim zvijezdama. Naime, na slikama su prikazane šesterokrake zvijezde. Svaka zvijezda omeđena je s 12 dužina, a novu zvijezdu gradimo tako da dodajemo po jedan čavlić na svaku stranu. Dakle, broj čavlića je u svakom koraku za dvanaest veći nego u prethodnom, odnosno za konstrukciju ruba zvijezde u svakom koraku je potrebno dvanaest čavlića više nego u prethodnom. Iz toga slijedi da su za konstrukciju ruba treće zvijezde potrebna 24 čavlića, za konstrukciju ruba četvrte zvijezde 36 čavlića, odnosno za konstrukciju ruba $n-$te zvijezde potrebno je $12\,(n-1)$ čavlića. □

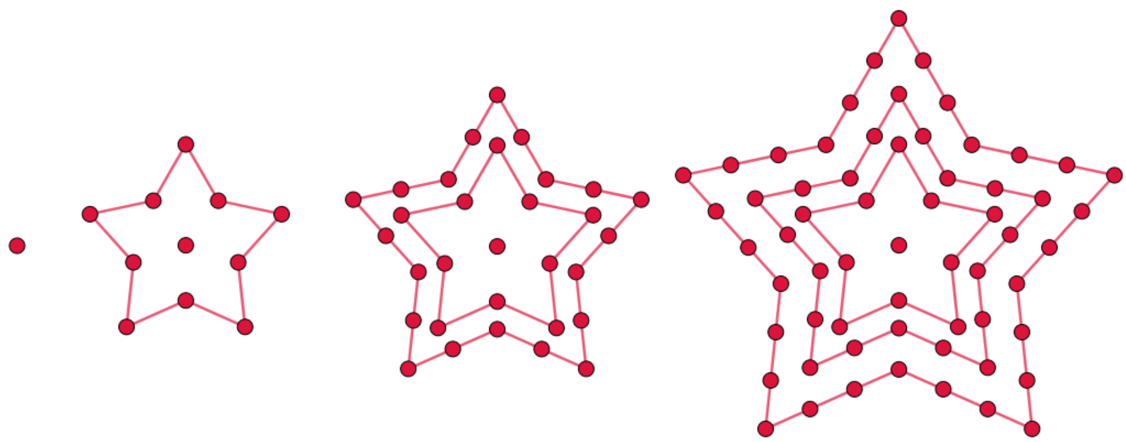
Promotrimo sada općeniti slučaj, kada zvijezda ima m krakova. Prethodno promatrane zvijezde bile su šesterokrake, omeđene s ukupno $2 \cdot 6 = 12$ dužina. Analogno, $m-$terokrake zvijezde omeđene su s $2 \cdot m = 2m$ dužina. Neka je $CP_{2m}(n)$ $n-$ti zvjezdasti broj. Tada je, prema uzoru na formulu (2.2), opći izraz oblika:

$$CP_{2m}(n) = 1 + 2m \cdot [1 + 2 + \cdots (n-1)] = 1 + 2m \cdot \frac{(n-1)\,n}{2}. \tag{2.3}$$

Promotrimo vrijedi li formula (2.3) za peterokrake zvijezde, prikazane na slici 2.4. Možemo zaključiti, po uzoru na prethodno promatrane zvijezde, da je peterokraka zvijezda omeđena s $2 \cdot 5 = 10$ dužina, te da se radi o centralnim deseterokutnim brojevima. Imamo:

$$\begin{aligned}
CP_{10}(1) &= 1 + 0 \cdot 10 = 1\\
CP_{10}(2) &= 1 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 11\\
CP_{10}(3) &= 1 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 31\\
CP_{10}(4) &= 1 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 61.
\end{aligned}$$

Dakle, formula (2.3) zaista vrijedi, te smo dobili prva četiri centralna deseterokutna broja.



Slika 2.4: Prva četiri centralna deseterokutna broja

Poglavlje 3

Pravokutni i trapezni brojevi

3.1 Pravokutni brojevi

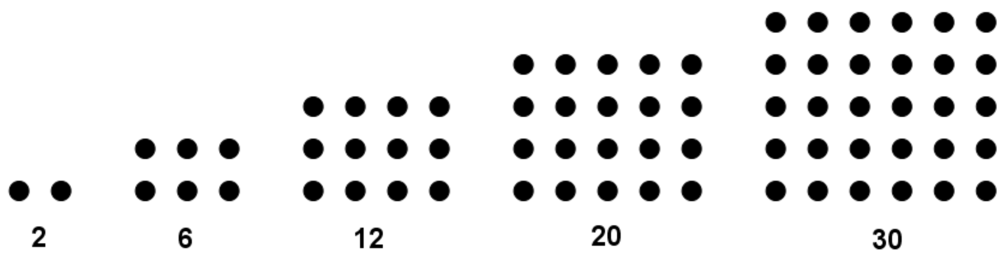
Brojevi koji se geometrijski mogu prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku pravokutnika sa stranicama duljina n i $n-1$, nazivaju se pravokutni brojevi. Pravokutni brojevi tvore niz:

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 \dots$$

Označimo s $O(n)$ $n-$ti pravokutni broj. Još su Pitagorejci otkrili da je zbroj prvih n parnih brojeva pravokutni broj, odnosno da se pravokutni brojevi mogu zapisati u obliku:

$$O(n) = 2 + 4 + \cdots + 2n = n\,(n+1)\,. \tag{3.1}$$

Ako se krene od broja 2, dodavanjem uzastopnih parnih brojeva: $4, 6, 8, 10$, dobiju se pravokutni brojevi $6, 12, 20, 30$, kao što je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1: Prvih pet pravokutnih brojeva

Postoji veza između trokutnih i pravokutnih brojeva, dokazana u idućem zadatku.

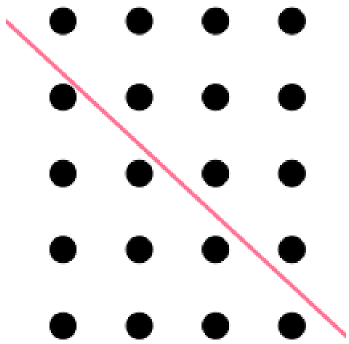
Zadatak 3.1.1. *Dokažite da je pravokutni broj dvostruki trokutni broj, odnosno da vrijedi:*

$$O(n) = 2P_3(n). \tag{3.2}$$

Rješenje. Raspišimo jednakost (3.2) pomoću općih formula za $n-$ti pravokutni (3.1) i $n-$ti trokutni broj (1.2):

$$\begin{aligned} 2P_3(n) &= 2 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= n\,(n+1) \\ &= O(n). \end{aligned}$$

Potpuni dokaz provodi se matematičkom indukcijom, a na slici 3.2 dan je geometrijski prikaz za $n = 4$.



Slika 3.2: Veza između trokutnog broja 10 i pravokutnog broja 20

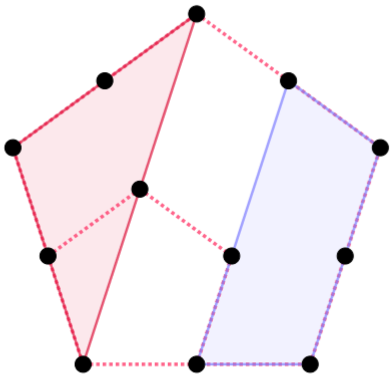
□

U sljedećem je zadatku pokazano kako se svaki peterokutni broj sastoji od trokutnog i pravokutnog broja.

Zadatak 3.1.2. *Dokažite da vrijedi:*

$$P_5(n) = O(n-1) + P_3(n). \tag{3.3}$$

Rješenje. Analogno kao prethodni zadatak, dokaz se može provesti matematičkom indukcijom ili direktnim algebarskim raspisivanjem. Na slici je dan geometrijski prikaz za $n = 3$.



Slika 3.3: Geometrijski prikaz tvrdnje (3.3) za $n = 3$

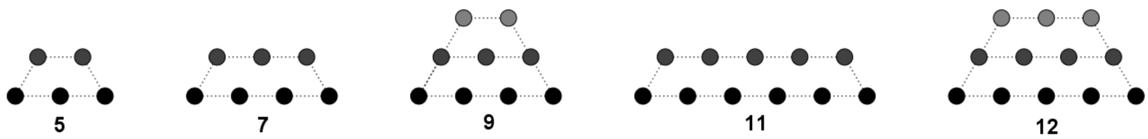
$\square$

3.2 Trapezni brojevi

Brojevi koji se geometrijski mogu prikazati točkama raspoređenim u ravnini u obliku jednakokračnog trapeza, nazivaju se trapezni brojevi. Trapezni brojevi tvore niz:

$$5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

Općenito, trapezni brojevi su oni brojevi, koji se mogu napisati kao suma najmanje dva uzastopna pozitivna cijela broja, veća od 1. Označimo s $T(n)$ $n-$ti trapezni broj. Na slici 3.4 je prikazano prvih pet trapeznih brojeva.

