

K-Riemannov integral

Nikšić, Ante

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:368877>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ante Nikšić

K-Riemannov integral

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Sanja Varošaneć

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik

2. _____ , član

3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____

2. _____

3. _____

Zahvaljujem se mentorici prof.dr.sc. Sanji Varošaneć na izvrsnom vođenju, pomoći i savjetima pri pisanju ovog diplomskog rada, a najviše od svega na njezinom strpljenju i razumijevanju.

Također, zahvaljujem Anđelki i Heli koje su bile uz mene, poticale me i ohrabrivale te učinile sve ove godine zabavnijima i lakšima.

Na kraju, veliku zahvalnost dugujem svojoj obitelji; mami i bratu na beskonačnom razumijevanju i bezuvjetnoj podršci, a posebno tati kojem sam dao obećanje i koji mi je posljednjih godina bio velika motivacija u pisanju ovog diplomskog rada i završetku studija.

Bez vas to ne bi bilo moguće. Veliko hvala svima.

Sadržaj

Uvod	1
1 Osnovni pojmovi i definicije	2
2 Konstrukcija \mathbb{K} -Riemannovog integrala	9
3 Svojstva \mathbb{K} -Riemannovog integrala	16
4 Poveznica između radijalne \mathbb{K} -derivacije i \mathbb{K} -Riemannovog integrala	28
5 Hermite-Hadamardova nejednakost	31
Sažetak	37
Summary	38
Životopis	39

Uvod

U ovom radu uvodimo pojam \mathbb{K} -Riemannov integral kao prirodnu generalizaciju uobičajenog Riemannovog integrala i proučavamo njegova svojstva. Ponovit ćemo osnovne pojmove o Riemannovom integralu, a zatim ćemo pokazati konstrukciju \mathbb{K} -Riemannovog integrala te definirati pojam radijalne \mathbb{K} -derivacije i pokušati saznati postoji li poveznica između radijalne \mathbb{K} -derivacije i \mathbb{K} -Riemannovog integrala.

U završnom dijelu rada proširit ćemo klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti na slučaj kada se uobičajeni Riemannov integral zamijeni s \mathbb{K} -Riemannovim integralom i pojam konveksnosti zamijeni s \mathbb{K} -konveksnosti.

1 Osnovni pojmovi i definicije

U ovom diplomskom radu koristit ćemo sljedeće oznake: za skupove prirodnih, racionalnih i realnih brojeva koristimo uobičajene oznake \mathbb{N} , \mathbb{Q} i \mathbb{R} respektivno. Sa I ćemo označavati otvoreni interval u \mathbb{R} , a sa \mathbb{K} potpolje od \mathbb{R} . Skup $\mathbb{K} \cap \langle 0, \infty \rangle$ označavat ćemo sa \mathbb{K}_+ . Simbol $[a, b]_A$ će označavati A -konveksnu ljusku od $\{a, b\}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}$, tj.

$$[a, b]_A = \left\{ \alpha a + (1 - \alpha)b : \alpha \in A \cap [0, 1] \right\}.$$

U slučaju da je $A = \mathbb{R}$, koristit ćemo standardni simbol $[a, b]$ umjesto $[a, b]_{\mathbb{R}}$. Skupovi \mathbb{Q} i \mathbb{R} su polja, no u skupu \mathbb{R} možemo promatrati i druga polja osim \mathbb{Q} . Jedan primjer potpolja u \mathbb{R} dan je u sljedećem primjeru.

Primjer 1.1. *Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj. Skup $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ je polje.*

Za dokaz te tvrdnje trebamo provjeriti jesu li $(\mathbb{Q}(\sqrt{p}), +)$ i $(\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelove grupe te vrijedi li distributivnost množenja prema zbrajanju. Zbrajanje je zatvoreno u $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ jer ako uzmemo dva elementa iz $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$: $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$, tada je

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p},$$

a to je element od $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ zbog zatvorenosti zbrajanja u skupu \mathbb{Q} . Za umnožak vrijedi sljedeće:

$$x_1 \cdot x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1a_2 + b_1b_2p) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{p},$$

a to je element od $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ zbog zatvorenosti množenja i zbrajanja u \mathbb{Q} . Sva svojstva kao što su asocijativnost i komutativnost zbrajanja i množenja te distributivnost vrijede jer su nasljeđena od istih svojstava u \mathbb{R} . Neutralni element za zbrajanje je $0 = 0 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, a za množenje $1 = 1 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Ako je $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, tada je $-a - b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ njemu suprotni element. Recipročni element od $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ je $\frac{1}{a + b\sqrt{p}}$ i na prvi pogled nije očito da pripada $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. No racionalizacija nazivnika daje sljedeće

$$\frac{1}{a + b\sqrt{p}} = \frac{1}{a + b\sqrt{p}} \cdot \frac{a - b\sqrt{p}}{a - b\sqrt{p}} = \frac{a - b\sqrt{p}}{a^2 - pb^2} = \frac{a}{a^2 - pb^2} - \frac{b}{a^2 - pb^2}\sqrt{p}$$

što je očito element iz $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$.

Dakle, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ je polje.

□

Ovime smo pokazali da skup \mathbb{R} ima i drugih potpolja osim skupa \mathbb{Q} . Međutim, ako je \mathbb{K} neko potpolje od \mathbb{R} , tada ovo sadrži \mathbb{Q} . Naime, potpolje \mathbb{K} mora sadržavati 1 i 0 jer su to neutralni elementi za množenje i zbrajanje. No tada $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, \dots$ leže u \mathbb{K} zbog zatvorenosti zbrajanja, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$. Zbog postojanja suprotnih elemenata slijedi da i $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. Zbog postojanja recipročnih elemenata slijedi da $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$ leže u \mathbb{K} , a tada i $\frac{m}{n} \in \mathbb{K}$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Drugim riječima, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$.

Definicija 1.2. Preslikavanje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo aditivnim ako zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Napomena 1.3. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -homogena stupnja α ako vrijedi

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Ako je $\alpha = 1$ tada kažemo da je funkcija f \mathbb{K} -homogena.

Preslikavanje f se zove \mathbb{K} -linearno ako je f aditivna i \mathbb{K} -homogena funkcija, tj.

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Propozicija 1.4. Svaka aditivna funkcija je \mathbb{Q} -homogena.

Dokaz. Ako u (1) uvrstimo $x = y = 0$, dobivamo $f(0) = f(0) + f(0)$ iz čega slijedi $f(0) = 0$. Ako u istu tu jednadžbu uvrstimo $y = -x$, slijedi

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$

iz čega slijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo da je

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Provjerimo vrijedi li baza indukcije. Za $n = 1$ imamo

$$f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x) = f(x) = f(1 \cdot x).$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$ gdje je $n = k$.

Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1, k \in \mathbb{N}$. Ako u jednadžbu $f(x + y) = f(x) + f(y)$ uvrstimo $y = kx$, dobivamo

$$f((k + 1)x) = f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k + 1)f(x).$$

Dakle, $f(nx) = nf(x)$, za svaki $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi i ovo:

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je, prema upravo dokazanom svojstvu

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj.

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

I konačno, za $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(\frac{mx}{n}\right) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{1}{n}mf(x) = \frac{m}{n}f(x),$$

tj. f je \mathbb{Q} -homogena.

Definicija 1.5. *Kažemo da je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Jensen-konveksna ako*

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in I.$$

Preslikavanje f je \mathbb{K} -konveksno ako

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall x, y \in I, \alpha \in \mathbb{K} \cap \langle 0, 1 \rangle.$$

Ako vrijedi suprotna nejednakost kažemo da je f \mathbb{K} -konkavna.

Propozicija 1.6. *Ako je f Jensen-konveksna funkcija, tada je f \mathbb{Q} -konveksna.*

Dokaz. Treba dokazati da vrijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in I, \alpha \in \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle.$$

Prvo ćemo metodom regresivne matematičke indukcije dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}. \quad (2)$$

Prvo dokazujemo da (2) vrijedi za potencije broja 2, tj. za $n = 2^k$. Za $n = 2$ (2) je upravo definicija Jensen-konveksne funkcije.

Pretpostavimo da (2) vrijedi za $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi za $n = 2^{k+1}$.

Prvo ćemo zbroj $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ prikazati kao zbroj dva broja na koja ćemo zatim primijeniti pretpostavku indukcije.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} + \frac{1}{2} \frac{f(x_{2^k+1}) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k} \\ &= \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili definiciju Jensen konveksne funkcije, a u drugoj smo koristili pretpostavku indukcije. Dokažimo da ako tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, da tada vrijedi i za $n - 1$.

Zamijetimo da vrijedi

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \right] \end{aligned}$$

pri čemu smo primjenili pretpostavku da tvrdnja vrijedi za n .
Tada je

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) &\leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right) \\
 &\quad + \frac{1}{n}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \\
 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right)\left[1 - \frac{1}{n}\right] &\leq \frac{1}{n}\left[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right] \\
 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) &\leq \frac{1}{n-1}\left[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right].
 \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za sve n koji su potencije broja 2, a sad smo dokazali da ako vrijedi za neki n , onda vrijedi i za njegovog prethodnika. Prema metodi regresivne indukcije vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Neka je $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Tada je α oblika $\alpha = \frac{m}{n}, m < n, m, n \in \mathbb{N}$.

Tada je $1 - \alpha = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$.

Vrijedi,

$$\begin{aligned}
 f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= f\left(\frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n}y\right) \\
 &= f\left(\frac{mx + (n-m)y}{n}\right) \\
 &= f\left(\frac{x + \dots + x + y + \dots + y}{n}\right) \\
 &\leq \frac{f(x) + \dots + f(x) + f(y) + \dots + f(y)}{n} \\
 &= \frac{mf(x) + (n-m)f(y)}{n} \\
 &= \frac{m}{n}f(x) + \frac{n-m}{n}f(y) \\
 &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y),
 \end{aligned}$$

pri čemu smo u nejednakosti koristili maloprije dokazanu nejednakost za x_1, \dots, x_n .

□

Propozicija 1.7. *Ako je f \mathbb{K} -konveksna, tada je f \mathbb{Q} -konveksna.*

Dokaz. Budući da je za svako potpolje $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, skup \mathbb{Q} njegov podskup, tvrdnja je očita. □

Definicija 1.8. Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zovemo radijalno \mathbb{K} -neprekidna u točki $x_0 \in I$ ako $\forall u \in I$

$$\lim_{\substack{\alpha \in \mathbb{K}_+ \\ \alpha \rightarrow 0}} f((1 - \alpha)x_0 + \alpha u) = f(x_0). \quad (3)$$

Kažemo da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ radijalno \mathbb{K} -neprekidna ako je radijalno \mathbb{K} -neprekidna u svakoj točki svoje domene D .

Definicija 1.9. Neka je $D \subset \mathbb{R}$. Za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je uniformno neprekidna na D ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in D$ koji su udaljeni za manje od δ , njihove funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $f(y)$ su udaljene za manje od ε , tj,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Definicija 1.10. Kažemo da je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidna ako za bilo koji $x_0 \in I$ i $u \in I$ preslikavanje

$$\alpha \mapsto f(x_0 + \alpha(u - x_0)), \alpha \in \mathbb{K} \cap [0, 1]$$

uniformno neprekidno.

Uniformna neprekidnost očito povlači neprekidnost na D , (tj. u svakoj točki $c \in D$). Razlika između pojmova neprekidnosti na D i uniformne neprekidnosti na D je u tome što kod uniformne neprekidnosti δ ovisi o ε , dok kod obične neprekidnosti δ ovisi i o ε i o svakoj točki $c \in D$. Dakle, ako je f neprekidna na D , tada za fiksirani $\varepsilon > 0$ svaki $c \in D$ ima svoj $\delta_{c,\varepsilon} > 0$ takav da za sve $x \in A$ za koje je $|x - c| < \delta_{c,\varepsilon}$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. No, općenito nećemo moći naći univerzalni $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ za sve $x, y \in D$ za koje $|x - y| < \delta$.

Primjer 1.11. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s $f(x) = x^2$ je neprekidna na \mathbb{R} , ali ona nije uniformno neprekidna na \mathbb{R} . Zaista, za prirodni broj n stavimo $a_n = \sqrt{n}$.

Tada je (a_n) niz u \mathbb{R} takav da vrijedi

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0, \text{ kada } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Neka je $0 < \varepsilon \leq 1$.

Za proizvoljan $\delta > 0$ izaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta$. Iz (4) slijedi

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \delta.$$

S druge strane imamo,

$$|f(a_{n_0+1}) - f(a_{n_0})| = |(n_0 + 1) - n_0| = 1 \geq \varepsilon.$$

Bilo koja neprekidna i bilo koja uniformno neprekidna funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ su radijalno \mathbb{K} -neprekidne i uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidne. Može se dogoditi da je uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidna funkcija prekidna u svakoj točki. Jednostavan primjer je bilo koje prekidno \mathbb{K} -linearno preslikavanje. S druge strane, svaka uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidna funkcija je također radijalno \mathbb{K} -neprekidna funkcija, ali obratno ne vrijedi.

Propozicija 1.12. *Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je radijalno \mathbb{K} -neprekidna ako i samo ako za svaki $a, b \in I$, funkcija $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ je neprekidna.*

Propozicija 1.13. *Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidna ako i samo ako za svaki $a, b \in I$, funkcija $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ je uniformno neprekidna.*

2 Konstrukcija \mathbb{K} -Riemannovog integrala

Sadržaj ovog i sljedećih poglavlja zasniva se na sadržaju članka [1], dok se rezultati o klasičnom Riemannovom integralu mogu naći u knjigama [2] i [3].

