Mjere nebipartitnosti u grafovima

Nežić, Sandra

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:043910

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-23**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Sandra Nežić

MJERE NEBIPARTITNOSTI U GRAFOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Tomislav Došlić

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Mojim roditeljima, za bezuvjetnu potporu tijekom mog školovanja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Uvod u teoriju grafova **2**
1.1 Osnovni pojmovi 2
1.2 Algebarska teorija grafova 3

2 Mjere nebipartitnosti **7**
2.1 Mjera frustriranosti grafa 7
2.2 Spektar matrice susjedstva 16
2.3 Spektar normalizirane matrice susjedstva 17
2.4 Neparni ciklusi 18

3 Usporedba mjera nebipartitnosti za neke klase grafova **23**
3.1 Potpuni graf 27
3.2 Zvijezda 29
3.3 Ciklus 30
3.4 Generalizirani Petersenov graf 31

A Dodatak **32**
A.1 Mjera frustriranosti - spektar od K 33
A.2 Mjera nebipartitnosti - spektar od A 34
A.3 Mjera nebipartitnosti - spektar od N 35
A.4 Mjera nebipartitnosti - neparni ciklusi 36
A.5 Za različite klase grafova 37

Bibliografija **38**

Uvod

Mnogi sustavi koje susrećemo u stvarnom životu sastoje se od entiteta koji su međusobno povezani u parovima. Stoga je prirodno takve sustave modelirati pomoću grafa. Često se takvi grafovi sastoje od izrazito mnogo vrhova i bridova, te je vrlo teško doći do zaključaka o mreži iz same strukture grafa. Grafovi se tada zapisuju u obliku matrica, te se primjenom algebarskih metoda, najčešće iz svojstvenih vrijednosti tih matrica, dolazi do različitih zaključaka o svojstvima grafa, tj. sustava. Svojstvo koje smo promatrali u ovom radu je nebipartitnost grafa. Ako je graf bipartitan vrijedi da postoji neka karakteristika entiteta promatranog sustava koja ih prirodno razdvaja u dva disjunktna skupa tako da entiteti jednog skupa komuniciraju samo s entitetima drugog skupa. Ako u sustavu postoje entiteti koji se ne ponašaju na opisani način, već komuniciraju i s entitetima vlastitog skupa, pripadni graf neće biti bipartitan. No, nisu svi nebipartitni grafovi jednako daleko od toga da budu bipartitni. Ako je broj "buntovnih" entiteta u sustavu dovoljno mali možemo reći da će pripadni graf biti skoro bipartitan. U ovom radu promatrat ćemo mjere koje opisuju koliko je promatrani graf daleko od bipartitnog grafa.

U prvom poglavlju ovog rada navodimo neke osnovne definicije i teoreme iz teorije grafova i algebarske teorije grafova koje ćemo koristiti u ostatku rada. Nakon toga, u drugom poglavlju, uočavamo vezu između bipartitnosti grafa i strukture karakterističnih matrica grafa (matrice susjedstva, normalizirane matrice susjedstva i nenegativne Laplaceove matrice), te definiramo četiri različite mjere nebipartitnosti koristeći svojstva tih matrica. Definirane mjere govore nam koliko je promatrani graf daleko od toga da bude bipartitan. U zadnjem poglavlju, koristeći program *Mathematica*, testiramo definirane mjere na različitim grafovima i proučavamo promjenu mjera ovisno o tipu promatranog grafa.

Poglavlje 1

Uvod u teoriju grafova

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1.1. ***Graf*** *G je uređeni par skupova (V, E), gdje je $V = V(G)$ skup* ***vrhova****, a $E = E(G) \subseteq [V]^2$ skup 2-podskupova od V, koje zovemo* ***bridovi****.*

Za dva vrha $u, v \in V$ kažemo da su *susjedni* (u oznaci $u \sim v$) ako postoji brid koji ih spaja, tj. ako postoji $e = (u, v) \in E$. Tada kažemo da su vrhovi u i v *incidentni* s bridom e. Broj vrhova označavamo s $|V(G)|$ ili kraće $|V|$, a broj bridova s $|E(G)|$ ili s $|E|$. U ovom radu, promatrat ćemo grafove koji su *konačni* (sastoje se od konačno mnogo vrhova i bridova), *neusmjereni* (bridovima možemo prolaziti u oba smjera) i *jednostavni* (ne sadrže petlje ni višestruke bridove). Također, osim ako nije drukčije navedeno, podrazumijeva se da su grafovi *povezani* (svaki vrh povezan je s bilo kojim drugim vrhom, nekim nizom bridova) i *netrivijalni* (sastoje se od najmanje 3 vrha).

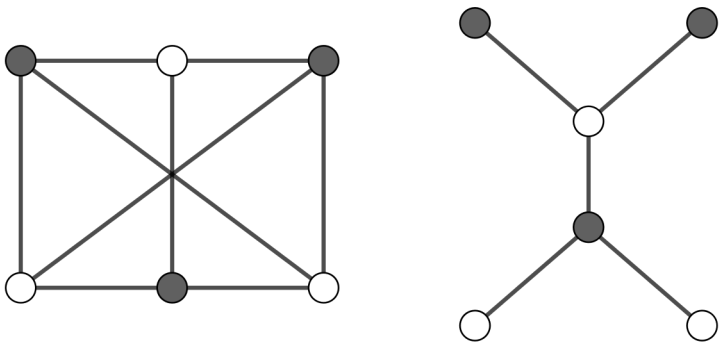
Definicija 1.1.2. ***Stupanj vrha*** *$v \in V(G)$ u grafu G je broj bridova s kojima je v incidentan. Označavamo ga s $d_G(v)$ ili kraće s $d(v)$ ako je jasno o kojem se grafu radi.*

Definicija 1.1.3. *Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je* ***bipartitan graf*** *ako se skup vrhova V može particionirati u dva skupa V_1 i V_2, tako da svaki brid iz E spaja vrh iz V_1 s vrhom iz V_2. Particiju (V_1, V_2) skupa vrhova V zovemo* ***biparticijom*** *od G.*

Definicija 1.1.4. *Bipartitan graf $G = (V, E), V = V_1 \cup V_2$ je* ***potpun bipartitni graf*** *ako je svaki vrh iz V_1 spojen sa svakim vrhom iz V_2. Ako je $|V_1| = m, |V_2| = n$, taj graf označavamo s $K_{m,n}$ ili $K_{n,m}$, te je $|V(K_{m,n})| = m + n$, $|E(K_{m,n})| = m \cdot n$.*

Primjer 1.1.5. *Dva primjera bipartitnih grafova.*

Lijevi graf na slici 1.1 je potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$.



Slika 1.1: Primjer dva bipartitna grafa

Definicija 1.1.6. ***Šetnja*** *u grafu G je niz $W := v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$ čiji članovi su naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i takvi da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, za $1 \leq i \leq k$. Broj k zove se* ***duljina šetnje****.*

Definicija 1.1.7. ***Staza*** *je šetnja u kojoj su svi bridovi $e_1, e_2, \cdots, e_k$ međusobno različiti.*

Definicija 1.1.8. ***Ciklus*** *je zatvorena staza pozitivne duljine kojoj su početni i krajnji vrh jednaki.*

Karakterizacija bipartitnih grafova pomoću ciklusa dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.1.9. *Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži cikluse neparne duljine.*

Dokaz se može pronaći u knjizi [9] na stranici 255.

1.2 Algebarska teorija grafova

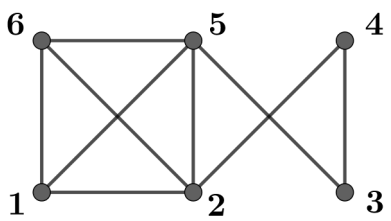
Algebarska teorija grafova je grana teorije grafova koja koristi algebarske metode za proučavanje i rješavanje problema teorije grafova. Pritom grafove najčešće zapisujemo koristeći matrice.

Definicija 1.2.1. ***Matrica susjedstva*** *grafa G je (kvadratna) $n \times n$ matrica $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova između vrhova v_i i v_j, za $i, j = 1, \cdots, n$.*

Vrijedi i obrnuto, tj. svaka matrica s navedenim svojstvima opisuje neki graf. Uočimo da će u slučaju jednostavnog grafa elementi matrice susjedstva biti samo 1 ili 0 ovisno o tome jesu li dva vrha susjedna ili nisu. Također možemo uočiti da će, zbog nepojavljivanja petlji, svi elementi glavne dijagonale biti jednaki 0. Za neusmjereni graf, matrica susjedstva je simetrična matrica, tj. vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$.

Primjer 1.2.2. *Primjer grafa i pripadne matrice susjedstva A.*

Označimo li vrhove grafa brojevima od 1 do 6 kao na slici, matrica susjedstva izgleda ovako:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo također da zbroj elemenata u pojedinom retku (ili stupcu) točno odgovara stupnju odgovarajućeg vrha.

Matricu susjedstva možemo koristiti za određivanje broja šetnji duljine k u grafu.

Teorem 1.2.3. *Neka je G graf i A pripadna matrica susjedstva. Broj šetnji duljine $k \geq 1$ između vrhova v_i i v_j u grafu G jednak je $(A^k)_{ij}$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po k. Za $k = 1$ elementi matrice A su jednaki 1 ako postoji brid između vrhova v_i i v_j. Tada je i broj šetnji duljine 1 između vrhova v_i i v_j jednak 1 pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da tvrdnja vrijedi i pokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $k + 1$. Vrijedi $A^{k+1} = A^k A$, pa je

$$(A^{k+1})_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A^k)_{il} (A)_{lj}.$$

Šetnja duljine $k+1$ između vrhova v_i i v_j sastoji se od šetnje duljine k između v_i i v_l, gdje je v_l susjed od v_j, i brida koji spaja v_l i v_j. Prema pretpostavci indukcije, broj šetnji duljine k između v_i i v_l jednak je $(A^k)_{il}$. Znamo da je u matrici A, $(A)_{lj}$ jednak 1 ako i samo ako postoji brid između v_l i v_j. Stoga, ukupan broj šetnji duljine $k + 1$ dobivamo zbrajajući umnoške $(A^k)_{il}(A)_{lj}$ za sve moguće vrhove v_l, što je i trebalo dokazati. $\square$

Još jedno svojstvo koje ćemo koristiti u daljnjem radu je činjenica da se matrica susjedstva može dijagonalizirati. Ona slijedi iz sljedećeg teorema.