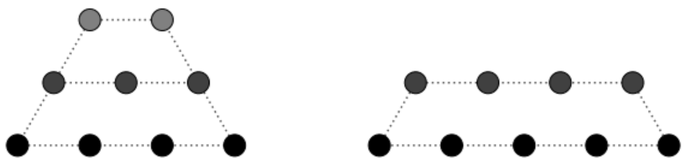


Slika 3.4: Prvih pet trapeznih brojeva

Uvjerimo se da se prvih pet trapeznih brojeva može napisati kao suma uzastopnih, nenegativnih brojeva:

$$\begin{aligned}
T(1) &= 5 = 2 + 3\\
T(2) &= 7 = 3 + 4\\
T(3) &= 9 = 2 + 3 + 4 = 4 + 5\\
T(4) &= 11 = 5 + 6\\
T(5) &= 12 = 3 + 4 + 5.
\end{aligned}$$

Uočimo, neki brojevi mogu se zapisati, pa samim time i geometrijski prikazati, na više različitih načina. Primjer je treći trapezni broj 9 (vidi sliku 3.5).



Slika 3.5: Geometrijski prikazi trapeznog broja 9

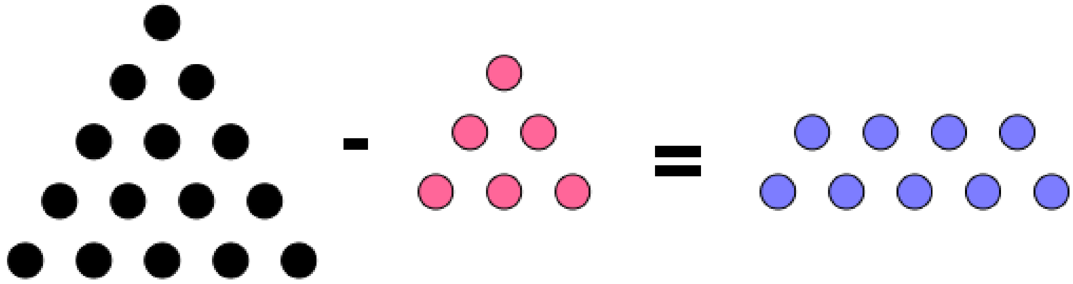
Razlika dva trokutna broja je trapezni broj, a primjer geometrijskog prikaza ove tvrdnje je u idućem zadatku.

Zadatak 3.2.1. *Dokažite da za $n > m + 1$ vrijedi:*

$$T(n) = P_3(n) - P_3(m). \tag{3.4}$$

Rješenje. Uočimo, uvjet $n > m + 1$ osigurava da je $n > m$, te da je razlika baza trokuta kojima su predstavljeni trokutni brojevi barem 2. Na slici 3.6 je dan geometrijski prikaz za $n = 5$. Uočimo, za $n = 5, m = 3$ vrijedi:

$$P_3(5) - P_3(3) = 15 - 6 = 9 = T(5).$$



Slika 3.6: Geometrijski prikaz tvrdnje (3.4) za $n = 5, m = 3$

$\square$

Poglavlje 4

Trodimenzionalni mnogokutni brojevi

Pravilnim raspoređivanjem točaka u ravnini mogu se dobiti različiti mnogokutni oblici (trokut, kvadrat, peterokut,...), te na taj način nastaju, već spomenuti, dvodimenzionalni mnogokutni brojevi. Točke se pravilno mogu rasporediti i u prostoru, u trodimenzionalna tijela (piramidu, kocku, oktaedar, dodekaedar, ikosaedar), te tako nastaju piramidalni, kockasti, oktaedralni, dodekaedralni i ikosaedralni brojevi. Na idućim stranicama opisani su piramidalni i kockasti brojevi, dani njihovi geometrijski prikazi i iskazane opće formule za određivanje $n-$tog piramidalnog, odnosno kockastog broja. Oktaedralni, dodekaedralni i ikosaedralni brojevi rijetko se spominju u literaturi zbog svoje složene konstrukcije, te ih u ovom radu nećemo opisati.

4.1 Piramidalni brojevi

Broj je piramidalan ako se može reprezentirati u prostoru pomoću točaka raspoređenih u piramidu, kojoj je baza pravilni mnogokut. S obzirom na bazu piramide, piramidalne brojeve dijelimo na trokutne, kvadratne, peterokutne, šesterokutne, ... U ovom radu opisani su tetraedalni i kvadratni piramidalni brojevi. Općenito, $n-$ti $k-$piramidalni broj, u oznaci $P_k^3(n)$, definiramo kao sumu prvih n $k-$mnogokutnih brojeva:

$$P_k^3(n) = P_k(1) + P_k(2) + \cdots + P_k(n).$$

Slijede rekurzivna relacija i opća formula za $n-$ti $k-$mnogokutni piramidalni broj.

Propozicija 4.1.1. *Neka su n i k prirodni brojevi, $n \geq 2, k \geq 3$. Za $n-$ti $k-$mnogokutni piramidalni broj vrijedi formula:*

$$P_k^3(n) = \frac{n\,(n+1)\,[(k-2)\,n - k + 5]}{6}. \tag{4.1}$$

Propozicija 4.1.2. *Niz k−piramidalnih brojeva zadovoljava rekurziju:*

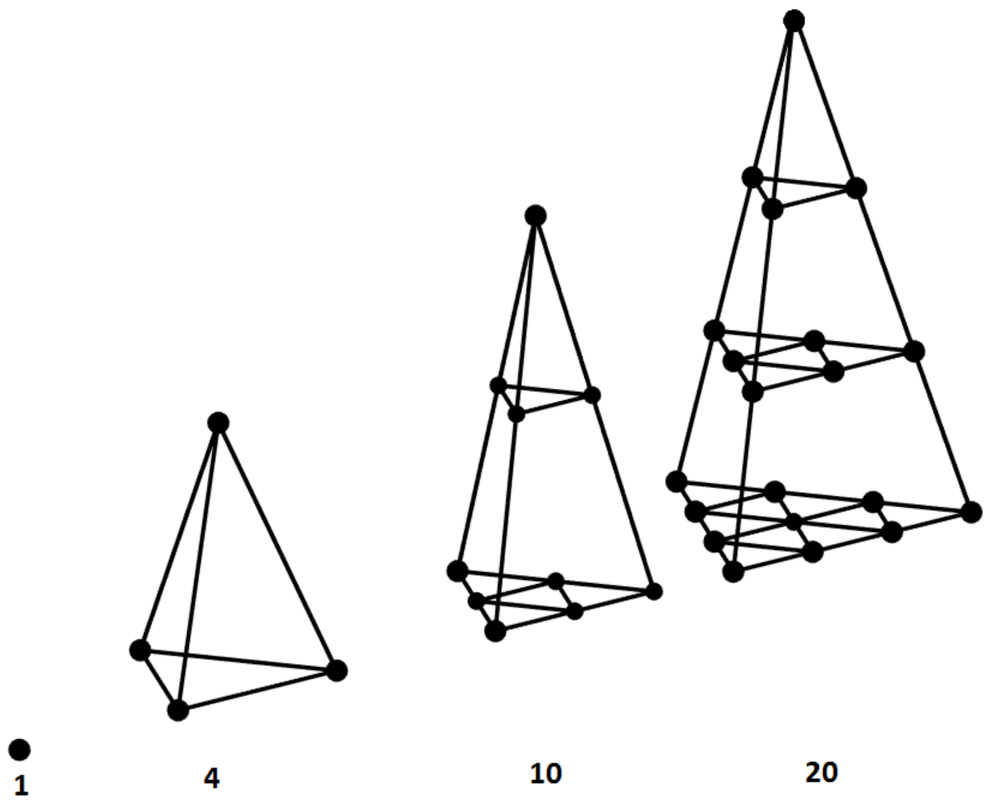
$$P_k^3(n) = P_k^3(n-1) + P_k(n), P_k^3(1) = 1.$$

2.1.1 Tetraedalni brojevi

Piramidalni brojevi koji se mogu prikazati pomoću točaka raspoređenih u tetraedar (piramidu kojoj je baza jednakostranični trokut) zovu se trokutni piramidalni brojevi, ili kraće, tetraedalni. Niz prvih nekoliko tetraedalnih brojeva glasi:

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, \ldots$$

Na slici 4.1 prikazana su prva četiri tetraedalna broja. U literaturi se katkad tetraedalni brojevi nazivaju i trodimenzionalni trokutni brojevi.