Ponovimo za početak neke osnovne pojmove o Riemannovom integralu. Neka je $[a, b]$, $a < b$ segment u \mathbb{R} i neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a, b]$. To znači da postoje $m = \inf_{[a,b]} f$ i $M = \sup_{[a,b]} f$, tj.

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M.$$

Uočimo, ako je $[a', b'] \subseteq [a, b]$ podsegment, onda za svaki $x \in [a', b']$, vrijedi

$$m \leq m' \leq f(x) \leq M' \leq M$$

gdje je $m' = \inf_{[a',b']} f$ i $M' = \sup_{[a',b']} f$. Dakle, infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu i supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu. Nadalje, neka je $n \in \mathbb{N}$. Podijelimo (izvršimo subdiviziju) segment $[a, b]$ točkama

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

na n dijelova. Neka je $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$ i $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$, gdje je $k = 1, 2, \dots, n$.

Neka su $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ po volji izabrane točke. Definirajmo sljedeće sume:

$$s = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \sigma = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}), S = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Broj s zovemo donja Darbouxova suma, S je gornja Darbouxova suma, a σ je integralna suma. Jasno je da vrijedi

$$m(b - a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b - a).$$

Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma s , B je skup svih gornjih Darbouxovih suma S , a C je skup svih integralnih suma σ funkcije f na segmentu $[a, b]$. Sve te sume dobiju se variranjem broja $n \in \mathbb{N}$, svim različitim

izborima subdivizije $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ i točkaka t_k . Iz nejednakosti o integralnim i Darbouxovim sumama slijedi da su skupovi A, B i C ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$. Prema aksiomu potpunosti postoje

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \sup A \quad , \quad \mathcal{I}^*(f; a, b) = \inf B.$$

Definicija 2.1. Broj $\mathcal{I}_*(f; a, b)$ zovemo donji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$, a broj $\mathcal{I}^*(f; a, b)$ zovemo gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Iz prethodnog je jasno da donji i gornji Riemannov integral postoje za svaku funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koja je ograničena na segmentu $[a, b]$ i da je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) \leq \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Definicija 2.2. Za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a, b]$ kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili R -integrabilna na segmentu $[a, b]$ ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva integral ili R -integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka:

$$\mathcal{I} = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Teorem 2.3. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tada je ona R -integrabilna na segmentu $[a, b]$.

Definicija 2.4. Za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je monotona po dijelovima na segmentu $[a, b]$ ako postoji subdivizija $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{k-1} < c_k < \dots < c_{n-1} < c_n = b$ takva da je $f|_{[c_{k-1}, c_k]}$ monotona funkcija za sve $k = 1, 2, \dots, n$.

Korolar 2.5. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima monotona funkcija na $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tada je ona R -integrabilna na segmentu $[a, b]$.

Kako smo ponovili bitne pojmove vezane uz Riemannov integral, možemo početi konstruirati \mathbb{K} -Riemannov integral.

Neka $\mathcal{P}_{[a,b]}$ predstavlja skup svih particija od intervala $[a, b]$, tj.

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(t_0, t_1, \dots, t_n) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

Nadalje, definiramo skup svih \mathbb{K} -particija na intervalu $[a, b]$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} &= \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]} : t_i = a + \alpha_i(b - a), \alpha_i \in \mathbb{K} \cap [0, 1], i = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]} : t_i \in [a, b]_{\mathbb{K}}, i = 1, 2, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena na skupu $[a, b]_{\mathbb{K}}$ sa

$$M := \sup_{x \in [a,b]_{\mathbb{K}}} f(x), m := \inf_{x \in [a,b]_{\mathbb{K}}} f(x).$$

Za danu \mathbb{K} -particiju $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$ definiramo

$$M_i := \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x), m_i := \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x), i = 1, 2, \dots, n.$$

Ovi supremumi i infimumi su dobro definirani, tj. to su konačni realni brojevi jer je f ograničena funkcija na $[a, b]_{\mathbb{K}}$. Odnosno,

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, i = 1, 2, \dots, n.$$

Sada možemo definirati gornju \mathbb{K} -Darbouxevu sumu funkcije f na sljedeći način,

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vrijedi:

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq \sum_{i=1}^n M(t_i - t_{i-1}) = M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b - a).$$

Donju \mathbb{K} -Darbouxovu sumu funkcije f možemo definirati kao,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vrijedi:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \geq \sum_{i=1}^n m(t_i - t_{i-1}) = m \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = m(b - a).$$

Primjetimo da vrijedi i sljedeća nejednakost,

$$\begin{aligned}
 m_i &< M_i \\
 m_i(t_i - t_{i-1}) &\leq M_i(t_i - t_{i-1}) / \sum_{i=1}^n \\
 \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \\
 \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi).
 \end{aligned}$$

Stoga zaključujemo da je $m(b-a) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq M(b-a)$. Sada možemo definirati gornji \mathbb{K} -Riemannov integral od funkcije f na intervalu $[a, b]$ kao,

$$\int_a^{-b} f(t) d_{\mathbb{K}}t := \inf \left\{ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \right\}$$

i donji \mathbb{K} -Riemannov integral kao

$$\int_{-a}^b f(t) d_{\mathbb{K}}t := \sup \left\{ \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \right\}.$$

Definicija 2.6. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena na $[a, b]_{\mathbb{K}}$ je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$ ako su gornji i donji \mathbb{K} -Riemannovi integrali jednaki. U tom slučaju, \mathbb{K} -Riemannov integral od f zapisujemo kao

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

U slučaju kada je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, koristit ćemo standardni simbol $\int_a^b f(t) dt$ umjesto $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$. Sljedeći teorem daje nam kriterij za \mathbb{K} -Riemann integrabilnost.

Teorem 2.7. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji particija $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$ takva da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Dokažimo prvo da za svaki pozitivni epsilon postoji particija $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$ takva da $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < \varepsilon$, tada je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -Riemann integrabilna

na $[a, b]$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo particiju $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$ koja zadovoljava gornju nejednakost. Kako vrijedi

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t$$

imamo,

$$0 \leq \int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t - \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Kako nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$,

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t.$$

Pogledajmo sada drugi smjer, tj. pretpostavimo da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna funkcija, želimo dokazati da postoji particija $\pi \in \mathcal{P}[a, b]^{\mathcal{K}}$ takva da $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji infimuma postoji particija π_1 , td.