Teorem 1.2.4. *Svaka simetrična matrica A ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti (brojeći njihovu višetrukost) i n međusobno okomitih svojstvenih vektora. Stoga je ona slična dijagonalnoj matrici. Dakle postoji ortogonalna matrica S i realni brojevi $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tako da je*

$$S^T A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dokaz teorema može se pronaći u knjizi [4].
Neka je A matrica susjedstva grafa G i neka su $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti i $v_1, \cdots, v_n$ pripadni svojstveni vektori matrice A. Neka je Λ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima matrice A na dijagonali, a S ortogonalna matrica čiji su stupci pripadni svojstveni vektori matrice A. Kako je matrica S ortogonalna, vrijedi $S^T S = S S^T = I$, gdje je I jedinična matrica. Tada prema teoremu 1.2.4 vrijedi

$$S^T A S = \Lambda$$

$$S S^T A S S^T = S \Lambda S^T$$

$$A = S \Lambda S^T$$

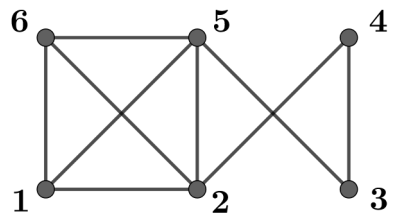
Osim matrice susjedstva, pri analizi svojstava grafa često se promatra i Laplaceova matrica.

Definicija 1.2.5. ***Laplaceova matrica*** *grafa G je (kvadratna) $n \times n$ matrica* $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(G) = [l_{i,j}]$, *gdje je*

$$l_{i,j} = \begin{cases} d(v_i), & za\ i = j \\ -1, & za\ v_i \sim v_j\ , \\ 0, & inače \end{cases} \qquad za\ i, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Neka je **D** dijagonalna matrica takva da elementi na dijagonali budu jednaki stupnju odgovarajućeg vrha grafa i **A** matrica susjedstva grafa. Tada je **L = D - A**. Također, kao i kod matrice susjedstva, vrijedi da je i Laplaceova matrica simetrična.

Primjer 1.2.6. *Primjer grafa i pripadne Laplaceove matrice L.*



Označimo vrhove grafa brojevima od 1 do 6 kao na slici, Laplaceova matrica je tada

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} \text{ - } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kasnije u radu ćemo koristiti i nenegativnu Laplaceovu matricu $\mathbf{K}$ koju dobivamo na sličan način. Definirana je kao $\mathbf{K} = \mathbf{D} + \mathbf{A}$.

Poglavlje 2

Mjere nebipartitnosti

Promatrat ćemo četiri mjere nebipartitnosti grafa. Sve su mjere definirane tako da poprimaju vrijednosti između 0 i 1. Za promatrani graf $G = (V, E)$, mjera nebipartitonsti $b(G)$ izražava koliko je G daleko od bipartitnog grafa. Ako je graf G bipartitan, vrijedi $b(G) = 0$. Prilikom računanja koristit ćemo tri karakteristične matrice grafa:

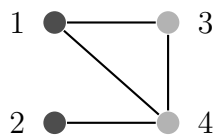
- matricu susjedstva A,
- normaliziranu matricu susjedstva N,
- nenegativnu Laplaceovu matricu K.

2.1 Mjera frustriranosti grafa

Kako bismo definirali prvu mjeru nebipartitnosti uvodimo pojam frustriranog brida.

Definicija 2.1.1. *Za graf $G = (V, E)$, neka je $V = V_1 \cup V_2$ biparticija skupa vrhova V. Brid koji spaja dva vrha unutar istog bloka particije (V_1 ili V_2) nazivamo* ***frustrirani brid****.*

Primjer 2.1.2. *Na prikazanom grafu sa skupom vrhova $V = \{1, 2, 3, 4\}$ možemo promatrati biparticiju $V = V_1 \cup V_2$ takvu da je $V_1 = \{1, 2\}$ i $V_2 = \{3, 4\}$. Tada je brid koji spaja vrhove 3 i 4 frustrirani brid.*



Za graf $G = (V, E)$, neka je f najmanji broj frustriranih bridova unutar svih biparticija skupa V. Mjera nebipartitnosti je tada dana kao omjer broja frustriranih bridova i ukupnog broja bridova.

$$b_f(G) = \frac{f}{|E|} \tag{2.1}$$

Ako je promatrani graf G bipartitan, onda ne sadrži frustrirane bridove, tj. $f = 0$ pa je i mjera nebipartitnosti $b_f(G) = 0$. No, ako graf G nije bipartitan, sigurno vrijedi $0 < b_f(G) \leq 1$. Štoviše, uz pomoć [7] dokazat ćemo da je gornja granica mjere nebipartitnost $b_f(G)$ jednaka $\frac{1}{2}$, tj da za svaki graf G vrijedi $b_f(G) \in [0, \frac{1}{2}]$. U dokazu ćemo promatrati samo potpune grafove, jer ćemo u tom slučaju imati najveći mogući broj frustriranih bridova.

Tvrdnja 2.1.3. *Neka je K_N potpuni graf s N vrhova, takav da je $N \in \mathbb{N}$ paran. Minimalan broj frustriranih bridova u grafu K_N dobivamo pri biparticiji skupa od N vrhova u 2 bloka tako da svaki sadrži $\frac{N}{2}$ vrhova.*

Dokaz. Pretpostavimo da imamo potpun graf s N vrhova. Podijelimo skup vrhova u 2 bloka tako da jedan ima k, a drugi $N - k$ elemenata. Ukupan broj frustriranih bridova u grafu je tada jednak $\binom{k}{2} + \binom{N-k}{2}$. Neka je:

$$\begin{aligned}
f(k) &= \binom{k}{2} + \binom{N-k}{2} \\
&= \frac{k!}{2!(k-2)!} + \frac{(N-k)!}{2!(N-k-2)!} \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(N-k)(N-k-1)}{2} \\
&= \frac{k^2-k}{2} + \frac{N^2 - Nk - N - Nk + k^2 + k}{2} \\
&= \frac{2k^2 - 2Nk + N^2 - N}{2} \\
&= k^2 - Nk + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}.
\end{aligned}$$

Tada je $f(k) = k^2 - Nk + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$ kvadratna funkcija koja ovisi o varijabli k, te predstavlja broj frustriranih bridova u promatranom grafu. Zanima nas njezin minimum, tj. za koji $k \in \mathbb{N}$ se postiže minimalan broj frustriranih bridova u grafu. Točka ekstrema za opću kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ postiže za $x = -\frac{b}{2a}$. Iz toga, u našem slučaju, slijedi da se minimalan broj frustriranih bridova postiže za $k = \frac{N}{2}$, koji se dostiže zbog parnosti od N.

Time smo dokazali da se u potpunom grafu minimalan broj frustriranih bridova postiže za biparticiju s $k = \frac{N}{2}$ i $N - k = \frac{N}{2}$ elemenata. $\square$

Uočimo da slična tvrdnja vrijedi i za neparan broj vrhova. U tom slučaju imamo $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ i $N - k = \lceil \frac{N}{2} \rceil$.
Uvrstimo li dobiveno u (2.1), slijedi

$$b_f(G) = \frac{f}{|E|} = \frac{g(\frac{N}{2})}{\binom{N}{2}} = \frac{\binom{N/2}{2} + \binom{N/2}{2}}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{2\frac{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}-1)}{2}}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{\frac{N}{2}\frac{N-2}{2}}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{N-2}{2N-2}.$$

Za dovoljno velike grafove, tj. kada $N \to \infty$, dobivamo da $b_f(G) \to \frac{1}{2}$. Slijedi da mjera b_f poprima vrijednosti iz intervala $[0, \frac{1}{2}]$. Kako bismo bili u mogućnosti usporediti ovu mjeru s onima koje ćemo kasnije navesti u ovom radu, izmijenit ćemo formulu tako da poprima vrijednosti iz intervala $[0, 1]$.

$$b_f(G) = \frac{2f}{|E|}, \quad b_f \in [0, 1]. \tag{2.2}$$

Za računanja ove mjere potrebno je pronaći optimalni način za prebrojavanje frustriranih bridova grafa, a nakon toga i određivanje minimalnog broja frustriranih bridova grafa za sve moguće biparticije. Za dovoljno male grafove to se može odrediti u razumnom vremenu, no porastom broja vrhova grafa, broj mogućih particija $V = V_1 \cup V_2$ raste eksponencijalno, te samim time problem postaje vrlo teško riješiti. Zbog toga ćemo se okrenuti algebarskoj teoriji grafova i promotriti svojstva nenegativne Laplaceove matrice K.

2.1.1 Spektar matrice K

Neka je zadan graf $G = (V, E)$ i biparticija skupa vrhova $V_1 \cup V_2 = V$. U tom slučaju **particijski vektor** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|V|}$ zadan izrazom

$$x_i = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{za } i \in V_1 \\ -\frac{1}{2}, & \text{za } i \in V_2 \end{cases}. \tag{2.3}$$

određuje tu particiju. Prema [8], broj frustriranih bridova grafa G je tada dan izrazom:

$$f = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} (x_u + x_v)^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}, \tag{2.4}$$

gdje je $\mathbf{K} = \mathbf{D} + \mathbf{A}$ nenegativna Laplaceova matrica.
Prva jednakost očito vrijedi jer je

$$x_u + x_v = \begin{cases} 0, & \text{za } u \in V_1 \text{ i } v \in V_2, \text{ ili } u \in V_2 \text{ i } v \in V_1 \\ \pm 1, & \text{za } u, v \in V_1, \text{ ili } u, v \in V_2 \end{cases},$$

što znači da samo frustrirani bridovi doprinose sumi i to točno dvaput jer za svaki $(u, v) \in E$ vrijedi da je i $(v, u) \in E$.
Pokažimo da broj frustriranih bridova možemo izračunati i koristeći $f = \mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x}$.

Neka je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ particijski vektor. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & d_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + d_{nn}x_n \end{bmatrix} \\
&= d_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{21}x_1x_2 + d_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
&\qquad \vdots \\
&+ a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + \cdots + d_{nn}x_n^2 \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Uočimo da je $x_u x_v = \begin{cases} +\frac{1}{4}, & \text{za } u, v \in V_1, \text{ ili } u, v \in V_2 \\ -\frac{1}{4}, & \text{za } u \in V_1 \text{ i } v \in V_2, \text{ ili } u \in V_2 \text{ i } v \in V_1 \end{cases}$,
što povlači i $x_i^2 = \frac{1}{4}$.
Također, kako je matrica A simetrična, vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{4}d_{11} + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ \frac{1}{4}d_{22} + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&\qquad \vdots \\
&+ \frac{1}{4}d_{(n-1)(n-1)} + 2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n \\
&+ \frac{1}{4}d_{nn} \\
&= (**)
\end{aligned}$$

Promotrimo čemu su jednaki izrazi oblika $2a_{ij}x_ix_j$. Znamo da je $a_{ij} = 1$ ako u grafu postoji brid koji spaja vrhove i i j te $a_{ij} = 0$ ako takav brid ne postoji. Za brid x_ix_j, ako je on frustriran, slijedi $2a_{ij}x_ix_j = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, a ako brid nije frustriran tada je $2a_{ij}x_ix_j = 2 \cdot 1 \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$. Stoga slijedi:

$$2a_{ij}x_ix_j = \begin{cases} 0, & \text{ako } (i,j) \notin E \\ +\frac{1}{2}, & \text{ako je } (i,j) \in E \text{ frustriran} \\ -\frac{1}{2}, & \text{ako } (i,j) \in E \text{ nije frustriran} \end{cases}. \tag{2.5}$$

Također, koristimo činjenicu da je u svakom grafu zbroj stupnjeva svih vrhova jednak dvostrukom broju bridova[9].