Slika 4.1: Prva četiri tetraedalna broja

Označimo s $P_3^3(n)$ $n-$ti tetraedalni broj. Sustavnim raspisivanjem možemo se uvjeriti da je on jednak sumi prvih n trokutnih brojeva:

$$
\begin{aligned}
P_3^3(1) &= 1\\
P_3^3(2) &= 4 = 1 + 3 = P_3(1) + P_3(2)\\
P_3^3(3) &= 10 = 1 + 3 + 6 = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3)\\
P_3^3(4) &= 20 = 1 + 3 + 6 + 10 = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + P_3(4)\\
&\vdots\\
P_3^3(n) &= P_3(1) + P_3(2) + \cdots + P_3(n).
\end{aligned}
$$

Opća formula za određivanje $n-$tog tetraedalnog broja dobije se primjenom formule (4.1) za $k = 3$:

$$P_3^3(n) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}.$$

Opišimo sada kvadratne piramidalne brojeve.

2.1.2 Kvadratni piramidalni brojevi

Kvadratni piramidalni brojevi su piramidalni brojevi koji se geometrijski mogu prikazati pomoću točaka raspoređenih u piramidu kojoj je baza kvadrat. Prvih nekoliko kvadratnih piramidalnih brojeva tvori niz:

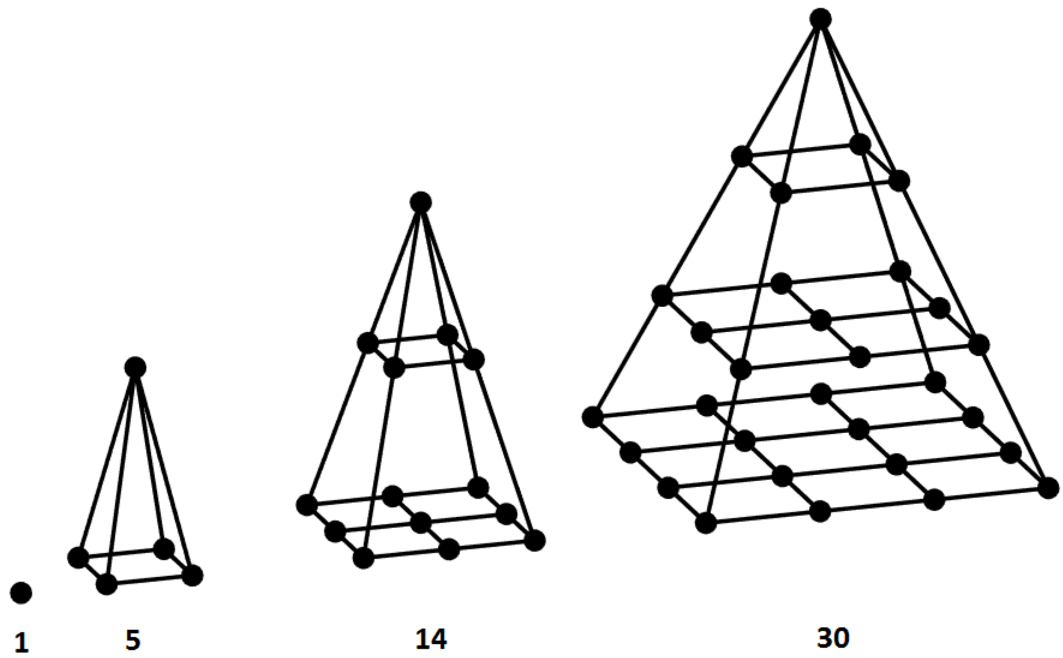
$$1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, \ldots$$

Na slici 4.2 prikazana su prva četiri kvadratna piramidalna broja.

Suma prvih n kvadratnih brojeva jednaka je $n-$tom kvadratnom piramidalnom broju, koji je oblika:

$$P_4^3(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \tag{4.2}$$

Uočimo, opću formulu (4.2) za $n-$ti kvadratni piramidalni broj dobili smo primjenom formule (4.1) za $k = 4$.



Slika 4.2: Prva četiri kvadratna piramidalna broja

4.2 Kockasti brojevi

Kockasti ili kubni brojevi su brojevi koji se geometrijski mogu prikazati slaganjem točaka u kocku. Niz prvih nekoliko kockastih brojeva je:

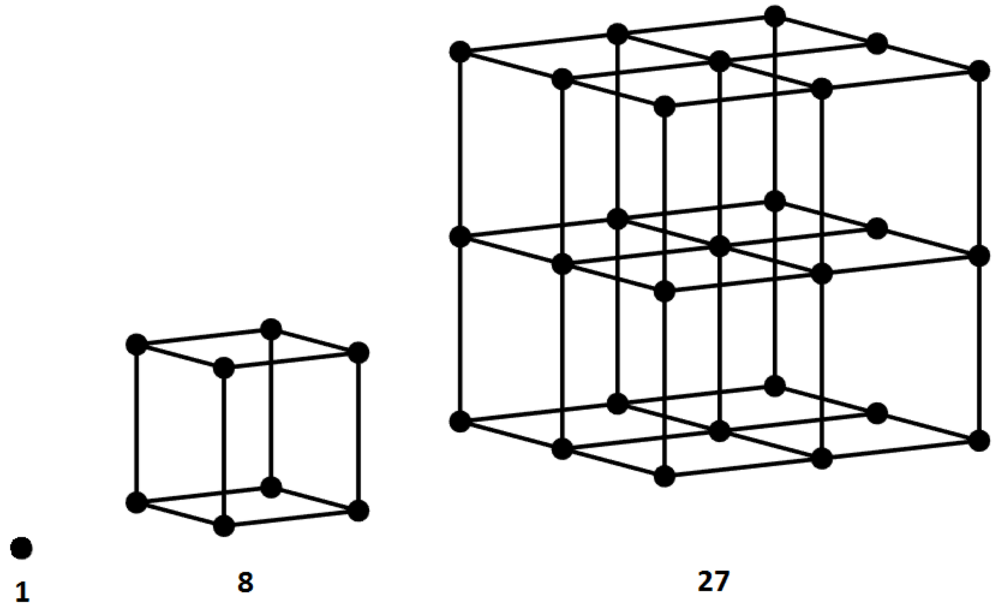
$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512\ldots,$$

a na slici 4.3 su prikazana prva tri kockasta broja. Označimo s $C(n)$ $n-$ti kockasti broj. Iz samog naziva (kubni) može se zaključiti da je $n-$ti kubni (kockasti) broj kub broja n, odnosno da vrijedi:

$$C(n) = n^3.$$

Propozicija 4.2.1. *Niz kockastih brojeva zadovoljava rekurziju:*

$$C(n+1) = C(n) + 3n^2 + 3n + 1, C(1) = 1.$$



Slika 4.3: Prva tri kockasta broja

Poglavlje 5

Učeničke aktivnosti

5.1 Algebarske veze kod mnogokutnih brojeva i njihov geometrijski prikaz

Aktivnost „Trokutni brojevi"

Cilj aktivnosti: Učenici će utvrditi rekurzivnu relaciju za niz trokutnih brojeva algebarski i geometrijski, te izvesti opću formulu na $n-$ti trokutni broj metodom razlika.

Oblik rada: diferencirana nastava, rad u paru.

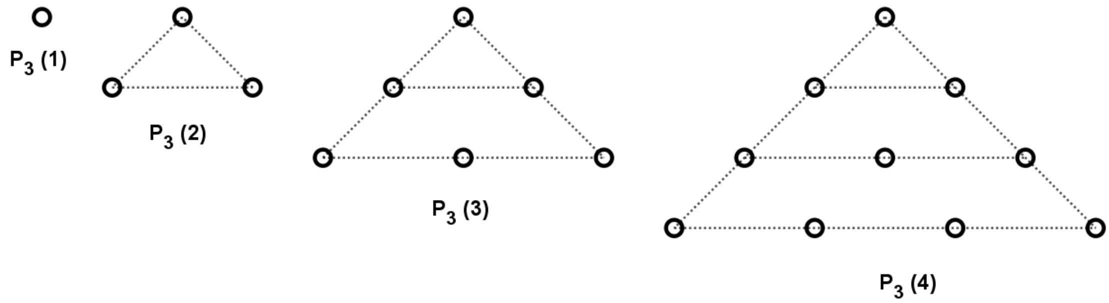
Nastavna metoda:
- prema izvorima znanja: vizualna metoda, metoda dijaloga,
- prema oblicima zaključivanja: heuristička metoda, metoda analogije.

Potrebni materijal: Nastavni listić sa zadacima za svakog učenika.

Tijek aktivnosti: Nastavnik učenike dijeli u parove, te svakom učeniku daje nastavni listić sa zadacima. Učenici rješavaju zadatke s nastavnog listića i u paru komentiraju svoje ideje i rješenja. Nakon nekog vremena, nastavnik s učenicima komentira rješenja zadataka i kako se sve može doći do njih.

Nastavni listić:

Trokutni brojevi su brojevi koji se geometrijski mogu predočiti točkama raspoređenim u ravnini u obliku trokuta. Na slici su dani geometrijski prikazi prva četiri trokutna broja. Uočite, jedna točka predstavlja prvi trokutni broj 1, tri točke drugi trokutni broj 3, itd. Označimo s $P_3(n)$ $n-$ti trokutni broj.