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t + \frac{\varepsilon}{2},$$

a prema definiciji definiciji supremuma postoji particija π_2 , td.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) > \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Imajući na umu da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna što znači $\int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t$, možemo zapisati.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \\ &= \left(\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t \right) \\ &\quad + \left(\int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Korolar 2.8. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svaku particiju $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$,

$\pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$, takve da

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \longrightarrow 0, \text{ kada } n \rightarrow \infty$$

i za bilo koji izbor $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$ particije π_n imamo

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Propozicija 2.9. Neka su $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, potpolja od \mathbb{R} . Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K}_2 -Riemann integrabilna tada je također i \mathbb{K}_1 -Riemann integrabilna i vrijedi

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t.$$

Dokaz. Neka je $\pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$, $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz takav da

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Kako je f \mathbb{K}_2 -Riemann integrabilna, za bilo koji izbor $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}_1}$ particije π_n imamo ,

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Zbog proizvoljnosti od $\pi_n \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

□

Kao posljedicu gornje propozicije za $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}$ i $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ možemo zaključiti sljedeće.

Korolar 2.10. Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabilna u običajenom smislu, tada je za proizvoljno polje $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ funkcija f \mathbb{K} -Riemann integrabilna, i vrijedi,

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_a^b f(t) d.$$

Primjer 2.11. Neka je $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_1 \neq \mathbb{K}_2$ te neka su \mathbb{K}_1 i \mathbb{K}_2 potpolja od \mathbb{R} . Razmotrimo funkciju $f : [a, b]_{\mathbb{K}_2} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [a, b]_{\mathbb{K}_1} \\ 1 & ; x \in [a, b]_{\mathbb{K}_2} \setminus [a, b]_{\mathbb{K}_1}. \end{cases}$$

Vidimo da je f \mathbb{K}_1 -Riemann integrabilna i $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = 0$. S druge strane za svaku particiju $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_2} \setminus \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$, vrijedi da $\mathcal{U}_{\mathbb{K}_2}(\pi, f) = 1$ i $\mathcal{L}_{\mathbb{K}_2}(\pi, f) = 1$. Stoga,

$$0 = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t \neq \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = 1,$$

tj. f nije \mathbb{K}_2 -Riemann integrabilna. Primjetimo da ako zamjenimo u formuli za f , \mathbb{K}_1 sa D , dobivamo,

$$D := \{x \in [0, 1] : x = \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

tada dobivamo primjer funkcije koja nije \mathbb{K} -Riemann integrabilna za bilo koje podpolje $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$.

3 Svojstva \mathbb{K} -Riemannovog integrala

Propozicija 3.1. *Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ monotona tada je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ rastuća, tj.

$$f(x) \leq f(y), \text{ za } x \leq y, \text{ } x, y \in [a, b]_{\mathbb{K}},$$

te da je $f(a) \neq f(b)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Fiksirajmo neku proizvoljnu particiju π_n ,

$$\pi = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Kako je $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ rastuća za svaki $j \in \{1, \dots, k_n\}$

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]_{\mathbb{K}}} f(t) = f(t_j)$$

$$m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]_{\mathbb{K}}} f(t) = f(t_{j-1}).$$

Stoga sumiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) &= \sum_{j=1}^{k_n} (M_j - m_j)(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \sum_{j=1}^{k_n} (M_j - m_j) \\
&= \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \sum_{j=1}^{k_n} (f(t_j) - f(t_{j-1})) \\
&= \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \left[f(b) - f(t_{k_n-1}) + f(t_{k_n-1}) - f(t_{k_n-2}) \right. \\
&\quad \left. + \dots + f(t_2) - f(t_1) \right] \\
&= \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \left[f(b) - f(a) \right] \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji particija za koju je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) < \varepsilon$$

a to znači da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna.

Slijedi da $\mathcal{U}(f, \pi_n) - \mathcal{L}(f, \pi_n) = 0$ i zaključujemo da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna.

Dokaz za funkciju koja je padajuća je sličan. □

Teorem 3.2. *Ako su f i g \mathbb{K} -Riemann integrabilne na $[a, b]$, tada je $f + g$ \mathbb{K} -Riemann integrabilna.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna tada postoji subdivizija π_1 , $a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$ takva da je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^n \sup f \Big|_{J_k} \cdot (y_k - y_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \inf f \Big|_{J_k} \cdot (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon,$$

gdje je $J_k = [y_{k-1}, y_k]_{\mathbb{K}}$.

Budući da je g \mathbb{K} -Riemann integrabilna, tada postoji subdivizija π_2 , $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ takva da je $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) < \varepsilon$, tj.

$$\sum_{k=1}^r \sup g \Big|_{Z_k} \cdot (z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^r \inf g \Big|_{Z_k} \cdot (z_k - z_{k-1}) < \varepsilon$$

gdje je $Z_k = [z_{k-1}, z_k]_{\mathbb{K}}$. Sada promotrimo novu subdiviziju koja je nastala unijom svih točaka iz subdivizije za f i g . Ta nova subdivizija je profinjenje subdivizije za f i g i njezine članove nazovimo x_k , tj. radi se o subdiviziji π sa čvorovima $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, pri čemu je

$$\{x_0, x_1, \dots, x_m\} = \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \cup \{z_0, z_1, \dots, z_r\}.$$

Kad subdiviziju profinimo, tada se gornja Darbouxova suma smanji, a donja se poveća, tj.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &> \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1), \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi) > s(g, \pi_2) \\ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &< \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1), \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi) < S(g, \pi_2). \end{aligned}$$

Dakle vrijedi,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &< \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \varepsilon \\ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi) > \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi) &< \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dalje ćemo i za f i g koristiti subdiviziju π . Koristit ćemo ove oznake

$$\begin{aligned} M_k(f) &= \sup f|_{[x_{k-1}, x_k]} \\ m_k(f) &= \inf f|_{[x_{k-1}, x_k]}. \end{aligned}$$

Za supremum i infimum vrijedi:

$$\begin{aligned} \sup(f + g) &\leq \sup f + \sup g \\ \inf(f + g) &\geq \inf f + \inf g. \end{aligned}$$

Naime, za bilo koji $x \in [a, b]$ vrijedi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g,$$

tj. $\sup f + \sup g$ je gornja međa za skup $Im(f + g)$. To znači da je veća ili jednaka najmanjoj gornjoj međi za $Im(f + g)$, a to je upravo $\sup(f + g)$.

Time smo obrazložili prvu nejednakost. Druga se dobiva slično. Dokažimo da je $f + g$ integrabilna funkcija

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left(M_k(f+g) - m_k(f+g) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \sum_{k=1}^n \left(M_k(f) + M_k(g) - m_k(f) - m_k(g) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& = \sum_{k=1}^n \left(M_k(f) - m_k(f) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& \quad + \sum_{k=1}^n \left(M_k(g) - m_k(g) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za $2\varepsilon > 0$ postoji subdivizija za koju je $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < 2\varepsilon$, tj. $f + g$ je integrabilna.

Dokažimo da je $\int_a^b (f+g)(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t) d_{\mathbb{K}}t$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t) d_{\mathbb{K}}t & \leq M_k(f+g)(x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \sum_{k=1}^n M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n M_k(g)(x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \varepsilon + \sum_{k=1}^n m_k(g)(x_k - x_{k-1}) \\
& \leq 2\varepsilon + \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t) d_{\mathbb{K}}t,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u gornjim nejednakostima koristili tvrdnje

$$\sum_{k=1}^n m_k(F)(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b F(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \sum_{k=1}^n M_k(F)(x_k - x_{k-1})$$

za $F = f, g, f + g$, te nejednakost $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(F, \pi) < \varepsilon + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, \pi)$ za $F = f, g$.

Vrijedi i sljedeće:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t &\geq M_k(f+g)(x_k-x_{k-1}) \\
&\geq \sum m_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \sum m_k(g)(x_k-x_{k-1}) \\
&\geq \varepsilon + \sum M_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \varepsilon + \sum M_k(g)(x_k-x_{k-1}) \\
&\geq 2\varepsilon + \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\left| \int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t \right| \leq 2\varepsilon$$

a to znači da je

$$\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

□

Teorem 3.3. *Ako je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je*

$$\int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t = \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan te neka je $\alpha > 0$ (za $\alpha < 0$ dokaz je analogan). Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija za koju je $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Kako znamo da $\inf \alpha f = \alpha \inf f$ i $\sup \alpha f = \alpha \sup f$ onda vrijedi i

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha \mathcal{L}_{\mathbb{K}_f},$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha \mathcal{U}_{\mathbb{K}_f}.$$

Iz toga slijedi da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha(\mathcal{U}_{\mathbb{K}_f} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}_f}) < \varepsilon,$$

pa zaključujemo da je αf integrabilna, tj.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t - \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \right| &< \varepsilon \\
\Rightarrow \int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t &= \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.4. Neka je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna funkcija na $[a, b]$.

a) Ako je $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in [a, b]_{\mathbb{K}}$ tada je $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \geq 0$.

b) Apsolutna vrijednost $|f|$ je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$ i

$$\left| \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \right| \leq \int_a^b |f(t)| d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz.

a) Neka je $\{\pi_n\}_n$ bilo koji niz particija takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = 0$$

i neka je $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$. Tada je

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Budući da je $f(s_j^{(n)}) \geq 0$ za sve $j, n \in [a, b]_{\mathbb{K}}$, te da je $t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} > 0$ slijedi da su sume na desnoj strani nenegativne te je njihov limes nenegativan broj, tj. $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$ je nenegativan broj što je trebalo dokazati. □

b) Prvo zamjetimo da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left| |y| - |x| \right| \leq |y - x|.$$

Naime, ako y napišemo kao

$$y = (y - x) + x$$

i primijenimo nejednakost trokuta $|a + b| \leq |a| + |b|$ na brojeve $a = y - x$ i $b = x$ dobivamo

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|,$$

tj.

$$|y| - |x| \leq |y - x|.$$

Ako u zadnjoj nejednakosti zamijenimo x i y dobivamo da je $|x| - |y| \leq |x - y| = |y - x|$. Iz te dvije nejednakosti slijedi da je $||y| - |x|| \leq |y - x|$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada za svaka dva $x, y \in [a, b]$ za koje je $|y - x| < \varepsilon$, prema upravo dokazanom, vrijedi i da je

$$\left| |y| - |x| \right| < \varepsilon.$$

Funkcija f je \mathbb{K} -integrabilna na $[a, b]$ pa za $\varepsilon^2 > 0$ postoji particija $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ od $[a, b]$ takva da je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon^2.$$

Neka su

$$M_i := \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x),$$

$$m_i := \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x),$$

$$M_i^* := \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x),$$

$$m_i^* := \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x).$$

Indekse $1, 2, \dots, n$ brojeva iz particije π podijelimo u dva skupa A i B . U skupu A su svi oni indeksi i za koje je $M_i - m_i < \varepsilon$. U skupu B su oni indeksi i za koje je $M_i - m_i \geq \varepsilon$.

Prvo promotrimo $i \in A$. Za taj indeks i vrijedi $M_i - m_i < \varepsilon$, tj.

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x) < \varepsilon.$$

To znači da je razlika funkcijskih vrijednosti za bilo koja dva broja iz $[t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}$ manja od ε , tj,

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon$$

za sve $t, s \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}$. Budući da je

$$||f(t)| - |f(s)|| < |f(t) - f(s)|,$$

slijedi i da je

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) < \varepsilon,$$

tj, $M_i^* - m_i^* < \varepsilon$. Promotrimo sada $i \in B$. Funkcija f je ograničena na $[a, b]_{\mathbb{K}}$, tj. $f(t) \in [m, M]$. Tada $|f(t)| \in [0, K]$ gdje je $K = \max\{|m|, |M|\}$. Tada je

$$M_i^* - m_i^* = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) \leq K + K = 2K.$$

Sad vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in B} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \in B} m_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i \in A} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Ali za $i \in B$ imamo da je $M_i - m_i \geq \varepsilon$ pa zajedno s prethodnom nejednakosti imamo:

$$\sum_{i \in B} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon^2,$$

pa kad podijelimo s ε dobijemo

$$\sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Sad ocijenimo razliku između gornje i donje Darbouxove sume za funkciju $|f|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) &= \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i \in A} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} 2K(x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon(b - a) + 2K\varepsilon \\
&= \varepsilon(b - a + 2K),
\end{aligned}$$

tj.

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) < \varepsilon(b - a + 2K),$$

a budući da je ε proizvoljan slijedi da je $|f|$ integrabilna. Za dokaz formule koristit ćemo da je integral jednak limesu integralnih suma. Naime, neka je $\{\pi_n\}_n$ bilo koji niz particija od $[a, b]_{\mathbb{K}}$ takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = 0$$

i neka je $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$. Tada je prema nejednakosti trokuta

$$\left| \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \right| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |f(s_j^{(n)})| (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}),$$

tj.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \right| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} |f(s_j^{(n)})| (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = \int_a^b |f|(x) d_{\mathbb{K}}x. \end{aligned}$$

□

Propozicija 3.5. *Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidna, tada je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na svakom podskupu $[c, d] \subset [a, b]$.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $c, d \in [a, b]$ takvi da je $c < d$. Prema propoziciji 1.3, zaključujemo da je $f|_{[c, d]}$ je uniformno neprekidna. Kako $cl([c, d]_{\mathbb{K}}) = [c, d]$, postoji jedinstvena neprekidna funkcija $g_{cd} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ takva da

$$g_{cd}(t) = f(t) \quad , \quad t \in [c, d]_{\mathbb{K}}.$$

Na temelju korolara 2.10, f je \mathbb{K} -Riemann integrabilna, štoviše

$$\int_c^d f(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_c^d g_{cd}(t) dt.$$

□

Teorem 3.6. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -konveksna funkcija. Tada za proizvoljne $a, b \in I$ $a < b$ funkcija $f|_{[a, b]}$ je uniformno neprekidna.*

Teorem 3.7. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -konveksna funkcija. Tada za proizvoljne $a, b \in I$ $a < b$ postoji jedinstvena neprekidna funkcija $g_{ab} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, takva da*

$$g_{ab}(x) = f(x) \quad , \quad x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Funkcija g_{ab} zadovoljava sljedeću nejednakost

$$g_{ab}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{g_{ab}(x) + g_{ab}(y)}{2}$$

za svaki $x, y \in [a, b]$, posebno g_{ab} je konveksna funkcija.

Sada možemo izračunati integral od \mathbb{K} -linearne funkcije. Primjetimo da funkcija može biti prekidna u svakoj točki, tako da Riemannov integral možda niti ne postoji.

Propozicija 3.8. *Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -linearna funkcija. Tada je funkcija f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na svakom intervalu $[a, b]$, štoviše*

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f \mathbb{K} -linearna funkcija. Na temelju propozicije 2.2 i teorema 2.3, zaključujemo da je funkcija f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na svakom intervalu $[a, b]$. Nadalje, neka je

$$\pi_n := (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$$

gdje je $t_j^{(n)} := a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Imamo ovo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(t_j^{(n)}) \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(na + \frac{n(n+1)}{2n}(b-a) \right) \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{n+1}{2n}(b-a) \right) (b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(a) + \frac{n+1}{2n} f(b-a) \right) (b-a) \\ &= \left[f(a) + f\left(\frac{b-a}{2}\right) \right] (b-a) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a). \end{aligned}$$

□

Teorem 3.9. *Pretpostavimo da $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $c \in [a, b]_{\mathbb{K}}$. Tada f je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$ akko je \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, c]$ i $[c, b]$. Štoviše u tom slučaju,*

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$. Uzmemo $\varepsilon > 0$ i particiju $\pi \in \mathcal{P}_{[a, b]}^{\mathbb{K}}$ takvu da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Definirajmo $\bar{\pi}$ kao proširenje od π nastalo dodavanjem c na rubne točke od π . Tada je $\bar{\pi} = \pi_1 \cup \pi_2$, gdje

$$\pi_1 := \bar{\pi} \cap [a, c]_{\mathbb{K}} \quad , \quad \pi_2 := \bar{\pi} \cap [c, b]_{\mathbb{K}}.$$

Očito, $\pi_1 \in \mathcal{P}_{[a, c]}^{\mathbb{K}}$ i $\pi_2 \in \mathcal{P}_{[c, b]}^{\mathbb{K}}$, štoviše

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2).$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) &= \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) - \left[\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \right] \\ &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon, \end{aligned}$$

što dokazuje da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, c]$. Zamjenom π_1 i π_2 , dobiti ćemo dokaz za $[c, b]$. Pogledajmo sad drugi smjer ekvivalencije. Ako je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, c]$ i $[c, b]$, tada postoje particije $\pi_1 \in \mathcal{P}_{[a, c]}^{\mathbb{K}}$ i $\pi_2 \in \mathcal{P}_{[c, b]}^{\mathbb{K}}$ takve da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Tada

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) < \varepsilon,$$

što dokazuje da je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna na $[a, b]$. Konačno, ako je f \mathbb{K} -Riemann integrabilna, tada sa particijama kao gore π, π_1, π_2 , kao gore imamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \\
&< \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) + \varepsilon \\
&< \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &\geq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \\
&> \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) + \varepsilon \\
&> \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, vidimo da

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

□

Promotrimo da za \mathbb{K} -linearnu funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ i za točku $c = \alpha a + (1 - \alpha)b \in (a, b)$, gdje je $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, imamo

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{2}(f(\alpha(a - b)) - \alpha f(a - b))(a - b).$$

Stoga, može se dogoditi da za neke $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle \setminus \mathbb{K}$, gornji izraz je različit od nule.

4 Poveznica između radijalne \mathbb{K} -derivacije i \mathbb{K} -Riemannovog integrala

U 2006. godini Z.Boros i Zs.Pales [1] su istražili i dali definiciju radijalne \mathbb{K} -derivacije preslikavanja točke u danom smjeru.

Definicija 4.1. *Za preslikavanje $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I je otvoreni interval) kažemo da ima radijalnu \mathbb{K} -derivaciju u točki $x \in I$ u smjeru $u \in \mathbb{R}$ ako postoji konačni limes,*

$$D_{\mathbb{K}}f(x, u) := \lim_{r \in \mathbb{K}_+ \rightarrow 0} \frac{f(x + ru) - f(x)}{r}.$$

Reći ćemo da je f radijalno \mathbb{K} -derivabilna u točki x ukoliko postoji $D_{\mathbb{K}}f(x, u)$ za svaki $u \in \mathbb{R}$. Funkciju $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo radijalno \mathbb{K} -derivabilnu ako je f radijalno \mathbb{K} -derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. Poznato je, da je svaka \mathbb{K} -konveksna funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ radijalno \mathbb{K} -derivabilna. Posebno, kao i svaka \mathbb{K} -linearna funkcija $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$D_{\mathbb{K}}f(x, u) = f'(x)u \quad , \quad \text{za } u \in \mathbb{R}.$$

S druge strane, ako je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u običajenom smislu u točki $x \in I$ onda je ona i radijalno \mathbb{K} -derivabilna u x sa

$$D_{\mathbb{K}}f(x, u) = f'(x)u \quad , \quad \text{za } u \in \mathbb{R}.$$

Sada imamo vezu između radijalne \mathbb{K} -derivacije i \mathbb{K} -Riemannovog integrala.

Teorem 4.2. *Pretpostavimo da je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -Riemann integrabilna na svakom podintervalu oblika $[a, x]_{\mathbb{K}}$, za svaki $x \in \langle a, b \rangle$. Neka je funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s formulom*

$$F(x) := \int_a^x f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

Slijedi, ako je f radijalno \mathbb{K} -neprekidna u točki $x \in \langle a, b \rangle$ tada je F radijalno \mathbb{K} -derivabilna u x u smjeru $x - a$, štoviše

$$D_{\mathbb{K}}F(x, x - a) = f(x)(x - a).$$

Dokaz. Fiksirajmo $x \in [a, b]$ i uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $\alpha \in \mathbb{K}_+$ te $x \in [a, x + \alpha(x - a)]_{\mathbb{K}}$ na temelju teorema 2.6 i teorema 2.7 dobivamo,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(x + \alpha(x - a)) - F(x)}{\alpha} - f(x)(x - a) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\alpha} \left(\int_a^{x+\alpha(x-a)} f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_a^x f(t) d_{\mathbb{K}}t \right) - \frac{1}{\alpha} \left(\int_x^{x+\alpha(x-a)} f(x) d_{\mathbb{K}}t \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} f(t) d_{\mathbb{K}}t - \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} f(x) d_{\mathbb{K}}t \right| \\
&= \frac{1}{\alpha} \left| \int_x^{x+\alpha(x-a)} (f(t) - f(x)) d_{\mathbb{K}}t \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} |f(t) - f(x)| d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Neka je $\alpha \in \mathbb{K}_+$, dovoljno mali

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{x - a}, \quad t \in [x, x + \alpha(x - a)]_{\mathbb{K}}$$

tada,

$$\frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} |f(t) - f(x)| d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} \frac{\varepsilon}{x - a} d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{\alpha} \alpha(x - a) \frac{\varepsilon}{x - a} = \varepsilon.$$

□

Sada smo u poziciji da možemo dokazati slijedeću karakterizaciju \mathbb{K} -konveksne funkcije.

Teorem 4.3. *Neka je I otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -konveksna. Tada za svaki $a, x \in I$, imamo*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{x - a} \int_a^x D_{\mathbb{K}}f(t, x - a) d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $a, x \in I$ a $a \neq x$ i $a < x$. Kako je f \mathbb{K} -konveksna funkcija, prema teoremu 2.4 postoji uniformno neprekidna konveksna funkcija $g : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$, takva da

$$f(t) = g(t), \quad t \in [a, x]_{\mathbb{K}}.$$

Stoga, za $t \in [a, x]_{\mathbb{K}}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
D_{\mathbb{K}}f(t, x - a) &= \lim_{\mathbb{K}_+ \ni \alpha \rightarrow 0} \frac{f(t + \alpha(x - a)) - f(t)}{\alpha} \\
&= (x - a) \lim_{\mathbb{K}_+ \ni \alpha \rightarrow 0} \frac{g(t + \alpha(x - a)) - g(t)}{\alpha(x - a)} \\
&= (x - a)g'_+(t).
\end{aligned}$$

Iz gornje tvrdnje i fundamentalnog teorema za obični Riemannov integral slijedi,

$$\frac{1}{x - a} \int_a^x D_{\mathbb{K}}f(t, x - a) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^x g'_+(t) dt = g(x) - g(a) = f(x) - f(a).$$

□

5 Hermite-Hadamardova nejednakost

Postoje mnoge nejednakosti koje vrijede za konveksne funkcije. Jedna od najpoznatijih nejednakosti je Hermite–Hadamardova nejednakost,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad a < b.$$

Ova nejednakost ima važnu ulogu u konveksnoj analizi. U literaturi možemo naći razne varijante generalizacije i primjene ove nejednakosti. Napomenimo da je C.Hermit prvi objavio ovu nejednakost, a 10 godina kasnije J.Hadamard je nanovo otkrio lijevu stranu iste nejednakosti. Zanimljivo je da lijeva i desna Hermit-Hadamardova nejednakost karakteriziraju konveksnost. Naime, ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija tako da $\forall a, b \in I, a < b$ za restrikciju $f|_{[a,b]}$ vrijedi lijeva Hermit-Hadamardova (ili desna) nejednakost, tada je f konveksna funkcija.

Teorem 5.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neprazni otvoreni interval i neka je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{K} -konveksna funkcija. Tada za proizvoljne $a, b \in I, a < b$, nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Dokaz. Neka su $a, b \in I, a < b$, proizvoljni i fiksni. Prema teoremu 3.7 postoji jedinstvena neprekidna i konveksna funkcija $g_{ab} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takva da

$$g_{ab}(x) = f(x), \quad x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Kako je g_{ab} konveksna, zadovoljava klasičnu Hermite-Hadamardovu nejednakost, tj.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g_{ab}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g_{ab}(t) dt \\ &\leq \frac{g_{ab}(a)+g_{ab}(b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Budući da je,

$$\int_a^b g_{ab}(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$$

sljedi da je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g_{ab}(t) d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

čime je dokazan teorem. □

U prethodnom smo dokazu koristili klasičnu Hermit-Hadamardovu nejednakost. Sada ćemo napraviti još jedan dokaz, ali bez korištenja Hermite-Hadamardove nejednakosti.

Dokaz. Kako bismo dokazali desnu stranu nejednakosti prvo dokažimo sljedeće,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Neka je $x \in [a, b]_{\mathbb{K}}$. Tada postoji $t \in [0, 1] \cap \mathbb{K}$ takav da je

$$ta + (1-t)b = x.$$

Izrazimo li odavde t dobivamo

$$t = \frac{b-x}{b-a}.$$

Funkcija f je \mathbb{K} -konveksna na $[a, b]_{\mathbb{K}}$ pa vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Uvrstimo u tu nejednakost $ta + (1-t)b = x$, $t = \frac{b-x}{b-a}$, $1-t = \frac{x-a}{b-a}$ dobivamo,

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Kada pomnožimo s $(b-a)$ i faktorom $b-x$ napišemo kao $(b-a) - (x-a)$ imamo

$$\begin{aligned} (b-a)f(x) &\leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) \\ (b-a)f(x) &\leq [(b-a) - (x-a)]f(a) + (x-a)f(b) \\ (b-a)f(x) &\leq (b-a)f(a) - (x-a)f(a) + (x-a)f(b) \\ (b-a)[f(x) - f(a)] &\leq [f(b) - f(a)](x-a) \\ f(x) - f(a) &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \\ f(x) &\leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a). \end{aligned}$$

Integriranjem gornje nejednakosti na intervalu $[a, b]$ dobivamo

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &\leq \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a) \right) d_{\mathbb{K}}t \\
 &= \int_a^b f(a) d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a) d_{\mathbb{K}}t \\
 &= f(a) \int_a^b d_{\mathbb{K}}t + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\int_a^b t d_{\mathbb{K}}t - a \int_a^b d_{\mathbb{K}}t \right) \\
 &= f(a) \int_a^b d_{\mathbb{K}}t + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\frac{a + b}{2} (b - a) - a(b - a) \right) \\
 &= f(a)(b - a) + (f(b) - f(a)) \left(\frac{a + b}{2} - a \right) \\
 &= f(a)(b - a) + (f(b) - f(a)) \frac{b - a}{2} \\
 &= \frac{b - a}{2} (2f(a) + f(b) - f(a)) \\
 &= \frac{(b - a)}{2} (f(a) + f(b))
 \end{aligned}$$

i dijeljenjem s $b - a$ dobivamo

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Po definiciji konveksnosti mora vrijediti

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Neka je sada $x = ta + (1 - t)b$ i $y = (1 - t)a + tb$. Tada dobivamo

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \right),$$

pa integriranjem po t na $[0, 1]$ slijedi

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{a + b}{2}\right) &\leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \right) \right] d_{\mathbb{K}}t \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(f(ta + (1 - t)b) \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 f\left((1 - t)a + tb\right) d_{\mathbb{K}}t.
 \end{aligned}$$

Izračunajmo posebno dva integrala s desne strane posljednje nejednakosti. Za prvi uvedimo supstituciju $u = ta + (1 - t)b$ pa je $du = (a - b)dt$, odnosno $dt = \frac{1}{a-b}du$, a granice prelaze iz 0 i 1 u b i a . Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (f(ta + (1-t)b)) d_{\mathbb{K}}t &= \frac{1}{2(a-b)} \int_b^a f(u) d_{\mathbb{K}}u \\ &= \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f(u) d_{\mathbb{K}}u. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je i drugi integral s desne strane posljednje nejednakosti jednak

$$= \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f(u) d_{\mathbb{K}}u.$$

□

Kao što je slučaj s realnim konveksnim funkcijama, u klasi uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidnih funkcija svaka od nejednakosti

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad a < b$$

je ekvivalentna \mathbb{K} -konveksnosti.

Teorem 5.2. *Ako je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformno radijalno \mathbb{K} -neprekidna i za svake elemente $a < b$ od I , zadovoljava nejednakosti*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$$

ili

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

onda je f \mathbb{K} -konveksna.

Dokaz. Pretpostavimo da f zadovoljava prvu nejednakost (za drugu nejednakost dokaz se provodi na isti način). Dovoljno je pokazati da za svaki $a, b \in I, a < b$ jedinstveno neprekidno proširenje g_{ab} of $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ je konveksna funkcija. Fiksirajmo proizvoljne $c, d \in [a, b], c < d$. Tada postoje nizovi $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i niz $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takvi da $c_n, d_n \in [a, b]_{\mathbb{K}}, c_n < d_n, n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d.$$

Budući da su $c_n, d_n \in [a, b]_{\mathbb{K}}$, proširenje $g_{c_n d_n}$ na $[c_n, d_n]$ zadovoljava

$$g_{ab}(t) = g_{c_n d_n}(t) = f(t) \quad , \quad t \in [c_n, d_n]_{\mathbb{K}}, n \in \mathbb{N}.$$

Po pretpostavci za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$g_{ab}\left(\frac{c_n + d_n}{2}\right) = f\left(\frac{c_n + d_n}{2}\right) \leq \frac{1}{d_n - c_n} \int_{c_n}^{d_n} f(t) d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{d_n - c_n} \int_{c_n}^{d_n} g_{ab}(t) dt.$$

Uzimajući limes za $n \rightarrow \infty$ dobivamo

$$g_{ab}\left(\frac{c + d}{2}\right) \leq \frac{1}{d - c} \int_c^d g_{ab}(t) dt.$$

Pokazali smo da neprekidna funkcija g_{ab} zadovoljava lijevu stranu klasične Hermite–Hadamardove nejednakosti, a kako znamo da je takva funkcija konveksna i zbog proizvoljnosti od $a, b \in I$ možemo zaključiti da je f \mathbb{K} -konveksna, čime završavamo dokaz. □

Teorem 5.3. *Prva nejednakost u Hermite-Hadamardovoj nejednakosti jača je od druge nejednakosti, odnosno uz pretpostavke teorema vrijedi,*

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x.$$

Dokaz. Primijenimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost na intervalima $\left[a, \frac{a + b}{2}\right]$ i $\left[\frac{a + b}{2}, b\right]$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{a+b}{2} - a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) d_{\mathbb{K}}x &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \right] \\ \frac{1}{b - \frac{a+b}{2}} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) d_{\mathbb{K}}x &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \end{aligned}$$

Budući da je $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ i $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$, zbrajanjem ove dvije nejednakosti dobivamo:

$$\frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{1}{2} \left[f(a) + f(b) \right] + f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

odakle pogodnim transformiranjem dobivamo

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x.$$

□

Literatura

- [1] A. Olbrys, On the K-Riemann integral and Hermite Hadamard inequalities for K-convex functions, *Aequationes Mathematicae*, 91(2017), 429–444.
- [2] S. Kurepa, Matematička analiza 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- [3] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1976.
- [4] Z. Boros, Zs. Pales, \mathbb{Q} -subdifferential of Jensen-convex function, *J. Math. Appl. Anal.* 321(2006), 99–113.

Sažetak

Ovaj se diplomski rad bavi definiranjem \mathbb{K} -Riemannovog integrala. Kako bismo lakše definirali pojam \mathbb{K} -Riemannovog integrala u radu smo ponovili važna svojstva i definicije vezane za Riemannov integral kao što su: gornja i donja Darbouxova suma, infimum, supremum, gornje i donje međe, integrabilnost funkcije, monotonost funkcije i ograničenost funkcije. Promatrajući integral na polju \mathbb{K} kao potpolju od \mathbb{R} konstrukcija \mathbb{K} -Riemannovog integrala slična je konstrukciji Riemannovog integrala. U radu je također definiran pojam radijalne \mathbb{K} -derivacije te smo saznali postoji li poveznica između radijalne \mathbb{K} -derivacije i \mathbb{K} -Riemannovog integrala.

Na kraju rada smo proširili klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti na slučaj kada se uobičajeni Riemannov integral zamijeni s \mathbb{K} -Riemannovim integralom i pojam konveksnosti zamijeni s \mathbb{K} -konveksnosti.

Summary

This master thesis introduces definition of \mathbb{K} -Riemann integral. In the beginning, we repeat some important properties and definitions regarding Riemann integral: upper and lower Darboux sum, infimum, supremum, upper and lower bound, function integrability, monotone function. Looking at integral on \mathbb{K} field as subfield of \mathbb{R} , construction of \mathbb{K} -Riemann integral is similar to Riemann integral construction. In this thesis we also define radial \mathbb{K} -derivation and we find out a connection between radial \mathbb{K} -derivation and \mathbb{K} -Riemann integral.

At the end of this thesis we extended classical Hermite-Hadamard inequalities to the case when the classical Riemann integral is replaced by \mathbb{K} -Riemann integral and the notion of convexity is replaced by \mathbb{K} -convexity.

Životopis

Ante Nikšić rođen je 12. kolovoza 1991. godine u Zagrebu. Završava osnovnu školu dr. Vinka Žganca te potom upisuje Tehničku školu Ruđer Bošković, smjer tehničar za računarstvo. Godine 2010. upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer, završava 2014. godine te iste godine upisuje diplomski sveučilišni studij nastavničkog smjera matematike.