K-Riemannov integral

Nikšić, Ante

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:368877

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-30**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ante Nikšić

K-Riemannov integral

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ________________________________ , predsjednik

2. ________________________________ , član

3. ________________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________________________

2. ________________________________

3. ________________________________

Zahvaljujem se mentorici prof.dr.sc. Sanji Varošanec na izvrsnom vođenju, pomoći i savjetima pri pisanju ovog diplomskog rada, a najviše od svega na njezinom strpljenju i razumijevanju.

Također, zahvaljujem Anđelki i Heli koje su bile uz mene, poticale me i ohrabrivale te učinile sve ove godine zabavnijima i lakšima.

Na kraju, veliku zahvalnost dugujem svojoj obitelji; mami i bratu na beskonačnom razumijevanju i bezuvjetnoj podršci, a posebno tati kojem sam dao obećanje i koji mi je posljednjih godina bio velika motivacija u pisanju ovog diplomskog rada i završetku studija.

Bez vas to ne bi bilo moguće. Veliko hvala svima.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Osnovni pojmovi i definicije **2**

2 Konstrukcija $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala **9**

3 Svojstva $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala **16**

4 Poveznica između radijalne $\mathbb{K}$-derivacije i $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala **28**

5 Hermite-Hadamardova nejednakost **31**

Sažetak **37**

Summary **38**

Životopis **39**

Uvod

U ovom radu uvodimo pojam $\mathbb{K}$-Riemannov integral kao prirodnu generalizaciju uobičajenog Riemannovog integrala i proučavamo njegova svojstva. Ponovit ćemo osnovne pojmove o Riemannovom integralu, a zatim ćemo pokazati konstrukciju $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala te definirati pojam radijalne $\mathbb{K}$-derivacije i pokušati saznati postoji li poveznica između radijalne $\mathbb{K}$-derivacije i $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala.

U završnom dijelu rada proširit ćemo klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti na slučaj kada se uobičajeni Riemannov integral zamijeni s $\mathbb{K}$-Riemannovim integralom i pojam konveksnosti zamijeni s $\mathbb{K}$-konveksnosti.

1 Osnovni pojmovi i definicije

U ovom diplomskom radu koristit ćemo sljedeće oznake: za skupove prirodnih, racionalnih i realnih brojeva koristimo uobičajene oznake $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ respektivno. Sa I ćemo označavati otvoreni interval u $\mathbb{R}$, a sa $\mathbb{K}$ potpolje od $\mathbb{R}$. Skup $\mathbb{K} \cap \langle 0, \infty \rangle$ označavat ćemo sa $\mathbb{K}_+$. Simbol $[a, b]_A$ će označavati A-konveksnu ljusku od $\{a, b\}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}$, tj.

$$[a, b]_A = \Big\{ \alpha a + (1 - \alpha) b : \alpha \in A \cap [0, 1] \Big\}.$$

U slučaju da je $A = \mathbb{R}$, koristit ćemo standardni simbol $[a, b]$ umjesto $[a.b]_{\mathbb{R}}$. Skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su polja, no u skupu $\mathbb{R}$ možemo promatrati i druga polja osim $\mathbb{Q}$. Jedan primjer potpolja u $\mathbb{R}$ dan je u sljedećem primjeru.

Primjer 1.1. *Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj. Skup $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ je polje.*

Za dokaz te tvrdnje trebamo provjeriti jesu li $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{p}), +\big)$ i $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \backslash \{0\}, \cdot\big)$ Abelove grupe te vrijedi li distributivnost množenja prema zbrajanju.Zbrajanje je zatvoreno u $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ jer ako uzmemo dva elementa iz $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$: $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$, tada je

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p},$$

a to je element od $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ zbog zatvorenosti zbrajanja u skupu $\mathbb{Q}$. Za umnožak vrijedi sljedeće:

$$x_1 \cdot x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 p) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{p},$$

a to je element od $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ zbog zatvorenosti množenja i zbrajanja u $\mathbb{Q}$.
Sva svojstva kao što su asocijativnost i komutativnost zbrajanja i množenja te distributivnost vrijede jer su naslijeđena od istih svojstava u $\mathbb{R}$. Neutralni element za zbrajanje je $0 = 0 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, a za množenje $1 = 1 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Ako je $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, tada je $-a - b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ njemu suprotni element. Recipročni element od $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 0 je $\dfrac{1}{a + b\sqrt{p}}$ i na prvi pogled nije očito da pripada $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. No racionalizacija nazivnika daje sljedeće

$$\frac{1}{a + b\sqrt{p}} = \frac{1}{a + b\sqrt{p}} \cdot \frac{a - b\sqrt{p}}{a - b\sqrt{p}} = \frac{a - b\sqrt{p}}{a^2 - pb^2} = \frac{a}{a^2 - pb^2} - \frac{b}{a^2 - pb^2}\sqrt{p}$$

što je očito element iz $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$.
Dakle, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ je polje.

$\square$

Ovime smo pokazali da skup $\mathbb{R}$ ima i drugih potpolja osim skupa $\mathbb{Q}$. Međutim, ako je $\mathbb{K}$ neko potpolje od $\mathbb{R}$, tada ovo sadrži $\mathbb{Q}$. Naime, potpolje $\mathbb{K}$ mora sadržavati 1 i 0 jer su to neutralni elementi za množenje i zbrajanje. No tada $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, ...$ leže u $\mathbb{K}$ zbog zatvorenosti zbrajanja, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$. Zbog postojanja suprotnih elemenata slijedi da i $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. Zbog postojanja recipročnih elemenata slijedi da $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, ...$ leže u $\mathbb{K}$, a tada i $\frac{m}{n} \in \mathbb{K}$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Drugim riječima, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$.

Definicija 1.2. *Preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazivamo aditivnim ako zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Napomena 1.3. *Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-homogena stupnja α ako vrijedi*

$$f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x).$$

Ako je $\alpha = 1$ tada kažemo da je funkcija f $\mathbb{K}$-homogena.
Preslikavanje f se zove $\mathbb{K}$-linearno ako je f aditivna i $\mathbb{K}$-homogena funkcija, tj.

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\}.$$

Propozicija 1.4. *Svaka aditivna funkcija je $\mathbb{Q}$-homogena.*

Dokaz. Ako u (1) uvrstimo $x = y = 0$, dobivamo $f(0) = f(0) + f(0)$ iz čega slijedi $f(0) = 0$. Ako u istu tu jednadžbu uvrstimo $y = -x$, slijedi

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$

iz čega slijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo da je

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Provjerimo vrijedi li baza indukcije. Za $n = 1$ imamo

$$f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x) = f(x) = f(1 \cdot x).$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$ gdje je $n = k$.
Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k+1, k \in \mathbb{N}$. Ako u jednadžbu $f(x+y) = f(x) + (y)$ uvrstimo $y = kx$, dobivamo

$$f((k+1)x) = f(x+kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k+1)f(x).$$

Dakle, $f(nx) = nf(x)$, za svaki $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi i ovo:

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je, prema upravo dokazanom svojstvu

$$f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = nf(\frac{x}{n}) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj.

$$f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n} f(x).$$

I konačno, za $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$f(\frac{m}{n}x) = f(\frac{mx}{n}) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{1}{n}mf(x) = \frac{m}{n}f(x),$$

tj. f je $\mathbb{Q}$-homogena.

Definicija 1.5. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ Jensen-konveksna ako*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(x)}{2}, \forall x, y \in I.$$

Preslikavanje f je $\mathbb{K}$-konveksno ako

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \forall x, y \in I, \alpha \in \mathbb{K} \cap \langle 0, 1\rangle.$$

Ako vrijedi suprotna nejednakost kažemo da je f $\mathbb{K}$-konkavna.

Propozicija 1.6. *Ako je f Jensen-konveksna funkcija, tada je f $\mathbb{Q}$-konveksna.*

Dokaz. Treba dokazati da vrijedi

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y), \forall x,y\in I, \alpha\in\mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle.$$

Prvo ćemo metodom regresivne matematičke indukcije dokazati da za svaki $n\in\mathbb{N}, n\geq 2, \forall x_1,...,x_n\in I$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\Big)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}. \tag{2}$$

Prvo dokazujemo da (2) vrijedi za potencije broja 2, tj. za $n=2^k$. Za $n=2$ (2) je upravo definicija Jensen-konveksne funkcije.
Pretpostavimo da (2) vrijedi za $n=2^k$,$k\in\mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi za $n=2^{k+1}$.
Prvo ćemo zbroj $\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ prikazati kao zbroj dva broja na koja ćemo zatim primijeniti pretpostavku indukcije.

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{x_1+...+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\Big) &= f\left(\frac{\frac{x_1+...+x_{2^k}}{2^k}+\frac{x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)\\
&\leq \frac{1}{2}f\Big(\frac{x_1+...+x_{2^k}}{2^k}\Big)+\frac{1}{2}f\Big(\frac{x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}\Big)\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{f(x_1)+...+f(x_{2^k})}{2^k}+\frac{1}{2}\frac{f(x_{2^k+1})+...+f(x_{2^{k+1}})}{2^k}\\
&= \frac{f(x_1)+...+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili definiciju Jensen konveksne funkcije, a u drugoj smo koristili pretpostavku indukcije. Dokažimo da ako tvrdnja vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$, da tada vrijedi i za $n-1$.
Zamijetimo da vrijedi

$$\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1} = \frac{x_1+...+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1}}{n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1}\Big) &= f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1}}{n}\Big)\\
&\leq \frac{1}{n}\Big[f(x_1)+...+f(x_{n-1})+f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

pri čemu smo primjenili pretpostavku da tvrdnja vrijedi za n.
Tada je

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1}\Big) &\leq \frac{1}{n}\Big(f(x_1)+...+f(x_{n-1})\Big)\\
&+ \frac{1}{n}f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1}\Big)\\
f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1}\Big)\Big[1-\frac{1}{n}\Big] &\leq \frac{1}{n}\Big[f(x_1)+...+f(x_{n-1})\Big]\\
f\Big(\frac{x_1+...+x_{n-1}}{n-1}\Big) &\leq \frac{1}{n-1}\Big[f(x_1)+...+f(x_{n-1})\Big].
\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za sve n koji su potencije broja 2, a sad smo dokazali da ako vrijedi za neki n, onda vrijedi i za njegovog prethodnika. Prema metodi regresivne indukcije vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Neka je $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle$. Tada je α oblika $\alpha = \dfrac{m}{n}, m < n, m, n \in \mathbb{N}$.
Tada je $1-\alpha = 1-\dfrac{m}{n} = \dfrac{n-m}{n}$.
Vrijedi,

$$\begin{aligned}
f(\alpha x+(1-\alpha)y) &= f\Big(\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}y\Big)\\
&= f\Big(\frac{mx+(n-m)y}{n}\Big)\\
&= f\Big(\frac{x+...+x+y+...+y}{n}\Big)\\
&\leq \frac{f(x)+...+f(x)+f(y)+...+f(y)}{n}\\
&= \frac{mf(x)+(n-m)f(y)}{n}\\
&= \frac{m}{n}f(x)+\frac{n-m}{n}f(y)\\
&= \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u nejednakosti koristili maloprije dokazanu nejednakost za $x_1, ..., x_n$.

□

Propozicija 1.7. *Ako je f $\mathbb{K}$-konveksna, tada je f $\mathbb{Q}$-konveksna.*

Dokaz. Budući da je za svako potpolje $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, skup $\mathbb{Q}$ njegov podskup, tvrdnja je očita.

$\square$

Definicija 1.8. *Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zovemo radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna u točki $x_0 \in I$ ako $\forall u \in I$*

$$\lim_{\substack{\alpha \in \mathbb{K}_+ \\ \alpha \to 0}} f((1-\alpha)x_0 + \alpha u) = f(x_0). \tag{3}$$

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna ako je radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna u svakoj točki svoje domene D.

Definicija 1.9. *Neka je $D \subset \mathbb{R}$. Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ kažemo da je uniformno neprekidna na D ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in D$ koji su udaljeni za manje od δ, njihove funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $f(y)$ su udaljene za manje od ε, tj,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Definicija 1.10. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna ako za bilo koji $x_0 \in I$ i $u \in I$ preslikavanje*

$$\alpha \mapsto f(x_0 + \alpha(u - x_0)), \alpha \in \mathbb{K} \cap [0, 1]$$

uniformno neprekidno.

Uniformna neprekidnost očito povlači neprekidnost na D, (tj. u svakoj točki $c \in D$). Razlika između pojmova neprekidnosti na D i uniformne neprekidnosti na D je u tome što kod uniformne neprekidnosti δ ovisi o ε, dok kod obične neprekidnosti δ ovisi i o ε i o svakoj točki $c \in D$. Dakle, ako je f neprekidna na D, tada za fiksirani $\varepsilon > 0$ svaki $c \in D$ ima svoj $\delta_{c,\varepsilon} > 0$ takav da za sve $x \in A$ za koje je $|x - c| < \delta_{c,\varepsilon}$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. No, općenito nećemo moći naći univerzalni $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ za sve $x, y \in D$ za koje $|x - y| < \delta$.

Primjer 1.11. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = x^2$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, ali ona nije uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Zaista, za prirodni broj n stavimo $a_n = \sqrt{n}$.*
Tada je (a_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \longrightarrow 0, \text{ kada } n \to \infty. \tag{4}$$

Neka je $0 < \varepsilon \leq 1$.
Za proizvoljan $\delta > 0$ *izaberemo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta$. *Iz* (4) *slijedi* $|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \delta$.
S druge strane imamo,

$$|f(a_{n_0+1}) - f(a_{n_0})| = |(n_0 + 1) - n_0| = 1 \geq \varepsilon.$$

Bilo koja neprekidna i bilo koja uniformno neprekidna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ su radijalno $\mathbb{K}$-neprekidne i uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidne. Može se dogoditi da je uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna funkcija prekidna u svakoj točki. Jednostavan primjer je bilo koje prekidno $\mathbb{K}$-linearno preslikavanje. S druge strane, svaka uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna funkcija je također radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna funkcija, ali obratno ne vrijedi.

Propozicija 1.12. *Funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *je radijalno* $\mathbb{K}$*-neprekidna ako i samo ako za svaki* $a, b \in I$, *funkcija* $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ *je neprekidna.*

Propozicija 1.13. *Funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *je uniformno radijalno* $\mathbb{K}$*-neprekidna ako i samo ako za svaki* $a, b \in I$, *funkcija* $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ *je uniformno neprekidna.*

2 Konstrukcija $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala

Sadržaj ovog i sljedećih poglavlja zasniva se na sadržaju članka [1], dok se rezultati o klasičnom Riemannovom integralu mogu naći u knjigama [2] i [3].

Ponovimo za početak neke osnovne pojmove o Riemannovom integralu. Neka je $[a, b], a < b$ segment u $\mathbb{R}$ i neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a, b]$. To znači da postoje $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ i $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, tj.

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M.$$

Uočimo, ako je $[a', b'] \subseteq [a, b]$ podsegment, onda za svaki $x \in [a', b']$, vrijedi

$$m \leq m' \leq f(x) \leq M' \leq M$$

gdje je $m' = \inf\limits_{[a',b']} f$ i $M' = \sup\limits_{[a',b']} f$. Dakle, infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu i supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu. Nadalje, neka je $n \in \mathbb{N}$. Podijelimo (izvršimo subdiviziju) segment $[a, b]$ točkama

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

na n dijelova. Neka je $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$ i $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$, gdje je $k = 1, 2, ..., n$. Neka su $t_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ..., n$ po volji izabrane točke. Definirajmo sljedeće sume:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}), S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Broj s zovemo donja Darbouxova suma, S je gornja Darbouxova suma, a σ je integralna suma. Jasno je da vrijedi

$$m(b - a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b - a).$$

Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma s, B je skup svih gornjih Darbouxovih suma S, a C je skup svih integralnih suma σ funkcije f na segmentu $[a, b]$. Sve te sume dobiju se variranjem broja $n \in \mathbb{N}$, svim različitim izborima subdivizije $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$ i točaka t_k. Iz nejednakosti o integralnim i Darbouxovim sumama slijedi da su skupovi A, B i C ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$. Prema aksiomu potpunosti postoje

$$\mathcal{I}_*(f;a,b) = \sup A \quad , \quad \mathcal{I}^*(f;a,b) = \inf B.$$

Definicija 2.1. *Broj $\mathcal{I}_*(f;a,b)$ zovemo donji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$, a broj $\mathcal{I}^*(f;a,b)$ zovemo gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Iz prethodnog je jasno da donji i gornji Riemannov integral postoje za svaku funkcju $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ koja je ograničena na segmentu $[a,b]$ i da je

$$\mathcal{I}_*(f;a,b) \leq \mathcal{I}^*(f;a,b).$$

Definicija 2.2. *Za funkciju $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a,b]$ kažemo da je integrabila u Riemannovom smislu ili R-integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako je*

$$\mathcal{I}_*(f;a,b) = \mathcal{I}^*(f;a,b).$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva integral ili R-integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka:

$$\mathcal{I} = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Teorem 2.3. *Neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tada je ona R-integrabilna na segmentu $[a,b]$.*

Definicija 2.4. *Za funkciju $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je monotona po dijelovima na segmentu $[a,b]$ ako postoji subdivizija $a = c_0 < c_1 < ... < c_{k-1} < c_k < ... < c_{n-1} < c_n = b$ takva da je $f|_{[c_{k-1},c_k]}$ monotona funkcija za sve $k = 1, 2, ..., n$.*

Korolar 2.5. *Neka je $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima monotona funkcija na $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tada je ona R-integrabilna na segmentu $[a,b]$.*

Kako smo ponovili bitne pojmove vezane uz Riemannov integral, možemo početi konstruirati $\mathbb{K}$-Riemannov integral.
Neka $\mathcal{P}_{[a,b]}$ predstavlja skup svih particija od intervala $[a,b]$,tj.

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(t_0, t_1, ..., t_n) : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}.$$

Nadalje, definiramo skup svih $\mathbb{K}$-particija na intervalu $[a, b]$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,b]} &= \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]} : t_i = a + \alpha_i(b-a), \alpha_i \in \mathbb{K} \cap [0,1], i = 1, 2, ..., n\} \\ &= \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]} : t_i \in [a, b]_{\mathbb{K}}, i = 1, 2, ..., n\}.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena na skupu $[a, b]_{\mathbb{K}}$ sa

$$M := \sup_{x \in [a,b]_{\mathbb{K}}} f(x), m := \inf_{x \in [a,b]_{\mathbb{K}}} f(x).$$

Za danu $\mathbb{K}$-particiju $\pi = (t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,b]}$ definiramo

$$M_i := \sup_{x \in [t_{i-1}, t]_{\mathbb{K}}} f(x), m_i := \inf_{x \in [t_{i-1}, t]_{\mathbb{K}}} f(x)\ ,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Ovi supremumi i infimumi su dobro definirani, tj. to su konačni realni brojevi jer je f ograničena funkcija na $[a, b]_{\mathbb{K}}$. Odnosno,

$$m \le m_i \le M_i \le M\ ,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Sada možemo definirati gornju $\mathbb{K}$-Darbouxevu sumu funkcije f na sljedeći način,

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vrijedi:

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \le \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = M(b-a).$$

Donju $\mathbb{K}$-Darbouxovu sumu funkcije f možemo definirati kao,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vrijedi:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \ge \sum_{i=1}^{n} m(t_i - t_{i-1}) = m \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = m(b-a).$$

Primjetimo da vrijedi i sljedeća nejednakost,

$$\begin{aligned} m_i &< M_i \\ m_i(t_i - t_{i-1}) &\leq M_i(t_i - t_{i-1}) \ / \sum_{i=1}^{n} \\ \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\ \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi). \end{aligned}$$

Stoga zaključujemo da je $m(b-a) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) \leq M(b-a)$.
Sada možemo definirati gornji $\mathbb{K}$-Riemannov integral od funkcije f na intervalu $[a,b]$ kao,

$$\int_{a}^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t := \inf \left\{ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) : \pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \right\}$$

i donji $\mathbb{K}$-Riemannov integral kao

$$\int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t := \sup \left\{ \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) : \pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \right\}.$$

Definicija 2.6. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena na $[a,b]_{\mathbb{K}}$ je $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$ ako su gornji i donji $\mathbb{K}$-Riemannovi integrali jednaki. U tom slučaju, $\mathbb{K}$-Riemannov integral od f zapisujemo kao*

$$\int_{a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t.$$

U slučaju kada je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, koristit ćemo standardni simbol $\int_a^b f(t)dt$ umjesto $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t$. Sljedeći teorem daje nam kriterij za $\mathbb{K}$-Riemann integrabilnost.

Teorem 2.7. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji particija $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]^{\mathbb{K}}}$ takva da*

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon.$$

Dokažimo prvo da za svaki pozivitini epsilon postoji particija $\pi \in \mathcal{P}[a,b]^{\mathbb{K}}$ takva da $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < \varepsilon$, tada je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ K-Riemann integrabilna

na $[a,b]$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo particiju $\pi \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,b]}$ koja zadovoljava gornju nejednakost. Kako vrijedi

$$\int_a^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}} f(t)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) \leq \int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t$$

imamo,

$$0 \leq \int_a^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t - \int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon.$$

Kako nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$,

$$\int_a^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t.$$

Pogledajmo sada drugi smjer, tj. pretpostavimo da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna funkcija, želimo dokazati da postoji particija $\pi \in \mathcal{P}[a,b]^{\mathcal{K}}$ takva da $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji infimuma postoji particija π_1, td.

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) < \int_a^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t + \frac{\varepsilon}{2},$$

a prema definiciji definiciji supremuma postoji particija π_2, td.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) > \int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Imajući na umu da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna što znači $\int_a^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t$, možemo zapisati.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) \\
&= \Big(\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) - \int_a^{\rightharpoonup b} f(t) d_{\mathbb{K}} t\Big) \\
&+ \Big(\int_{\rightharpoonup a}^{b} f(t) d_{\mathbb{K}} t - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2)\Big) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Korolar 2.8. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svaku particiju $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,b]}$,*
$\pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, ..., t_{k_n}^{(n)})$, takve da

$$\max_{1\le j\le k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \longrightarrow 0, \text{ kada } n \to \infty$$

i za bilo koji izbor $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$ particije π_n imamo

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Propozicija 2.9. *Neka su $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, potpolja od $\mathbb{R}$. Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathbb{K}_2$-Riemann integrabilna tada je također i $\mathbb{K}_1$-Riemann integrabilna i vrijedi*

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}_1}t = \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}_2}t.$$

Dokaz. Neka je $\pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, ..., t_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}_1}_{[a,b]}, n \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz takav da

$$\max_{1\le j\le k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Kako je f $\mathbb{K}_2$-Riemann integrabilna, za bilo koji izbor $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})]_{\mathbb{K}_1}$ particije π_n imamo ,

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}_2}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Zbog proizvoljnosti od $\pi_n \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}_1}_{[a,b]}$

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}_1}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

$\square$

Kao posljedicu gornje propozicije za $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}$ i $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ možemo zaključiti sljedeće.

Korolar 2.10. *Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabilna u običajenom smislu, tada je za proizvoljno polje $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ funkcija f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna, i vrijedi,*

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t)d.$$

Primjer 2.11. *Neka je* $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$*,* $\mathbb{K}_1 \neq \mathbb{K}_2$ *te neka su* $\mathbb{K}_1$ *i* $\mathbb{K}_2$ *potpolja od* $\mathbb{R}$*. Razmotrimo funkciju* $f : [a,b]_{\mathbb{K}_2} \to \mathbb{R}$*.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [a,b]_{\mathbb{K}_1} \\ 1 & ; x \in [a,b]_{\mathbb{K}_2} \backslash [a,b]_{\mathbb{K}_1}. \end{cases}$$

Vidimo da je f $\mathbb{K}_1$*-Riemann integrabilna i* $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = 0$*. S druge strane za svaku particiju* $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_2} \backslash \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$*, vrijedi da* $\mathcal{U}_{\mathbb{K}_2}(\pi, f) = 1$ *i* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}_2}(\pi, f) = 1$ *Stoga,*

$$0 = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t \neq \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t = 1,$$

tj. f *nije* $\mathbb{K}_2$*-Riemann interabilna. Primjetimo da ako zamjenimo u formuli za* f*,* $\mathbb{K}_1$ *sa* D*, dobivamo,*

$$D := \{x \in [0,1] : x = \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

tada dobivamo primjer funkcije koja nije $\mathbb{K}$*-Riemann integrabilna za bilo koje podpolje* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$*.*

3 Svojstva $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala

Propozicija 3.1. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f\Big|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ monotona tada je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f\Big|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ rastuća, tj.

$$f(x) \leq f(y) \ , \ za \ x \leq y \ , \ x, y \in [a, b]_{\mathbb{K}},$$

te da je $f(a) \neq f(b)$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Fiksirajmo neku proizvoljnu particiju π_n ,

$$\pi = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, ..., t_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \ , \ n \in \mathbb{N},$$

gdje je

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Kako je $f\Big|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ rastuća za svaki $j \in \{1, ..., k_n\}$

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]_{\mathbb{K}}} f(t) = f(t_j)$$

$$m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]_{\mathbb{K}}} f(t) = f(t_j).$$

Stoga sumiranjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_n)-\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_n) &= \sum_{j=1}^{k_n}(M_j-m_j)(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)}) \\
&\leq \max_{1\leq j\leq k_n}(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)})\sum_{j=1}^{k_n}(M_j-m_j) \\
&= \max_{1\leq j\leq k_n}(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)})\sum_{j=1}^{k_n}\Big(f(t_j)-f(t_{j-1})\Big) \\
&= \max_{1\leq j\leq k_n}(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)})\Big[f(b)-f(t_{k_n-1})+f(t_{k_n-1})-f(t_{k_n-2}) \\
&\qquad + \ ... + f(t_2)-f(t_1)\Big] \\
&= \max_{1\leq j\leq k_n}(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)})\Big[f(b)-f(a)\Big] \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\Big(f(b)-f(a)\Big)=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dakle, za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji particija za koju je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_n)-\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_n) < \varepsilon$$

a to znači da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna.
Slijedi da $\mathcal{U}(f,\pi_n)-\mathcal{L}(f,\pi_n)=0$ i zaključujemo da je f $\mathbb{K}$-Rieman integrabilna.
Dokaz za funkciju koja je padajuća je sličan.

$\square$

Teorem 3.2. *Ako su f i g $\mathbb{K}$-Riemann integrabilne na $[a,b]$, tada je $f+g$ $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna tada postoji subdivizija π_1, $a=y_0<y_1<...<y_n=b$ takva da je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1)-\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) < \varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sup f\Big|_{J_k}\cdot(y_k-y_{k-1})-\sum_{k=1}^{n}\inf f\Big|_{J_k}\cdot(y_k-y_{k-1})<\varepsilon,$$

gdje je $J_k = [y_{k-1}, y_k]_{\mathbb{K}}$.
Budući da je g $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna, tada postoji subdivizija π_2, $a = z_0 < z_1 < ... < z_r = b$ takva da je $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) < \varepsilon$, tj.

$$\sum_{k=1}^{r} \sup g\Big|_{Z_k} \cdot (z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^{r} \inf g\Big|_{Z_k} \cdot (z_k - z_{k-1}) < \varepsilon$$

gdje je $Z_k = [z_{k-1}, z_k]_{\mathbb{K}}$. Sada promotrimo novu subdiviziju koja je nastala unijom svih točaka iz subdivizije za f i g. Ta nova subdivizija je profinjenje subdivizije za f i g i njezine članove nazovimo x_k, tj. radi se o subdiviziji π sa čvorovima $a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$, pri čemu je

$$\{x_0, x_1, ..., x_m\} = \{y_0, y_1, ..., y_n\} \cup \{z_0, z_1, ..., z_r\}.$$

Kad subdiviziju profinimo, tada se gornja Darbouxova suma smanji, a donja se poveća, tj.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) > \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1), \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi) > s(g, \pi_2)$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1), \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi) < S(g, \pi_2).$$

Dakle vrijedi,

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \varepsilon$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi) > \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi) < \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) < \varepsilon.$$

Dalje ćemo i za f i g koristiti subdiviziju π. Koristit ćemo ove oznake

$$M_k(f) = \sup f|_{[x_{k-1}, x_k]}$$

$$m_k(f) = \inf f|_{[x_{k-1}, x_k]}.$$

Za supremum i infimum vrijedi:

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

$$\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g.$$

Naime, za bilo koji $x \in [a, b]$ vrijedi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g,$$

tj. $\sup f + \sup g$ je gornja međa za skup $Im(f + g)$. To znači da je veća ili jednaka najmanjoj gornjoj međi za $Im(f + g)$, a to je upravo $\sup(f + g)$.

Time smo obrazložili prvu nejednakost. Druga se dobiva slično.
Dokažimo da je $f+g$ integrabilna funkcija

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\Big(M_k(f+g)-m_k(f+g)\Big)(x_k-x_{k-1})\\
&\qquad\leq \sum_{k=1}^{n}\Big(M_k(f)+M_k(g)-m_k(f)-m_k(g)\Big)(x_k-x_{k-1})\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{n}\Big(M_k(f)-m_k(f)\Big)(x_k-x_{k-1})\\
&\qquad\qquad+\sum_{k=1}^{n}\Big(M_k(g)-m_k(g)\Big)(x_k-x_{k-1})\\
&\qquad\leq \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za $2\varepsilon>0$ postoji subdivizija za koju je $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}-\mathcal{L}_{\mathbb{K}}<2\varepsilon$, tj. $f+g$ je integrabilna.
Dokažimo da je $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t=\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t+\int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t &\leq M_k(f+g)(x_k-x_{k-1})\\
&\leq \sum_{k=1}^{n}M_k(f)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}M_k(g)(x_k-x_{k-1})\\
&\leq \varepsilon+\sum_{k=1}^{n}m_k(f)(x_k-x_{k-1})+\varepsilon+\sum_{k=1}^{n}m_k(g)(x_k-x_{k-1})\\
&\leq 2\varepsilon+\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t+\int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u gornjim nejednakostima koristili tvrdnje

$$\sum_{k=1}^{n}m_k(F)(x_k-x_{k-1})\leq\int_a^b F(t)d_{\mathbb{K}}t\leq\sum_{k=1}^{n}M_k(F)(x_k-x_{k-1})$$

za $F=f,g,f+g$, te nejednakost $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(F,\pi)<\varepsilon+\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,\pi)$ za $F=f,g$.

Vrijedi i sljedeće:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t &\geq M_k(f+g)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geq \sum m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \sum m_k(g)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geq \varepsilon + \sum M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \varepsilon + \sum M_k(g)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geq 2\varepsilon + \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\Big| \int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t \Big| \leq 2\varepsilon$$

a to znači da je

$$\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

□

Teorem 3.3. *Ako je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je*

$$\int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t = \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan te neka je $\alpha > 0$ (za $\alpha < 0$ dokaz je analogan). Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija za koju je $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Kako znamo da $\inf \alpha f = \alpha \inf f$ i $\sup \alpha f = \alpha \sup f$ onda vrijedi i

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha \mathcal{L}_{\mathbb{K}_f},$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha \mathcal{U}_{\mathbb{K}_f}.$$

Iz toga slijedi da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha(\mathcal{U}_{\mathbb{K}_f} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}_f}) < \varepsilon,$$

pa zaključujemo da je αf integrabilna, tj.

$$\Big| \int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t - \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \Big| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t = \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

□

Teorem 3.4. *Neka je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna funkcija na $[a,b]$.*
a) Ako je $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in [a,b]_{\mathbb{K}}$ tada je $\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \geq 0$.
b) Apsolutna vrijednost $|f|$ je $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$ i

$$\left| \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz.
a) Neka je $\{\pi_n\}_n$ bilo kooji niz particija takav da je

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = 0$$

i neka je $s_j^{(n)} \in \left[t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right]_{\mathbb{K}}$. Tada je

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})..$$

Budući da je $f(s_j^{(n)}) \geq 0$ za sve $j, n \in [a,b]_{\mathbb{K}}$, te da je $t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} > 0$ slijedi da su sume na desnoj strani nenegativne te je njihov limes nenegativan broj, tj. $\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t$ je nenegativan broj što je trebalo dokazati.

$\square$

b) Prvo zamjetimo da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\Big||y| - |x|\Big| \leq |y - x|.$$

Naime, ako y napišemo kao

$$y = (y - x) + x$$

i primijenimo nejednakost trokuta $|a + b| \leq |a| + |b|$ na brojeve $a = y - x$ i $b = x$ dobivamo

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|,$$

tj.

$$|y| - |x| \leq |y - x|.$$

Ako u zadnjoj nejednakosti zamijenimo x i y dobivamo da je $|x| - |y| \leq |x - y| = |y - x|$. Iz te dvije nejednakosti slijedi da je $||y| - |x|| \leq |y - x|$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada za svaka dva $x, y \in [a,b]$ za koje je $|y - x| < \varepsilon$, prema upravo dokazanom , vrijedi i da je

$$\Big||y| - |x|\Big| < \varepsilon.$$

Funkcija f je $\mathbb{K}$-integrabilna na $[a,b]$ pa za $\varepsilon^2 > 0$ postoji particija $\pi = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ od $[a,b]$ takva da je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon^2.$$

Neka su

$$M_i := \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} f(x),$$

$$m_i := \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} f(x),$$

$$M_i^* := \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x),$$

$$m_i^* := \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x).$$

Indekse $1, 2, ..., n$ brojeva iz particije π podijelimo u dva skupa A i B. U skupu A su svi oni indeksi i za koje je $M_i - m_i < \varepsilon$. U skupu B su oni indeksi i za koje je $M_i - m_i \geq \varepsilon$.
Prvo promotrimo $i \in A$. Za taj indeks i vrijedi $M_i - m_i < \varepsilon$, tj.

$$\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} f(x) - \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} f(x) < \varepsilon.$$

To znači da je razlika funkcijskih vrijednosti za bilo koja dva broja iz $[t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}$ manja od ε, tj,

$$\Big| f(t) - f(s) \Big| < \varepsilon$$

za sve $t, s \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}$. Budući da je

$$\Big| |f(t)| - |f(s)| \Big| < |f(t) - f(s)|,$$

slijedi i da je

$$\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) - \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) < \varepsilon,$$

tj, $M_i^* - m_i^* < \varepsilon$. Promotrimo sada $i \in B$. Funkcija f je ograničena na $[a,b]_{\mathbb{K}}$, tj. $f(t) \in [m, M]$. Tada $|f(t)| \in [0, K]$ gdje je $K = max\{|m|, |M|\}$. Tada je

$$M_i^* - m_i^* = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) - \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) \leq K + K = 2K.$$

Sad vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in B} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\in B} m_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i\in B}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i\in B}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&+ \sum_{i\in A}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Ali za $i \in B$ imamo da je $M_i - m_i \geq \varepsilon$ pa zajedno s prethodnom nejednakosti imamo:

$$\sum_{i\in B} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i\in B}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon^2,$$

pa kad podijelimo s ε dobijemo

$$\sum_{i\in B}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Sad ocijenimo razliku između gornje i donje Darbouxove sume za funkciju $|f|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(|f|,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(|f|,\pi) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i\in A} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in B} 2K(x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon \sum_{i\in A}(x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i\in B}(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i\in B}(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon(b-a) + 2K\varepsilon \\
&= \varepsilon(b - a + 2K),
\end{aligned}$$

tj.

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(|f|,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(|f|,\pi) < \varepsilon(b-a+2K),$$

a budući da je ε proizvoljan slijedi da je $|f|$ integrabilna. Za dokaz formule koristit ćemo da je integral jednak limesu integralnih suma. Naime, neka je $\{\pi_n\}_n$ bilo koji niz particija od $[a,b]_{\mathbb{K}}$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = 0$$

i neka je $s_j^{(n)} \in \left[t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right]_{\mathbb{K}}$. Tada je prema nejednakosti trokuta

$$\Big|\sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})\Big| \leq \sum_{j=1}^{k_n} \Big|f(s_j^{(n)})\Big|(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}),$$

tj.

$$\Big|\int_a^b f(x)d_{\mathbb{K}}x\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})\Big| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \Big|f(s_j^{(n)})\Big|(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = \int_a^b |f|(x)d_{\mathbb{K}}x.$$

□

Propozicija 3.5. *Ako je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna, tada je $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na svakom podskupu $[c,d]\subset[a,b]$.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $c,d\in[a,b]$ takvi da je $c<d$. Prema propoziciji 1.3, zaključujemo da je $f|_{[c,d]}$ je uniformno neprekidna. Kako $cl([c,d]_{\mathbb{K}}) = [c,d]$, postoji jedinstvena neprekidna funkcija $g_{cd}:[c,d]\to\mathbb{R}$ takva da

$$g_{cd}(t) = f(t) \quad , \quad t\in[c,d]_{\mathbb{K}}.$$

Na temelju korolara 2.10, f je $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna, štoviše

$$\int_c^d f(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_c^d g_{cd}(t)dt.$$

□

Teorem 3.6. *Neka je $I\subseteq\mathbb{R}$ otvoreni interval te neka je $f:I\to\mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-konveksna funkcija. Tada za proizvoljne $a,b\in I$ $a<b$ funkcija $f|_{[a,b]}$ je uniformno neprekidna.*

Teorem 3.7. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otovreni interval te neka je $f : I \to \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-konveksna funkcija. Tada za proizvoljne $a, b \in I$ $a < b$ postoji jedinstvena neprekidna funkijca $g_{ab} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, takva da*

$$g_{ab}(x) = f(x) \ , \ x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Funkcija g_{ab} zadovoljava sljedeću nejednakost

$$g_{ab}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{g_{ab}(x) + g_{ab}(y)}{2}$$

za svaki $x, y \in [a, b]$, posebno g_{ab} je konveksna funkcija.

Sada možemo izračunati integral od $\mathbb{K}$-linearne funkcije. Primjetimo da funkcija može biti prekidna u svakoj točki, tako da Riemannov integral možda niti ne postoji.

Propozicija 3.8. *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-linearna funkcija. Tada je funkcija f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na svakom intervalu $[a, b]$, štoviše*

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f $\mathbb{K}$-linearna funkcija. Na temelju propozicije 2.2 i teorema 2.3, zaključujemo da je funkcija f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na svakom intervalu $[a, b]$. Nadalje, neka je

$$\pi_n := (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, ..., t_{k_n}^{(n)})$$

gdje je $t_j^{(n)} := a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0, 1, ..., n$. Imamo ovo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_j^{(n)}) \frac{1}{n}(b-a) \\
&= \lim_{n\to\infty} f\Big(na + \frac{n(n+1)}{2n}(b-a)\Big)\frac{1}{n}(b-a) \\
&= \lim_{n\to\infty} f\Big(a + \frac{n+1}{2n}(b-a)\Big)(b-a) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(f(a) + \frac{n+1}{2n} f(b-a)\Big)(b-a) \\
&= \Big[f(a) + f\Big(\frac{b-a}{2}\Big)\Big](b-a) \\
&= f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a).
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.9. *Pretpostavimo da* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $c \in [a,b]_{\mathbb{K}}$. *Tada* f *je* $\mathbb{K}$*-Riemann integrabilna na* $[a,b]$ *akko je* $\mathbb{K}$*-Riemann integrabilna na* $[a,c]$ *i* $[c,b]$. *Štoviše u tom slučaju,*

$$\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^c f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$. Uzmemo $\varepsilon > 0$ i particiju $\pi \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,b]}$ takvu da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon.$$

Definirajmo $\overline{\pi}$ kao proširenje od π nastalo dodavanjem c na rubne točke od π. Tada je $\overline{\pi} = \pi_1 \cup \pi_2$, gdje

$$\pi_1 := \overline{\pi} \cap [a,c]_{\mathbb{K}} \quad , \quad \pi_2 := \overline{\pi} \cap [c,b]_{\mathbb{K}}.$$

Očito, $\pi_1 \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,c]}$ i $\pi_2 \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[c,b]}$, štoviše

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\overline{\pi}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\overline{\pi}) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) &= \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\overline{\pi}) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\overline{\pi}) - \Big[\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\overline{\pi_2}) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\overline{\pi_2})\Big] \\
&\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

što dokazuje da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,c]$. Zamjenom π_1 i π_2, dobiti ćemo dokaz za $[c,b]$. Pogledajmo sad drugi smjer ekvivalencije. Ako je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,c]$ i $[c,b]$, tada postoje particije $\pi_1 \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[a,c]}$ i $\pi_2 \in \mathcal{P}^{\mathbb{K}}_{[c,b]}$ takve da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Tada

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) < \varepsilon,$$

što dokazuje da je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na $[a,b]$. Konačno, ako je f $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna, tada sa particijama kao gore π, π_1, π_2, kao gore imamo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) \\
&< \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) + \varepsilon \\
&< \int_a^c f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t)d_{\mathbb{K}}t - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Slično,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t &\geq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) \\
&> \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f,\pi_2) + \varepsilon \\
&> \int_a^c f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t)d_{\mathbb{K}}t - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, vidimo da

$$
\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^c f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.
$$

□

Promotrimo da za $\mathbb{K}$-linearnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdje je $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ i za točku $c = \alpha a + (1-a)b \in (a,b)$, gdje je $\alpha \in \langle 0,1\rangle$, imamo

$$
\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^c f(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_c^b f(t)d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{2}(f(\alpha(a-b)) - \alpha f(a-b))(a-b).
$$

Stoga, može se dogoditi da za neke $\alpha \in \langle 0,1\rangle \backslash \mathbb{K}$, gornji izraz je različit od nule.

4 Poveznica između radijalne $\mathbb{K}$-derivacije i $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala

U 2006. godini Z.Boros i Zs.Pales [1] su istražili i dali definiciju radijalne $\mathbb{K}$-derivacije preslikavanja točke u danom smjeru.

Definicija 4.1. *Za preslikavanje $f : I \to \mathbb{R}$ (I je otvoreni interval) kažemo da ima radijalnu $\mathbb{K}$-derivaciju u točki $x \in I$ u smjeru $u \in \mathbb{R}$ ako postoji konačni limes,*

$$D_{\mathbb{K}} f(x,u) := \lim_{r \in \mathbb{K}_+ \to 0} \frac{f(x+ru) - f(x)}{r}.$$

Reći ćemo da je f radijalno $\mathbb{K}$-derivabilna u točki x ukoliko postoji $D_{\mathbb{K}} f(x,u)$ za svaki $u \in \mathbb{R}$. Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo radijalno $\mathbb{K}$-derivabilnu ako je f radijalno $\mathbb{K}$-derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. Poznato je, da je svaka $\mathbb{K}$-konveksna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ radijalno $\mathbb{K}$-derivabilna. Posebno, kao i svaka $\mathbb{K}$-linearna funkcija $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$D_{\mathbb{K}} f(x,u) = f'(x)u \quad , \quad \text{za} \quad u \in \mathbb{R}.$$

S druge strane, ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna u običajenom smislu u točki $x \in I$ onda je ona i radijalno $\mathbb{K}$-derivabilna u x sa

$$D_{\mathbb{K}} f(x,u) = f'(x)u \quad , \quad \text{za} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sada imamo vezu između radijalne $\mathbb{K}$-derivacije i $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala.

Teorem 4.2. *Pretpostavimo da je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-Riemann integrabilna na svakom podintervalu oblika $[a,x]_{\mathbb{K}}$, za svaki $x \in \langle a,b]$. Neka je funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definirana s formulom*

$$F(x) := \int_a^x f(t) d_{\mathbb{K}} t.$$

Slijedi, ako je f radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna u točki $x \in <a,b]$ tada je F radijalno $\mathbb{K}$-derivabilna u x u smjeru $x-a$,štoviše

$$D_{\mathbb{K}} F(x, x-a) = f(x)(x-a).$$

Dokaz. Fiksirajmo $x \in [a,b]$ i uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $\alpha \in \mathbb{K}_+$ te $x \in [a, x + \alpha(x-a)]_{\mathbb{K}}$ na temelju teorema 2.6 i teorema 2.7 dobivamo,

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{F(x+\alpha(x-a)) - F(x)}{\alpha} - f(x)(x-a)\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{\alpha}\Big(\int_a^{x+\alpha(x-a)} f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_a^x f(t) d_{\mathbb{K}}t\Big) - \frac{1}{\alpha}\Big(\int_x^{x+\alpha(x-a)} f(x) d_{\mathbb{K}}t\Big)\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha(x-a)} f(t) d_{\mathbb{K}}t - \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha(x-a)} f(x) d_{\mathbb{K}}t\Big| \\
&\quad = \frac{1}{\alpha}\Big|\int_x^{x+\alpha(x-a)} \Big(f(t) - f(x)\Big) d_{\mathbb{K}}t\Big| \\
&\quad \leq \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha(x-a)} \Big|f(t) - f(x)\Big| d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}
$$

Neka je $\alpha \in \mathbb{K}_+$, dovoljno mali

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{x-a} \quad , \quad t \in [x, x + a(x-a)]_{\mathbb{K}}$$

tada,

$$\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha(x-a)} |f(t)-f(x)| d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha(x-a)} \frac{\varepsilon}{x-a} d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{\alpha}\alpha(x-a)\frac{\varepsilon}{x-a} = \varepsilon.$$

□

Sada smo u poziciji da možemo dokazati slijedeću karakterizaciju $\mathbb{K}$-konveksne funkcije.

Teorem 4.3. *Neka je I otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : I \to \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-konveksna. Tada za svaki $a, x \in I$, imamo*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{x-a}\int_a^x D_{\mathbb{K}} f(t, x-a) d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $a, x \in I$ $a \neq x$ i $a < x$. Kako je f $\mathbb{K}$-konveksna funkcija, prema teoremu 2.4 postoji uniformno neprekidna konveksna funkcija $g : [a,x] \to \mathbb{R}$, takva da

$$f(t) = g(t) \quad , \quad t \in [a,x]_{\mathbb{K}}.$$

Stoga, za $t \in [a,x]_{\mathbb{K}}$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbb{K}} f(t, x-a) &= \lim_{\mathbb{K}_+ \ni \alpha \to 0} \frac{f(t+\alpha(x-a)) - f(t)}{\alpha} \\
&= (x-a) \lim_{\mathbb{K}_+ \ni \alpha \to 0} \frac{g(t+\alpha(x-a)) - g(t)}{\alpha(x-a)} \\
&= (x-a) g'_+(t).
\end{aligned}
$$

Iz gornje tvrdnje i fundamentalnog teorema za obični Riemannov integral slijedi,

$$
\frac{1}{x-a} \int_a^x D_{\mathbb{K}} f(t, x-a) d_{\mathbb{K}} t = \int_a^x g'_+(t) dt = g(x) - g(a) = f(x) - f(a).
$$

$\square$

5 Hermite-Hadamardova nejednakost

Postoje mnoge nejednakosti koje vrijede za konveksne funkcije. Jedna od najpoznatijih nejednakosti je Hermite−Hadamardova nejednakost,

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad , \quad a<b.$$

Ova nejednakost ima važnu ulogu u konveksnoj analizi. U literaturi možemo naći razne varijante generalizacije i primjene ove nejednakosti. Napomenimo da je C.Hermit prvi objavio ovu nejednakost, a 10 godina kasnije J.Hadamard je nanovo otkrio lijevu stranu iste nejednakosti. Zanimljivo je da lijeva i desna Hermit-Hadamardova nejednakost karakteriziraju konveksnost. Naime, ako je $f: I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija tako da $\forall a, b \in I, a<b$ za restrikciju $f\Big|_{[a,b]}$ vrijedi lijeva Hermit-Hadamardova (ili desna) nejednakost, tada je f konveksna funkcija.

Teorem 5.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neprazni otvoreni interval i neka je $f: I \to \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$-konveksna funkcija. Tada za proizvolje $a, b \in I, a<b$, nejednakost*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Dokaz. Neka su $a, b \in I, a<b$, proizvoljni i fiksni. Prema teoremu 3.7 postoji jedinstvena neprekidna i konveksna funkcija $g_{ab}: [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da

$$g_{ab}(x) = f(x) \quad , \quad x \in [a,b]_{\mathbb{K}}.$$

Kako je g_{ab} konveksna, zadovoljava klasičnu Hermite-Hadamardovu nejednakost,tj.

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= g_{ab}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g_{ab}(t)dt \\ &\leq \frac{g_{ab}(a)+g_{ab}(b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Budući da je,

$$\int_a^b g_{ab}(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t$$

slijedi da je

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g_{ab}(t)d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

čime je dokazan teorem.

□

U prethodnom smo dokazu koristili klasičnu Hermit-Hadamardovu nejednakost. Sada ćemo napraviti još jedan dokaz, ali bez korištenja Hermite-Hamaradove nejednakosti.

Dokaz. Kako bismo dokazali desnu stranu nejednakosti prvo dokažimo sljedeće,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad , \quad x \in [a,b]_{\mathbb{K}}.$$

Neka je $x \in [a,b]_{\mathbb{K}}$. Tada postoji $t \in [0,1] \cap \mathbb{K}$ takav da je

$$ta + (1-t)b = x.$$

Izrazimo li odavde t dobivamo

$$t = \frac{b-x}{b-a}.$$

Funkcija f je $\mathbb{K}$-konveksna na $[a,b]_{\mathbb{K}}$ pa vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Uvrstimo u tu nejednakost $ta++(1-t)b = x$, $t = \frac{b-x}{b-a}$, $1-t = \frac{x-a}{b-a}$ dobivamo,

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Kada pomnožimo s $(b-a)$ i faktorom $b-x$ napišemo kao $(b-a)-(x-a)$ imamo

$$\begin{aligned}
(b-a)f(x) &\leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) \\
(b-a)f(x) &\leq \Big[(b-a)-(x-a)\Big]f(a) + (x-a)f(b) \\
(b-a)f(x) &\leq (b-a)f(a) - (x-a)f(a) + (x-a)f(b) \\
(b-a)\Big[f(x)-f(a)\Big] &\leq \Big[f(b)-f(a)\Big](x-a) \\
f(x)-f(a) &\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\
f(x) &\leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).
\end{aligned}$$

Integriranjem gornje nejednakosti na intervalu $[a, b]$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t &\le \int_a^b \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)\Big)d_{\mathbb{K}}t \\
&= \int_a^b f(a)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)d_{\mathbb{K}}t \\
&= f(a)\int_a^b d_{\mathbb{K}}t + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(\int_a^b t d_{\mathbb{K}}t - a\int_a^b d_{\mathbb{K}}t\Big) \\
&= f(a)\int_a^b d_{\mathbb{K}}t + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(\frac{a+b}{2}(b-a) - a(b-a)\Big) \\
&= f(a)(b-a) + \Big(f(b)-f(a)\Big)\Big(\frac{a+b}{2} - a\Big) \\
&= f(a)(b-a) + \Big(f(b)-f(a)\Big)\frac{b-a}{2} \\
&= \frac{b-a}{2}\Big(2f(a) + f(b) - f(a)\Big) \\
&= \frac{(b-a)}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big)
\end{aligned}$$

i dijeljenjem s $b - a$ dobivamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Po definiciji konveksnosti mora vrijediti

$$f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Neka je sada $x = ta + (1-t)b$ i $y = (1-t)a + tb$. Tada dobivamo

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \le \frac{1}{2}\Big(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)\Big),$$

pa integriranjem po t na $[0, 1]$ slijedi

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &\le \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}\Big(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)\Big)\Big]d_{\mathbb{K}}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(f(ta + (1-t)b)\Big) + \frac{1}{2}\int_0^1 f\Big((1-t)a + tb\Big)d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Izračunajmo posebno dva integrala s desne strane posljednje nejednakosti. Za prvi uvedimo supstituciju $u = ta + (1-t)b$ pa je $du = (a-b)dt$, odnosno $dt = \frac{1}{a-b}du$, a granice prelaze iz 0 i 1 u b i a. Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(f(ta + (1-t)b)\Big)d_{\mathbb{K}}t &= \frac{1}{2(a-b)}\int_b^a f(u)d_{\mathbb{K}}u \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(u)d_{\mathbb{K}}u. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je i drugi integral s desne strane posljednje nejednakosti jednak

$$= \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(u)d_{\mathbb{K}}u.$$

$\square$

Kao što je slučaj s realnim konveksnim funkcijama, u klasi uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidnih funkcija svaka od nejednakosti

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad , \quad a < b$$

je ekivalentna $\mathbb{K}$-konveksnosti.

Teorem 5.2. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ uniformno radijalno $\mathbb{K}$-neprekidna i za svake elemente $a < b$ od I, zadovoljava nejednakosti*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t$$

ili

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

onda je f $\mathbb{K}$-konveksna.

Dokaz. Pretpostavimo da f zadovoljava prvu nejednakost (za drugu nejednakost dokaz se provodi na isti način). Dovoljno je pokazati da za svaki $a, b \in I, a < b$ jedinstveno neprekidno proširenje g_{ab} of $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$ je konveksna funkcija. Fiksirajmo proizvoljne $c, d \in [a,b], c < d$. Tada postoje nizovi $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i niz $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da c_n, $d_n \in [a,b]_{\mathbb{K}}$ $c_n < d_n, n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \ , \ \lim_{n\to\infty} d_n = d.$$

Budući da su $c_n, d_n \in [a,b]_{\mathbb{K}}$, proširenje $g_{c_nd_n}$ na $[c_n, d_n]$ zadovoljava

$$g_{ab}(t) = g_{c_nd_n}(t) = f(t) \quad , \quad t \in [c_n, d_n]_{\mathbb{K}}, n \in \mathbb{N}.$$

Po pretpostavci za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$g_{ab}\Big(\frac{c_n + d_n}{2}\Big) = f\Big(\frac{c_n + d_n}{2}\Big) \leq \frac{1}{d_n - c_n}\int_{c_n}^{d_n} f(t)d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{d_n - c_n}\int_{c_n}^{d_n} g_{ab}(t)dt.$$

Uzimajući limes za $n \to \infty$ dobivamo

$$g_{ab}\Big(\frac{c+d}{2}\Big) \leq \frac{1}{d-c}\int_{c}^{d} g_{ab}(t)dt.$$

Pokazali smo da neprekidna funkcija g_{ab} zadovoljava lijevu stranu klasične Hermite−Hadamardove nejednakosti, a kako znamo da je takva funkcija konveksna i zbog proizvoljnosti od $a, b \in I$ možemo zaključiti da je f $\mathbb{K}$-konveksna, čime završavamo dokaz.

$\square$

Teorem 5.3. *Prva nejednakost u Hermite-Hadamardovoj nejednakosti jača je od druge nejednakosti, odnosno uz pretpostavke teorema vrijedi,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_{\mathbb{K}}x - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_{\mathbb{K}}x.$$

Dokaz. Primijenimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost na intervalima $\Big[a, \dfrac{a+b}{2}\Big]$ i $\Big[\dfrac{a+b}{2}, b\Big]$ dobivamo:

$$\frac{1}{\frac{a+b}{2} - a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(a)\Big]$$

$$\frac{1}{b - \frac{a+b}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big].$$

Budući da je $\dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{b-a}{2}$ i $b - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$, zbrajanjem ove dvije nejednakosti dobivamo:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{1}{2}\Big[f(a) + f(b)\Big] + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),$$

odakle pogodnim transformiranjem dobivamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_{\mathbb{K}}x - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_{\mathbb{K}}x.$$

$\square$

Literatura

[1] A. Olbrys, On the K-Riemann integral and Hermite Hadamard inequalities for K-convex functions, *Aequationes Mathematicae*, 91(2017), 429–444.

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[3] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1976.

[4] Z. Boros, Zs. Pales, $\mathbb{Q}$-subdifferential of Jensen-convex function, *J. Math. Appl. Anal.* 321(2006), 99–113.

Sažetak

Ovaj se diplomski rad bavi definiranjem $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala. Kako bismo lakše definirali pojam $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala u radu smo ponovili važna svojstva i definicije vezane za Riemannov integral kao što su: gornja i donja Darbouxova suma, infimum, supremum, gornje i donje međe, integrabilnost funkcije, monotonost funkcije i ograničenost funkcije. Promatrajući integral na polju $\mathbb{K}$ kao potpolju od $\mathbb{R}$ konstrukcija $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala slična je konstrukciji Riemannovog integrala. U radu je također defininan pojam radijalne $\mathbb{K}$-derivacije te smo saznali postoji li poveznica između radijalne $\mathbb{K}$-derivacije i $\mathbb{K}$-Riemannovog integrala.

Na kraju rada smo proširili klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti na slučaj kada se uobičajeni Riemannov integral zamijeni s $\mathbb{K}$-Riemannovim integralom i pojam konveksnosti zamijeni s $\mathbb{K}$-konveksnosti.

Summary

This master thesis introduces definition of $\mathbb{K}$-Riemann integral. In the beginning, we repeat some important properties and definitions regarding Riemann integral: upper and lower Darboux sum, infimum, supremum, upper and lower bound, function integrability, monotone function. Looking at integral on $\mathbb{K}$ field as subfield of $\mathbb{R}$, construction of $\mathbb{K}$-Riemann integral is similar to Riemann integral construction. In this thesis we also define radial $\mathbb{K}$-derivation and we find out a connection between radial $\mathbb{K}$-derivation and $\mathbb{K}$-Riemann integral.

At the end of this thesis we extended classical Hermite-Hadamard inequalities to the case when the classical Riemann integral is replaced by $\mathbb{K}$-Riemann integral and the notion of convexity is replaced by $\mathbb{K}$-convexity.

Životopis

Ante Nikšić rođen je 12. kolovoza 1991. godine u Zagrebu. Završava osnovnu školu dr. Vinka Žganca te potom upisuje Tehničku školu Ruđer Bošković, smjer tehničar za računarstvo. Godine 2010. upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer, završava 2014. godine te iste godine upisuje diplomski sveučilišni studij nastavničkog smjera matematike.