Zadatak 1. Obojite nove elemente (točke) na svakom geometrijskom prikazu drugom bojom, te ispunite tablicu.

broj točaka u pojedinom redu	1. red	2. red	3. red	4. red	ukupni broj točaka
$P_3(1)$					
$P_3(2)$					
$P_3(3)$					
$P_3(4)$					

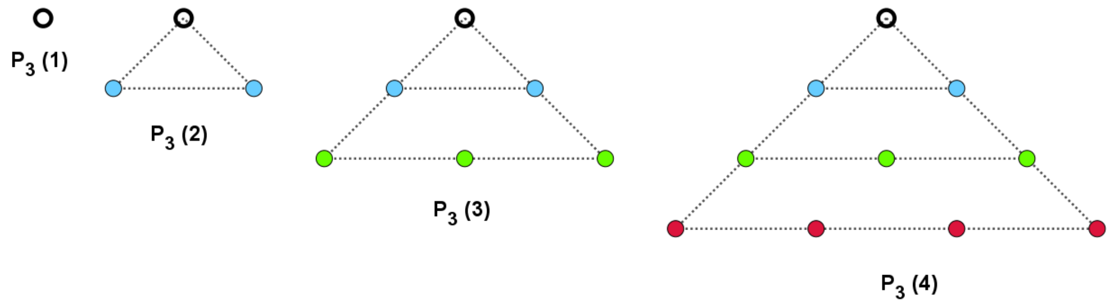
1. Koji niz tvore trokutni brojevi?
2. Odredite peti trokutni broj $P_3(5)$. Prikažite ga geometrijski.
3. Proučite posljednji stupac tablice, te pomoću njega pokušajte utvrditi rekurzivnu formulu koja vrijedi za niz trokutnih brojeva.

Zadatak 2. Ispunite tablicu. Što uočavate?

<table>
<tr><td>trokutni brojevi</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>prve razlike</td><td colspan="6">2</td></tr>
<tr><td>druge razlike</td><td colspan="6"></td></tr>
</table>

1. Metodom razlika izvedite opću formulu za $n-$ti trokutni broj.
2. Je li broj 190 trokutan? Obrazložite.

Nastavni listić - rješenja:



Zadatak 1.

broj točaka u pojedinom redu	1. red	2. red	3. red	4. red	ukupni broj točaka
$P_3(1)$	1				1
$P_3(2)$	1	2			$1+2=3$
$P_3(3)$	1	2	3		$1+2+3=6$
$P_3(4)$	1	2	3	4	$1+2+3+4=10$

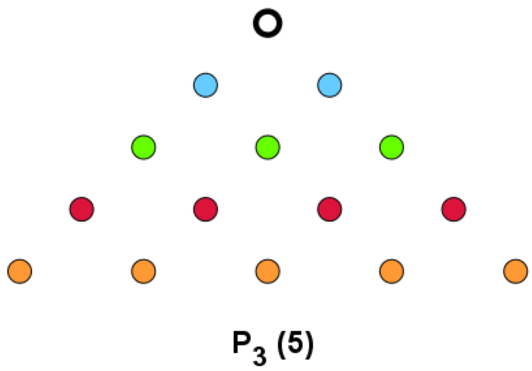
1. Iz posljednjeg stupca tablice može se uočiti da trokutni brojevi tvore niz:

$$1, 3, 6, 10, \dots$$

2. Peti trokutni broj $P_3(5)$ može se odrediti algebarski i geometrijski. Učenici mogu zaključiti pomoću tablice da će peti trokutni broj biti suma prvih pet prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Također, promatrajući dane geometrijske prikaze trokutnih brojeva, učenici mogu uočiti kako će geometrijski prikaz petog trokutnog broja (vidi sliku 5.1) dobiti dodavanjem jednog reda s pet točaka na geometrijski prikaz četvrtog trokutnog broja. Tada mogu jednostavno prebrojiti ukupni broj točaka i zaključiti kako je peti trokutni broj jednak $P_3(5) = 15$.



Slika 5.1: Geometrijski prikaz petog trokutnog broja

3. Općenito, rekurzivne formule su formule kojima se članovi niza zadaju pomoću već prije definiranih članova. Zapišimo prva četiri trokutna broja pomoću prethodnih članova niza:

$$\begin{aligned}
P_3(1) &= 1\\
P_3(2) &= 1+2\\
P_3(3) &= 3+3=6\\
P_3(4) &= 6+4=10\\
&\vdots\\
P_3(n) &= P_3(n-1)+n.
\end{aligned}$$

Na taj način dobivamo da rekurzivna formula za niz trokutnih brojeva glasi:

$$P_3(n) = P_3(n-1) + n, P_3(1) = 1.$$

Do istog zaključka učenici su mogli doći promatranjem geometrijskih prikaza trokutnih brojeva. Naime, u $n-$tom koraku dodajemo n novih točaka na geometrijski prikaz broja iz $n-1-$og koraka. Dodatno, učenici promatranjem posljednjeg stupca tablice mogu uočiti kako je suma prvih n prirodnih brojeva jednaka $n-$tom trokutnom broju, odnosno

$$P_3(n) = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Zadatak 2. Ispunjena tablica:

trokutni brojevi	1		3		6		10		15		21
prve razlike		2		3		4		5		6	
druge razlike			1		1		1		1		

Može se uočiti kako je niz drugih razlika konstantan, pa slijedi da je formula za niz trokutnih brojeva kvadratnog oblika. Neka je $P_3(n) = an^2 + bn + c$. Kod metode razlika vrijedi da je dvostruki koeficijent a jednak konstanti drugih razlika. Slijedi:

$$2a = 1$$
$$a = \frac{1}{2}.$$

Sada imamo:

$$P_3(n) = \frac{1}{2}n^2 + bn + c. \tag{5.1}$$

Odredimo još koeficijente b i c. Primjenom dobivene jednakosti (5.1) za $n = 1$ dobivamo:

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1,$$

$$b + c = \frac{1}{2}. \tag{5.2}$$

Primjenom jednakosti (5.1) za $n = 2$ dobivamo:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3$$

$$2b + c = 1. \tag{5.3}$$

Oduzimanjem jednakosti (5.2) od jednakosti (5.3) dobivamo:

$$b = \frac{1}{2},$$

iz čega slijedi da je $c = 0$. Dakle, opća formula za niz trokutnih brojeva je:

$$P_3(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{5.4}$$

2. Trebamo provjeriti je li 190 trokutni broj. To možemo napraviti primjenom formule (5.4). Ako je 190 trokutni broj, onda treba pronaći prirodan broj n takav da vrijedi:

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 190. \tag{5.5}$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe (5.5) dobivamo da je 190 devetnaesti trokutni broj, odnosno $P_3(19) = 190$.

Aktivnost „Jabuke"

Cilj aktivnosti: Učenici će utvrditi vezu kvadratnih i trokutnih brojeva, te otkriti formulu za $n-$ti centralni kvadratni broj.

Oblik rada: diferencirana nastava, rad u četveročlanim skupinama.

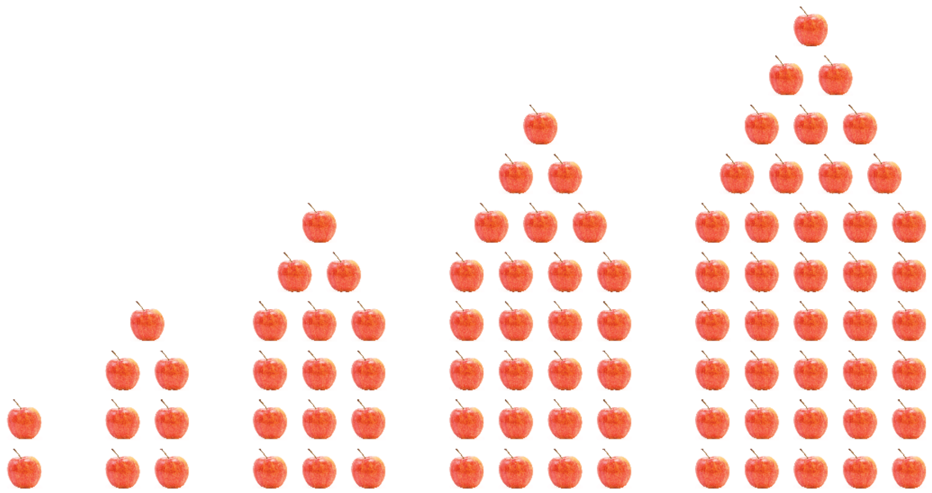
Nastavna metoda:
- prema izvorima znanja: vizualna metoda, metoda dijaloga,
- prema oblicima zaključivanja: heuristička metoda, metoda analogije.

Potrebni materijal: Nastavni listić sa zadacima za svakog učenika.