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Iz toga slijedi

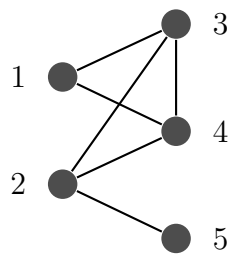
$$\frac{1}{4}d_{11} + \frac{1}{4}d_{22} + \cdots + \frac{1}{4}d_{nn} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot |E| = \frac{1}{2}|E|. \tag{2.6}$$

Označimo broj frustriranih bridova s f, a broj nefrustriranih bridova s n_f. Tada vrijedi $|E| = f + n_f$, a iz (2.5) i (2.6) tada slijedi

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{1}{2}|E| - \frac{1}{2}n_f + \frac{1}{2}f \\ &= \frac{1}{2}(|E| - n_f) + \frac{1}{2}f \\ &= f, \end{aligned}$$

tj. vrijedi $\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} = f$.

Primjer 2.1.4. *Odredimo broj frustriranih bridova za graf na slici 2.1.*



Slika 2.1: Nebipartitan graf

Najprije odredimo biparticiju vrhova V_1 i V_2, tj. raspodijelimo vrhove grafa u dva disjunktna skupa. Neka su vrhovi $1, 2 \in V_1$, a vrhovi $3, 4, 5 \in V_2$.

U ovom slučaju, prikazani graf je dovoljno mali pa možemo lako uočiti da je, za odabranu biparticiju, frustriran točno jedan brid, i to brid koji spaja vrhove 3 i 4. Pokažimo kako broj frustriranih bridova možemo odrediti i primjenom formula u (2.4), te provjerimo hoćemo li dobiti isti rezultat.

Koristeći (2.3), konstruirajmo pripadni particijski vektor $x \in \mathbb{R}^5$. Imamo $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}$ i $x_5 = -\frac{1}{2}$, iz čega slijedi

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Tada je broj frustriranih bridova

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2} \sum_{(u,v)\in E} (x_u + x_v)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left[(x_1 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2 + (x_1 + x_4)^2 + (x_4 + x_1)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_2)^2 \right. \\
&\quad \left. + (x_2 + x_4)^2 + (x_4 + x_2)^2 + (x_2 + x_5)^2 + (x_5 + x_2)^2 + (x_3 + x_3)^2 + (x_4 + x_3)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 \right. \\
&\left. + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(-1)^2 + (-1)^2 \right] \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ostaje još provjeriti i $f = x^T \mathbf{K} x = 1$. Najprije odredimo matricu $\mathbf{K} = \mathbf{D} + \mathbf{A}$.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada imamo:

$$
\begin{aligned}
f &= \mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

U oba smo slučaja dobili rezultat koji smo i očekivali, a to je da je broj frustriranih bridova grafa na slici 2.1, uz odabranu particiju $V = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$, jednak 1. Zadani graf nije bipartitan (jer sadrži ciklus neparne duljine), te ne možemo pronaći biparticiju vrhova takvu da f bude manji od 1, pa slijedi da je mjera nebipartitnosti zadanog grafa

$$b_f(G) = \frac{2f}{|E|} = \frac{2 \cdot 1}{5} = 0.4.$$

Primijetimo da smo u ovom slučaju odabrali upravo biparticiju koja nam je dala minimalni broj frustriranih bridova grafa, no to nije uvijek slučaj. Općenito, kako bismo bili sigurni da smo izračunali minimalni broj frustriranih bridova grafa, opisani postupak treba primijeniti za sve moguće biparticije skupa vrhova, tj. vrijedi

$$f = \min_{x \in \{\pm 1/2\}^{|V|}} x^T \mathbf{K} x. \tag{2.7}$$

Sljedeći teorem dati će nam jednostavnu metodu za aproksimaciju ovog izraza.

2.1.2 Rayleigh-Ritzov teorem

Teorem 2.1.5 (Rayleigh-Ritz). *Neka je $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrica, $\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$ i $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ ortonormirana baza pripadnih svojstvenih vektora. Tada je*

$$\min_{x \neq 0} \frac{x^T \boldsymbol{A} x}{x^T x} = \lambda_{min}. \tag{2.8}$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $R(x) = \frac{x^T \mathbf{A} x}{x^T x}$ za Rayleighov kvocijent. Najprije ćemo pokazati da skaliranje vektora x ne utječe na vrijednost $R(x)$.
Neka je $x = (x_1, \cdots, x_n)$ takav da je $||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = c^2$. Promotrimo sada vektor

$$y = (y_1, \cdots, y_n) = (\frac{x_1}{c}, \cdots, \frac{x_n}{c}) = \frac{x}{c}.$$

Tada je

$$||y||^2 = (\frac{x_1}{c})^2 + \cdots + (\frac{x_n}{c})^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Imamo

$$R(y) = \frac{y^T \mathbf{A} y}{y^T y} = \frac{(\frac{x}{c})^T \mathbf{A} (\frac{x}{c})}{(\frac{x}{c})^T (\frac{x}{c})} = \frac{\frac{1}{c} x^T \mathbf{A} \frac{1}{c} x}{\frac{1}{c} x^T \frac{1}{c} x} = \frac{\frac{1}{c^2} x^T \mathbf{A} x}{\frac{1}{c^2} x^T x} = \frac{x^T \mathbf{A} x}{x^T x} = R(x),$$

čime smo pokazali da skaliranje vektora x ne utječe na vrijednost R(x). Tada vrijedi da je, npr,

$$\min_x R(x) = \min_{||x||=1} R(x). \tag{2.9}$$

Stoga nadalje promatramo samo vektore x takve da je $||x|| = 1$, što će nam olakšati daljnji račun.

Matrica $\mathbf{A}$ je simetrična pa prema teoremu 1.2.4 vrijedi da postoji ortogonalna matrica $\mathbf{S}$ takva da je $\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \Lambda \mathbf{S}$, gdje je $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Iz ortogonalnosti matrice $\mathbf{S}$ slijedi

$$(Sx)^T (Sx) = ||Sx||^2 = ||x||^2 = x^T x,$$

pa je

$$R(x) = \frac{x^T \mathbf{A} x}{x^T x} = \frac{x^T \mathbf{S}^T \Lambda \mathbf{S} x}{x^T x} = \frac{(\mathbf{S}x)^T \Lambda (\mathbf{S}x)}{(\mathbf{S}x)^T (\mathbf{S}x)}.$$

Uzmimo da je $y = \mathbf{S}^T x$. Tada imamo

$$R(y) = R(\mathbf{S}^T x) = \frac{(\mathbf{S}\mathbf{S}^T x)^T \Lambda (\mathbf{S}\mathbf{S}^T x)}{(\mathbf{S}\mathbf{S}^T x)^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T x)} = \frac{x^T \Lambda x}{x^T x} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ovdje koristimo (2.9), te uzimamo x takav da je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Slijedi da je tada $R(y) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Rayleighov kvocijent $R(y)$ minimalnu vrijednost postiže za $x = (1, 0, \cdots, 0)$ i ona iznosi upravo λ_1, tj.

$$\min_x R(x) = \lambda_{min}.$$

□

Dokaz je preuzet iz [2].

Prisjetimo se, minimalan broj frustriranih bridova u grafu je

$$f = \min_{x \in \{\pm 1/2\}^{|V|}} x^T \mathbf{K} x.$$

kako su elementi particijskog vektora x jednaki $\frac{1}{2}$ ili $-\frac{1}{2}$, slijedi

$$x^T x = ||x||^2 = \sum_{i=1}^{|V|} \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{|V|}{4}.$$

Tada imamo

$$\frac{f}{|V|/4} \approx \min_{x \neq 0} \frac{x^T \mathbf{K} x}{x^T x}.$$

Prema (2.8), vrijedi

$$\frac{4f}{|V|} \approx \min_{x \neq 0} \frac{x^T \mathbf{K} x}{x^T x} = \lambda_{min}[\mathbf{K}],$$

tj.

$$f \approx \frac{|V|}{4} \lambda_{min}[\mathbf{K}].$$

Konačno, uvrštavanjem dobivenog u mjeru nebipartitnosti (2.2) dobivamo da je

$$b_f(G) \approx b_K(G) = \frac{|V|}{2|E|} \lambda_{min}[\mathbf{K}]. \tag{2.10}$$

Primjer 2.1.6. *Odredimo mjeru nebipartitnosti $b_K(G)$ za graf G sa slike 2.1.*

U primjeru 2.1.4 izračunali smo nenegativnu Laplaceovu matricu $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{K}$ možemo odrediti rješavanjem karakteristične jednadžbe

$$det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{K}) = 0.$$

Dobivamo da su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0.418193, \lambda_2 = 1.20112, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2.91275, \lambda_5 = 5.46793.$$

Stoga je

$$b_K(G) = \frac{|V|}{2|E|}\lambda_{min}[\mathbf{K}] = \frac{5 \cdot 0.418193}{2 \cdot 6} \approx 0.174247.$$

Uočimo da, u ovom slučaju, dobiveni rezultat nije vrlo sličan rezultatu mjere b_f, gdje smo dobili $b_f(G) = 0.4$, no ovo je ipak aproksimacija. Nakon provedenog testiranja na većem broju grafova možemo uočiti da u većini slučajeva mjera b_K dobro aproksimira b_F.

2.2 Spektar matrice susjedstva

Već smo naveli da je matrica susjedstva neusmjerenog jednostavnog grafa simetrična matrica, koja ima n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Također, znamo da je zbroj elemenata na dijagonali matrice, tj. njezin trag, jednak zbroju svojstvenih vrijednosti matrice: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = Tr(\mathbf{A})$. U matrici susjedstva svi dijagonalni elementi su jednaki 0 pa je i $Tr(\mathbf{A}) = 0$. No, iako je zbroj svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva jednaka 0, svojstvene vrijednosti nisu nužno simetrične oko 0. Ta činjenica vrijedi samo ako je promatrani graf bipartitan.

Teorem 2.2.1. *Graf G je bipartitan ako i samo ako za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice susjedstva koja nije jednaka nuli je i $-\lambda$ također svojstvena vrijednost, tj. spektar od G je simetričan s obzirom na nulu.[1]*

Ovo svojstvo možemo iskoristiti pri konstrukciji druge mjere nebipartitnosti na sljedeći način:

$$b_A(G) = 1 - \left|\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right|, \tag{2.11}$$

gdje λ_{min} najmanja, a λ_{max} najveća svojstvena vrijednost matrice susjedstva grafa G.

