

# Cikloidne krivulje

---

**Pekić, Valentina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:362190>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-06**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Valentina Pekić

**CIKLOIDNE KRIVULJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan,2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem svojoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na pomoći i vodstvu prilikom pisanja ovog diplomskog rada. Hvala joj na uloženom trudu i vremenu te brojnim mail-ovima i konzultacijama koje su mi pomogle u sastavljanju rada. Veliko hvala i svim ostalim profesorima koji su me vodili tijekom ovih pet godina studija. Bili stručna podrška i imali razumijevanja u najbitnijim trenucima.*

*Također riječi zahvale upućujem i mentorici prof. Mireli Kurnik koja me je vodila tijekom prakse u srednjoj školi. Njezina pomoć i riječi potpore uvelike su mi pomogli prilikom rada u školi i odabira vlastitog budućeg profesionalnog puta. Hvala kolegama i kolegicama, te najboljim prijateljicama bez kojih bi studiranje bilo nezamislivo.*

*Hvala i dečku koji me trpio i zajedno sa mnom nosio sve sretne trenutke, ali i teškoće koje sam podnosila tijekom studija.*

*Svakako najveća zahvala mojoj obitelji i mojim roditeljima koji su mi omogućili da studiram u Zagrebu i završim ovaj fakultet. Hvala im od srca na neizmjerljivoj podršci i razumijevanju u svim trenucima. Hvala što su bili moj oslonac i podrška u svakoj situaciji i uvijek me hrabрили riječima utjehe.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Epicikloide i hipocikloide</b>	<b>2</b>
1.1 Općenito . . . . .	2
1.2 Parametarske jednačbe . . . . .	4
1.3 Karakteristike . . . . .	8
1.4 Svojstva epicikloide i hipocikloide . . . . .	11
<b>2 Prostorne krivulje koje leže na sferi</b>	<b>17</b>
2.1 Krivulje konstantnog nagiba . . . . .	17
<b>3 Prostorne krivulje na rotacijskim hiperboloidima</b>	<b>27</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>34</b>

# Uvod

Tema ovog rada su cikloidne krivulje. Cilj rada bio je na početku opisati i jednadžbama prikazati neke od cikloidnih krivulja (epicikloide i hipocikloide). Zatim kroz definicije, leme i teoreme prikazati svojstva tih krivulja. Izvesti jednadžbe i grafički prikazati prostorne krivulje koje leže na sferi, a čijom projekcijom na  $xy$  ravninu dobivamo jednu od cikloidnih krivulja. U drugom poglavlju opisana su svojstva krivulja konstantnog nagiba. Istraživački dio rada zapisan je u trećem poglavlju, a odnosi se na ispitivanje postoje li prostorne krivulje na nekoj drugoj kvadraci čijom projekcijom dobivamo cikloidne krivulje. Tako dolazimo do pseudo-krivulja, te prostornih krivulja koje leže na hiperboloidu.

Sam povijesni razvoj i zanimanje drevnih matematičara za cikloidne krivulje opisano je u prvom poglavlju gdje su izneseni još neki podaci o povijesnom razvoju ove teme. Najstariji nalazi u kojima se spominju cikloidne krivulje i gdje su opisana neka od njihovih svojstava datiraju iz 15. stoljeća. Glavni preokret u proučavanju cikloidnih krivulja započeo je otkrivanjem grane matematike koja se naziva diferencijalna geometrija. Teorija ravninskih i prostornih krivulja u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru je u 18. i 19. stoljeću bila osnova za razvoj diferencijalne geometrije.

Osim računskih prikaza jednadžbi i analitičkih računa potrebna je i vizualizacija samih krivulja i načina na koji se one generiraju. Svi grafički i slikovni prikazi u ovom radu izrađeni su u GeoGebri. GeoGebra je program dinamičke geometrije u kojem se lako prikažu ravninski, ali i prostorni objekti i krivulje. Općenito su softverski alati dinamičke geometrije moćno oružje u suvremenoj nastavi.

# Poglavlje 1

## Ep cikloide i hipocikloide

### 1.1 Općenito

Još od davnih vremena znamo da su ljudi s matematikom oduvijek na razne načine bili povezani. Razvoj i napredak matematike paralelno se odvijao s razvojem čovječanstva. Zainteresiranost matematičara kružnicom i krugom seže u daleku prošlost koliko je stara i sama matematika. Mnogi matematičari su proučavali i zapisivali svojstva koja vrijede za kružnice. Tako je u 15. stoljeću njemački matematičar Nikola Kuzanski zakotrljao kružnicu i u tom gibanju promatrao samo jednu njezinu točku. Krivulja koja je nastala takvim gibanjem postala je poznata tek dvjestotinjak godina kasnije kada je dobila ime *Helenom geometrije* zbog toga što je uzrokovala brojne prepirke među matematičarima. Svoje ime i poveznicu s povijesnom Helenom dobila je zahvaljujući zadivljujućim svojstvima.

Promatramo li krivulju koja se bez klizanja kotrlja po nekoj drugoj krivulji tada će bilo koja fiksna točka prve krivulje opisivati novu krivulju. Na taj način smo dobili jedan od načina kinetičke tvorbe krivulja. Tako možemo npr. zamisliti elipsu koja se kotrlja po drugoj elipsi. Prilikom tog gibanja istražujemo koju liniju će opisivati središte elipse. Prilikom odabira tih dviju krivulja možemo uzeti razne parove i promatrati nove krivulje koje nastaju kao trajektorije. Među krivuljama koje nastaju takvim kotrljanjem ističu se one trajektorije točke čvrsto vezane s krugom koji se kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici. Tako dobivene linije nazivaju se *cikloidne* linije. Spomenute cikloidne krivulje mogu biti transcendentne i algebarske. Algebarske krivulje su posebno zanimljive.

Među njima su i poznate krivulje kao što su: kardioida, astroida, Steinerova krivulja i druge.

Definicija ravninske algebarske krivulje  $n$ -tog reda glasi ovako: to je skup svih točaka  $T(x, y)$  čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu  $f^n(x, y) = 0$  gdje je  $f^n(x, y)$  polinom  $n$ -tog stupnja. Ravninske krivulje imaju važnu primjenu u mehanici, ali njihove prikaze često možemo pronaći i u prirodi.

Kao što je već spomenuto cikloidnih krivulja ima nekoliko vrsta. Jedna od njih su cikloide. To su ravninske krivulje koje opisuje fiksna točka kružnice koja se kotrlja po pravcu. Ime ovoj krivulji dao je Galileo Galilei 1599. godine. On je u svom istraživanju i promatranju nastale krivulje pokušavao odrediti površinu ispod luka cikloide, no to mu nije uspijevalo. Dosjetio se ideje i izradio model cikloide i kotrljajućeg kruga od metala, te ih izvagao. Na temelju toga je došao do zaključka da je masa cikloide jednaka trostrukoj masi kruga. Bez obzira na zaključke Galilei je te rezultate odbacio jer je mislio da omjer površine cikloide i kruga mora biti iracionalan broj.

Osim Galileia i drugi matematičari 17. stoljeća su proučavali svojstva cikloide. Roberval je 1628. godine izračunao površinu ispod luka cikloide koristeći *Cavalierijev princip*. Fermat i Descart su otkrili metodu određivanja tangente na cikloidi.

Blaise Pascal je u jednom periodu svog života odustao od studija matematike i posvetio se Bogu. Jedne večeri 1658. godine mučila ga je zubobolja pa je noć proveo razmišljajući o čudnovatim svojstvima krivulje cikloide. Nakon nekog vremena bol je prestala, a Pascal je to smatrao Božjim znakom i nastavio proučavati cikloidu do kraja života.

Svakako, vrijedno je spomenuti i nizozemskog matematičara, fizičara i astronoma Christiaana Huygensa koji je pokušavao izgraditi što precizniji sat s njihovom. Problem se nalazio u činjenici da period titranja nije bio jednak za sve otklone. Huygens je znao da zapravo traži krivulju koja ima svojstvo da spuštanjem tijela s bilo koje visine te krivulje sva tijela istovremeno dođu u najnižu točku. 1659. godine pokazao je da je ta krivulja upravo cikloida. U povijesti je taj problem poznat pod imenom *problem izokrone*.

Pri nastajanju cikloidnih krivulja, točka koja ih opisuje udaljena je od središta kotrljajućeg (proizvodnog) kruga za određenu veličinu. Ako promatramo slučajeve u kojima se ta točka nalazi na kružnici kotrljajućeg kruga dobivamo krivulje koje nazivamo *epicikloide* i *hipocikloide*. Razlika među njima određena je položajem kotrljajućeg kruga u odnosu na nepomičnu kružnicu. Ako se kotrljajući krug nalazi s vanjske strane



nepomične kružnice dobivamo epicikloidu, a obratno, ako je kotrljajući krug s unutarnje strane dobivamo hipocikloidu.

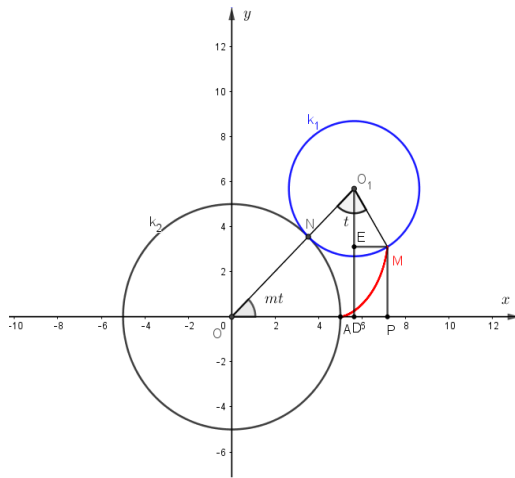
## 1.2 Parametarske jednadžbe

Izvođenje jednadžbi spomenutih krivulja je istovrsno zbog toga što one imaju čitav niz zajedničkih svojstava. Na taj način možemo razmatranja za epicikloide i hipocikloide promatrati istovremeno.