Tijek aktivnosti: Nastavnik učenike dijeli u četveročlane skupine, te svakom učeniku daje nastavni listić sa zadacima. Učenici rješavaju zadatke s nastavnog listića i u skupini komentiraju svoje ideje i rješenja. Nakon nekog vremena, nastavnik s učenicima komentira rješenja zadataka i kako se sve može doći do njih. Zadaci su otvorenog tipa i učenicima je dopušteno koristiti sve metode prilikom njihovog rješavanja.

Nastavni listić:

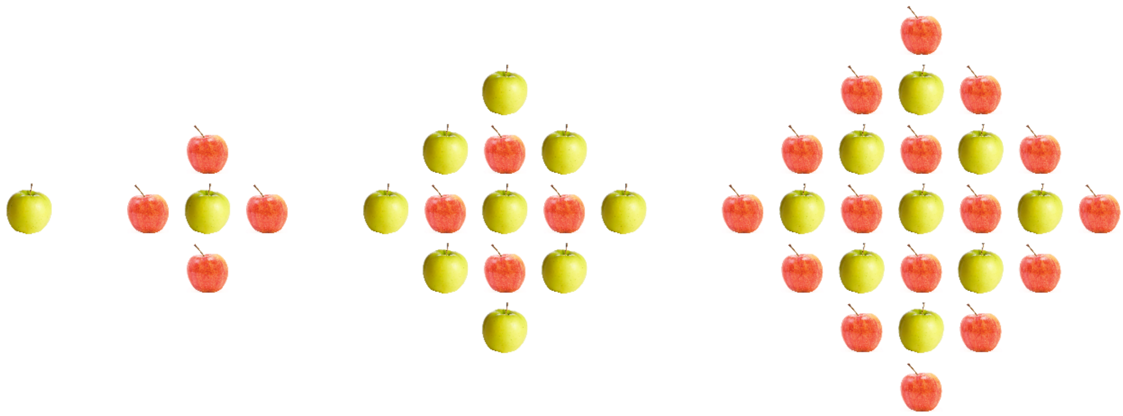
Zadatak 1. Slike jabuka su posložene u obliku kućica. Duljina temelja prve kućice je 1, druge kućice 2, itd.



1. Ako je duljina temelja neke kućice 25, koliko ukupno jabuka formira tu kućicu?

2. Ako je duljina temelja neke kućice n, koliko ukupno jabuka formira tu kućicu?

Zadatak 2. Slike jabuka su posložene u obliku tzv. grčkog križa. Prva figura grčkog križa ima jednu jabuku, druga figura je sa svake strane omeđena s 2 jabuke, a treća s po 3 jabuke, itd.



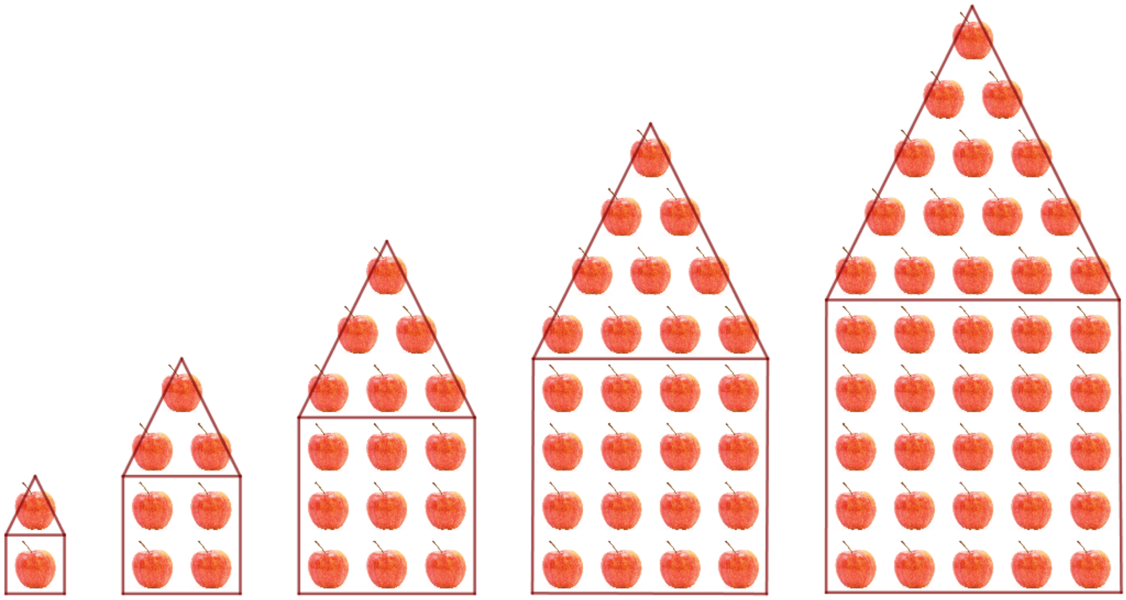
1. Ako je figura grčkog križa omeđena s 25 jabuka sa svake strane, koliko ukupno jabuka formira taj križ?

2. Ako je figura grčkog križa omeđena s n jabuka sa svake strane, koliko ukupno jabuka formira taj križ?

3. Ako je grčki križ sastavljen od ukupno 761 jabuke, s koliko je jabuka omeđen sa svake strane?

Nastavni listić - rješenja:

Budući da su zadaci otvorenog tipa, učenici ih mogu riješiti na više različitih načina. U nastavku je dan prijedlog nekoliko načina rješavanja.
Zadatak 1. 1. Možemo uočiti kako se kućica sastoji od trokutnog i kvadratnog broja (vidi sliku 5.2). Neka je $P(n)$ ukupan broj jabuka koje formiraju kućicu duljine temelja n.



Slika 5.2: Jedan način podjele kućica

Ispišimo ukupan broj jabuka u prikazanim kućicama primjenom formula za $n-$ti trokutni i $n-$ti kvadratni broj:

$$P_3(n) = \frac{1}{2}n\,(n+1)\,,$$
$$P_4(n) = n^2.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
P(1) &= 1 + 1 = 2\\
P(2) &= 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 4 + 3 = 7\\
P(3) &= 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 9 + 6 = 15\\
P(4) &= 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 16 + 10 = 26\\
P(5) &= 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 25 + 15 = 40.
\end{aligned}$$

Slijedi, ukupan broj jabuka u kućici duljine temelja 25 je:

$$P(25) = 25^2 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 = 625 + 325 = 950.$$

2. Iz prvog dijela zadatka slijedi da je formula za ukupan broj jabuka koje formiraju kućicu duljine temelja n jednaka:

$$P(n) = P_3(n) + P_4(n) = \frac{1}{2}n\,(n+1) + n^2.$$

Uočimo, ovime je otkrivena veza Dakako, ovo nije jedini način podjele kućica, te učenici mogu riješiti zadatak i na druge načine.

Zadatak 2. Pokazat ćemo dva načina rješavanja ovog zadatka: primjenom metode razlika i podjelom figure grčkog križa na više dijelova.

1.način: Metoda razlika

1. Neka je $r(n)$ niz brojeva koji čine rub grčkog križa i neka je $p(n)$ ukupan broj jabuka koje formiraju pojedini križ. Tada je:

n	$r(n)$	$p(n)$
1	0	1
2	4	5
3	8	13
4	12	25

Ispišimo sada prve i druge podijeljene razlike za svaki niz, te otkrijmo kakvog je oblika formula za pojedini niz. Za niz $r(n)$ imamo:

$r(n)$	0		4		8		12
p.p.r.		4		4		4	
d.p.r.			0		0		

Za niz $p(n)$ imamo:

$p(n)$	1		5		13		25
p.p.r.		4		8		12	
d.p.r.			$\frac{4}{2} = 2$		$\frac{4}{2} = 2$		

Formula za niz $r(n)$ je oblika $r(n) = an + b$ jer je niz prvih razlika konstantan. Koeficijent a jednak je konstanti prvih razlika, odnosno $a = 4$. Slijedi, $b = -4$, te je tada:

$$r(n) = 4n - 4.$$

Budući da je niz drugih podijeljenih razlika konstantan, formula za niz $p(n)$ kvadratnog je oblika: $p(n) = cn^2 + dn + e$. Koeficijent c jednak je konstanti drugih podijeljenih razlika, tj. $c = 2$. Slijedi, $d = -2$ i $e = 1$. Zaključujemo, za niz $p(n)$ vrijedi:

$$p(n) = 2n^2 - 2n + 1,$$

čime smo ujedno dobili rješenje podzadatka 2. Dakle, grčki križ koji je omeđen sa svake strane s 25 jabuka na rubu ima:

$$r(25) = 4 \cdot 25 - 4 = 100 - 4 = 96$$

jabuka, a ukupno ima

$$p(n) = 2 \cdot 25^2 - 2 \cdot 25 + 1 = 1250 - 50 + 1 = 1201$$

jabuku.

2.način: Podjela svakog grčkog križa

1. Možemo uočiti da se svaka figura grčkog križa sastoji od kvadrata sastavljenog od zelenih jabuka i kvadrata sastavljenog od crvenih jabuka. Slijedi, grčki križ koji je omeđen sa svake strane s 25 jabuka ima ukupno:

$$p(n) = 25^2 + 24^2 = 1201$$

jabuku, i to 625 zelenih i 576 crvenih jabuka.