Teorem 2.2.2 (**Perron-Frobenius** [3])**.** *Neka je $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ nenegativna i ireducibilna matrica. Tada $\boldsymbol{A}$ ima realnu, pozitivnu svojstvenu vrijednost λ, čija je apsolutna vrijednost veća ili jednaka od svih ostalih svojstvenih vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$.*

Propozicija 2.2.3. *Neka je G graf. Tada vrijedi $0 \leq b_A(G) < 1$.*

Dokaz. Ako je graf bipartitan, najmanja i najveća svojstvena vrijednost matrice susjedstva imat će suprotne vrijednosti, tj. $\lambda_{min}[\mathbf{A}] = -\lambda_{max}[\mathbf{A}]$, pa je tada $b_A(G) = 0$. Ako graf nije bipartitan, prema Perron-Frobeniusovom teoremu, iz nenegativnosti matrice susjedstva slijedi $\left|\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right| \leq 1$, tj. $0 \leq b_A(G) \leq 1$. Stoga imamo da je za svaki graf G, mjera nebipartitnosti $b_A(G) \in [0, 1]$. □

Primjer 2.2.4. *Odredimo mjeru nebipartitnosti $b_A(G)$ za graf G sa slike 2.1.*

Prisjetimo se, matrica susjedstva je jednaka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ možemo odrediti rješavanjem jednadžbe

$$det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \text{ tj.}$$
$$\lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Dobivamo svojstvene vrijednosti:
$\lambda_1 = -1.77571, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.589216, \lambda_4 = 0.723742$ i $\lambda_5 = 2.64119$
Primijetimo da zadani graf nije bipartitan, stoga ni dobivene svojstvene vrijednosti nisu simetrične oko 0. Iz $\lambda_{min} = -1.77571$ i $\lambda_{max} = 2.64119$ slijedi

$$b_A(G) = 1 - \left| \frac{-1.77571}{2.64119} \right| \approx 0.32769.$$

2.3 Spektar normalizirane matrice susjedstva

U članku [8] navodi se da, osim što nebipartitnost možemo mjeriti koristeći svojstvene vrijednosti matrice susjedstva $\mathbf{A}$, možemo ju mjeriti i koristeći svojstvene vrijednosti normalizirane matrice susjedstva $\mathbf{N}$. Matricu $\mathbf{N}$ konstruiramo normalizirajući njezine elemente stupnjevima vrhova grafa,

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}},$$

gdje je $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica sa stupnjevima vrhova na dijagonali. Matricu $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ dobivamo potenciranjem svakog elementa matrice $\mathbf{D}$ s $-\frac{1}{2}$. Slijedi

$$\mathbf{N}_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d(u)d(v)}}, & \text{za } (u,v) \in E \\ 0, & \text{za } (u,v) \notin E. \end{cases}$$

Zbog normalizacije, za svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{N}$, vrijede posebna svojstva. Svojstvene vrijednosti se nalaze unutar intervala $[-1, 1]$, pa je najveća svojstvena vrijednost λ_{max} uvijek jednaka 1. Tada, prema teoremu 2.2.1, imamo sljedeću karakterizaciju bipartitnog grafa.

Teorem 2.3.1 ([8]). *Graf G je bipartitan ako i samo ako je $\lambda_{min}[\boldsymbol{N}] = -1$.*

Koristeći navedena svojstva možemo definirati mjeru nebipartitnosti

$$b_N(G) = \lambda_{min}[\mathbf{N}] + 1.$$

Primjer 2.3.2. *Za graf G sa slike 2.1 odredimo mjeru nebipartitnosti $b_N(G)$.*

Potrebno je odrediti matricu $\mathbf{N}$ i izračunati njenu minimalnu svojstvenu vrijednost.

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{N}$ su:
$\lambda_1 = -0.767592, \lambda_2 = -0.333333, \lambda_3 = 0.333333, \lambda_4 = 0.434259$ i $\lambda_5 = 1$.
Tada je

$$b_N(G) = \lambda_{min}[\mathbf{N}] + 1 = -0.767592 + 1 = 0.232408$$

2.4 Neparni ciklusi

Kao što smo ranije naveli, osnovna karakterizacija bipartitnog grafa nam kaže da on ne sadrži neparne cikluse. Stoga je prirodno mjeru nebipartitnosti temeljiti, na neki način, na broju neparnih ciklusa u grafu.

Pri konstrukciji ove mjere razmatramo cikluse grafa u kojima nisu nužno svi vrhovi različiti, tj. promatramo zatvorene šetnje čiji su početni i završni vrh isti.

U prvom poglavlju smo pokazali da broj šetnji duljine k u grafu možemo izračunati koristeći matricu susjedstva grafa. Prema teoremu 1.2.3, vrijedi da je element matrice $\mathbf{A}^k$ na mjestu (i, j) jednak broju šetnji duljine k između vrhova v_i i v_j. Kako nas

zanima samo broj zatvorenih šetnji, tj. onih koje počinju i završavaju u istom vrhu, promatrat ćemo samo elemente na dijagonali matrice $\mathbf{A}^k$. Tada je ukupan broj zatvorenih šetnji duljine k jednak zbroju elemenata na dijagonali matrice, tj. $Tr(\mathbf{A}^k)$. Ukupan broj zatvorenih šetnji u grafu dobivamo sumiranjem po svim mogućim duljinama šetnje k, te je on jednak

$$W = \sum_k Tr(\mathbf{A}^k). \tag{2.12}$$

Problem koji se javlja pri prebrojavanju zatvorenih šetnji u grafu je kako skalirati neparne zatvorene šetnje različitih duljina. U većini grafova koje promatramo u praksi, ukupna duljina svih neparnih zatvorenih šetnji je jako velika, štoviše, može biti puno veća od samog broja bridova u grafu [7]. U takvim slučajevima kraće zatvorene šetnje su važnije pri određivanju mjere nebipartitnosti. Zbog toga broj zatvorenih šetnji duljine k u grafu skaliramo težinskom funkcijom $w(k) = \frac{1}{k!}$. Također, kako dopuštamo da se vrhovi u šetnji ponavljaju, ovakva težinska funkcija umanjuje doprinos šetnji čija duljina teži u beskonačnost. Uvrštavanjem težinske funkcije u (2.12) imamo da je skalirani broj zatvorenih šetnji u grafu

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^k)}{k!}. \tag{2.13}$$

Definicija 2.4.1. *Neka je matrica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. **Eksponenta matrice $\boldsymbol{A}$**, u oznaci $e^{\boldsymbol{A}}$ ili $exp(\boldsymbol{A})$, je matrica definirana na sljedeći način:*

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}, \quad e^{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

gdje je $\boldsymbol{A}^0$ jedinična matrica $\boldsymbol{I}$ iste dimenzije kao $\boldsymbol{A}$.

Iz definicije 2.4.1 i (2.13) slijedi

$$W = Tr(e^{\mathbf{A}}). \tag{2.14}$$

Kao i kod Taylorovog razvoja funkcija u red za $x \in \mathbb{R}$, slično vrijedi i za kvadratne matrice $\mathbf{A}$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!},$$

$$ch(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} + \frac{\mathbf{A}^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!},$$

$$sh(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \frac{\mathbf{A}^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

tj.

$$e^{\mathbf{A}} = ch(\mathbf{A}) + sh(\mathbf{A}).$$

Stoga za ukupan broj zatvorenih šetnji u grafu vrijedi

$$W = Tr(e^{\mathbf{A}}) = Tr(ch(\mathbf{A})) + Tr(sh(\mathbf{A})). \tag{2.15}$$

Pritom uočimo da ukupnom broju zatvorenih šetnji u grafu, funkcija hiperbolnog kosinusa doprinosi s brojem šetnji parne duljine, dok funkcija hiperbolnog sinusa doprinosi s brojem šetnji neparne duljine.

U članku [5] navodi se sljedeća karakterizacija nebipartitnog grafa, koju ćemo koristiti pri definiciji četvrte mjere nebipartitnosti.

Teorem 2.4.2. *Graf je bipartitan ako i samo ako je $Tr(sh(\boldsymbol{A})) = 0$.*

Dokaz. Promotrimo razvoj u Taylorov red za $Tr(sh(\mathbf{A}))$.

$$Tr(sh(\mathbf{A})) = Tr(\mathbf{A}) + \frac{Tr(\mathbf{A}^3)}{3!} + \frac{Tr(\mathbf{A}^5)}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k+1})}{(2k+1)!}$$

Znamo da je $Tr(\mathbf{A}^{2k+1})$ jednak broju zatvorenih šetnji duljine $2k+1$ u grafu. Svaka zatvorena šetnja neparne duljine nužno sadrži ciklus neparne duljine. Tada, kako u bipartitnom grafu nema ciklusa neparne duljine slijedi da će, za svaki k, svi elementi na dijagonali matrice $\mathbf{A}^{2k+1}$ biti jednaki 0. Tada je $Tr(\mathbf{A}^{2k+1}) = 0$, pa je i $Tr(sh(\mathbf{A})) = 0$. Obratno, $Tr(sh(\mathbf{A})) = 0$ povlači da je $Tr(\mathbf{A}^{2k+1}) = 0$, tj. za svaki k, svi elementi matrice $\mathbf{A}^{2k+1}$ su jednaki 0, tj. ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da u grafu postoji ciklus duljine $2k-1$. To povlači da u grafu nema ciklusa neparnih duljina pa možemo zaključiti da je promatrani graf bipartitan. □

Definicija 2.4.3. ***Frustrirana zatvorena šetnja*** *je zatvorena šetnja koje sadrži ciklus neparne duljine.*

Za zatvorenu šetnju koja ne sadrži nijedan ciklus neparne duljine kažemo da nije frustrirana. Označimo broj frustriranih zatvorenih šetnji u grafu s W^F, a broj nefrustriranih zatvorenih šetnji s W^{NF}. U članku [5] navodi se sljedeća mjera nebipartitnosti:

$$b_C(G) = \frac{W^{NF} - W^F}{W^{NF} + W^F}$$

Kako bismo bili dosljedni i osigurali da mjera poprima vrijednosti iz intervala $[0, 1]$, te da se 0 postiže za bipartitne grafove, kao i kod prije navedenih mjera nebipartitnosti, izmijenit ćemo je na sljedeći način:

$$b_C(G) = 1 - \frac{W^{NF} - W^F}{W^{NF} + W^F}. \tag{2.16}$$

Broj frustriranih zatvorenih šetnji jednak je broju zatvorenih šetnji neparne duljine, a broj ne-frustriranih zatvorenih šetnji jednak je broju zatvorenih šetnji parne duljine, tj.

$$W^{NF} = Tr(ch(\mathbf{A})) \text{ i } W^F = Tr(sh(\mathbf{A})).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
b_C(G) &= 1 - \frac{Tr(ch(\mathbf{A})) - Tr(sh(\mathbf{A}))}{Tr(ch(\mathbf{A})) + Tr(sh(\mathbf{A}))} \\
&= 1 - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k})}{(2k)!} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k+1})}{(2k+1)!}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k})}{(2k)!} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k+1})}{(2k+1)!}} \\
&= 1 - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{Tr(\mathbf{A}^{2k})}{(2k)!} - \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k+1})}{(2k+1)!})}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{Tr(\mathbf{A}^{2k})}{(2k)!} + \frac{Tr(\mathbf{A}^{2k+1})}{(2k+1)!})} \\
&= 1 - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{Tr((-\mathbf{A})^{2k})}{(2k)!} + \frac{Tr((-\mathbf{A})^{2k+1})}{(2k+1)!})}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{k})}{k!}} \\
&= 1 - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr((-\mathbf{A})^{k})}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{Tr(\mathbf{A}^{k})}{k!}} = 1 - \frac{Tr(e^{-\mathbf{A}})}{Tr(e^{\mathbf{A}})}
\end{aligned}$$

Prema teoremu 1.2.4, matrica $\mathbf{A}$ se može dijagonalizirati, tj. postoji ortogonalna matrica $\mathbf{S}$ takva da je $\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^T$, gdje je $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Tada je

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{\Lambda}\mathbf{S}^T.$$

Za matrice $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$, takve da postoji matrica $\mathbf{AB}$, vrijedi da je $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$, pa slijedi

$$Tr(e^{\mathbf{A}}) = Tr(\mathbf{S}e^{\Lambda}\mathbf{S}^T) = Tr(e^{\Lambda}\mathbf{S}^T\mathbf{S}) = Tr(e^{\Lambda}\mathbf{I}) = Tr(e^{\Lambda}) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}.$$

Stoga imamo

$$b_c(G) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}}. \tag{2.17}$$

Propozicija 2.4.4. *Neka je G povezan graf. Tada vrijedi $0 \leq b_C(G) < 1$.*

Dokaz. Donja granica se postiže za bipartitne grafove. Ako je graf G bipartitan, prema teoremu 2.4.2 vrijedi $Tr(sh(\mathbf{A})) = 0$. Tada je

$$b_C(G) = 1 - \frac{Tr(ch(\mathbf{A})) - Tr(sh(\mathbf{A}))}{Tr(ch(\mathbf{A})) + Tr(sh(\mathbf{A}))} = 1 - \frac{Tr(ch(\mathbf{A}))}{Tr(ch(\mathbf{A}))} = 1 - 1 = 0.$$

Ako graf G nije bipartitan, svakako je

$$Tr(ch(\mathbf{A})) - Tr(sh(\mathbf{A})) < Tr(ch(\mathbf{A})) + Tr(sh(\mathbf{A})),$$

pa je

$$\frac{Tr(ch(\mathbf{A})) - Tr(sh(\mathbf{A}))}{Tr(ch(\mathbf{A})) + Tr(sh(\mathbf{A}))} < 1,$$

tj.

$$b_c(G) = 1 - \frac{Tr(ch(\mathbf{A})) - Tr(sh(\mathbf{A}))}{Tr(ch(\mathbf{A})) + Tr(sh(\mathbf{A}))} < 1.$$

Vrijednost 1 postiže se asimptotski za potpuni graf K_n kada $n \to \infty$. Svojstvene vrijednosti potpunog graf K_n su $\lambda_1 = -1$ kratnosti $n-1$ i $\lambda_2 = n-1$ kratnosti 1. Tada, prema (2.17) vrijedi

$$b_c(K_n) = 1 - \frac{(n-1)e^{-}1 + e^{-(n-1)}}{(n-1)e^{1} + e^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

□

Primjer 2.4.5. *Odredimo mjeru nebipartitnosti $b_C(G)$ za graf sa slike 2.1.*

Svojstvene vrijednosti matrice susjedstva smo izračunali u primjeru 2.2.4 i one su: $\lambda_1 = -1.77571, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.589216, \lambda_4 = 0.723742$ i $\lambda_5 = 2.64119$. Tada je

$$\begin{aligned} b_C(G) &= 1 - \frac{e^{1.77571} + e^{1} + e^{0.589216} + e^{-0.723742} + e^{-2.64119}}{e^{-1.77571} + e^{-1} + e^{-0.589216} + e^{0.723742} + e^{2.64119}} \\ &\approx 1 - 0.639058 = 0.360942 \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Usporedba mjera nebipartitnosti za neke klase grafova

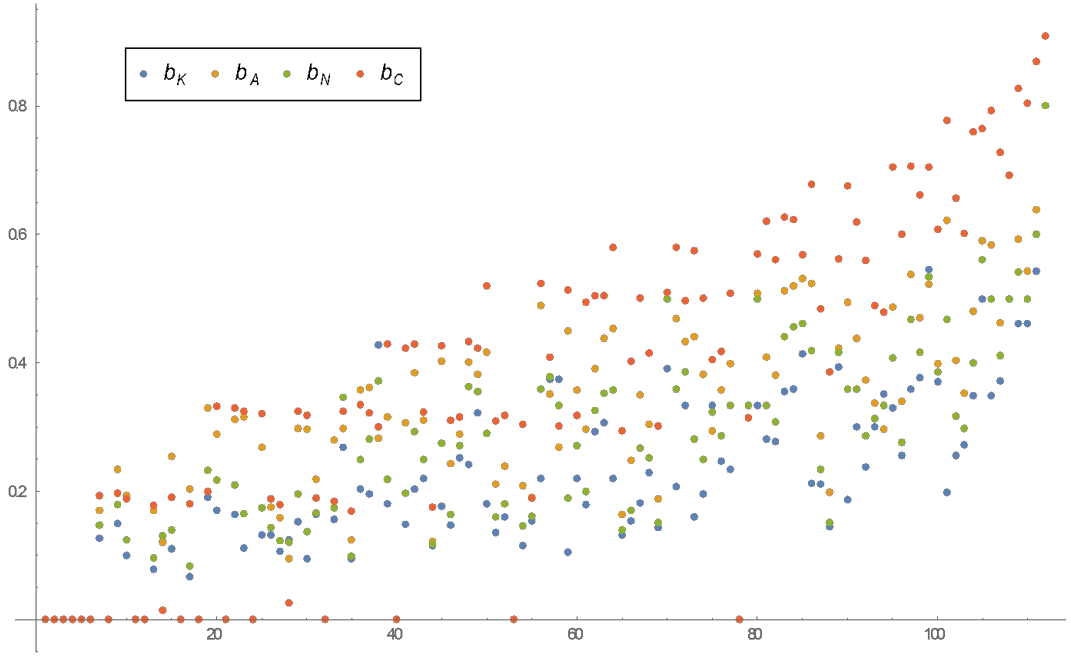
Do sada smo u radu izračunali četiri mjere nebipartitnosti (b_K, b_A, b_N i b_F) za isti graf sa slike 2.1. Pritom smo dobili sljedeće rezultate:

$$\begin{aligned} b_K(G) &= 0.174247 \\ b_A(G) &= 0.32769 \\ b_N(G) &= 0.232408 \\ b_C(G) &= 0.360942 \end{aligned}$$

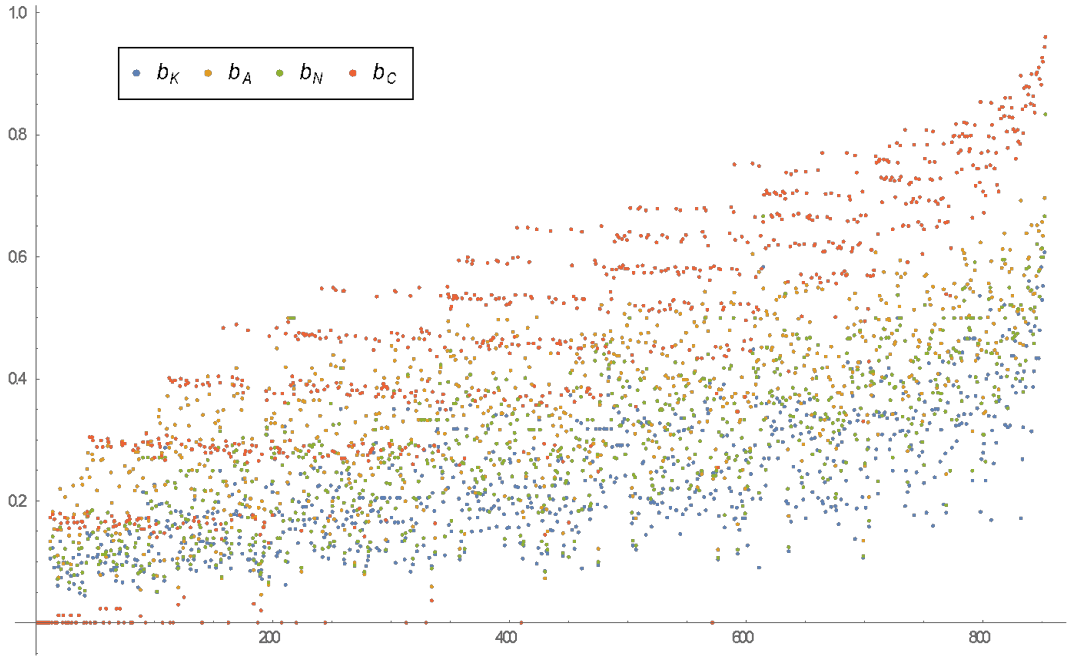
Za izračun navedenih mjera koristili smo program *Mathematica*; pripadni kodovi mogu se pronaći u Dodatku A na kraju rada. U ovom poglavlju proučit ćemo kako se definirane četiri mjere nebipartitnosti b_K, b_A, b_N i b_F mijenjaju za neke poznate klase grafova.

Za potrebe testiranja u *Mathematici* smo napisali kod koji izračunava sve 4 definirane mjere nebipartitnosti. Na početku koda smo, ovisno o klasi grafa koju smo promatrali, uz pomoć predefiniranih funkcija generirali graf određene klase sa zadanim brojem vrhova n, kreirali matricu susjedstva i tada primijenili dio koda koji izračunava mjere nebipartitnosti. To nam je omogućilo da u kratkom roku testiramo veliki broj različitih grafova. Navedeni kod se također može pronaći u dodatku A na kraju ovog rada.

Prije usporedbe mjera za različite klase grafova, prilažemo grafički prikaz raspršenosti mjera nebipartitnosti za povezane grafove. Slika 3.1 prikazuje mjere nebipartitnosti za 112 različitih povezanih grafova sa 6 vrhova. Slika 3.2 prikazuje mjere nebipartitnosti za 853 različitih povezanih grafova sa 7 vrhova. Za obje slike, na osi apscisa nalaze se redni brojevi grafova, a na osi ordinata nalaze se vrijednosti koje postižu mjere nebipartitnosti.

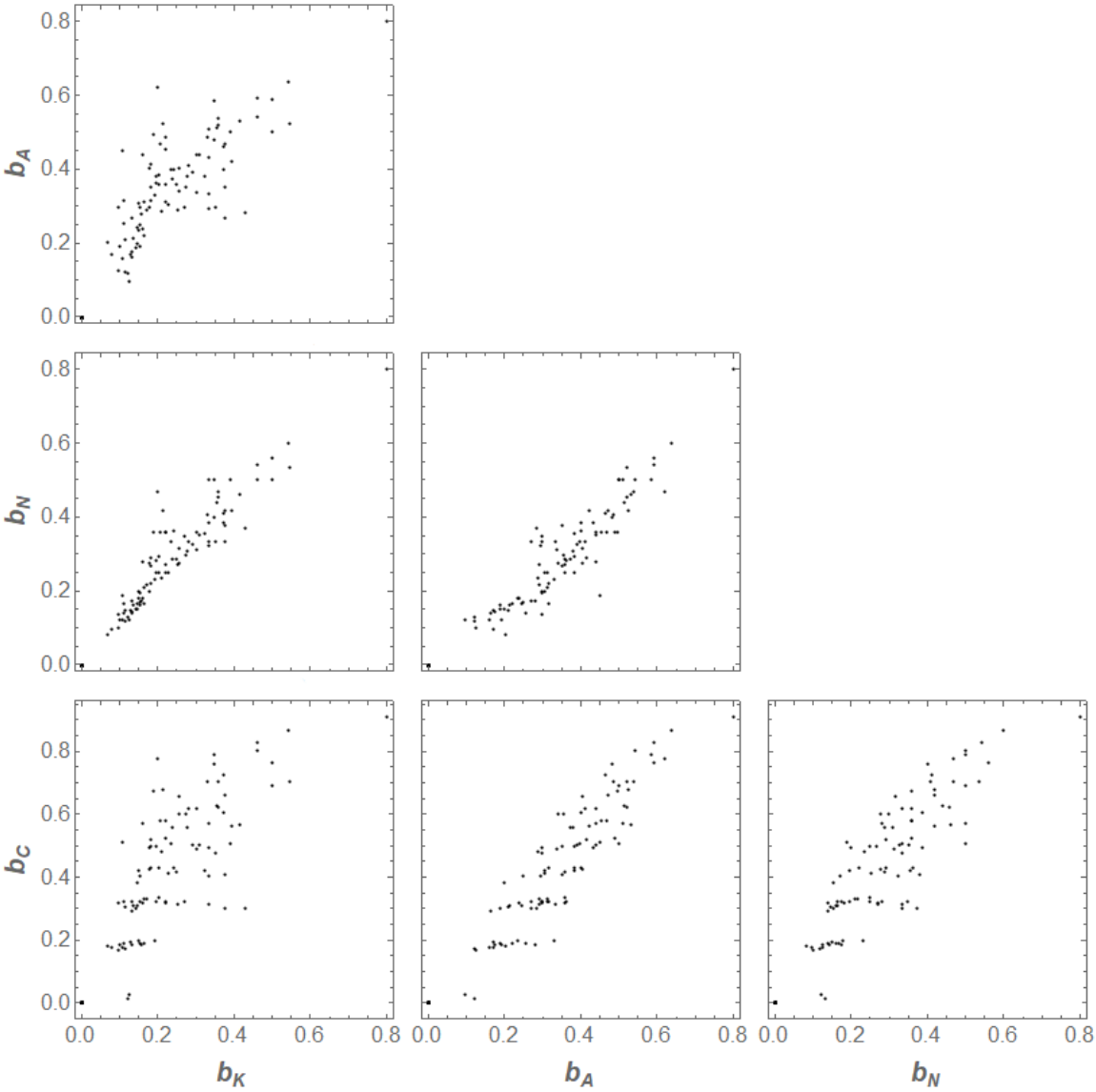


Slika 3.1: Mjere nebipartitnosti za povezane grafove sa 6 vrhova



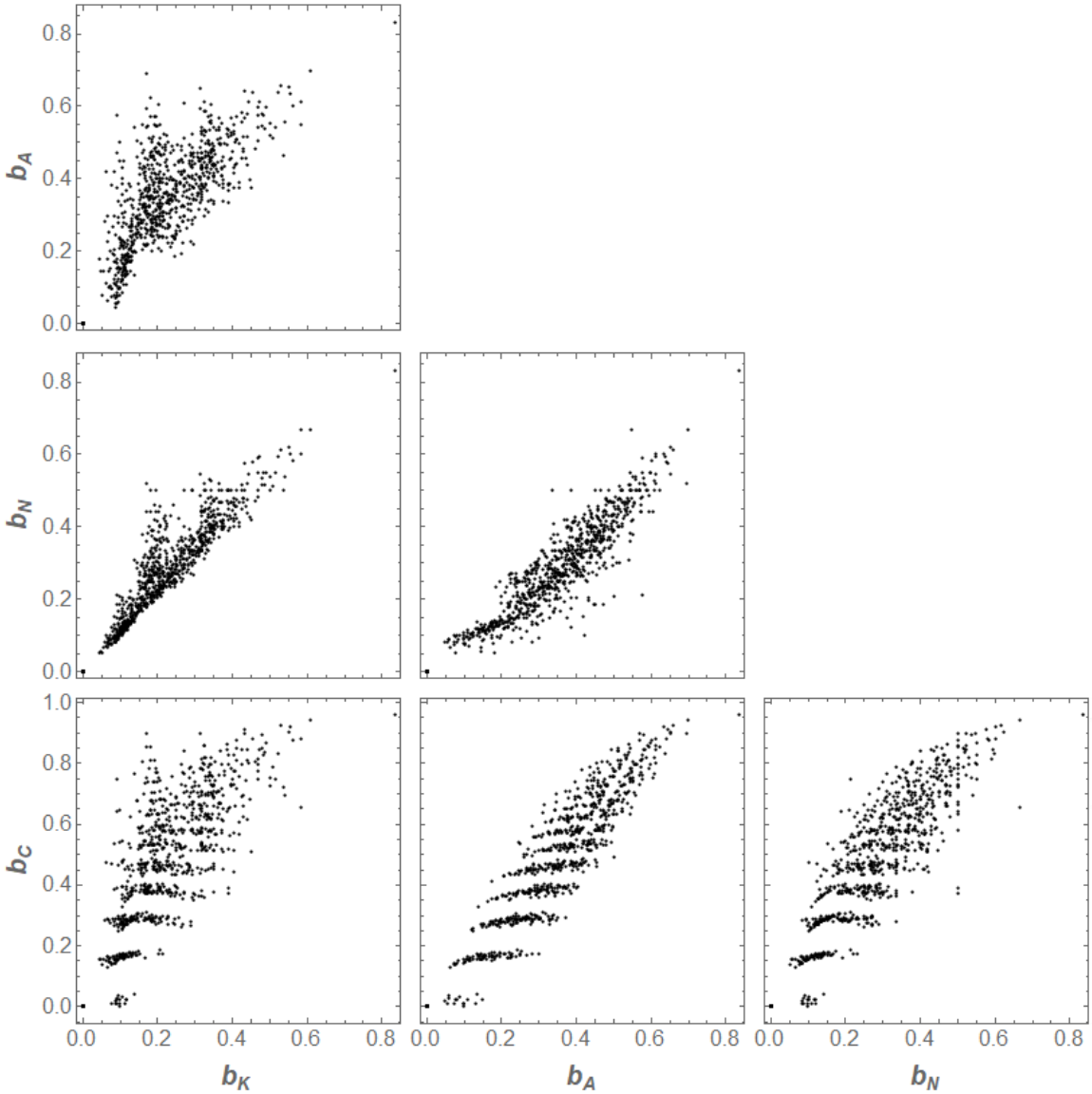
Slika 3.2: Mjere nebipartitnosti za povezane grafove sa 7 vrhova

Na slici 3.3 nalazi se usporedba u parovima, četiriju definiranih mjera nebipartitnosti, za povezane grafove sa 6 vrhova.



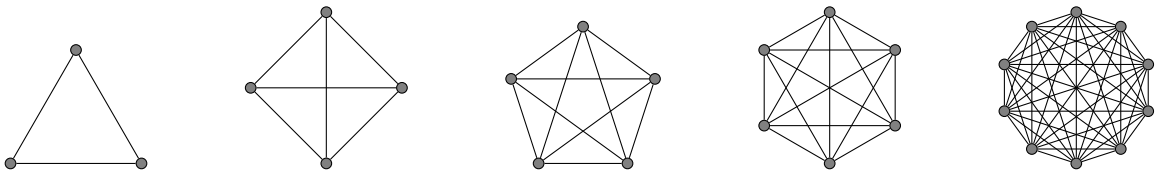
Slika 3.3: Mjere nebipartitnosti za povezane grafove sa 6 vrhova

Na slici 3.4 nalazi se usporedba u parovima, četiriju definiranih mjera nebipartitnosti, za povezane grafove sa 7 vrhova.



Slika 3.4: Mjere nebipartitnosti za povezane grafove sa 7 vrhova

3.1 Potpuni graf



Slika 3.5: Primjeri potpunog grafa: K_3, K_4, K_5, K_6 i K_{10}

Potpuni graf s n vrhova K_n je jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom.

U programu *Mathematica* napisali smo kod koji generira potpuni graf s n vrhova i pripadnu matricu susjedstva $\mathbf{A}$, te računa sve četiri mjere nebipartitnosti. Kod smo testirali na nizu od preko 30 različitih potpunih grafova a ovdje ispisujemo samo dio izračuna.

	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=10	n=20	n=30
b_K	0.5	0.667	0.75	0.8	0.833	0.857	0.889	0.947	0.966
b_A	0.5	0.667	0.75	0.8	0.833	0.857	0.889	0.947	0.966
b_N	0.5	0.667	0.75	0.8	0.833	0.857	0.889	0.947	0.966
b_C	0.314	0.613	0.806	0.909	0.960	0.983	0.997	1.000	1.000

Tablica 3.1: Izračun mjera nebipartitnosti za neke potpune grafove K_n.

Za $n = 2$ imamo bipartitan graf i tada sve četiri mjere iznose 0. Povećanjem broja vrhova povećava se i mjera nebipartitnosti, kao što smo i očekivali. Mjera b_C raste malo brže od preostalih te već za K_{20} postiže vrijednost 1 (do na točnost izračuna), dok ostale mjere asimptotski teže u 1 za jako veliki n. Najzanimljivija činjenica koju smo uočili je da, iako mjere b_K, b_A i b_N ovise o različitim svojstvima matrice susjedstva, za potpune grafove, one postižu iste vrijednosti. Uočimo da je svaki potpun graf regularan.

Teorem 3.1.1 ([1]). *Neka je G regularan graf s stupnjem regularnosti r te $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{L}$ pripadne matrica susjedstva i Laplaceova matrica. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$, tada su $r - \lambda_n, r - \lambda_{n-1}, \cdots, r - \lambda_1$ svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{L}$.*

Prema teoremu 3.1.1 slijedi da su svojstvene vrijednosti nenegative Laplaceove matrice $\mathbf{K}$ oblika $r + \lambda_i, i \in \{1, \cdots, n\}$, gdje je r stupanj ragularnosti grafa, a $\lambda_i, i \in \{1, \cdots, n\}$ svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa. Također, uočimo da je

stupanj svih vrhova grafa jednak stupnju regularnosti grafa, $d(v) = r$, pa slijedi da su svojstvene vrijednosti normalizirane matrice susjedstva $\mathbf{N}$ oblika $\frac{\lambda_i}{r}, i \in \{1, \cdots, n\}$. Stoga, ako je graf regularan i poznat nam je spektar, tj. svojstvene vrijednosti, jedne od matrica $\mathbf{A}, \mathbf{K}$ ili $\mathbf{N}$ u biti nam je poznat i spektar ostalih navedenih matrica. Slijedi da je za regularne grafove dovoljno promatrati spektar jedne od matrica $\mathbf{A}, \mathbf{K}$ ili $\mathbf{N}$, pošto iz sprektra ostalih matrica ne dobivamo nikakve nove informacije.

Za nenegativnu Laplaceovu matricu $\mathbf{K}$ potpunog grafa K_n vrijedi da je $\lambda_{min} = n - 2$. Broj vrhova u grafu K_n je n, dok je broj bridova $\frac{n(n-1)}{2}$. Iz toga slijedi:

$$b_K(K_n) = \frac{|V|}{2|E|}\lambda_{min}[\mathbf{K}] = \frac{n}{2\frac{n(n-1)}{2}}(n-2) = \frac{n-2}{n-1}, \text{ za } n \geq 2.$$

Za matricu susjedstva $\mathbf{A}$ grafa K_n vrijedi da su svojstvene vrijednosti $\lambda_{min} = -1$ i $\lambda_{max} = n - 1$, te tada slijedi

$$b_A(K_n) = 1 - \left|\frac{\lambda_{min}[\mathbf{A}]}{\lambda_{max}[\mathbf{A}]}\right| = 1 - \left|\frac{-1}{n-1}\right| = 1 - \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}, \text{ za } n \geq 2.$$

Za normaliziranu matricu susjedstva $\mathbf{N}$, potpunog grafa K_n, vrijedi da je $\lambda_{min}[\mathbf{N}] = \frac{-1}{n-1}$, te slijedi:

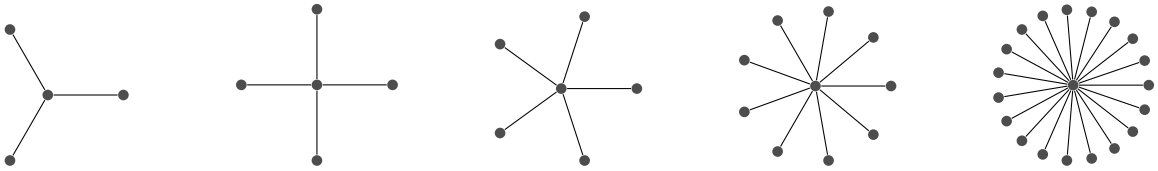
$$b_N(K_n) = \lambda_{min}[\mathbf{N}] + 1 = \frac{-1}{n-1} + 1 = \frac{n-2}{n-1} \text{ za } n \geq 2.$$

Na ovaj smo način došli do jednostavnije formule za izračun mjere nebipartitnosti kod potpunih grafova, te vrijedi

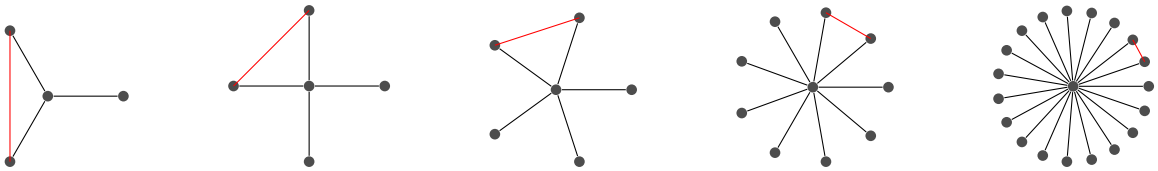
$$b_K(K_n) = b_A(K_n) = b_N(K_n) = \frac{n-2}{n-1} \text{ za } n \geq 2.$$

3.2 Zvijezda

Zvijezda S_n s n vrhova je potpun bipartitan graf $K_{1,n-1}$. Sastoji se od jednog vrha koji je bridovima povezan sa svakim od preostalih $n-1$ vrhova. Kako takav graf ne sadrži cikluse, nužno slijedi da je bipartitan. No, dodamo li 1 ili više frustriranih bridova dobivamo nebipartitan graf.



Slika 3.6: Primjeri zvijezdi: S_4, S_5, S_6, S_{10} i S_{20}



Slika 3.7: Nebipartitni graf dobiven dodavanjem jednog frustriranog brida zvijezdama S_4, S_5, S_6, S_{10} i S_{20}

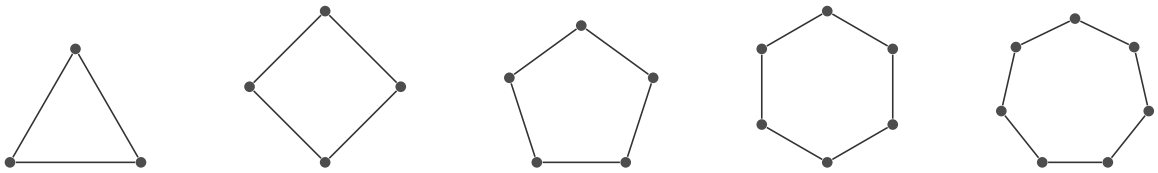
	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=10	n=20	n=30	n=50
b_K	0.219	0.159	0.127	0.106	0.091	0.071	0.034	0.023	0.013
b_A	0.317	0.226	0.17	0.133	0.108	0.075	0.025	0.013	0.006
b_N	0.271	0.191	0.148	0.121	0.102	0.078	0.036	0.023	0.014
b_C	0.257	0.219	0.193	0.173	0.157	0.134	0.082	0.060	0.039

Tablica 3.2: Izračun mjera nebipartitnosti za neke zvijezde S_n s jednim dodatnim bridom.

U ovom slučaju možemo primijetiti da se povećanjem broja vrhova grafa, mjere nebipartitnosti smanjuju. Iz toga slijedi da za grafove ovakvog oblika vrijedi, što je veći broj vrhova to je graf bipartitniji. No to je sasvim logično, promotrimo li npr. mjeru b_K koja aproksimira omjer broja frustriranih bridova i ukupnog broj bridova. Broj frustriranih bridova je konstantan, dok se ukupan broj bridova linearno povećava, čime se njihov omjer smanjuje. Možemo primijetiti da u ovom slučaju mjere b_K, b_A i b_N nisu jednake, ali poprimaju dovoljno bliske vrijednosti, posebice mjere b_K i b_N, dok b_C opada skoro dvostruko sporije u odnosu na preostale mjere.

3.3 Ciklus

Ciklus C_n s n vrhova je graf sa skupom vrhova $V(G) = v_1, \cdots, v_n$ i skupom bridova $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$.



Slika 3.8: Primjer ciklusa: C_3, C_4, C_5, C_6 i C_7

	n=3	n=5	n=7	n=9	n=11	n=33	n=55
b_K	0.5	0.191	0.099	0.060	0.041	0.004	0.002
b_A	0.5	0.191	0.099	0.060	0.041	0.004	0.002
b_N	0.5	0.191	0.099	0.060	0.041	0.004	0.002
b_C	0.314	0.017	0.003	5.34×10^{-6}	4.77×10^{-8}	0.000	0.000

Tablica 3.3: Izračun mjera nebipartitnosti za neke cikluse C_n.

Mjeru nebipartitnosti računamo samo za cikluse s neparnim brojem vrhova jer znamo da su ostali ciklusi bipartitni. Možemo uočiti da, povećanjem broja vrhova, mjera bipartitnosti opada kod svih mjera. Jako brzo kod mjere b_C, dok za ostale mjere nešto sporije. Također, uočavamo da, kao i kod potpunog grafa, iz regularnosti ciklusa slijedi da mjere b_k, b_A i b_N poprimaju iste vrijednosti. Iz analize dobivenih podataka uočili smo da, za sve cikluse neparne duljine, vrijedi $\lambda_{max}[\mathbf{A}] = 2$, a prema [6] vrijedi da su svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa C_n dane sa

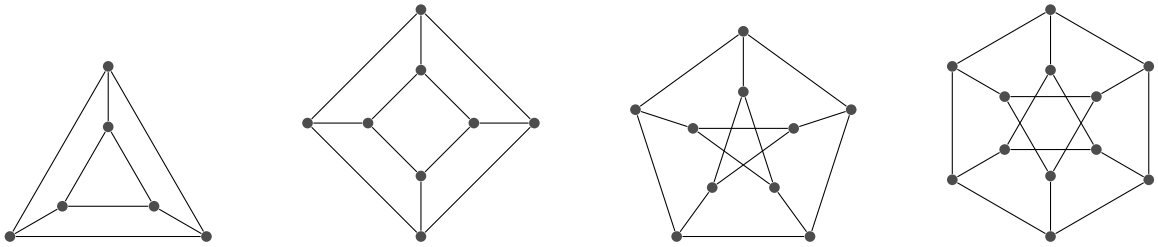
$$\lambda_j = 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Pa imamo da, za neparan n, mjeru $b_A(G)$ možemo jednostavnije izračunati primjenom formule:

$$b_A(C_n) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

3.4 Generalizirani Petersenov graf

Generalizirani Petersenov graf $GP_{n,k}$ je povezani graf s $2n$ vrhova i $3n$ bridova. Sastoji se od unutarnjeg dijela s n vrhova u obliku cirkulantnog grafa s korakom k i vanjskog dijela - ciklusa s n vrhova, tako da su odgovarajući vrhovi unutarnjeg i vanjskog dijela grafa povezani bridovima. Najpoznatiji takav graf je Petersonov graf $GP_{5,2}$ jednostavan 3-regularan graf s 10 vrhova i 15 bridova.



Slika 3.9: Primjeri generaliziranih Petersenovih grafova: $GP_{3,1}$, $GP_{4,1}$, $GP_{5,2}$, $GP_{6,2}$.

	$GP_{3,1}$	$GP_{4,1}$	$GP_{5,1}$	$GP_{5,2}$	$GP_{6,1}$	$GP_{6,2}$	$GP_{7,1}$	$GP_{7,2}$	$GP_{7,3}$
b_K	0.333	0	0.127	0.333	0	0.255	0.066	0.223	0.227
b_A	0.333	0	0.127	0.333	0	0.255	0.066	0.223	0.227
b_N	0.333	0	0.127	0.333	0	0.255	0.066	0.223	0.227
b_C	0.314	0	0.017	0.081	0	0.182	0.003	0.037	0.037

Tablica 3.4: Izračun mjera nebipartitnosti za neke generalizirane Petersenove grafove $GP_{n,k}$

Za generalizirani Petersenov graf nismo uspjeli doći do značajnijih zaključaka o promatranim mjerama nebipartitnosti. Kako se GP-graf definira uz pomoć dvije vrijednosti n i k, uspoređivali smo grafove na 2 načina. Za fiksan k, uz povećanje broja vrhova v; i obrnuto, uz fiksan broj vrhova v, po svim mogućim k (vrijedi $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$). No u oba slučaja mjere divergiraju i ne nalazimo nikakav uočljivi uzorak u rezultatima. Ono što je očito samim pogledom na graf, pokazalo se točnim i za promatrane mjere, a to je da su GP-grafovi uz paran broj vrhova n i neparan k bipartitni (jer ne sadrže cikluse parne duljine). Ponovo, kao i kod potpunog grafa, iz regularnosti GP-grafa slijedi da mjere b_k, b_A i b_N poprimaju iste vrijednosti.

Dodatak A

Izračun mjera nebipartitnosti

Navodimo kodove pisane u programu *Mathematica* koje smo koristili pri izračunu mjera nebipartitnosti. Prva četiri koda prikazuju izračun jedne od mjera nebipartitnosti, iz dobivene matrice susjedstva, za primjer grafa sa slike 2.1. U zadnjem kodu najprije se generira matrica susjedstva prema zadanim parametrima te se nakon toga računaju sve četiri mjere nebipartitnosti.

A.1 Mjera frustriranosti - spektar od K

In[1]:= $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
g = AdjacencyGraph[A]
Diag = DiagonalMatrix[Total[A]]
Edge = Total[Total[A]]/2
V = Dimensions[A]
K = A + Diag
l = Min[Eigenvalues[K]]
bK = (V[[1]]/(2.Edge))*(l)
```

Out[1]= {{0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1, 1}, {1, 1, 0, 1, 0},
{1, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}}

Out[2]=

Out[3]= {{2, 0, 0, 0, 0}, {0, 3, 0, 0, 0}, {0, 0, 3, 0, 0},
{0, 0, 0, 3, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}

Out[4]= 6

Out[5]= {5, 5}

Out[6]= {{2, 0, 1, 1, 0}, {0, 3, 1, 1, 1}, {1, 1, 3, 1, 0},
{1, 1, 1, 3, 0}, {0, 1, 0, 0, 1}}

Out[7]= Root[8 - 30 # + 30 #^2 - 10 #^3 + #^4& , 1, 0]

Out[8]= 0.174247

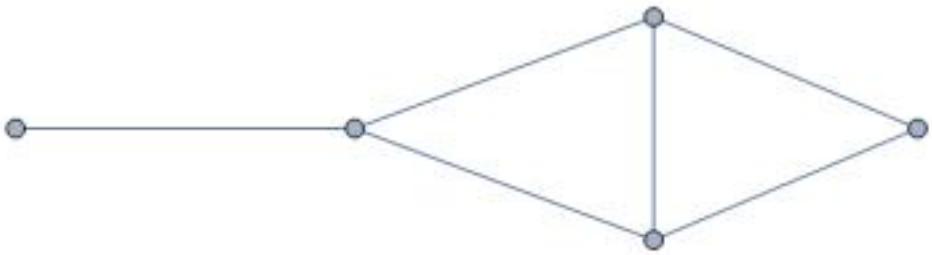
A.2 Mjera nebipartitnosti - spektar od A

In[9]:= $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
g = AdjacencyGraph[A]
e = N[Eigenvalues[A]
lmin = N[Min[e]]
lmax = N[Max[e]]
bA = 1 - (Abs[lmin/lmax])
```

Out[9]= {{0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1, 1}, {1, 1, 0, 1, 0}, {1, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}}

Out[10]=



Out[11]= {2.64119, -1.77571, -1., 0.723742, -0.589216}

Out[12]= -1.77571

Out[13]= 2.64119

Out[14]= 0.327684

A.3 Mjera nebipartitnosti - spektar od N

In[15]:= $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

```
g = AdjacencyGraph[A]
Diag = DiagonalMatrix[Total[A]]
Di = MatrixPower[Diag, -1/2]
nA = Di.A.Di
l = Min[Eigenvalues[nA]]
bN = N[l] + 1
```

Out[15]=

Out[16]= $\{\{2, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 3, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 3, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 3, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 1\}\}$

Out[17]= $\{\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0\}, \{0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0\}, \{0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\}, \{0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 1\}\}$

Out[18]= $\{\{0, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\}, \{0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\}, \{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\}, \{0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0\}\}$

Out[19]= $\frac{1}{6}$ (-1 - Sqrt13Sqrt)

Out[20]= 0.232408

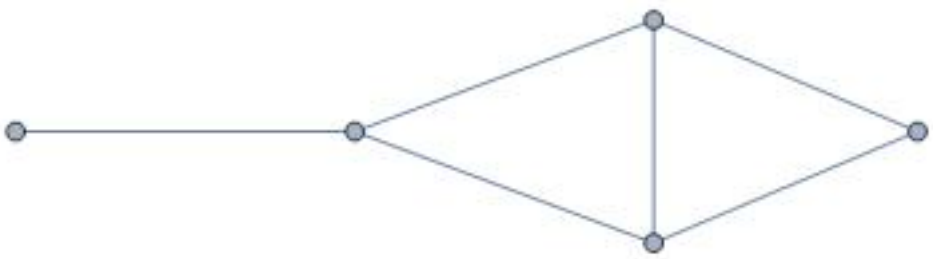
A.4 Mjera nebipartitnosti - neparni ciklusi

In[21]:= $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
g = AdjacencyGraph[A]
l = N[Eigenvalues[A]]
elplus = N[E^l]
elneg = N[E^-l]
en = Total[elneg]
ep = Total[elplus]
bC = 1 - (en/ep)
```

Out[21]= {{0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1, 1}, {1, 1, 0, 1, 0}, {1, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}}

Out[22]=



Out[23]= {2.64119, -1.77571, -1., 0.723742, -0.589216}

Out[24]= {14.0298, 0.169363, 0.367879, 2.06214, 0.554762}

Out[25]= {0.0712767, 5.90449, 2.71828, 0.484934, 1.80257}

Out[26]= 10.9816

Out[27]= 17.184

Out[28]= 0.360942

A.5 Za različite klase grafova

Početni dio koda (ovisno o klasi grafa):

Potpuni graf K_n

```
n = 15
g = CompleteGraph[n];
A = AdjacencyMatrix[g];
```

Ciklus C_n

```
n = 5
g = CycleGraph[n];
A = AdjacencyMatrix[g];
```

Zvijezda $S_n + 1$ brid

```
n = 10
g = StarGraph[n];
A = AdjacencyMatrix[g];
A[[2, 3]] = 1;
A[[3, 2]] = 1;
```

Generalizirani Petersenov graf $GP_{n,k}$

```
n = 8
k = 2
g = PetersenGraph[n, k];
A = AdjacencyMatrix[g];
```

Zajednički dio koda (za sve klase grafova):

```
Edge = Total[Total[A]]/2;
V = Dimensions[A];
Diag = DiagonalMatrix[Total[A]];
K = A + Diag ;
Di = MatrixPower[Diag, -1/2];
nA = Di.A.Di;
lk = Min[Eigenvalues[K]];
ln = Min[Eigenvalues[nA]];
la = Eigenvalues[A];
lamin = N[Min[la]];
lamax = N[Max[la]];
elplus = N[E^la];
elneg = N[E^-la];
en = Total[elneg];
ep = Total[elplus];
bK = (V[[1]]/(2. Edge))*(lk)
bA = 1 - (Abs[lamin/lamax])
bN = N[ln] + 1
bC = 1 - (en/ep)
```

Bibliografija

[1] A.E. Brouwer i W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer Science & Business Media, 2012.

[2] E. Croot, *The Rayleigh Principle for Finding Eigenvalues*, 2005, `http://people.math.gatech.edu/~ecroot/notes_linear.pdf`.

[3] D.M. Cvetković, M. Doob i H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application*, Academic Press, New York, 1980.

[4] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2006.

[5] E. Estrada i J. Gómez-Gardeñes, *Network bipartivity and the transportation efficiency of European passenger airlines*, Physica D: Nonlinear Phenomena **323** (2015), 57–63.

[6] R Gera i P. Stănică, *The spectrum of generalized Petersen graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **49** (2011), 39–45, `http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/49/ajc_v49_p039.pdf`.

[7] P. Holme, F. Liljeros, C.R. Endling i B.J. Kim, *On Network bipartivity*, Physical Review E **68** (2003), 056107, `https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0302296.pdf`.

[8] J. Kunegis, *Exploiting The Structure of Bipartite Graphs for Algebraic and Spectral Graph Theory Applications*, Internet Mathematics **11(3)** (2015), 201–321, `https://arxiv.org/pdf/1412.6073.pdf/`.

[9] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

Sažetak

U ovom radu promatramo svojstvo nebipartitnosti grafa. Osnovna karakterizacija nebipartitnosti kaže nam da je graf bipartitan ako i samo ako ne sadrži cikluse neparne duljine. No, nisu svi grafovi jednako daleko od toga da budu bipartitni. Kako bi mogli mjeriti koliko je neki graf udaljen od toga da bude bipartitan, definiramo četiri različite mjere nebipartitnosti, koje postižu vrijednosti između 0 i 1. Pritom grafove zapisujemo koristeći matrice. Prva mjera temelji se na omjeru broja frustriranih bridova i ukupnog broja bridova grafa. Njezinu aproksimaciju računamo uz pomoć svojstava nenegativne Laplaceove matrice. Druga i treća mjera temelje se na udaljenosti između najmanje i najveće svojstvene vrijednosti matrice susjedstva, odnosno normalizirane matrice susjedstva. Zadnja mjera temelji se na omjeru broja neparnih ciklusa i ukupnog broja ciklusa u grafu, te ju računamo koristeći svojstva matrice susjedstva. Na kraju rada, uz pomoć programa *Mathematica* testiramo definirane mjere i proučavamo promjenu mjera za neke poznate klase grafove - potpune grafove, cikluse, zvijezde i generalizirane Petersenove grafove.

Summary

In this thesis, we consider the non-bipartite property of a graph. The basic characterization of non-bipartivity says that a graph is bipartite if and only if it does not contain cycles of odd length. But, not all graphs are equally far from being bipartite. To be able to measure how far a graph is from being bipartite, we define four different non-bipartivity measures, all of whom achieve values between 0 and 1. The first measure is based on the ratio of the number of frustrated edges to the total number of edges in a graph. We calculate this measure approximatly, using the properties of the signless Laplacian matrix. The second measure is based on the distance between the smallest and the largest eigenvalues of the adjacency matrix, while the third measure is based on the distance between the smallest and the largest eigenvalues of the normalized adjacency matrix. The final measure is based on the ratio of the number of odd cycles to the total number of all cycles in a graph, and we calculate it using the properties of the adjacency matrix. Using *Mathematica* we are able to test the defined measures and observe how their values change for some known classes of graphs - complete graphs, cycles, stars, and generalized Petersen graphs.

Životopis

Rođena sam 06.01.1990. godine u Rijeci. Djetinjstvo provodim u Buzetu, gdje 1996. godine upisujem Osnovnu školu Vazmoslava Gržalje. Nakon završene osnovne škole, 2004. godine upisujem Klasičnu gimnaziju u Pazinu, koju pohađam do 2008. godine, kada upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2017 završavam preddiplomski studij i stječem akademski naziv prvostupnice edukacije matematike. Na istom fakultetu nastavljam diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer nastavnički.