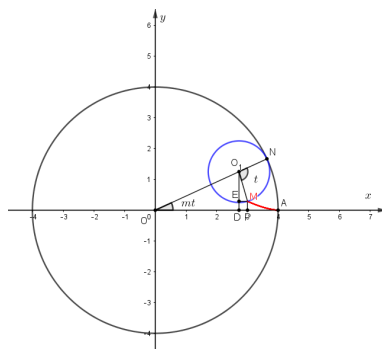
**Definicija 1.** *Neka je točka  $M$  točka na kružnici  $k_1$  radijusa  $r$ . Krivulja koju opisuje točka  $M$  kada se kružnica  $k_1$  izvana, bez klizanja, kotrlja po kružnici  $k$  radijusa  $R$  zove se **epicikloida** (grč. *epi*=nad, *iznad*).*

**Definicija 2.** *Neka je točka  $M$  točka na kružnici  $k_1$  radijusa  $r$ . Krivulja koju opisuje točka  $M$  kada se kružnica  $k_1$  iznutra, bez klizanja, kotrlja po kružnici  $k$  radijusa  $R$  zove se **hipocikloida** (grč. *hypo*=ispod).*

Kao što je u definicijama opisano uzmimo da je  $r$  polumjer pomičnog kruga  $k_1$ , a  $R$  polumjer nepomične kružnice  $k$ . Središte nepomične kružnice smjestimo u ishodište koordinatnog sustava. Neka je generatorna točka  $M$  u polaznom položaju bila u točki  $A$  u kojoj je pomični krug dirao nepomičnu kružnicu. Kroz točku  $A$  postavimo os apscisu. Sa  $t$  označimo kut  $\angle MO_1N$  između polumjera položenog u generatornoj točki kotrljajućeg kruga i polumjera u diralištu s nepomičnom kružnicom. Za izvođenje parametarskih jednadžbi potrebno je još uvesti karakteristični parametar krivulja  $m = \frac{r}{R}$  kojeg zovemo njihovim *modulom*. Slike 1.1 i 1.2.



Slika 1.1: Epicikloida



Slika 1.2: Hipocikloida

Pretpostavili smo da je gibanje pomičnog kruga savršeno kotrljanje bez klizanja, pa iz toga slijedi da su duljine lukova  $\widehat{AN}$  i  $\widehat{NM}$  jednake, pišemo  $\widehat{AN} = \widehat{NM}$ . Formula za duljinu luka je  $l = r\alpha$  pri čemu je  $r$  radijus pripadnog luka, a  $\alpha$  njegov pripadni kut. Iz prethodne jednakosti lukova slijedi da je

$$\begin{aligned} R \cdot \angle NOA &= r \cdot \angle NO_1M \\ R \cdot \angle NOA &= r \cdot t \\ \angle NOA &= \frac{r}{R} \cdot t = m \cdot t \end{aligned}$$

Znamo da epicikloida nastaje gibanjem točke  $M$  u ravnini pa to znači da jednadžbe epicikloide dobivamo preko koordinata točke  $M$ . Imamo:

$$x = \overline{OP} = \overline{OD} + \overline{EM}$$

Da bismo odredili duljine dužina  $\overline{OD}$  i  $\overline{EM}$  pogledajmo što slijedi iz pravokutnih trokuta  $\triangle ODO_1$  i  $\triangle MEO_1$ . Sa slike 1.1 vidimo da je  $\overline{OD} = (R + r) \cos(mt)$  i  $\overline{EM} = r \sin(\angle MO_1E)$ . Dakle, dobivamo da je

$$x = (R + r) \cos(mt) + r \sin(\angle MO_1E). \quad (1.1)$$

Uočavamo da je  $\angle MO_1E = t - \angle OO_1D$ . Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} \sin(\angle MO_1E) &= \sin(t - \angle OO_1D) = \sin\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2} + mt\right) \\ &= \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - (t + mt)\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - (t + mt)\right) = -\cos(t + mt) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u jednadžbu (1.1) dobivamo jednadžbu  $x$ -koordinate točke  $M$ :

$$x = (R + r) \cos(mt) - r \cos(t + mt).$$

Na analogan način određujemo jednadžbu za  $y$ -koordinatu točke  $M$ . Imamo:

$$y = \overline{MP} = \overline{O_1D} - \overline{O_1E}.$$

Da bismo odredili duljine dužina  $\overline{O_1D}$  i  $\overline{O_1E}$  pogledajmo što slijedi iz pravokutnih trokuta  $\triangle ODO_1$  i  $\triangle MEO_1$ . Sa slike 1.2 vidimo da je  $\overline{O_1D} = (R + r) \sin(mt)$  i  $\overline{O_1E} = r \cos(\angle MO_1E)$ .

$$y = (R + r) \sin(mt) + r \cos(\angle MO_1E). \quad (1.2)$$

Budući da je  $\angle MO_1E = t - \angle OO_1D$  iz toga slijedi da je  $\cos(\angle MO_1E) = \sin(t + mt)$ .

Uvrštavanjem dobivenog izraza u jednadžbu (1.2) dobivamo jednadžbu  $y$ -koordinate točke  $M$ :

$$y = (R + r) \sin(mt) - r \sin(t + mt)$$

Ako uzmemo da je  $r = mR$  dobivamo sljedeći oblik parametarske jednadžbe epicikloide:

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos(mt) - mR \cos(t + mt) \\ y = (R + mR) \sin(mt) - mR \sin(t + mt) \end{cases}$$

Analogni postupak provedemo i za hipocikloidu te dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OP} = \overline{OD} + \overline{DP} = \overline{OD} + \overline{EM} \\ y &= \overline{MP} = \overline{O_1D} - \overline{O_1E} \end{aligned}$$

Određivanjem duljina dužina kojima su opisane koordinate  $x$  i  $y$  hipocikloide dobivamo:

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \cos(mt) + r \sin(\angle MO_1E) \\ y &= (R - r) \sin(mt) - r \cos(\angle MO_1E) \end{aligned}$$

Sa slike 1.2 zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \sin(\angle MO_1E) &= \sin(\pi - t - \angle OO_1D) = \sin(\pi - t - (\frac{\pi}{2} - mt)) = \sin(\frac{\pi}{2} - (t - mt)) \\ &= \cos(t - mt) \\ \cos(\angle MO_1E) &= \cos(\frac{\pi}{2} - (t - mt)) = \sin(t - mt) \end{aligned}$$

Ako uzmemo da je  $r = mR$  dobivamo sljedeći oblik parametarske jednadžbe hipocikloide:

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos(mt) - mR \cos(t + mt) \\ y = (R - mR) \sin(mt) - mR \sin(t + mt) \end{cases}$$

Promatranjem sustava koji predstavljaju epicikloidu i hipocikloidu uočavamo sličnost. Ako u parametarskim jednadžbama epicikloide modul  $m$  zamijenimo modulom  $-m$  dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos(mt) + mR \cos(t - mt) \\ y = -[(R - mR) \sin(mt) - mR \sin(t - mt)] \end{cases}$$

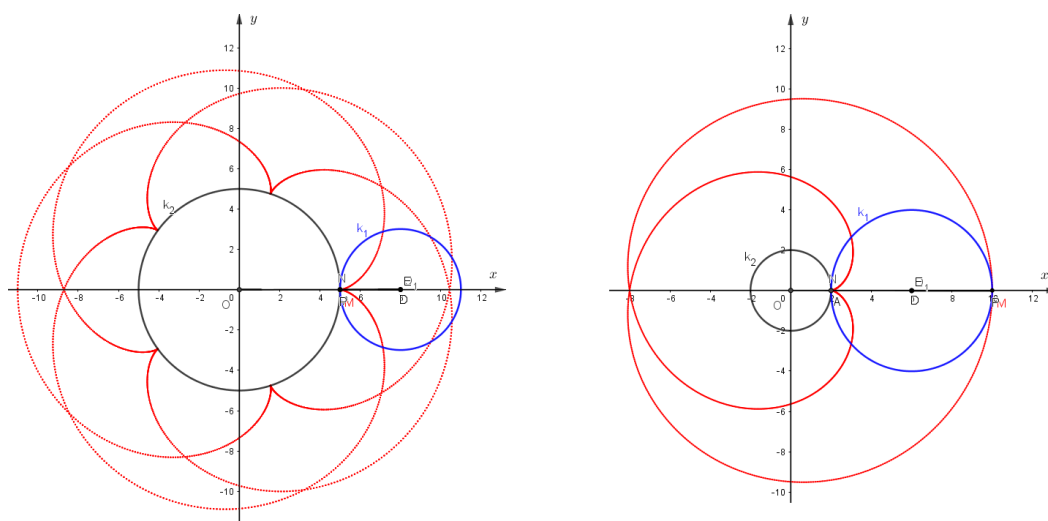
Uočavamo da se prva jednadžba u ovako transformiranom sustavu podudara s prvom jednadžbom hipocikloide, a druge dvije jednadžbe se razlikuju po predznaku. Iz toga slijedi da pomoću ovog novog sustava dobivamo hipocikloidu koja je simetrična prvom u odnosu na  $x$  os. Na taj način zaključujemo da jednadžbe epicikloide i hipocikloide možemo izraziti jedinstvenim sustavom:

$$\begin{cases} x = (R + mR) \cos(mt) - mR \cos(t + mt) \\ y = (R + mR) \sin(mt) - mR \sin(t + mt) \end{cases} \quad (1.3)$$

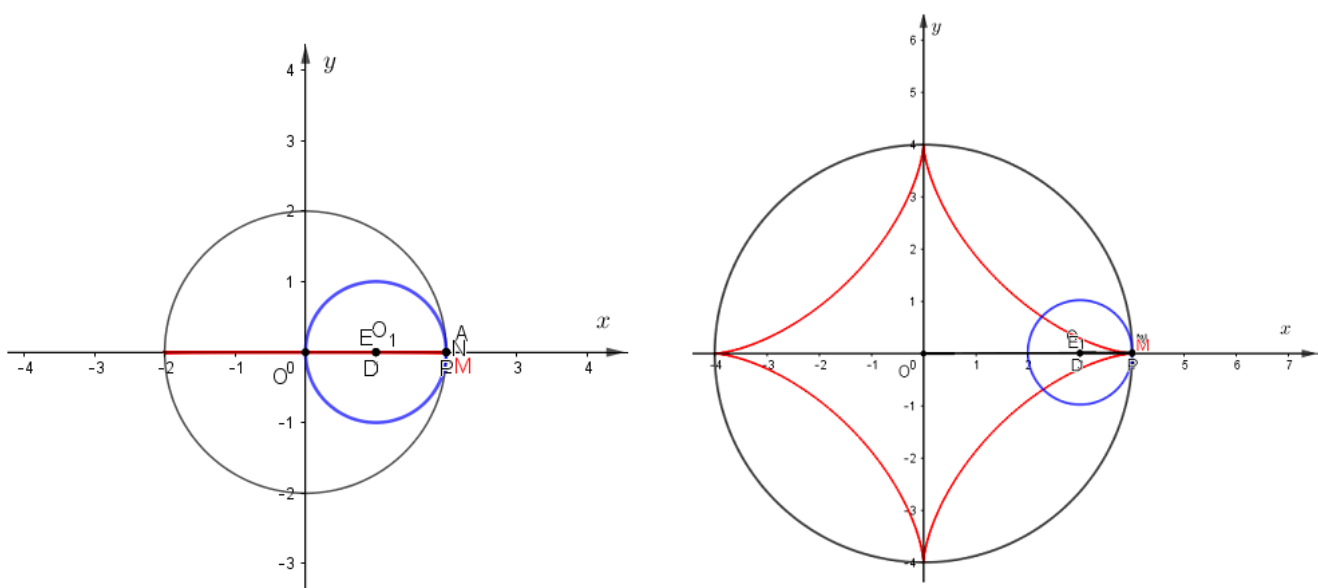
U ovakvom zajedničkom parametarskom zapisu epicikloide i hipocikloide podrazumijevamo da modul  $m$  može biti pozitivan ili negativan. Ako je modul negativan tada polumjer kotrljajućeg kruga ima negativnu vrijednost. Promatrajući modul  $m$  znamo da za  $m > 0$  dobivamo epicikloidu, a za  $m < 0$  dobivamo hipocikloidu. U tom drugom slučaju pretpostavljamo da je  $|m| < 1$ , jer za hipocikloidu vrijedi da je  $|r| < |R|$ . Još jedna zanimljivost ovih krivulja je da ako je modul negativan broj  $i$  po apsolutnoj vrijednosti prelazi jedinicu, tada se nepomična kružnica nalazi unutar kotrljajućeg kruga. Krivulja koja nastaje pri tom kotrljanju pripada porodici epicikloida. Takve specijalne slučajeve nazivamo *pericikloide*.

### 1.3 Karakteristike

Karakteristični parametar, odnosno modul  $m$  određuje oblik epicikloide i hipocikloide. Zapišemo li modul  $m$  kao razlomak oblika  $\frac{p}{q}$  tada nam brojevi  $p$  i  $q$  određuju koliko će generirana krivulja imati lukova i šiljaka. U specijalnom slučaju, ako je  $m$  racionalan broj kojeg možemo zapisati u obliku neskrativog razlomka  $\frac{p}{q}$  tada su epicikloida i hipocikloida zatvorene krivulje. Broj  $q$  nam označava broj punih krugova koje napravi kotrljajući krug prilikom gibanja nakon čega generatorna točka  $M$  ponovno dolazi u početnu točku  $A$ . Također, to nam govori da je točka  $M$   $q$  puta dodirnula nepomičnu kružnicu, pa na taj način dobivamo  $q$  grana odnosno šiljaka. Broj  $p$  nam govori o tome na koji način se izmjenjuju grane i šiljci. Ako je  $p = 1$  tada će šiljci slijediti jedan za drugim jednako kako se nalaze i grane, međutim ako je  $p \neq 1$  tada se između početka i kraja grane nalazi  $p - 1$  šiljaka. U tom slučaju se grane presijecaju i tako dobivamo čvorne točke. Na sljedećim slikama prikazani su neki oblici epicikloide i hipocikloide sa zadanim modulom  $m$ .



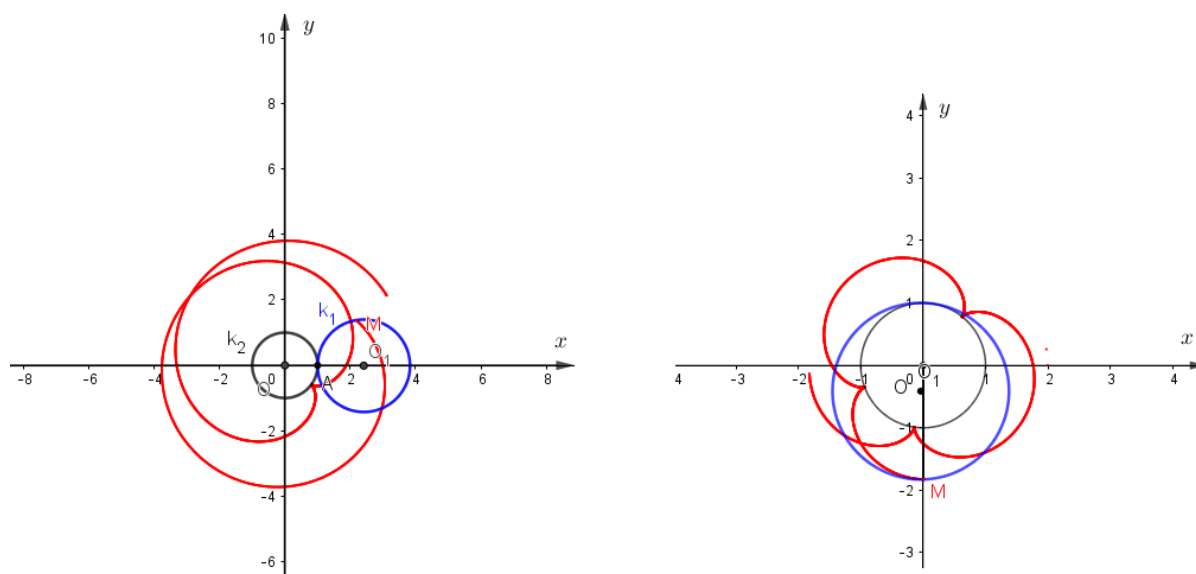
Slika 1.3:  $m = \frac{3}{5}$  (lijevo),  $m = 2$  (desno)



Slika 1.4:  $m = \frac{1}{2}$  (lijevo),  $m = \frac{1}{4}$  (desno)

Na slici 1.4 za modul  $m = \frac{1}{2}$  uočavamo da generatorna točka  $M$  ocrtava krivulju koja se giba po promjeru nepomične kružnice.

Na prethodnim primjerima smo promatrali epicikloide i hipocikloide koje nastaju kada je modul  $m$  racionalan broj. U slučaju kada je modul iracionalan broj tada bez obzira na broj punih krugova koje napravi kotrljajući krug, točka  $M$  nikada više neće doći u početni položaj. Na taj način se krivulja ne zatvara i ima beskonačno mnogo grana. Na sljedećoj slici 1.5 prikazane su epi- i hipocikloida kojima je modul  $m$  iracionalan broj.



Slika 1.5:  $m = \sqrt{2}$

## 1.4 Svojstva epicikloide i hipocikloide

U sljedećem poglavlju opisat ćemo nekoliko svojstava koja su karakteristična za epicikloide i hipocikloide.

**Tvrđnja 1.** Epicikloide i hipocikloide s racionalnim modulom algebarske su krivulje.

Ovu tvrdnju dokazat ćemo koristeći parametarsku jednadžbu 1.3 tako da drugu jednadžbu koja opisuje koordinatu  $y$  pomnožimo sa  $i$  i zatim dodamo i oduzmemo od prve jednadžbe. Dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} x + iy &= (R + mR) \cos(mt) - mR \cos(t + mt) + i(R + mR) \sin(mt) - imR \sin(t + mt) \\ &= (R + mR)[\cos(mt) + i \sin(mt)] - mR[\cos(t + mt) - i \sin(t + mt)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - iy &= (R + mR) \cos(mt) - mR \cos(t + mt) - i(R + mR) \sin(mt) + imR \sin(t + mt) \\ &= (R + mR)[\cos(mt) - i \sin(mt)] - mR[\cos(t + mt) - i \sin(t + mt)] \end{aligned}$$

Znamo da prema Eulerovim formulama vrijedi da je  $e^{(ix)} = \cos x + i \sin x$ . Tada gornje izraze možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x + iy &= (R + mR)e^{imt} - mRe^{i(t+mt)} \\ x - iy &= (R + mR)e^{-imt} - mRe^{-i(t+mt)} \end{aligned}$$

Ako uzmemo sljedeću zamjenu da je  $e^{it} = \theta$ ,  $x + iy = \epsilon$ ,  $x - iy = \eta$  tada dobijemo:

$$\begin{cases} \epsilon = (R + mR)\theta^m - mR\theta^{m+1} \\ \eta = (R + mR)\theta^{-m} - mR\theta^{-m-1} \end{cases}$$

Na ovaj način smo parametarske jednadžbe epicikloida i hipocikloida zapisali algebarski što onda povlači da su i te krivulje algebarske krivulje.

Još jedna od zanimljivih karakteristika su tangente u točkama generirajućih krivulja epicikloide i hipocikloide. Odredimo tangentu u generirajućoj točki  $M$ . Da bismo odredili jednadžbu tangente moramo odrediti nagib odnosno prvu derivaciju parametarski zadane krivulje. Dakle, određujemo prvu derivaciju jednadžbi 1.3 i dobivamo sljedeće:

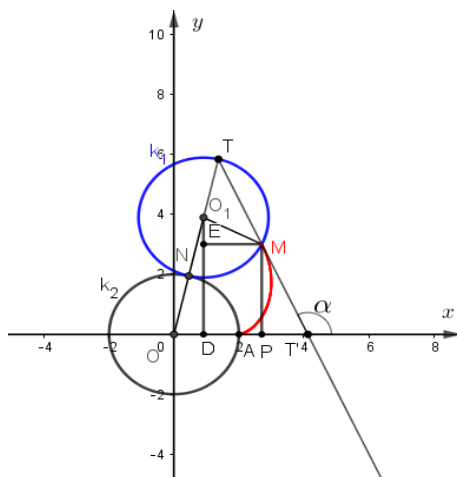


$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -mR(1+m)\sin(mt) + mR(1+m)\sin(t+mt) = -mR(1+m)[\sin(mt) - \sin(t+mt)] \\
 &= -mR(1+m) \cdot 2\cos\left(\frac{mt+t+mt}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{mt-t-mt}{2}\right) \\
 &= 2mR(1+m)\cos\left(mt + \frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= mR(1+m)\cos(mt) - mR(1+m)\cos(t+mt) = mR(1+m)[\cos(mt) - \cos(t+mt)] \\
 &= mR(1+m) \cdot (-2\sin\left(\frac{mt+t+mt}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{mt-t-mt}{2}\right)) = mR(1+m)(-2\sin\left(mt + \frac{t}{2}\right)\sin\left(-\frac{t}{2}\right)) \\
 &= 2mR(1+m)\sin\left(mt + \frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Iz dobivenih jednakosti slijedi da je  $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \tan\left(mt + \frac{t}{2}\right)$ . Znamo da kut koji tangenta zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa računamo kao:  $\tan(\alpha) = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \tan\left(mt + \frac{t}{2}\right)$ . Iz toga slijedi da je  $\alpha = mt + \frac{t}{2}$ .

Iz dobivenog nagiba, tj. koeficijenta smjera tangente krivulje zaključujemo da tangetna u proizvoljnoj točki epicikloide i hipocikloide prolazi točkom  $T$  koja se nalazi na kotrljajućem krugu  $k_1$  i koja je centralno simetrična točki  $N$  (diralište kotrljajućeg kruga i nepomične kružnice) obzirom na središte  $O_1$  kotrljajućeg kruga. Ovo opisano svojstvo lako se može uočiti na slici (slika 1.6). Jednakom analizom zaključujemo da normala prolazi točkom dodira  $N$ .



Slika 1.6

Sa slike 1.6 uočavamo da su dužine  $\overline{O_1M}$  i  $\overline{O_1T}$  jednake duljine jer su to radijusi kruga  $k_1$ . Iz toga slijedi da je  $\triangle MO_1T$  jednakokrčan, te su kutovi  $\angle O_1MT$  i  $\angle O_1TM$  jednaki (možemo ih označiti s  $\beta$ ). Također uočavamo da je  $\angle TO_1M = 180^\circ - t$ .

Iz činjenice da suma kutova u trokutu iznosi  $180^\circ$  dobivamo da je:

$$\begin{aligned}\angle TO_1M + 2\beta &= 180^\circ \\ 180^\circ - t + 2\beta &= 180^\circ \\ \beta &= \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Kako je kut  $\angle TOT' = mt$ , a sada smo dobili da je kut  $\angle OTT' = \frac{t}{2}$  tada je  $\angle OT'T = 180^\circ - mt - \frac{t}{2}$ . Iz toga proizlazi da je kut kojeg tangenta zatvara s osi x jednak  $mt + \frac{t}{2}$  što je upravo kut  $\alpha$ .

Krivulje epicikloida i hipocikloida zadane su parametarskim jednadžbama koje možemo zapisati na sljedeći način:

$$c(t) = (x(t), y(t)) = (R(1+m)\cos(mt) - mR\cos(t+mt), R(1+m)\sin(mt) - mR\sin(t+mt)).$$

Budući da je krivulja  $c$  regularna možemo izračunati njezin tangencijalni vektor, odnosno vektor brzine krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ . Vektor brzine računamo kao funkciju  $\|\dot{c}(t)\|$ . Za našu zadanu krivulju dobivamo da je:

$$\begin{aligned}\|\dot{c}(t)\| &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \\ &= \sqrt{(2mR(1+m)\cos(mt + \frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2}))^2 + (2mR(1+m)\sin(mt + \frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2}))^2} \\ &= \sqrt{4m^2R^2(1+m)^2\sin^2(\frac{t}{2})(\cos^2(mt + \frac{t}{2}) + \sin^2(mt + \frac{t}{2}))} = \sqrt{4m^2R^2(1+m)^2\sin^2(\frac{t}{2})} \\ &= 2mR(1+m)\sin(\frac{t}{2}).\end{aligned}$$

Iz same definicije, ali i sa slika možemo uočiti da se epicikloide i hipocikloide sastoje od grana koje čine tu krivulju. Tada se možemo pitati koliko iznosi duljina jedne od tih grana na određenom segmentu. Na taj način zapravo određujemo duljinu luka krivulje. U ovom dijelu odredit ćemo duljinu luka epicikloide. Duljina luka hipocikloide određuje se na analogan način.

**Definicija 3.** *Funkcija duljine luka krivulje  $c$  od točke  $c(t_0)$  je funkcija  $s$*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(u)\| du, \quad t_0 \in I$$

*Duljina luka krivulje  $c: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  je realan broj*

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(u)\| du.$$

Dakle, da bismo izračunali duljinu jednog luka epicikloide potrebno nam je prvo odrediti normu prve derivacije epicikloide. Računamo  $\|\dot{c}(u)\| = \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u)}$ . Izračunali smo da je  $\dot{c}(u) = (2mR(1+m)\cos(mu + \frac{u}{2})\sin(\frac{u}{2}), 2mR(1+m)\sin(mu + \frac{u}{2})\sin(\frac{u}{2}))$ . Duljina luka na segmentu  $[0, t]$  iznosi:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\dot{c}(u)\| du \\ &= \int_0^t \sqrt{4m^2R^2(1+m)^2\cos^2(mu + \frac{u}{2})\sin^2(\frac{u}{2}) + 4m^2R^2(1+m)^2\sin^2(mu + \frac{u}{2})\sin^2(\frac{u}{2})} du \\ &= \int_0^t \sqrt{4m^2R^2(1+m)^2\sin^2(\frac{u}{2})} du = 4mR(1+m)\int_0^t \sin(\frac{u}{2}) du \\ &= -4mR(1+m)\cos(\frac{t}{2}). \end{aligned}$$

Promatrajući epicikloidu (hipocikloidu) možemo uočiti da nije u svim točkama jednako zaobljena. Tu zaobljenost neke krivulje u matematičkom smislu predstavljamo kao zakrivljenost krivulje.

**Definicija 4.** *Neka je  $c$  regularna krivulja u  $\mathbb{R}^n$  parametrizirana općim parametrom  $t$ . Tada je njena zakrivljenost*

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Odredimo sada zakrivljenost epicikloide. Prvo trebamo odrediti determinantu prve i druge derivacije.

$$\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) = 2m^2 R^2 (1+m)^2 (2m+1) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Da bismo izračunali zakrivljenost epicikloide preostaje nam još odrediti  $\|\dot{c}(t)\|^3$ .

Imamo:

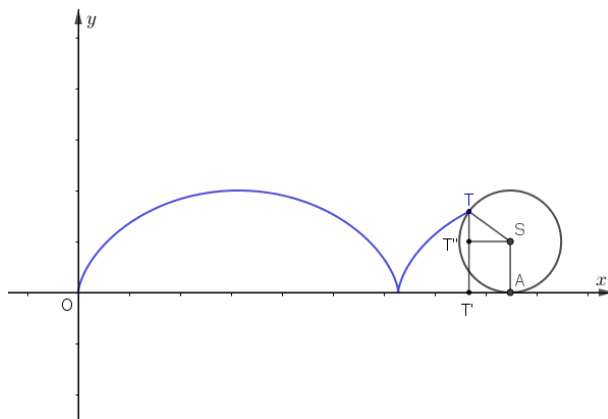
$$\|\dot{c}(t)\|^3 = \|\dot{c}(t)\|^2 \cdot \|\dot{c}(t)\| = 8m^3 R^3 (1+m)^3 \sin^3\left(\frac{t}{2}\right).$$

Dakle:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{2m+1}{4mR(1+m) \sin\frac{t}{2}}.$$

Za kraj ovog poglavlja prisjetimo se da smo u uvodnom dijelu spomenuli Galileia. Kao što smo već spomenuli on je proučavao ravninsku krivulju koju opisuje fiksna točka kružnice koja se kotrlja po pravcu. Dao joj je ime cikloida. U kasnijim istraživanjima je pokušavao izračunati površinu ispod luka cikloide tako što je izradio model od metala, te vaganjem dolazio do određenih zaključaka. Danas mi tu površinu računamo integriranjem. Za početak ćemo zapisati definiciju cikloide i parametarski zapis jednadžbe.

**Definicija 5.** Neka je  $T$  točka na kružnici  $k$  polumjera  $r$ . Krivulja koju opisuje točka  $T$  dok se kružnica kotrlja bez klizanja po čvrstom pravcu zove se **cikloida**.



Slika 1.7: Cikloida

Parametarsku jednadžbu cikloide dobivamo na sličan način kao što smo radili za epicikloidu i hipocikloidu. Cikloida nastaje tako što točka  $T$  prilikom kotrljanja kružnice ostavlja trag. Određivanjem koordinata te točke dolazimo do jednadžbe cikloide. Također, ako pretpostavimo da je kotrljanje kružnice po pravcu idealno tada vrijedi da je  $|OA| = \widehat{AT}$ . Označimo kut  $\angle AST = t$  iz čega dobivamo da je  $|OA| = rt$ . U konačnici dobivamo da je parametarska jednadžba cikloide:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

Sada možemo odrediti površinu ispod jednog luka cikloide. Površinu ispod grafa krivulje, koja je zadana parametarskim jednadžbama, računamo po formuli  $P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ . Uvrštavanjem podataka u formulu i računanjem površine na segmentu  $[0, 2\pi]$  dobivamo:

$$P = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos(t))r(1 - \cos(t))dt = r \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = 3r^2\pi$$

Po dobivenom rezultatu uočavamo da je Galileo bio na dobrom tragu u svojim istraživanjima.

## Poglavlje 2

# Prostorne krivulje koje leže na sferi

### 2.1 Krivulje konstantnog nagiba

Kada razmišljamo o krivuljama na sferi najčešće prvo pomislimo na kružnice. Na sferi možemo odrediti velike i male kružnice. Velika (glavna) kružnica sfere je kružnica koja se dobije kao presjek sfere ravninom koja sadrži središte sfere. Male kružnice su kružnice koje se dobiju kao presjek sfere i ravnine koja ne prolazi središtem te sfere. Također možemo odrediti meridijane i paralele. U ovom poglavlju analizirat ćemo posebnu vrstu krivulja na sferi, a to su krivulje konstantnog nagiba.

**Definicija 6.** Za krivulju  $c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  kažemo da ima konstantan nagib u odnosu na jedinični vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  ako je kut  $\phi$  između  $u$  i jediničnog tangencijalnog vektora  $T$  konstantan. Analitički uvjet je:  $T \cdot u = \cos(\phi)$

**Lema 1.** Ako krivulja  $c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  ima zakrivljenost  $\kappa \neq 0$  i konstantan nagib u odnosu na jedinični vektor  $u$ , tada je omjer  $\frac{\tau}{\kappa}$  konstantan i iznosi  $\pm \cot(\phi)$ . Vrijedi i obrat.

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti neka je krivulja  $c$  parametrizirana duljinom luka. Iz prethodne definicije imamo analitički uvjet  $T \cdot u = \cos(\phi)$ . Deriviranjem tog izraza dobivamo

$$\begin{aligned} T \cdot u &= \cos(\phi) & /' \\ T' \cdot u + T \cdot u' &= 0 \\ \Rightarrow T' \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow \kappa N \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

Dobili smo da je skalarni umnožak dvaju vektora jednak 0 što znači da su oni međusobno okomiti. Želimo vektor  $u$  prikazati pomoću ortonormirane baze  $\{T, N, B\}$ .

Dakle:  $u = aT + bN + cB$  skalarnim množenjem ove jednakosti vektorima  $T$  i  $N$  određujemo koeficijente  $a$  i  $b$ , a iz jednakosti  $u^2 = 1$  dobivamo koeficijent  $c$ . Kada izračunamo tražene koeficijente, vektor  $u$  možemo zapisati kao:

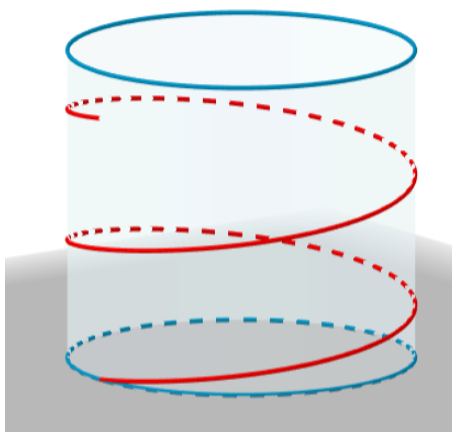
$$u = T \cos(\phi) \pm B \sin(\phi).$$

Deriviranjem vektora  $u$  i sređivanjem izraza dobivamo  $\frac{\tau}{\kappa} = \pm \cot(\phi)$ .

Time je lema dokazana. □

Kroz sljedeću definiciju i lemu pokazat ćemo jedan primjer krivulje koja ima konstantan nagib i također je omjer zakrivljenosti i torzije konstantan.

**Definicija 7.** *Krivulja  $\bar{c}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), 0)$  je kružnica radijusa  $a$  u  $xy$  ravnini u  $\mathbb{R}^3$ . Ako dopustimo da se krivulja diže (ili spušta) konstantnom brzinom duž  $z$ -osi, dobili smo običnu cilindričnu spiralu  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , slika 2.1, koja je dana formulom  $c(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ , gdje je  $a > 0$  i  $b \neq 0$ .*



Slika 2.1

**Lema 2.** Neka je  $c$  krivulja paramterizirana duljinom luka (kraće: PDL) u  $\mathbb{R}^3$ . Tada je  $c$  obična cilindrična spirala ako i samo ako je  $\kappa = \text{const.} > 0$  i  $\tau = \text{const.}$

*Dokaz.* Za svaki  $a > 0$  i  $b \neq 0$  jednadžba

$$c(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{bs}{c} \right)$$

je paramterizacija obične cilindrične spirale duljinom luka, pri čemu je  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Za krivulju koja je PDL jedinično tangencijalno polje  $T$  je dato kao  $T(s) = c'(s)$ . Dakle,

$$T(s) = c'(s) = \left( -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right).$$

Derivirajmo dobiveni izraz još jednom:

$$T'(s) = c''(s) = \left( -\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right).$$

Također, znamo da je zakrivljenost za PDL krivulju dana kao  $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ . Dakle,

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0.$$

Znamo da je  $T' = \kappa N$  iz čega slijedi

$$N(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right).$$

Iz vektorskog produkta  $T \times N$  dobivamo vektor  $B$ , tj.

$$B(s) = \left( \frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right).$$

Deriviranjem vektora  $B$  dobivamo

$$B'(s) = \left( \frac{b}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right).$$

Znamo da je  $B' = -\tau N$  pa zaključujemo

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Dakle, uočavamo da su zakrivljenost i torzija obične cilindrične spirale konstante. Iz toga slijedi da je i omjer  $\frac{\tau}{\kappa}$  također konstantan.

□



Kroz sljedeću lemu ćemo pokazati da se iz svake ravninske krivulje jedinične brzine može dobiti prostorna krivulja konstantnog nagiba.

**Lema 3.** *Neka je  $c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  ravninska krivulja jedinične brzine dana kao  $c(s) = (x(s), y(s))$ . Definiramo prostornu krivulju  $\gamma$  kao  $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos(\psi))$  pri čemu je  $\psi$  konstantan. Tada krivulja  $\gamma$  ima konstantnu brzinu  $\sqrt{1 + \cos^2(\psi)}$  i konstantan nagib  $\cos(\psi)$  u odnosu na vektor  $(0, 0, 1)$ .*

*Dokaz.* Brzina krivulje  $\gamma$  je norma  $\gamma'$  što pišemo  $\|\gamma'\|$  i iz leme vidimo da je  $\|\gamma'\| = \sqrt{1 + \cos^2(\psi)}$ . Znamo da je  $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos(\psi)) \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \cos(\psi))$ . Koristeći činjenicu da je kut  $\phi$  kut između  $\dot{\gamma}(t)$  i vektora  $(0, 0, 1)$  i analitičkog uvjeta  $T \cdot u = \cos(\phi)$  dobivamo da je:

$$\cos(\phi) = \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \cos(\psi)) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 + \cos^2(\psi)}} = \frac{\cos(\psi)}{\sqrt{1 + \cos^2(\psi)}}$$

Dakle, dobili smo da je  $\cos(\phi) = \frac{\cos(\psi)}{\sqrt{1 + \cos^2(\psi)}}$ . Kvadriranjem dobivenog izraza i sređivanjem jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi) &= \frac{\cos^2(\psi)}{1 + \cos^2(\psi)} \\ \frac{1}{\cos^2(\phi)} &= \frac{1 + \cos^2(\psi)}{\cos^2(\psi)} \\ \Rightarrow \sec^2(\phi) &= 1 + \frac{1}{\cos^2(\psi)} \end{aligned}$$

Također, lako se dobije da vrijedi jednakost  $\cos^2(\psi) = \cot(\phi)$ . □

Tema ovog rada su cikloidne krivulje. U ovom poglavlju zapravo želimo prikazati još jedan način dobivanja epicikloide ili hipocikloide. To upravo možemo dobiti pomoću krivulja na sferi. Odnosno, projekcijom nekih krivulja na sferi, na ravninu dobivamo epicikloidu, tj. hipocikloidu. U sljedećim lemmama ćemo pokazati koja svojstva vrijede za takvu krivulju i njezinu projekciju. Također, pokazat ćemo koja relacija između zakrivljenosti i torzije krivulje  $c$  nam daje nužan i dovoljan uvjet da prostorna krivulja leži na sferi.

**Teorem 2.1.1.** Neka je  $c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja jedinične brzine sa zakrivljenošću  $\kappa$  i torzijom  $\tau$ . Pretpostavimo da  $c$  leži na sferi radijusa  $r > 0$  sa središtem u  $q \in \mathbb{R}^3$ . Tada vrijedi:

(i)  $\kappa \geq \frac{1}{r}$

(ii)  $\kappa$  i  $\tau$  su povezani relacijom:

$$\tau^2 \left( r^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2$$

(iii)  $\frac{\tau}{\kappa} = \left( \frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)'$

**Lema 4.** Neka je  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja jedinične brzine i konstantnog nagiba  $\cot(\phi)$  u odnosu na jedinični vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  gdje je  $0 < \phi < \pi$ . Neka je  $\beta$  projekcija krivulje  $\gamma$  na ravninu okomitu na vektor  $u$ . Tada je  $\beta(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot u)u$  za  $a < s < b$ . Tada  $\beta$  ima konstantnu brzinu  $|\sin(\phi)|$ , štoviše zakrivljenosti krivulja  $\beta$  i  $\gamma$  su u relaciji:

$$\kappa[\beta] = \pm \kappa[\gamma] \csc^2(\phi).$$

Sljedeća lema daje nam relaciju koja mora vrijediti za zakrivljenost i torziju krivulje konstantnog nagiba koja leži na sferi.

**Lema 5.** Neka je  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja jedinične brzine i konstantnog nagiba  $\cot(\phi)$  u odnosu na jedinični vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  gdje je  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ . Pretpostavimo da  $\gamma$  leži na sferi radijusa  $r > 0$ . Tada vrijedi:

(i) Zakrivljenost i torzija krivulje  $\gamma$  dani su kao:

$$\kappa[\gamma](s)^2 = \frac{1}{r^2 - s^2 \cot^2(\phi)}; \quad \tau[\gamma](s)^2 = \frac{1}{r^2 \tan^2(\phi) - s^2}$$

(ii) Neka je  $\beta$  projekcija krivulje  $\gamma$  na ravninu okomitu na vektor  $u$ . Tada je zakrivljenost krivulje  $\beta$  dana kao:

$$\kappa[\beta](s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4(\phi) - s_1^2 \cos^2(\phi)}$$

pri čemu je  $s_1 = s \sin(\phi)$  duljina luka krivulje  $\beta$ .

(iii) Neka je  $r = a + 2b$  i  $\cos(\phi) = \frac{a}{a+2b}$ . Tada je prirodna jednadžba krivulje  $\beta$  upravo prirodna jednadžba epicikloide.

*Dokaz.* (i) Budući da je  $\gamma$  krivulja konstantnog nagiba  $\cot(\phi)$  tada znamo da vrijedi  $\frac{\tau}{\kappa} = \pm \cot(\phi)$ . Iz teorema 2.1.1 koristimo relaciju (ii), te uz činjenicu da je  $\tau = \pm \kappa \cot(\phi)$  dobivamo

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 = \tau^2 \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \kappa^2 \cot^2(\phi) \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \cot^2(\phi) (\kappa^2 r^2 - 1).$$

Nadalje

$$\begin{aligned} \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4} &= \cot^2(\phi) (\kappa^2 r^2 - 1) & / : (\kappa^2 r^2 - 1) \\ \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4 (\kappa^2 r^2 - 1)} &= \cot^2(\phi) & / \sqrt{\phantom{x}} \\ \frac{\kappa'}{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1}} &= \pm \cot(\phi). & (*) \end{aligned}$$

Integriranjem jednadžbe (\*) dobivamo

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} = \pm s \cot(\phi). \quad (**)$$

Iz jednadžbe (\*\*) izrazimo  $\kappa$  i dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} &= \pm s \cot(\phi) & / \cdot \kappa \\ \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} &= \pm s \kappa \cot(\phi) & / ^2 \\ \kappa^2 r^2 - 1 &= s^2 \kappa^2 \cot^2(\phi) \\ \kappa^2 r^2 - s^2 \kappa^2 \cot^2(\phi) &= 1 \\ \kappa^2 &= \frac{1}{r^2 - s^2 \cot^2(\phi)}. & (***) \end{aligned}$$

Na ovaj način smo dobili izraz kojim je dana zakrivljenost  $\kappa[\gamma](s)$  krivulje  $\gamma$ . Da bismo dobili izraz za torziju  $\tau$  koristit ćemo činjenicu da je  $\kappa = \pm \frac{\tau}{\cot(\phi)}$ . Uvrštavanjem te jednakosti u dobiveni izraz (\*\*\*) za  $\kappa$  dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\tau^2}{\cot^2(\phi)} &= \frac{1}{r^2 - s^2 \cot^2(\phi)} & / \cdot \cot^2(\phi) \\ \tau^2 &= \frac{\cot^2(\phi)}{r^2 - s^2 \cot^2(\phi)} \\ \tau^2 &= \frac{\frac{1}{\tan^2(\phi)}}{r^2 - s^2 \cot^2(\phi)} \\ \tau^2 &= \frac{1}{r^2 \tan^2(\phi) - s^2}\end{aligned}$$

(ii) Iz leme 4 slijedi da su zakrivljenosti krivlje  $\gamma$  i njezine projekcije  $\beta$  u relaciji  $\kappa[\beta] = \pm \kappa[\gamma] \csc^2(\phi)$ . Uvrštavanjem izraza  $(***)$  za  $\kappa^2[\gamma](s)$  u gornju jednadžbu i sređivanjem dobivamo traženi izraz  $\kappa[\beta](s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4(\phi) - s_1^2 \cos^2(\phi)}$ , pri čemu je  $s_1 = s \sin(\phi)$  duljina luka krivulje  $\beta$ .

(iii) Kako je  $\cos(\phi) = \frac{a}{a+2b}$  tada slijedi da je

$$\sin^4(\phi) = (\sin^2(\phi))^2 = (1 - \cos^2(\phi))^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4}.$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za  $\sin^4(\phi)$  u jednadžbu izraženu pod (ii) i sređivanjem dobivamo

$$\frac{1}{\kappa^2[\beta](s_1)} = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{a^2 s_1^2}{(a+2b)^2}.$$

Zamijenilo si  $s$  sa  $s_1$  dobit ćemo prirodnu jednadžbu epicikloide.

□

Jedan od načina kako možemo opisati ravninsku krivulju  $c$  je pomoću **prirodne jednadžbe**. Prirodna jednadžba izražava zakrivljenost  $\kappa_c$  u odnosu na duljinu luka  $s$  krivulje  $c$ . Matematički zapisano to je jednadžba odlika

$$\kappa_c = \kappa_c(s) \quad F(\kappa_c, s) = 0.$$

Da bismo pronašli prirodnu jednadžbu neke krivulje  $c$  zadane općim parametrom  $t$ , prvo moramo izračunati zakrivljenost i duljinu luka kao funkcije od  $t$ , a zatim eliminirati varijablu  $t$ . Također jednaki postupak možemo provesti i računajući radijus

zakrivljenosti krivulje  $c$ . Radijus zakrivljenosti krivulje  $c$  je  $R_\kappa = \frac{1}{\kappa(t)}$ . U prethodnom poglavlju smo izračunali duljinu luka epiciklide i njezinu zakrivljenost. Dobili smo da je  $s(t) = -4mR(1+m)\cos(\frac{t}{2})$  i  $\kappa(t) = \frac{2m+1}{4mR(1+m)\sin\frac{t}{2}}$ . Dakle, radijus zakrivljenosti epicikloide je  $R_\kappa = \frac{4mR(1+m)\sin\frac{t}{2}}{2m+1}$ .

Da bismo došli do prirodne jednadžbe epicikloide moramo iz dobivenih jednadžbi eliminirati nepoznanicu  $t$ . Kvadriranjem jednakosti za duljinu luka i radijusa zakrivljenosti epicikloide dobivamo sljedeće:

$$R_\kappa^2 = \frac{16m^2R^2(1+m)^2\sin^2(\frac{t}{2})}{(2m+1)^2} \quad / \cdot (2m+1)^2$$

$$R_\kappa^2(2m+1)^2 = 16m^2R^2(1+m)^2\sin^2(\frac{t}{2}) \quad / : 16m^2R^2(1+m)^2$$

$$\sin^2(\frac{t}{2}) = \frac{R_\kappa^2(2m+1)^2}{16m^2R^2(1+m)^2} \quad (2.1)$$

$$s^2 = 16m^2R^2(1+m)^2\cos^2(\frac{t}{2})$$

$$s^2 = 16m^2R^2(1+m)^2(1 - \sin^2(\frac{t}{2})) \quad (2.2)$$

Uvrštavanjem izraza 2.1 u jednakost 2.2 dobivamo:

$$s^2 = 16m^2R^2(1+m)^2 \left( 1 - \frac{R_\kappa^2(2m+1)^2}{16m^2R^2(1+m)^2} \right)$$

$$s^2 = 16m^2R^2(1+m)^2 - R_\kappa^2(2m+1)^2 \quad / : 16m^2R^2(1+m)^2$$

$$\frac{s^2}{16m^2R^2(1+m)^2} + \frac{R_\kappa^2}{(2m+1)^2} = 1$$

Izraze  $16m^2R^2(1+m)^2$  i  $\frac{16m^2R^2(1+m)^2}{(2m+1)^2}$  smatramo konstantama te ih možemo zamijeniti oznakama  $16m^2R^2(1+m)^2 = \mu^2$  i  $\frac{16m^2R^2(1+m)^2}{(2m+1)^2} = \nu^2$ . Tada gornju jednadžbu

zapisujemo kao:

$$\frac{s^2}{\mu^2} + \frac{R_k^2}{\nu^2} = 1.$$

Na taj način smo dobili prirodnu jednadžbu epicikloide.

Sada je prirodno pitati se na koji način možemo konstruirati prostornu krivulju čija projekcija na ravninu je epicikloida. Za epicikloidu u ovom slučaju koristit ćemo sljedeću paramteritaciju

$$e[a, b](t) = \left( (a+b)\cos(t) - b\cos\left(\frac{(a+b)t}{b}\right), (a+b)\sin(t) - b\sin\left(\frac{(a+b)t}{b}\right) \right) \quad (2.3)$$

pri čemu je  $a$  radijus generirajuće kružnice, a  $b$  radijus fiksnog kruga.

**Definicija 8.** Neka je  $e[a, b](t) = (x(t), y(t))$  parametarska jednadžba epicikloide kao u 2.3. Sferična spirala je krivulja čija je parametarska jednadžba definirana sa

$$c[a, b](t) = \left( x(t), y(t), 2\sqrt{ab+b^2}\cos\left(\frac{at}{2b}\right) \right).$$

Kroz sljedeću lemu ćemo pokazati da ovako konstruirana krivulja leži na sferi i da je konstantnog nagiba.

**Lema 6.** Sferična spirala  $c[a, b]$  ima konstantan nagib u odnosu na vektor  $(0, 0, 1)$  i leži na sferi radijusa  $r = a + 2b$  čije je središte u ishodištu.

*Dokaz.* Ako je krivulja  $c[a, b]$  konstantnog nagiba tada mora vrijediti  $T \cdot u = \cos(\phi)$ . U našem slučaju je  $c(t)$  konstantnog nagiba u odnosu na vektor  $(0, 0, 1)$  što znači da mora vrijediti

$$\cos(\phi) = \frac{c'(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|c'(t)\|} = konst.$$

Deriviranjem i sređivanjem gornjeg izraza dobivamo

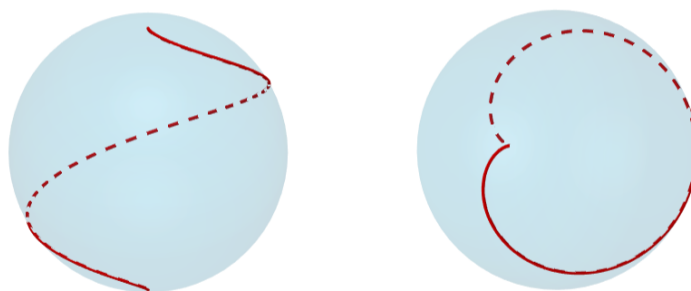
$$\cos(\phi) = -\frac{a}{a+2b}.$$

Time smo dokazali da je krivulja  $c(t)$  krivulja konstatnog nagiba. Preostaje još dokazati da krivulja  $c(t)$  leži na sferi. To znači da mora zadovoljavati njezinu jednadžbu. Odnosno, lako se vidi da vrijedi

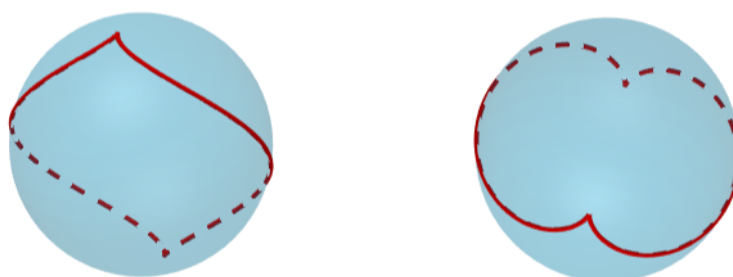
$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = (a + 2b)^2$$

iz čega slijedi da krivulja  $c(t)$  leži na sferi radijusa  $r = a + 2b$  sa središtem u ishodištu.  $\square$

Na slikama 2.2 i 2.3 prikazane su sferne spirale i njihove projekcije na  $xy$  ravninu. Sferna spirala na slici 2.2 dobivena je za  $a = b = \frac{1}{2}$ , a nastala projekcija je kardioida. Sferna spirala na slici 2.3 dobivena je za  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$ , a nastala projekcija je nefroida.



Slika 2.2



Slika 2.3

## Poglavlje 3

# Prostorne krivulje na rotacijskim hiperboloidima

Do sada smo u radu proučavali prostorne krivulje koje leže na sferi, a čijom projekcijom na ravninu dobivamo cikloidne krivulje. Prirodno je pitati se postoje li krivulje na nekoj drugoj kvradici čijom projekcijom bismo mogli dobiti neku cikloidnu krivulju. Odgovor na ovo pitanje je potvrđan. U sljedećem dijelu rada govorit ćemo o pseudo-cikloidnim krivuljama.

Pseudo-cikloidne krivulje su krivulje koje zadovoljavaju prirodnu jednadžbu oblika  $R_\kappa^2 - \omega^2 s^2 = \text{const}$ , pri čemu je  $R_\kappa$  radijus zakrivljenosti krivulje,  $s$  duljina luka, a  $\omega$  konstanta. U ovisnosti o predznaku konstante razlikujemo dvije vrste pseudo-cikloidnih krivulja. Ako je konstanta manja od nule dobivamo krivulje koje se nazivaju **paracikloide**, a ako je konstanta veća od nule dobivamo **hipercikloide**.

Kao što smo u prethodnom poglavlju promatrali krivulje koje leže na sferi u ovom poglavlju promatramo krivulje koje leže na hiperboloidu. Projekcija takvih krivulja na ravninu okomitu na zadani vektor je upravo jedna od pseudo-krivulja.

Parametarske jednadžbe hipercikloide su:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(at) \cosh(bt) - b \sin(at) \sinh(bt) \\ y(t) = a \sin(at) \cosh(bt) + b \cos(at) \sinh(bt) \end{cases}$$



Sada ćemo izračunati prirodnu jednadžbu hipercikloide. Izračunajmo prvu i drugu derivaciju.

$$\dot{x}(t) = -(a^2 + b^2) \sin(at) \cosh(bt)$$

$$\dot{y}(t) = (a^2 + b^2) \cos(at) \cosh(bt)$$

Druga derivacija je:

$$\ddot{x}(t) = -(a^2 + b^2)[a \cos(at) \cosh(bt) + b \sin(at) \sinh(bt)]$$

$$\ddot{y}(t) = -(a^2 + b^2)[a \sin(at) \cosh(bt) - b \cos(at) \sinh(bt)]$$

Zatim računamo determinantu  $\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))$ .

$$\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) = a(a^2 + b^2)^2 \cosh^2(bt)$$

Izračunajmo normu prve derivacije krivulje  $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (a^2 + b^2) \cosh(bt)$

Iz dobivenih podataka lako odredimo zakrivljenost hipercikloide:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{a}{(a^2 + b^2) \cosh(bt)}.$$

Znamo da radijus zakrivljenosti krivulje računamo po formuli  $R_\kappa = \frac{1}{\kappa}$  iz čega slijedi da

je radijus zakrivljenosti hipercikloide jednak  $R_\kappa = \frac{a^2 + b^2}{a} \cosh(bt)$ .

Izračunajmo sada duljinu luka krivulje na segmentu  $[0, t]$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\dot{c}(u)\| du \\ &= \int_0^t (a^2 + b^2) \cosh(bu) du = \frac{a^2 + b^2}{b} \sinh(bt). \end{aligned}$$

Da bi smo konačno dobili prirodnu jednadžbu hipercikloide potrebno je iz jednadžbi

za radijus zakrivljenosti i duljine luka eliminirati parametar  $t$ . Obje jednađbe prvo kvadriramo, a zatim sređivanjem izraza dobivamo sljedeću jednađbu:

$$\frac{\frac{R_{\kappa}^2}{(a^2 + b^2)^2}}{a^2} - \frac{\frac{s^2}{(a^2 + b^2)^2}}{b^2} = 1.$$

Jednakim postupkom možemo i za paracikloidu izračunati njezinu prirodnu jednađbu. Parametarska jednađba paracikloide glasi ovako:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(at) \sinh(bt) - b \sin(at) \cosh(bt) \\ y(t) = a \sin(at) \sinh(bt) + b \cos(at) \cosh(bt) \end{cases}$$

Kao i u prethodnom slučaju računamo prvu i drugu derivaciju parametarski zadane krivulje, te dolazimo do računa  $\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))$ . Dobivamo da je

$$\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) = a(a^2 + b^2)^2 \sinh^2(bt).$$

Također lako izračunamo normu prve derivacije i dobivamo:

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (a^2 + b^2) \sinh(bt).$$

Iz ovako dobivenih rezultata možemo izračunati zakrivljenost paracikloide.

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{a}{(a^2 + b^2) \sinh(bt)}.$$

Računajući duljinu luka dobivamo sljedeće rješenje:  $s(t) = \frac{a^2 + b^2}{b} \cosh(bt)$ . Eliminacijom parametra  $t$  iz jednađbe zakrivljenosti i duljine luka paracikloide dobivamo jednađbu

$$\frac{\frac{s^2}{(a^2 + b^2)^2}}{b^2} - \frac{\frac{R^2}{(a^2 + b^2)^2}}{a^2} = 1.$$

Dobivena jednađba je priroda jednađba paracikloide.

Promatrajući prirodne jednađbe epicikloide, hipocikloide, hipercikloide i paracikloide uočavamo određenu generalizaciju. Općenito zapisano prirodna jednađba projekcije ima oblik

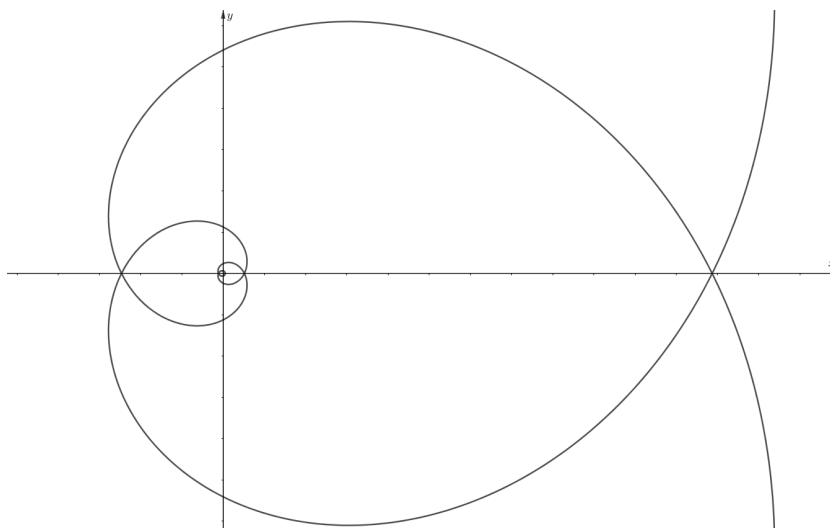
$$\frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{R^2}{\beta^2} = 1; \quad R = \frac{1}{\kappa}.$$

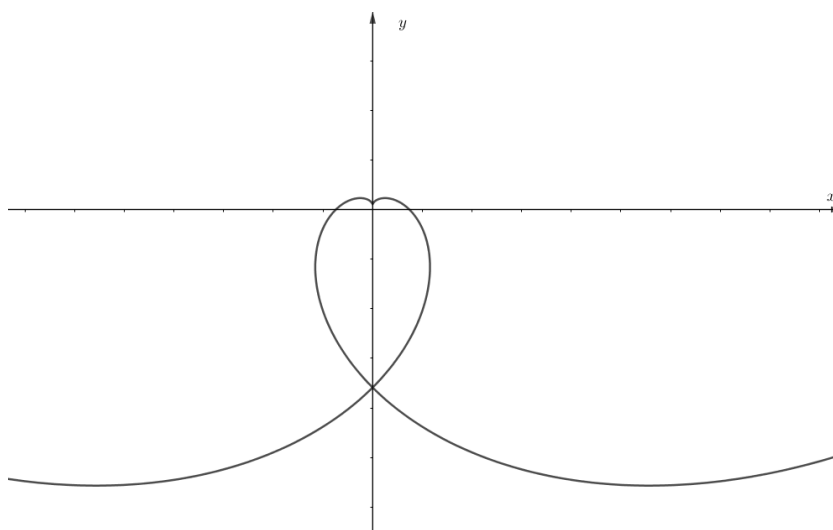
U ovisnosti o parametrima  $\alpha$  i  $\beta$  dobivamo spomenute krivulje. Dakle, za:

Tablica 3.1

$\alpha^2 > \beta^2$	epicikloida
$\alpha^2 < \beta^2$	hipocikloida
$\alpha^2 = \beta^2$	obična cikloida na pravcu
$\alpha^2 < 0, \beta^2 > 0$	hipercikloida
$\alpha^2 > 0, \beta^2 < 0$	paracikloida

Na slici 3.1 prikazana je hiperciklida ( $a = 1, b = \frac{1}{2}$ ), a na slici 3.2 paracikloida ( $a = b = 1$ ).

Slika 3.1:  $a = 1, b = \frac{1}{2}$

Slika 3.2:  $a = b = 1$ 

Nakon što smo odredili prirodne jednadžbe hiper- i paracikloide pitamo se kako izgledaju prostorne krivulje koje leže na hiperboloidu, a čijom projekcijom dobivamo spomenute pseudo-krivulje. Želimo odrediti njihove jednadžbe. Krenimo za početak s određivanjem krivulja koje u projekciji daju hipercikloidu. Dakle, mi tražimo prostornu krivulju  $\tilde{c}(t) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  koja je zadana na sljedeći način:  $\tilde{c}(t) = (x(t), y(t), p \cdot z(t))$ . Budući da je projekcija te prostorne krivulje upravo hipercikloida tada znamo da su koordinate  $x(t)$  i  $y(t)$  za krivulju  $\tilde{c}(t)$  upravo koordinate parametarski zadane hipercikloide. Preostaje nam izračunati konstantu  $p$  i treću koordinatu  $z(t)$ . Znamo da je krivulja  $\tilde{c}(t)$  krivulja konstantnog nagiba u odnosu na vektor  $u = (0, 0, 1)$ . Tada prema definiciji 6 vrijedi analitički uvjet:  $T \cdot u = \cos(\phi) = \text{const}$ , pri čemu je  $T = \frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\|\dot{\tilde{c}}(t)\|}$ . Također znamo da  $\tilde{c}(t)$  leži na hiperboloidu  $x^2 + y^2 - z^2 = \pm r^2$ . Na ovaj način smo dobili dva uvjeta koje tražena krivulja mora zadovoljavati. Dakle, mora vrijediti:

$$\begin{aligned} (i) \quad T \cdot u &= \text{const} \\ (ii) \quad \tilde{c}(t) &\in x^2 + y^2 - z^2 = \pm r^2. \end{aligned}$$

Računajući analitički uvjet koji vrijedi za krivulju  $\tilde{c}(t)$  dobivamo da je  $T \cdot u = \frac{p \cdot \dot{z}(t)}{\|\dot{\tilde{c}}(t)\|}$ . Računamo normu prve derivacije i dobivamo:

$$\|\dot{\tilde{c}}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + p^2 \cdot \dot{z}^2(t)} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 \cosh^2(bt) + p^2 \cdot \dot{z}^2(t)}.$$

Dobar kandidat za treću koordinatu  $z(t)$  je upravo  $z(t) = \sinh(bt)$  iz čega slijedi da je  $\dot{z}(t) = b \cosh(bt)$ . Uvrštavanjem tako dobivene koordinate u uvjet  $i$ ) uočavamo da smo dobili konstantu čime je taj uvjet zadovoljen. Na ovaj način smo odrediti koordinatu  $z(t)$ . Preostaje još odrediti konstantu  $p$ . Traženu konstantu ćemo odrediti koristeći se uvjetom  $ii$ ). Dakle uvrštavamo koordinate krivulje  $\tilde{c}(t)$  u jednadžbu hiperboloida i dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - p^2 z^2 &= -b^2 + (a^2 + b^2) \cosh^2(bt) - p^2 \sinh^2(bt) \\ &= -b^2 + (a^2 + b^2) \cosh^2(bt) - p^2 (\cosh^2(bt) - 1). \end{aligned}$$

Funkcije  $\cosh$  i  $\sinh$  iščezavaju ako je konstanta  $p^2$  jednaka konstanti uz  $\cosh^2(bt)$ . Dakle, dobivamo da je  $p^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow p = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Sada možemo zapisati jednadžbu tražene prostorne krivulje:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t) = & \left( a \cos(at) \cosh(bt) - b \sin(at) \sinh(bt), a \sin(at) \cosh(bt) + b \cos(at) \sinh(bt), \right. \\ & \left. \pm \sqrt{a^2 + b^2} \sinh(bt) \right). \end{aligned}$$

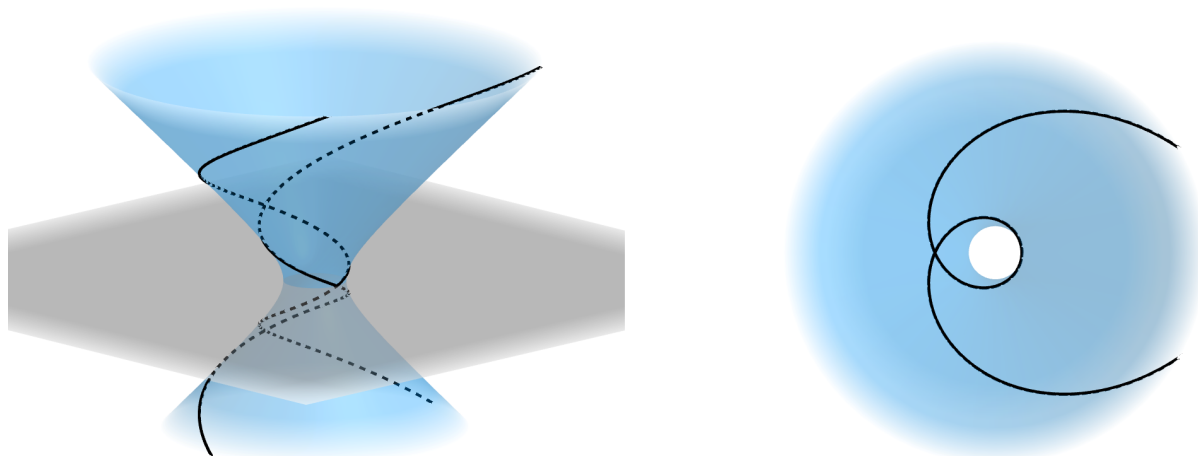
Uvrštavanjem dobivene krivulje u jednadžbu hiperboloida dobivamo da radijus hiperboloida iznosi  $a^2$  pa je njegova jednadžba  $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ .

Cijeli ovaj postupak određivanja prostorne krivulje čija projekcija na  $xy$  ravninu daje hipercikloidu možemo ponoviti i za paracikloidu. Također tražimo prostornu krivulju  $\tilde{c}(t) = (x(t), y(t), p \cdot z(t))$  čije koordinate  $x(t)$  i  $y(t)$  su koordinate parametarski zadane paracikloide. Provođenjem prethodno pisanog računa dobivamo jednadžbu prostorne krivulje

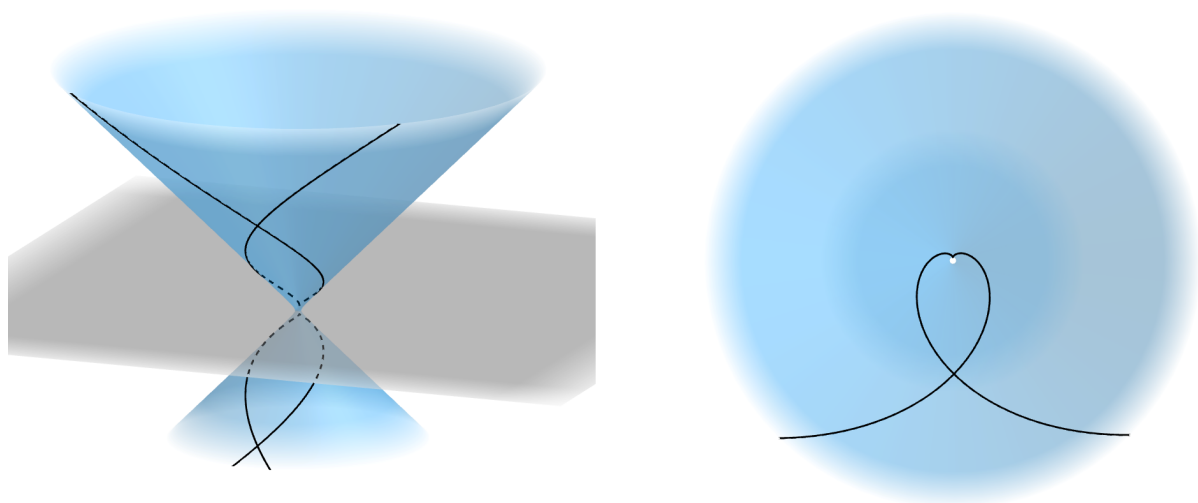
$$\begin{aligned} \tilde{c}(t) = & \left( a \cos(at) \sinh(bt) - b \sin(at) \cosh(bt), a \sin(at) \sinh(bt) + b \cos(at) \cosh(bt), \right. \\ & \left. \pm \sqrt{a^2 + b^2} \cosh(bt) \right). \end{aligned}$$

Ovako zapisana krivulja  $\tilde{c}(t)$  također leži na hiperboloidu radijusa  $-a^2$  pa je njegova jednadžba  $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ .

Na sljedećim slikama prikazane su prostorne krivulje koje leže na hiperboloidu, a čijom projekcijom dobivamo jednu od pseudo krivulja. Na slici 3.3 prikazana je krivulja čijom projekcijom nastaje hiperboloida ( $a = 1, b = \frac{1}{2}$ ). Na slici 3.4 prikazana je krivulja čijom projekcijom nastaje paracikloida ( $a = b = 1$ ).



Slika 3.3:  $a = 1, b = \frac{1}{2}$



Slika 3.4:  $a = b = 1$

# Bibliografija

- [1] <https://www.mathcurve.com/>.
- [2] S. Vidak Ž. Milin Šipuš, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, preuzeto sa <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/userfiles/downloads/UDG-skripta-2.4.pdf>, Travanj, 2019.
- [3] Elsa Abbena, Simon Salamon i Alfred Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [4] Boris Odehnal, *On algebraic minimal surfaces*, KoG **20** (2016), br. 20, 61–78.
- [5] A. A. Savelov, Branko Kučinić i Slavko Hozjan, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, 1979.

# Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su cikloidne krivulje. Cilj rada je jednadžbama i grafički prikazati neke od cikloidnih krivulja. Za vizualizaciju grafičkih prikaza korišten je program dinamičke geometrije GeoGebra.

U prvom poglavlju prikazana je kratka povijest razvoja cikloidnih krivulja te njihove znamenitosti. Izvedene su jednadžbe i opisana neka svojstva koja vrijede.

Glavni dio rada predstavljen je u drugom i trećem poglavlju. Glavni dio je posvećen proučavanju prostornih krivulja koje leže na sferi, a čijom projekcijom na  $xy$  ravninu dobivamo neku od cikloidnih krivulja. Također je proveden istraživački dio rada ispitivanja postoje li prostorne krivulje na nekoj drugoj kvadraci čijom projekcijom bismo mogli dobiti cikloidnu krivulju. Na taj način dolazimo do krivulja koje leže na hiperboloidu, a u projekciji dobivamo pseudo krivulje.



# Summary

The subject of this master thesis are cycloid curves. The main goal is to show some of the curves graphically and with equations. Visualisation of graphs is done in tool of dynamic geometry called GeoGebra.

The first chapter brings short history of cycloid curves and their importance. Equations are presented and some attributes are described.

The main part of the thesis is shown in second and third chapter. The main part is devoted to the study of space curves on a sphere, whose projection on a  $xy$  plane are cycloid curves. Furthermore, research part of the thesis deals with space curves on another quadric whose projection is a cycloid curve. In that way, we get to the curves on hyperboloid, and in projection we get pseudo curves.

# Životopis

Valentina Pekić rođena je 14.02.1996. godine u Slavonskom Brodu. Pohađala je Osnovnu školu Ivane Brlić Mažuranić, Slavonski Brod, koju je završila 2010. godine. Usporedno sa osnovnom školom je pohađala i Glazbenu školu Ivana Zajca koju je završila s odličnim uspjehom. Od instrumenata je svirala klavir. Nakon osnovne škole je upisala Prirodoslovno matematičku gimnaziju Matija Mesić. Uz sve školske obveze je bila aktivni član i plesač KUD-a Luka Lukić Brodski Varoš. 2014. godine je upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematike; nastavnički smjer na Matematičkom odjseku PMF-a. Prediplomski studij je završila u roku, te 2017. godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematike također nastavnički smjer. Kao student nakon završene treće godine je radila u Erste banci u Zagrebu, zatim nakon četvrte godine u firmi PES creative factory. Na petoj godini studija, uz studentske obveze u ljetnom semestru, je radila na zamjeni u Petoj gimnaziji u Zagrebu. Kao priznanje u akademskoj godini 2018./2019. je dobila pohvalnicu za izvrstan uspjeh.