2. Iz prvog podzadatka slijedi da grčki križ omeđen sa svake strane s n jabuka ima ukupno

$$p(n) = n^2 + (n-1)^2$$

jabuka.

3. Da bi našli figuru grčkog križa koja ukupno ima 761 jabuku, treba riješiti jednadžbu:

$$n^2 + (n-1)^2 = 761.$$

Osim standardnog načina rješavanja kvadratne jednadžbe, učenici mogu i „pogoditi“rješenje traženjem dva uzastopna prirodna broja čiji je zbroj kvadrata jednak 761. Konačno rješenje je $20^2 + 19^2 = 761$, te slijedi da je grčki križ omeđen s 20 jabuka sa svake strane.

5.2 Didaktički materijal: Cuisenaireovi štapići

Upotrebom različitih didaktičkih materijala uključuju se sva učenička osjetila u proces učenja. U ovom radu dat ćemo prijedlog aktivnosti koja se može izvoditi s Cuisenaireovim štapićima. Dakako, aktivnost se može provoditi i upotrebom žetona ili matematičkih pločica, na analogan način.

Cuisenaireovi štapići naziv su dobili prema belgijskom učitelju matematike i glazbe Emile-Georgesu Cuisenaireu (1891.-1975.) koji ih je osmislio. Standardni set (vidi sliku 1.1) sastoji se od deset štapića oblika kvadra sukladnih baza. Najniži od njih je oblika kocke, a svaki sljedeći dvostruke, trostruke,..., deseterostruke visine u odnosu na prvi štapić. Također, svaki štapić je obojen drugačijom bojom, što omogućuje lakše vizualno razlikovanje štapića. Ako uzmemo da je visina prvog štapića jedinične duljine, onda štapići svojim visinama, redom, predstavljaju prirodne brojeve $1, 2, \dots, 10$. U nedostatku pravih štapića, nastavnik može koristiti i papirnate trake pravokutnog oblika dimenzija $1cm \times ncm$, $n = 1, 2, \dots, 10$.

Aktivnost „Složi “

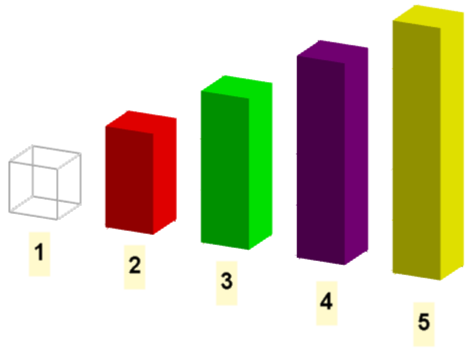
Cilj aktivnosti: Učenici će pomoću Cuisenaireovih štapića prikazivati mnogokutne brojeve na različite načine i uočavati njihova svojstva i međusobne veze.

Oblik rada: diferencirana nastava, suradničko-timski rad u skupinama.

Nastavna metoda:
- prema izvorima znanja: vizualna metoda, metoda dijaloga
- prema oblicima zaključivanja: heuristička metoda, metoda analogije.

Potrebni materijal: Komplet Cuisenaireovih štapića za svaku skupinu učenika (vidi sliku 5.3) koji se sastoji od barem 30 bijelih štapića duljine 1, 16 crvenih štapića duljine 2, 10 zelenih štapića duljine 3, 12 ljubičastih štapića duljine 4 i 8 žutih štapića duljine 5, te nastavni listić sa zadacima.

Tijek aktivnosti: Nastavnik učenike dijeli u peteročlane skupine, te svakoj skupini daje set Cuisenaireovih štapića. Svakom učeniku daje nastavni listić sa zadacima. Učenicima se daju kratke upute za rad s Cuisenaireovim štapićima. Nakon toga, učenici prvo sami pokušavaju složiti niz prvih nekoliko trokutnih brojeva, zatim kvadratnih i pravokutnih. Ukoliko učenici imaju poteškoća sa slaganjem, nastavnik im pomaže i usmjerava ih. Nakon što učenici slože nizove mnogokutnih brojeva, prelaze na kombiniranje brojeva i uočavanje svojstava.



Slika 5.3: Set Cuisenaireovih štapića

Nastavni listić:

Dobili ste set Cuisenaireovih štapića koji se sastoji od 30 štapića duljine 1, 16 štapića duljine 2, 10 štapića duljine 3, 12 štapića duljine 4 i 8 štapića duljine 5. Uočite, štapići svojim visinama predstavljaju prirodne brojeve $1, 2, 3, 4, 5$.
Napomena. Svaki prirodni broj može se prikazati upotrebom samo bijelih štapića, ali u zadacima pokušajte upotrijebiti što više štapića različite vrste (boje).

Zadatak 1. Složite pomoću Cuisenaireovih štapića niz od prva četiri trokutna broja, niz od prva četiri kvadratna broja i niz od prva četiri pravokutna broja.

Zadatak 2. Prikažite neki pravokutni broj kao sumu dva jednaka trokutna broja. Napišite matematičkim simbolima danu vezu.

Zadatak 3. Istražite vezu kvadratnih i pravokutnih brojeva pomoću Cuisenaireovih štapića. Napišite ju matematičkim simbolima.

Zadatak 4. Diofantova ili Plutarhova formula iskazuje vezu kvadratnog i trokutnog broja:

$$P_4(2n + 1) = 8P_3(n) + 1.$$

Uvjerite se pomoću štapića da formula vrijedi.

Zadatak 5. Istražite pomoću štapića što se dobije zbrajanjem dva uzastopna trokutna broja. Napišite zaključak matematičkim simbolima.

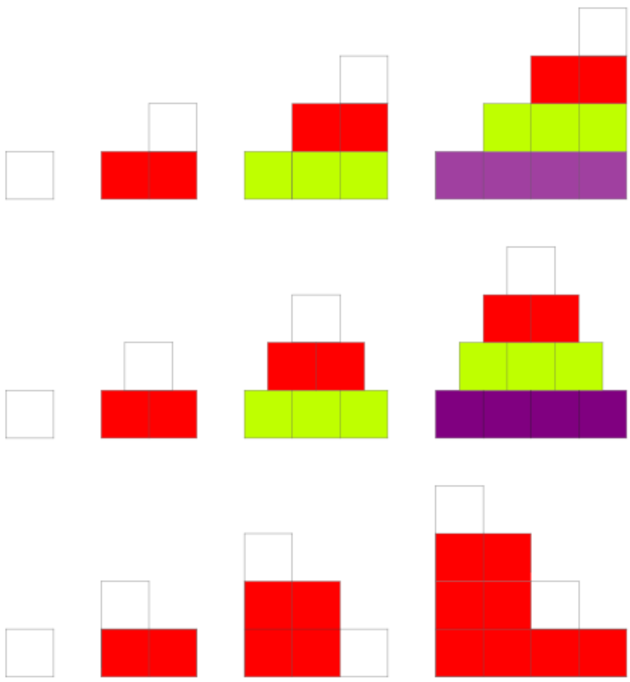
Zadatak 6. Svaki peterokutni broj može se prikazati kao suma trokutnog i pravokutnog broja:

$$P_5(n) = P_3(n) + O(n - 1).$$

Uvjerite se pomoću štapića da tvrdnja vrijedi.

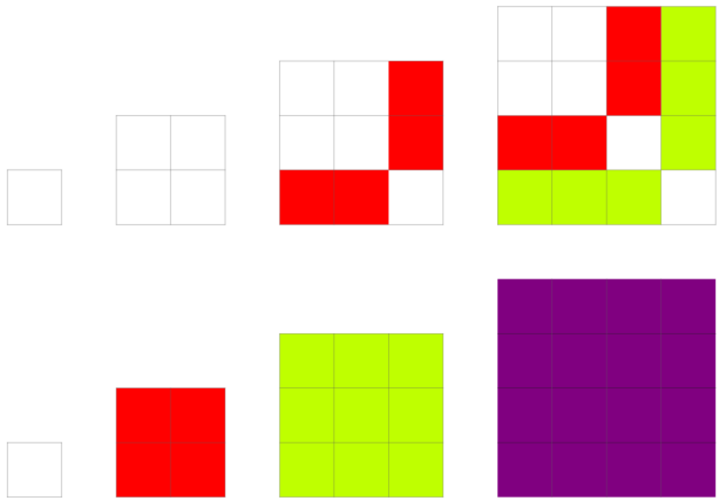
Nastavni listić - rješenja:

Zadatak 1. Niz od prva četiri trokutna broja je $1, 3, 6, 10$, a učenici ga mogu prikazati pomoću štapića na više različitih načina. Na slici 5.4 su dana tri načina. Uočimo, bijeli štapić predstavlja prvi trokutni broj 1, a ostali trokutni brojevi nemaju jedinstveni prikaz.

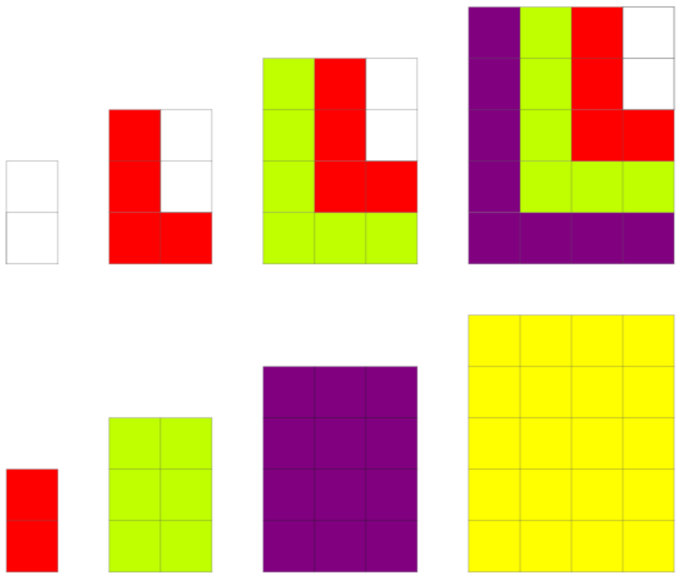


Slika 5.4: Trokutni brojevi $1, 3, 6, 10$ složeni na tri različita načina

Niz prva četiri kvadratna broja je $1, 4, 9, 16$, a na slici 5.5 su dana dva načina njegovog prikaza pomoću štapića. Kao i kod trokutnih brojeva, jedino broj 1 ima jedinstveni prikaz. Prva četiri pravokutna broja tvore niz $2, 6, 12, 20$, a na slici 5.6 su prikazana dva načina prikaza tog niza pomoću štapića.



Slika 5.5: Kvadratni brojevi $1, 4, 9, 25$ složeni na dva različita načina



Slika 5.6: Pravokutni brojevi $2, 6, 12, 20$ složeni na dva različita načina

Zadatak 2. Neka je $O(n)$ $n-$ti pravokutni broj i $P_3(n)$ $n-$ti trokutni broj. Niz prvih nekoliko pravokutnih brojeva glasi

$$2, 6, 12, 20, 30, \dots,$$

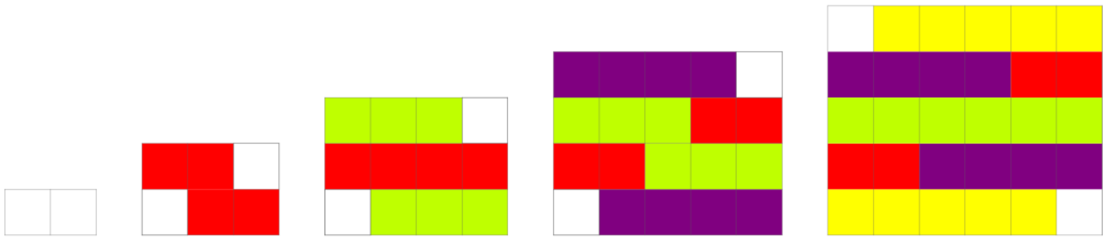
a niz prvih nekoliko trokutnih brojeva je

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

Raspisivanjem možemo uočiti da vrijedi:

$$\begin{aligned}
O(1) &= 2 = 1 + 1 = 2P_3(1)\\
O(2) &= 6 = 3 + 3 = 2P_3(2)\\
O(3) &= 12 = 6 + 6 = 2P_3(3)\\
O(4) &= 20 = 10 + 10 = 2P_3(4)\\
&\vdots\\
O(n) &= 2P_3(n).
\end{aligned}$$

Na slici 5.7 je dan jedan način prikaza utvrđene jednakosti pomoću štapića.



Slika 5.7: Veza trokutnog i pravokutnog broja

Zadatak 3. Niz prvih nekoliko kvadratnih brojeva glasi

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots,$$

a niz prvih nekoliko pravokutnih brojeva je

$$2, 6, 12, 20, 30, \ldots$$

Na slici 5.8 su dana dva različita načina na koje učenici mogu složiti Cuisenaireove štapiće da bi uočili vezu kvadratnih i pravokutnih brojeva danu formulom (5.6). Učenici mogu prvo pokušati zapisati kvadratne brojeve pomoću pravokutnih, ili obrnuto, te na taj način doći do tražene veze između brojeva. Jedan način raspisivanja je:

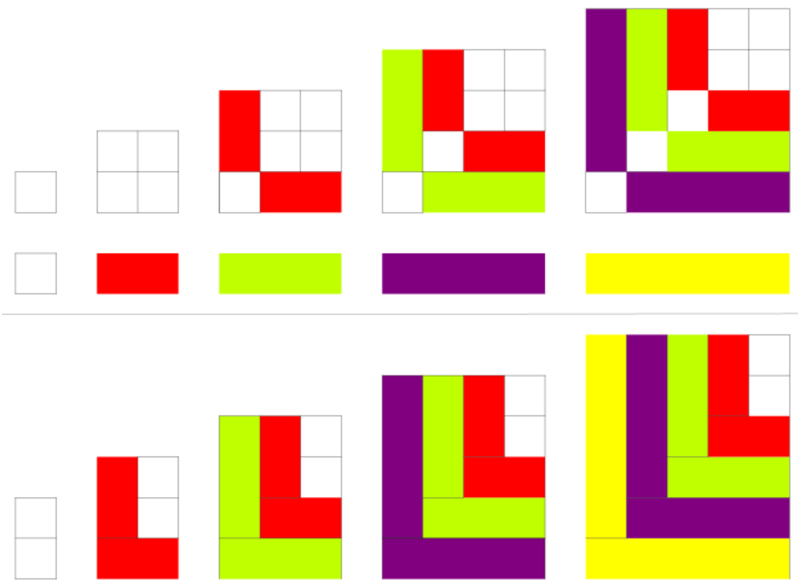
$$
\begin{aligned}
O(1) &= 2 = 1 + 1 = P_4(1) + 1 \\
O(2) &= 6 = 4 + 2 = P_4(2) + 2 \\
O(3) &= 12 = 9 + 3 = P_4(3) + 3 \\
O(4) &= 20 = 16 + 4 = P_4(4) + 4 \\
&\vdots \\
O(n) &= P_4(n) + n,
\end{aligned}
$$

te tako dobivamo da je veza kvadratnih i pravokutnih brojeva dana formulom:

$$O(n) = P_4(n) + n. \tag{5.6}$$

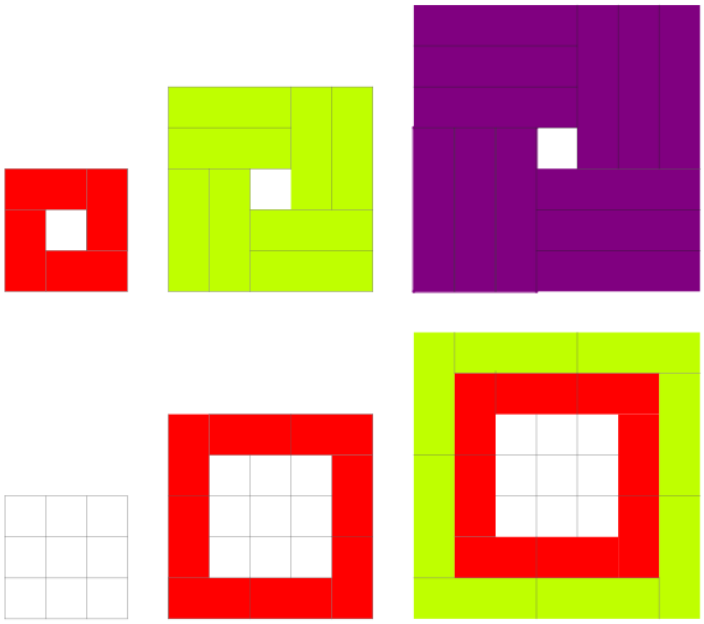
Formula (5.6) nije jedini način zapisa veze kvadratnih i pravokutnih brojeva, te učenici mogu doći i do drugačijeg zapisa, poput formule (5.7) .

$$P_4(n) = O(n-1) + n. \tag{5.7}$$



Slika 5.8: Veza kvadratnog i pravokutnog broja

Zadatak 4. Na slici 5.9 dana su dva načina prikaza Diofantove formule pomoću štapića.



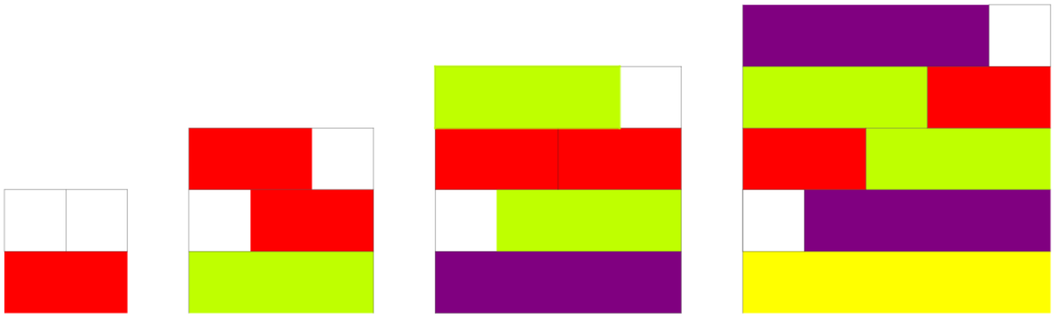
Slika 5.9: Diofantova formula - geometrijski prikaz brojeva $9, 25, 49$

Zadatak 5. Na slici 5.10 prikazan je jedan način na koji učenici mogu složiti štapiće i istražiti što se dobije zbrajanjem dva uzastopna trokutna broja. Učenici mogu i raspisivanjem doći do formule i zatim se, slaganjem štapića, uvjeriti u njenu istinitost. Raspisivanjem dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P_3(1) + P_3(2) &= 1 + 3 = 4 = P_4(2)\\
P_3(2) + P_3(3) &= 3 + 6 = 9 = P_4(3)\\
P_3(3) + P_3(4) &= 6 + 10 = 16 = P_4(4)\\
P_3(4) + P_3(5) &= 10 + 15 = 25 = P_4(5).
\end{aligned}
$$

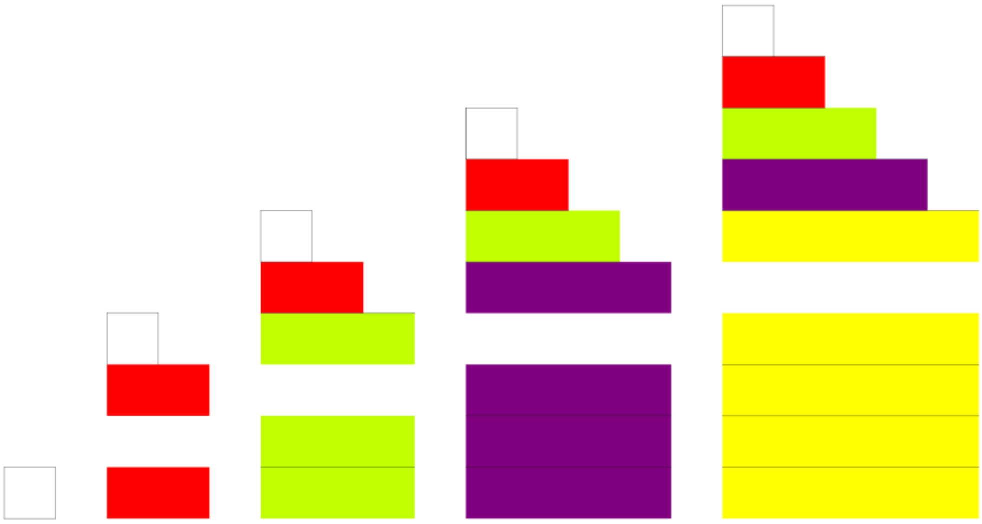
Dakle, suma dva uzastopna trokutna broja je kvadratni broj, odnosno:

$$P_3(n) + P_3(n+1) = P_4(n+1).$$



Slika 5.10: Veza uzastopnih trokutnih brojeva i kvadratnog broja

Zadatak 6. Na slici 5.11 prikazani su peterokutni brojevi $1, 5, 12, 22, 35$ kao suma odgovarajućeg trokutnog i pravokutnog broja.



Slika 5.11: Veza peterokutnog, trokutnog i pravokutnog broja

Bibliografija

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište JJ Strossmayera u Osijeku, 2007.

[2] G. Caglayan, *Cuisenaire Art: Modeling Figurate Numbers and Gnomonic Structures - Introducing Students to the Figurate Numbers*, New Jersey City University, 2018., `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/cuisenaire/art/modeling-figurate/number/sequences/and/gnomonic/structures/introducing/students/to` (kolovoz 2019.)

[3] G. Caglayan, *Cuisenaire Art: Modeling Figurate Numbers and Gnomonic Structures - Relationships Between Figurate Numbers*, New Jersey City University, 2018., `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/cuisenaire/art/modeling/figurate/numbers/and/gnomonic/structures/relationships/between/figurate` (kolovoz 2019.)

[4] G. Caglayan, *Cuisenaire Art: Modeling Figurate Numbers and Gnomonic Structures - More Polygonal Numbers*, New Jersey City University, 2018., `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/cuisenaire/art/modeling/figurate/numbers/and/gnomonic/structures/more/polygonal/numbers` (kolovoz 2019.)

[5] M. Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić, *Doprinos figurativnih brojeva razvoju vizuelno logičkog pristupa rešavanju zadataka sa brojnim nizovima*, Univerzitetska misao-časopis za nauku, kulturu i umjetnost **17** (2018), 72-85.

[6] E. Castro et al., *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*, `http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/25009/EncarnacinCastroMartnez.pdf?sequence=1&isAllowed=y` (kolovoz 2019.)

[7] E. Castro, J. F. Ruiz-Hidalgo, *Patrones en números figurados. Aplicación para la enseñanza*, `http://funes.uniandes.edu.co/13767/` (kolovoz 2019.)

[8] J. A. García Cruz, A. Martinón, *Números poligonales*, Educación Matemática **10** (1998.), 3, 103-108.

[9] B. Dakić, *Figurativni brojevi*, Miš-stručno-metodički časopis **31** (2005.), 22-23.

[10] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4 (1. dio), udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2006.

[11] E. Deza, M. M. Deza, *Figurate Numbers*, World Scientific, Singapore, 2012.

[12] I. Fundurulić, *Zvjezdasti brojevi*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **13** (2012.), 50, 50-55.

[13] S. Jitman, C. Phongthai, *On the Characterization and Enumeration of Some Generalized Trapezoidal Numbers*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2017**, (2017.), `https://www.hindawi.com/journals/ijmms/2017/4515249/` (kolovoz 2019.)

[14] A. Roldán Martínez, *Números piramidales*, `http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf` (kolovoz 2019.)

[15] *The truth about triangles and squares*, nzmaths., `https://nzmaths.co.nz/resource/truth-about-triangles-and-squares` (kolovoz 2019.)

Sažetak

Mnogokutni brojevi su prirodni brojevi koji se mogu geometrijski prikazati rasporedom odgovarajućeg broja točaka u pravilne mnogokute. U prvom poglavlju ovog rada opisano je prvih nekoliko mnogokutnih brojeva, izvedene su opće formule za $n-$ti $k-$mnogokutni broj i veze između različitih mnogokutnih brojeva. U drugom poglavlju opisani su centralni mnogokutni brojevi i spomenuti su zvjezdasti brojevi, njihova posebna skupina. U trećem poglavlju dan je opis pravokutnih i trapeznih brojeva, te su izvedene njihove veze s ostalim mnogokutnim brojevima. U sva tri poglavlja dani su geometrijski prikazi navedenih brojeva, izvedenih formula i veza.

Ukoliko točke pravilno rasporedimo u prostoru, u trodimenzionalna tijela, nastaju trodimenzionalni mnogokutni brojevi, opisani u četvrtom poglavlju. Peto poglavlje sastoji se od aktivnosti primjerenih izvođenju na nastavi. Prve dvije aktivnosti tiču se algebarskih veza kod mnogokutnih brojeva i njihovog geometrijskog prikaza. Treća aktivnost predviđena je za izvođenje pomoću didaktičkog materijala (Cuisenaireovih štapića).

Summary

Polygonal numbers are natural numbers that can be geometrically represented by arranging the corresponding number of points into regular polygons. In the first chapter of this thesis we describe the first few polygonal numbers, then derive formulas for the $n-$th $k-$gonal number and finally describe many properties of polygonal numbers. In the second chapter centered polygonal numbers are described, in particular their special subgroup, star numbers. In the third chapter we define and analyse rectangular and trapezoidal numbers and their relations to other polygonal numbers. Geometrical representations of different polygonal numbers visualizing their properties are given in all three chapters.

When putting points in a special order in space, instead of plane, one obtains space polygonal numbers, which are described in the fourth chapter. The fifth chapter consists of activities that are appropiate for teaching in school. The first two activities are concerned with algebraic connections of polygonal numbers and their geometrical representation. The third activity is intended to be performed using didactic material (Cuisenaire rods).

Životopis

Rođena sam 24. kolovoza 1995. u Karlovcu. Pohađala sam Osnovnu školu Grabrik u Karlovcu do 2010. godine. Iste godine nastavila sam obrazovanje u Gimnaziji Karlovac, opći smjer. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2014. godine, upisala sam preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2017. stekla sam akademski naziv prvostupnice edukacije matematike, te iste godine upisala diplomski studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu.