SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivona Pezelj

VEKTORSKA METODA U STEREOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik

2. ____ , član

3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _______________________________________

2. _______________________________________

3. _______________________________________

Sadržaj

Uvod

S pojmom vektora učenici se prvi put upoznaju već u osmom razredu osnovne škole, gdje se susreću s nekim jednostavnim tvrdnjama i problemima, a potom u trećem razredu srednje škole produbljuju stečeno znanje kroz razne planimetrijske i stereometrijske probleme. U ovom radu, podijeljenom u pet poglavlja, naglasak će biti na primjeni vektorske metode u stereometriji.

U prvom poglavlju navest ćemo osnovne pojmove o vektorima kroz različite definicije, propozicije i teoreme koji su potrebni za daljne razumijevanje teme rada.

U narednom poglavlju uvest ćemo pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, definirati radijvektore te dokazati nekoliko teorema vezanih uz iste.

U sljedeća tri poglavlja bavit ćemo se različitim tipovima množenja vektora – skalarnim, vektorskim i mješovitim produktom. U svakom od spomenutih poglavlja objasnit ćemo specifične karakteristike svakog od njih te kroz razne primjere upoznati se s njihovom primjenom.

Na samom kraju svakog poglavlja pokazat ćemo nekoliko stereometrijskih problema, čija smo rješenja najčešće nalazili u geometrijskom obliku, a u ovom će radu fokus biti na vektorskoj metodi rješavanja istih.

Literatura koja je bila izvor definicija i teorema u ovom radu je [1], dok problemski zadaci potiču iz literature [2], [3] i [4].

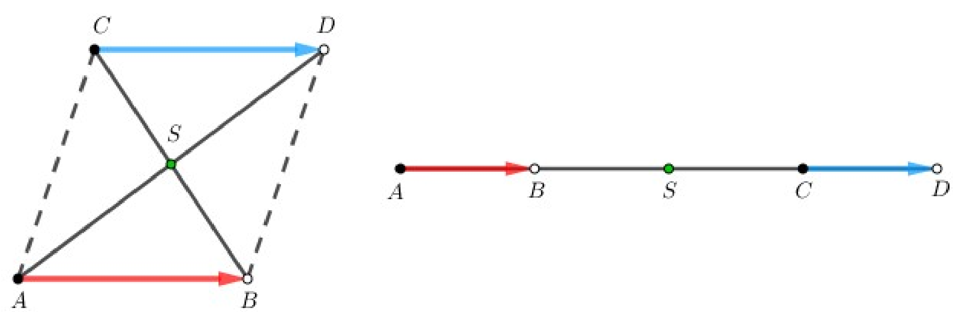
Poglavlje 1

Temeljni pojmovi o vektorima i vektorskom računu

U navedenom poglavlju bit će prikazani osnovni pojmovi o vektorima, u smislu raznih definicija, propozicija, teorema te tvrdnji koje su potrebne za daljnu razradu teme rada. U ovom ćemo radu za prostor koristiti oznaku E^3.

Definicija 1.1. Usmjerena *ili* **orijentirana dužina** *je uređen par točaka* (A, B), $A, B \in E^3$, *gdje točku* A *nazivamo početkom (početnom točkom), a točku* B *završetkom ili krajem (završnom ili krajnjom točkom) te usmjerene dužine u oznaci* $\overrightarrow{AB}$.

Definicija 1.2. *Usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *su jednake ako i samo ako dužine* $\overline{AD}$ *i* $\overline{BC}$ *imaju zajedničko polovište. Pišemo* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

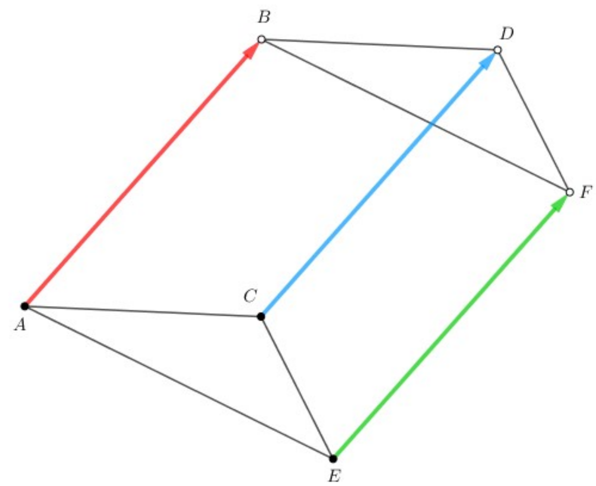


Slika 1.1.

Ako su točke A, B, C, D nekolinearne, tada su dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ dijagonale četverokuta $ABDC$, te možemo reći da su u tom slučaju usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednake ako je četverokut $ABDC$ paralelogram.

Ako su A, B, C, D kolinearne, tada za jednake usmjerene dužine imamo sliku kao na slici 1.1. desno.

Propozicija 1.3. *Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $E^3 \times E^3$.*



Slika 1.2.

Dokaz. Kako su refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$ očite, pokažimo tranzitivnost. Neka je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Pretpostavimo da usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ leže na različitim pravcima u E^3. Iz pretpostavke slijedi da je četverokut $ABDC$ paralelogram, odnosno pravac AB paralelan je s pravcem CD i duljina dužine $\overline{AB}$ jednaka je duljini dužine $\overline{CD}$. Također, iz pretpostavke slijedi da je i četverokut $CDFE$ paralelogram, stoga je pravac CD paralelan je s pravcem EF i duljina dužine $\overline{CD}$ jednaka je duljini dužine $\overline{EF}$. Iz tranzitivnosti relacija paralelnosti i jednakosti duljina dužina slijedi $AB \parallel EF$ i $|AB| = |EF|$, odnosno četverokut $ABFE$ je paralelogram. Zaključujemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Na sličan način se pokazuje tranzitivnost i u ostalim slučajevima.

$\square$

Definicija 1.4. **Vektor** *je klasa ekvivalencije po relaciji* $\sim$ *na skupu svih usmjerenih dužina* $E^3 \times E^3$. *Skup svih vektora označavamo s* V^3.

Klasu ekvivalencije određenu usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$ označavat ćemo s $[\overrightarrow{AB}]$ ili $\vec{a}$. Vrijedi $[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{XY} \in E^3 \times E^3 : \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$. Često ćemo ga kraće označavati s $\overrightarrow{AB}$.

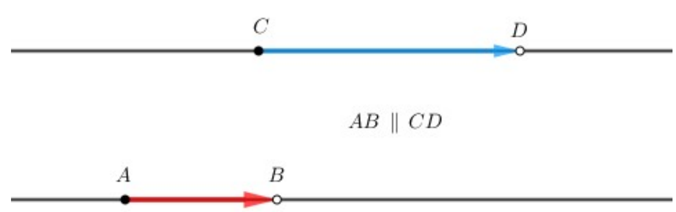
Svaku usmjerenu dužinu koja pripada vektoru $[\overrightarrow{AB}]$ nazivamo **predstavnikom** ili **reprezentantom** vektora $[\overrightarrow{AB}]$.

Klasu ekvivalencije usmjerene dužine $\overrightarrow{AA}$ nazivat ćemo **nulvektorom** i označavati s $\vec{0}$. Nulvektor smatramo kolinearnim sa svim vektorima prostora V^2, odnosno komplanarnim sa svim vektorima prostora V^3.

Definicija 1.5. **Duljina vektora** $\vec{a}$ *definira se kao duljina dužine* $\overline{AB}$ *koja je predstavnik vektora* $\vec{a}$.

Duljinu vektora još zovemo: iznos, apsolutna vrijednost, modul, intenzitet ili norma vektora.

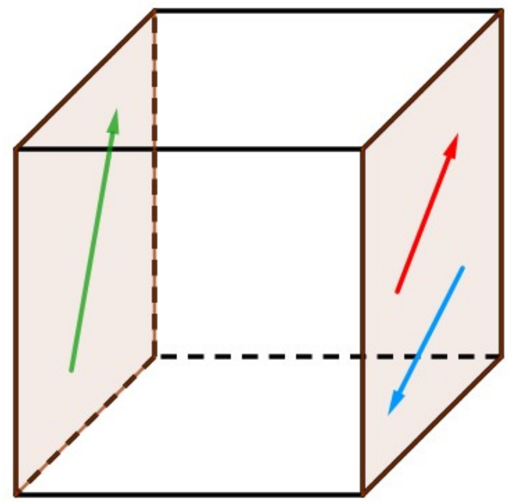
Vektor kojemu je duljina jednaka 1 nazivamo **jedinični** ili **normirani** vektor.



Slika 1.3.

Vektori $[\overrightarrow{AB}]$ i $[\overrightarrow{CD}]$ imaju **isti smjer** ukoliko su pravci AB i CD paralelni. Za takve vektore kažemo da su kolinearni.

Analogno, tri vektora su **komplanarna** ako postoji ravnina u kojoj leže predstavnici sva tri vektora.



Slika 1.4.

Ako su točke O, A i B kolinearne, tada vektori $[\overrightarrow{OA}]$ i $[\overrightarrow{OB}]$ imaju **istu orijentaciju** ukoliko su točke A i B s iste strane točke O.

Slika 1.5.

Ako se točka O nalazi između točaka A i B, vektori su **suprotne orijentacije**.

Slika 1.6.

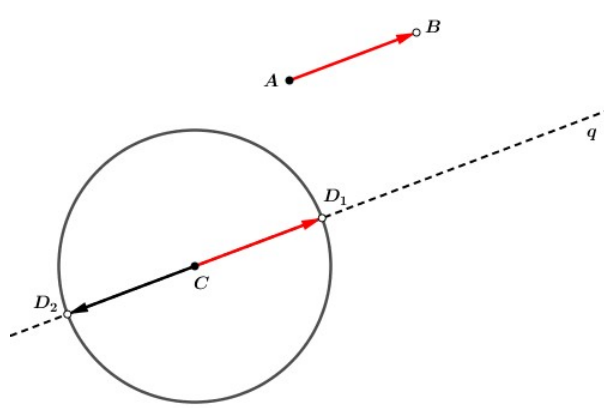
Vektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ očito imaju jednake duljine, isti smjer i suprotnu orijentaciju. Takva dva vektora nazivamo međusobno **suprotni vektori** i pišemo $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Ako vektor $\overrightarrow{AB}$ kraće označimo s $\vec{a}$, tada je vektor $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$. Također, uočavamo da vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Propozicija 1.6. *Neka je* $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ *i* $C \in E^3$. *Tada postoji jedinstvena točka* $D \in E^3$ *takva da je* $\vec{a} = [\overrightarrow{CD}]$.

Dokaz. Neka je $\overrightarrow{AB}$ usmjerena dužina koja je predstavnik vektora $[\overrightarrow{AB}]$. Tada točke A, B, C određuju ili jednu ravninu π ili su kolinearne. Promotrimo slučaj kada one određuju ravninu. Prema petom Euklidovom postulatu postoji jedinstveni pravac q kroz točku C paralelan s pravcem AB. Kružnica $k(C, |AB|)$ siječe pravac q u dvije točke, D_1 i D_2. Dobivene usmjerene dužine $\overrightarrow{CD_1}$ i $\overrightarrow{CD_2}$ suprotnih su orijentacija, pa od njih dvije odabiremo onu koja ima istu orijentaciju kao i usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$.

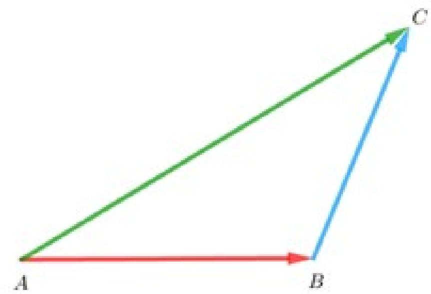
□



Slika 1.7.

U nastavku definirajmo zbrajanje vektora pomoću predstavnika klasa.

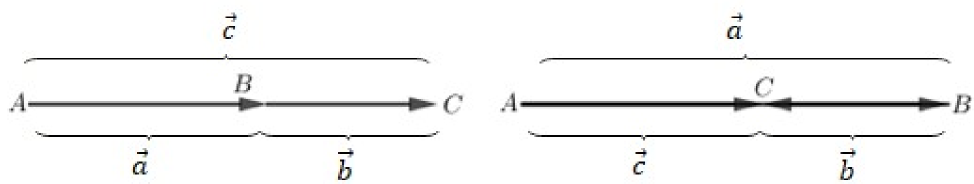
Definicija 1.7. *Neka su* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ *i* $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$. **Zbroj vektora** $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *je vektor* $\vec{a} + \vec{b}$ *određen predstavnikom* $\overrightarrow{AC}$*:* $\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$.



Slika 1.8.

Ovakvo zbrajanje nazivamo **pravilo trokuta za zbrajanje vektora**.

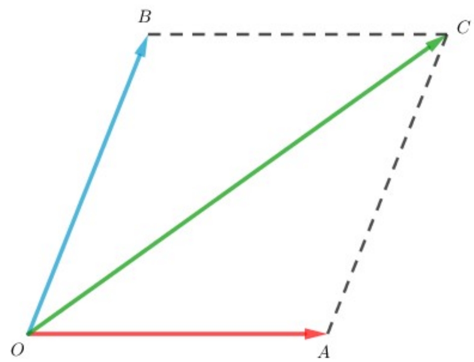
Pravilo vrijedi i ako su točke A, B, C kolinearne. Tada trokut degenerira u dužinu.



Slika 1.9.

Zbrajanje vektora može se definirati i na sljedeći način.

Definicija 1.9. *Neka je* $O \in E^3$ *proizvoljna točka i neka su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *dani svojim predstavnicima s početkom u točki* O, $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$. **Zbroj vektora** $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *je vektor* $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$, *pri čemu je* C *jedinstvena točka u* E^3 *takva da je četverokut* $OACB$ *paralelogram.*

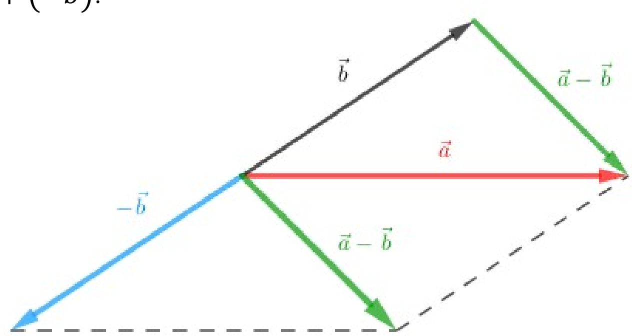


Slika 1.10.

Ovakvo zbrajanje nazivamo **pravilo paralelograma za zbrajanje vektora**.

Definicije zbrajanja vektora po pravilu trokuta i paralelograma su ekvivalentne.

Napomena 1.10. Oduzimanje vektora svodi se na zbrajanje vektora i računa se ovako: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.



Slika 1.11.

Teorem 1.11. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ po volji odabrani vektori iz V^3, tada vrijedi:*

i) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, *asocijativnost zbrajanja*

ii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\vec{0}$ *je neutralni element za zbrajanje*

iii) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$, $-\vec{a}$ *je suprotni element od* $\vec{a}$ *za zbrajanje*

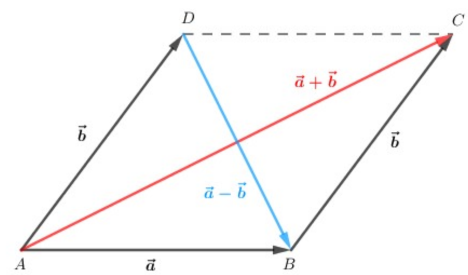
iv) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, *komutativnost zbrajanja*

Napomena 1.12. Iz prethodnog teorema uočavamo da je $(V^3, +)$ grupa.

Za zbroj dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pri čemu je $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$, vrijedi tzv. **nejednakost trokuta**:

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Jednakost vrijedi samo ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori i to u prvoj nejednakosti ako su suprotne, a u drugoj ako su iste orijentacije.

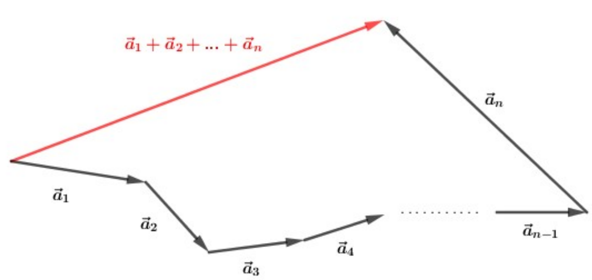


Slika 1.12.

Ako u paralelogramu $ABCD$ uzmemo $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ i primijenjujući na trokute ABC, odnosno ABD činjenicu da je duljina jedne stranice trokuta veća od razlike, a manja od zbroja drugih dviju stranica, dobivamo upravo iskazanu nejednakost. Očito je da vrijede jednakosti ako trokuti degeneriraju u dužine, tj. ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori.

Iz desne nejednakosti izravno možemo dobiti tzv. **nejednakost mnogokuta**:

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n| \leq |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \cdots + |\vec{a}_n|$$



Slika 1.13.

u kojoj također vrijedi jednakost samo ako su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektori istog smjera i iste orijentacije, što se vidi iz slike 1.13.

Definicija 1.13. Množenje vektora skalarom *je operacija* $: \mathbb{R} \times V^3 \longrightarrow V^3$ *koja uređenom paru* $(\alpha, \vec{a})$ *za* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *i* $\vec{a} \in V^3\backslash\{\vec{0}\}$ *pridružuje vektor* $\alpha\vec{a}$ *kojemu je*

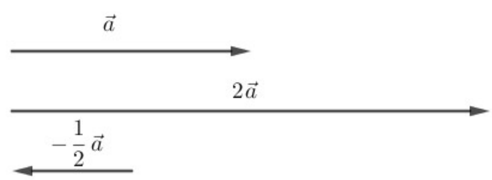
i) modul: $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

ii) smjer: isti kao smjer od $\vec{a}$

iii) orijentacija: jednaka kao ona vektora $\vec{a}$ *ako je* $\alpha > 0$ *i suprotna ako je* $\alpha < 0$.

Ako je $\alpha = 0$, *tada je* $\vec{a} = \vec{0}$, $\forall \vec{a} \in V^3$. *Također, ako je* $\vec{a}$ *nulvektor, tada je* $\alpha\vec{a} = \vec{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

U ovom kontekstu realne brojeve nazivamo **skalarima**.



Slika 1.14.

Teorem 1.14. *Ako su* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *po volji odabrani vektori i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *skalari, tada vrijedi:*

i) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, *netrivijalnost množenja*

ii) $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$, *kvaziasocijativnost*

iii) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, *distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora*

iv) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, *distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara*

Napomena 1.15. Uz navedena svojstva zbrajanja i množenja skalarom na skupu V^3, kažemo da je V^3 jedan vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ - realan vektorski prostor.

Definicija 1.16. *Za vektore* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ *i realne brojeve (skalare)* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *vektor* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ *zove se* **linearna kombinacija** *vektora* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.17. *Vektori* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ *su* **linearno nezavisni** *ako njihova proizvoljna linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način, odnosno* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. *U protivnom kažemo da su vektori* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **linearno zavisni** *ako postoji barem jedan od skalara* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *različit od nule takav da je* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Teorem 1.18. *Skup vektora* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ *je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

Promotrimo linearnu kombinaciju specijalno za vektorski prostor V^3.

Propozicija 1.19. *Neka su* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *nekomplanarni vektori. Tada za svaki vektor* $\vec{d}$ *postoje jedinstveni skalari* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Napomena 1.20. Linearna zavisnost triju vektora je ekvivalentna s komplanarnosti tih vektora.

Iz prethodne propozicije slijedi da su za prikaz vektora u prostoru potrebna tri nekomplanarna vektora. Svaku trojku $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ takvih vektora nazivamo baza vektorskog prostora V^3.

U aktualnom nastavnom programu proučavaju se u biti usmjerene dužine, tj. vektor se izjednačio s usmjerenom dužinom te se uopće ne spominje klasa ekvivalencije. Do te je promjene došlo unatrag tridesetak godina. Stoga, u svim školskim materijalima pojavljuje se pojam vektor, iako bi u ponekim situacijama bilo preciznije govoriti o usmjerenoj dužini.

Poglavlje 2

Kartezijev koordinatni sustav i radijvektori

U ovom ćemo poglavlju uvesti pravokutni Kartezijev koordinatni sustav. Zatim ćemo definirati radijvektore te dokazati nekoliko teorema vezanih uz iste. Na kraju poglavlja riješit ćemo nekoliko stereometrijskih problema primjenom metode radijvektora.

Od koordinatnih sustava kojima se služimo u analitičkoj geometriji prostora najčešće se koristi **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav** koji je analogon takvog sustava u ravnini. Koordinatne osi tog sustava čine tri međusobno okomita brojevna pravca O_x, O_y i O_z koje prolaze jednom čvrstom točkom O. Tu točk nazivamo **ishodištem** koordinatnog sustava. Brojevne pravce O_x, O_y i O_z zovemo **koordinatnim osima**, odnosno pravac O_x zovemo **x-os** ili **os apscisa**, pravac O_y **y-os** ili **os ordinata** te pravac O_z **z-os** ili **os aplikata**.

Na svakoj koordinatnoj osi uveden je koordinatni sustav na pravcu, tj. na pozitivnim dijelovima osi O_x, O_y i O_z nalaze se točke E_1, E_2, E_3 takve da vrijedi $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1$. Jedinične vektore $\overrightarrow{OE_1} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ nazivamo **ortovima** u smjeru koordinatnih osi. Sada kada smo uveli takav koordinatni sustav, označavat ćemo ga s $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Ravninu određenu apscisom i ordinatom nazivamo **xy-ravninom**. Analogno se definiraju **yz-ravnina** i **xz-ravnina**. Spomenute ravnine jednim imenom zovemo **koordinatnim ravninama**.

Obzirom na tako uvedeni koordinatni sustav, u nastavku možemo svakoj točki prostora T pridružiti uređenu trojku realnih brojeva. Točkom T položimo ravnine koje su paralelne s koordinatnim ravninama xy, yz i xz. Te ravnine sijeku koordinatne osi x, y, z redom u točkama X, Y, Z. Uočimo da postoje realni brojevi x, y, z takvi da je

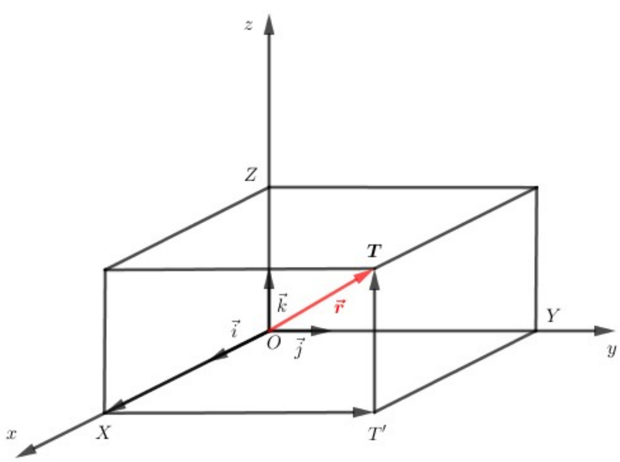
$$\overrightarrow{OX} = x\vec{\imath}, \qquad \overrightarrow{OY} = y\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{OZ} = z\vec{k}.$$

Realne brojeve x, y, z nazivamo **koordinatama točke T** i označavamo s $T = (x, y, z)$. Realnie brojeve x, y, z redom zovemo **apscisom**, **ordinatom** i **aplikatom** točke T. Na ovaj je način svakoj točki prostora T pridružena uređena trojka (x, y, z) realnih brojeva i obrnuto.

Zaključujemo da postoji bijekcija između skupa točaka prostora i skupa $\mathbb{R}^3$ svih uređenih trojki realnih brojeva.

Sada možemo definirati radijvektor.

Definicija 2.1. *Neka je O čvrsta točka prostora i T bilo koja točka prostora. Usmjerenu dužinu $\overrightarrow{OT}$ nazivamo* **radijvektorom** *točke T i označavamo s $\vec{r}$.*



Slika 2.1.

Ako u prostor uvedemo Kartezijev koordinatni sustav koji ima ishodište u O, tada radijvektor točke T možemo prikazati i kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora.

Sa slike 2.1. vidimo da je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XT'} + \overrightarrow{T'T}$. Kako je $\overrightarrow{XT'} = \overrightarrow{OY}$ i $\overrightarrow{T'T} = \overrightarrow{OZ}$, vrijedi $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$, tj.

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Promotrimo formulu za udaljenost točaka pomoću radijvektora.

Formula za **udaljenost dviju točaka** u prostoru izvodi se analogno kao i ravnini. Neka su $T_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1{,}2$ dvije točke i $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ njihovi radijvektori. Tada je

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1O} + \overrightarrow{OT_2} = -\overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{OT_2} = -x_1\vec{\imath} - y_1\vec{\jmath} - z_1\vec{k} + x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k},$$

odnosno

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Kao posljedicu Pitagorina teorema imamo da je udaljenost točaka T_1 i T_2 jednaka

$$d(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

a time smo dobili i formulu za duljinu od $\overrightarrow{T_1T_2}$.

U nastavku ćemo analizirati dijeljenje dužine u zadanom omjeru pomoću radijvektora.

Definicija 2.2. *Točka T dijeli dužinu $\overline{T_1T_2}$ u omjeru λ ako je $\overrightarrow{T_1T} = \lambda\overrightarrow{T_2T}$.*

Teorem 2.3. *Neka su $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ radijvektori točaka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Radijvektor $\vec{r}$ točke $T\ (x, y, z)$ koja orijentiranu dužinu $\overrightarrow{T_1T_2}$ dijeli u omjeru λ dan je s*

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - \lambda\vec{r}_2}{1 - \lambda}.$$

Dokaz. Neka je O čvrsta točka prostora i $T\ (x, y, z)$ točka koja dijeli orijentiranu dužinu $\overrightarrow{T_1T_2}$ u omjeru λ. Iz $\overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{T_1O} + \overrightarrow{OT}$ slijedi da je $\overrightarrow{T_1T} = \vec{r} - \vec{r}_1$. Iz $\overrightarrow{T_2T} = \overrightarrow{T_2O} + \overrightarrow{OT}$ slijedi da je $\overrightarrow{T_2T} = \vec{r} - \vec{r}_2$. Uvrštavanjem zapisa orijentiranih dužina $\overrightarrow{T_1T}$ i $\overrightarrow{T_2T}$ pomoću radijvektora u izraz $\overrightarrow{T_1T} = \lambda\overrightarrow{T_2T}$ dobivamo

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r} - \vec{r}_2),$$

$$\vec{r}(1 - \lambda) = \vec{r}_1 - \lambda\vec{r}_2\,,$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - \lambda \vec{r}_2}{1 - \lambda}.$$

□

Korolar 2.4. *Točka* $T\,(x, y, z)$ *je polovište dužine* $\overline{T_1T_2}$ *ako je* $\lambda = -1$. *Tada za radijvektor polovišta vrijedi*

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\,.$$

Koordinatni zapis tvrdnje teorema 2.3. glasi

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}\,, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}\,, \qquad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}$$

pa sukladno tome korolar 2.4. koordinatno glasi

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

Korolar 2.5. *Sve tri težišnice trokuta* $T_1T_2T_3$ *sijeku se u jednoj točki* T *koju zovemo težište trokuta, a za koju vrijedi*

$$\vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

Dokaz. Neka je dan trokut $T_1T_2T_3$. Neka su T', T'', T''' redom polovišta stranica $\overline{T_2T_3}$, $\overline{T_1T_3}$ i $\overline{T_1T_2}$ tog trokuta te neka je O neka čvrsta točka prostora. Tada su $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ redom radijvektori vrhova T_1, T_2 i T_3. Uzmimo da su točke P, Q, R redom točke na težišnicama $\overline{T_1T'}$, $\overline{T_2T''}$ i $\overline{T_3T'''}$ koje ih dijele u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta, odnosno $\lambda = -2$. Kako je T' polovište stranice $\overline{T_2T_3}$, vrijedi da je

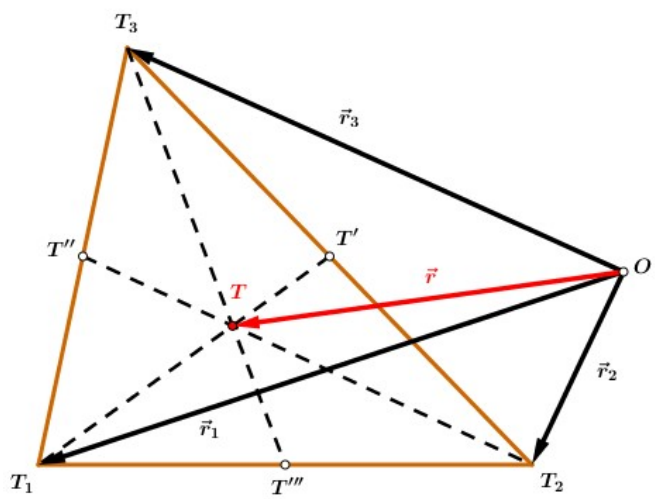
$$\vec{r}_{T'} = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3),$$

a zbog činjenice da točka P dijeli stranicu $\overline{T_1T'}$ u omjeru $\lambda = -2$, prema teoremu 2.3. imamo da je

$$\begin{aligned}\vec{r}_P &= \frac{\vec{r}_1 - (-2)\vec{r}_{T'}}{1-(-2)} \\ &= \frac{\vec{r}_1 - (-2)\cdot\frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3)}{1-(-2)} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).\end{aligned}$$

Analognim postupkom dobivamo isti rezultat za $\vec{r}_Q$ i $\vec{r}_R$. Slijedi da je $\vec{r}_P = \vec{r}_Q = \vec{r}_R$ pa zaključujemo da su P, Q i R zapravo iste točke u kojima se sijeku težišnice trokuta $T_1T_2T_3$. Ako to sjecište nazovemo s T, očito vrijedi tvrdnja korolara.

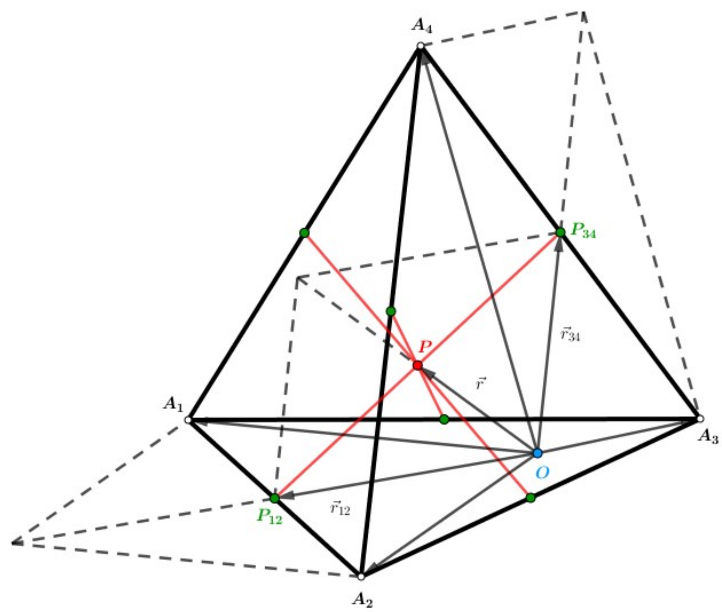
□



Slika 2.2.

U nastavku pogledajmo par stereometrijskih primjera čije tvrdnje pokazujemo primjenom radijvektora.

Primjer 2.6. *Dokažite da se dužine koje spajaju polovišta suprotnih bridova tetraedra sijeku u jednoj točki i ta je točka njihovo zajedničko polovište.*



Slika 2.3.

Rješenje. Dan je tetraedar $A_1A_2A_3A_4$. Neka je $\vec{r}_i$ radijvektor vrha A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, te neka je $\vec{r}_{ij}$ radijvektor polovišta P_{ij} brida $\overline{A_iA_j}$. Slijedi da su P_{12} i P_{34} polovišta suprotnih bridova. Nadalje, vidimo da vrijedi $\vec{r}_{12} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ i $\vec{r}_{34} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4)$. Neka je $\vec{r}$ radijvektor polovišta P dužine $\overline{P_{12}P_{34}}$. Uočimo da je tada

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\,(\vec{r}_{12} + \vec{r}_{34})$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4)\right),$$

odnosno

$$\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4).$$

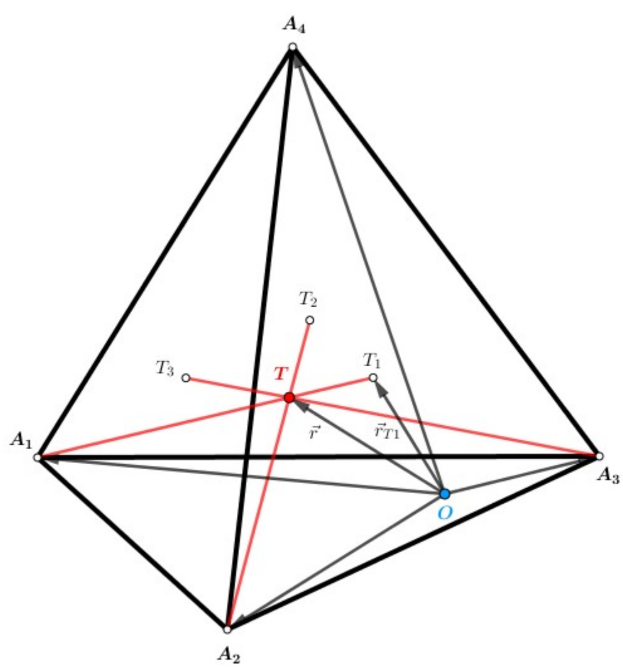
Analogno se pokaže da ista tvrdnja vrijedi za dužine $\overline{P_{14}P_{23}}$ i $\overline{P_{13}P_{24}}$. Zaključujemo da se sve te dužine sijeku u istoj točki koja je njihovo zajedničko polovište. Time smo dokazali tvrdnju.

□

Težišnica tetraedra je dužina koja spaja njegov vrh sa težištem suprotne strane.

Primjer 2.7. *Dokažite da se težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki i da ta točka dijeli svaku težišnicu u omjeru 3 : 1 računajući od vrha. To sjecište nazivamo težište tetraedra. Pokažite da je radijvektor težišta T jednak*

$$\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4).$$



Slika 2.4.

Rješenje. Dan je tetraedar $A_1A_2A_3A_4$. Neka su $\vec{r}_i$ radijvektori njegovih vrhova $A_i,\ i = 1, 2, 3, 4$. S T_1 označimo težište strane, tj. trokuta $A_2A_3A_4$. U nastavku promotrimo težišnicu $\overline{A_1T_1}$. Radijvektor točke T_1 tada je, prema korolaru 2.5., dan s $\vec{r}_{T_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$. Označimo s T onu točku te težišnice koja ju dijeli u omjeru 3 : 1 računajući od vrha, odnosno vrijedi $\lambda = -3$. Prema teoremu 2.3. imamo da je radijvektor $\vec{r}$ točke T jednak

$$\vec{r} = \frac{1}{4}\left[\vec{r}_1 - (-3) \cdot \frac{1}{3}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)\right],$$

odnosno

$$\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4).$$

Analogni račun provedemo za ostale težišnice, nakon čega za svaku dobivamo isti izraz, čime smo dokazali tvrnju.

□

Napomena 2.8. Točka P u rješenju primjera 2.6. podudara se s težištem T iz primjera 2.7.

Primjer 2.9. *Težišta strana* $A_2A_3A_4$ *i* $A_1A_3A_4$ *tetraedra* $A_1A_2A_3A_4$ *su točke* T_1 *i* T_2. *Dokažite da su vektori* $\overrightarrow{T_1T_2}$ *i* $\overrightarrow{A_1A_2}$ *kolinearni, tj. da postoji* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\overrightarrow{T_1T_2} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2}$. *Odredite* λ.

Rješenje. Dan je tetraedar $A_1A_2A_3A_4$. Neka je O neka čvrsta točka prostora. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

Nadalje,

$$\vec{r}_{T_A} = \overrightarrow{OT_A} = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$$

$$\vec{r}_{T_B} = \overrightarrow{OT_B} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_D).$$

Sada slijedi da je

$$\overrightarrow{T_AT_B} = \vec{r}_{T_B} - \vec{r}_{T_A}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_D) - \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$$

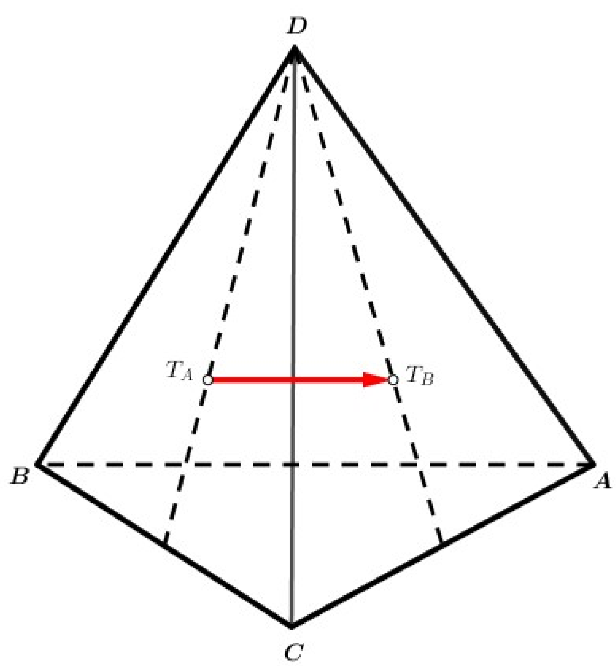
$$= \frac{1}{3}(\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$T_AT_B = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

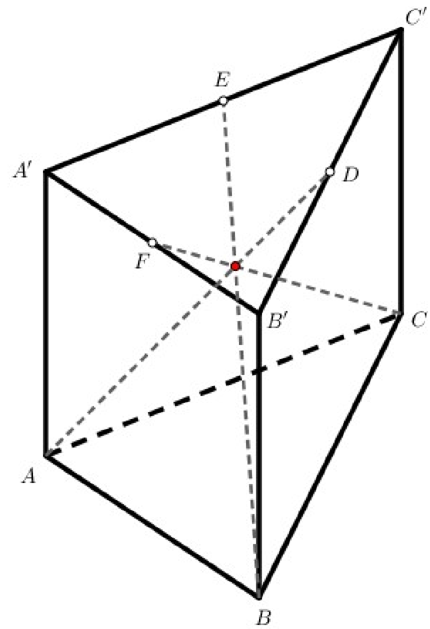
čime smo dokazali tvrdnju zadatka. Iz rješenja zadatka vidimo da je $\lambda = -\frac{1}{3}$.

□



Slika 2.5.

Primjer 2.10. *Ako se spoje vrhovi jedne baze trostrane prizme s polovištima suprotnih bridova druge baze, tada te tri dužine imaju zajedničku točku koja dijeli te dužine u istom omjeru* $\lambda = -2$. *Dokažite navedenu tvrdnju.*



Slika 2.6.

Rješenje. Dana je trostrana prizma $ABCA'B'C'$. Neka je D polovište brida $B'C'$, E polovište brida $A'C'$ i F polovište brida $A'B'$. Označimo s K točku na dužini $\overline{AD}$ koja ju dijeli u omjeru 2 : 1 računajući od vrha prizme A. Tada je vrijednost djelišnog omjera u kojem K dijeli dužinu $\overline{AD}$ jednaka $\lambda = -2$. Neka su L i M redom točke na dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ s istim svojstvom kao i točka K. Točka O je proizvoljna točka prostora. Tada je

$$\vec{r}_K = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + 2\vec{r}_D) = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Analogno, isto se dobije za $\vec{r}_L$ i $\vec{r}_M$ čime smo dokazali tvrdnju.

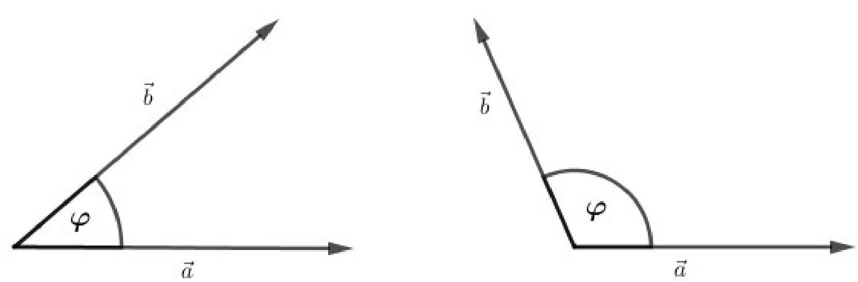
□

Poglavlje 3

Skalarni produkt

U ovom poglavlju definirat ćemo skalarni produkt vektora, pokazati i dokazati neke bitne tvrdnje vezane uz isti te navesti njegova svojstva koja će nam pomoći pri rješavanju odabranih stereometrijskih problema koji će biti dani na kraju poglavlja.

Da bismo mogli definirati skalarni produkt dvaju vektora, moramo prvo pokazati kako računati kut između vektora. Dvije usmjerene dužine s istom početnom točkom u ravnini tvore dva kuta. Kutom između dva vektora nazivamo onaj kut od ta dva kuta čija je mjera iz intervala $[0, \pi]$.



Slika 3.1.

U ovom ćemo tekstu za kut i njegovu mjeru koristiti istu oznaku $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Također, vrijedi i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$.

Ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, onda kažemo da su vektori okomiti, tj. ortogonalni i pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Možemo primijetiti da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni ako i samo ako vrijedi $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ili $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$. U prvom slučaju vektori su iste, a u drugom suprotne orijentacije.

Sada možemo definirati skalarni produkt.

Definicija 3.1. Skalarni produkt vektora *je operacija* $\cdot : V^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *koja vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *pridružuje skalar na sljedeći način:*

- *ako su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *ne-nulvektori, tada je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

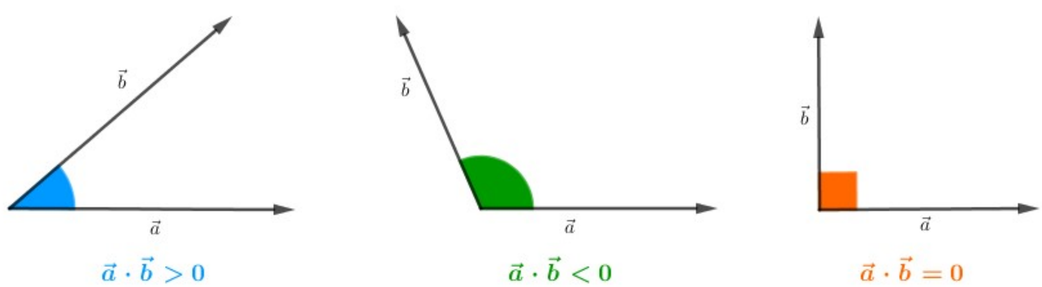
- *ako je neki od vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *nulvektor, tada je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Vrijednost $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$ *nazivamo skalarnim produktom ili skalarnim umnoškom vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*.*

Kao rezultat skalarnog množenja ne-nulvektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imamo tri slučaja:

- skalarni produkt je pozitivan ako je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ šiljast
- skalarni produkt je negativan ako je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tup
- skalarni produkt je jednak 0 ako je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pravi



Slika 3.2.

Propozicija 3.2. *Ne-nulvektori* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *su okomiti ako i samo ako je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Dokaz. Kako su vektori $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, prema definiciji 3.1., očito vrijedi da je njihov skalarni umnožak jednak $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

No, prema tvrdnji propozicije, znamo da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, odnosno $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, što vrijedi ako i samo ako je $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Iz toga slijedi da je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, čime smo pokazali tvrdnju.

□

Promotrimo svojstva skalarnog množenja.

Teorem 3.3. *Za vektore* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \vec{a}^2 \geq 0 \\ ii)\ \vec{a}^2 = 0 \text{ ako i samo ako } \vec{a} = \vec{0} \end{array}\right\} \text{pozitivna definitnost}$$

iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, *komutativnost*

iv) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, *kvaziasocijativnost*

v) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, *distributivnost prema zbrajanju*

Dokaz.

i) Primjenom definicije skalarnog produkta slijedi $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{a})$. Kut što ga zatvara vektor $\vec{a}$ sa samim sobom očito je jednak 0, pa slijedi da je $cos\angle(\vec{a}, \vec{a}) = 1$. Konačno je $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \geq 0,\ \forall \vec{a} \in V^3$.

ii) Iz svojstva *i)* znamo da je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, pa će vrijediti $\vec{a}^2 = 0$ ako i samo ako je $|\vec{a}|^2 = 0$, što je ekvivalentno s $|\vec{a}| = 0$. Konačno, to pak vrijedi ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0},\ \forall \vec{a} \in V^3$.

iii) Prema definiciji skalarnog produkta imamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

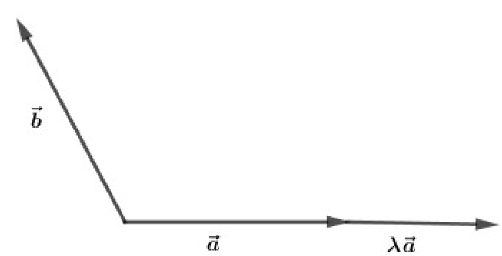
i

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}| \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}).$$

Zbog činjenice da je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$ te zbog komutativnosti množenja realnih brojeva $|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{b}||\vec{a}|$, slijedi da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

iv) Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tvrdnja očito vrijedi. Zbog te činjenice, uzmimo da je $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Promotrimo dva slučaja:

1. $\lambda > 0$

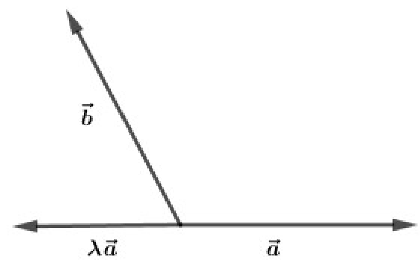


Slika 3.3.

Uočimo da su tada vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ kolinearni te iste orijentacije pa vrijedi $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$ i $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

2. $\lambda < 0$



Slika 3.4.

Sada vidimo da su vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ također kolinearni, ali suprotne orijentacije pa vrijedi $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$ i $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) \\ &= -\lambda|\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})\right) \\ &= -\lambda|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})) \\ &= \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

□

Za dokaz svojstva *v)* iz teorema 3.3. potrebna nam je sljedeća lema.

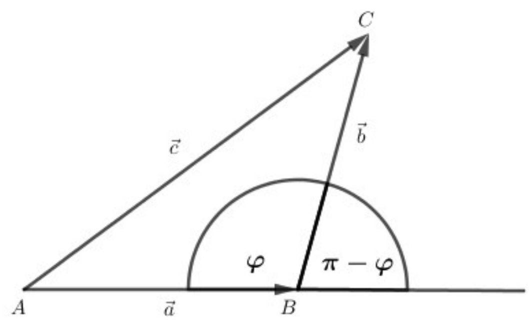
Lema 3.4. *Za vektore* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *vrijedi:*

1. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

2. $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

Dokaz.

1.a Pretpostavimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, pa je prema pravilu trokuta za zbrajanje vektora, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, odnosno $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.



Slika 3.5.

Označimo kutove kao na slici 3.5. Iz svojstva *i)* teorema 3.3. imamo da je $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2$ pa slijedi $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = |\vec{c}|^2$. Sada primijenimo kosinusov poučak na trokut ABC:

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |b|^2 - 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \varphi \\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 &= |\vec{a}|^2 + |b|^2 - 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \varphi \\ &= |\vec{a}|^2 + |b|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos(\pi - \varphi) \end{aligned}$$

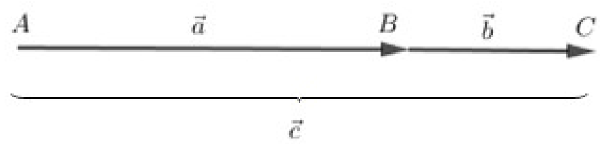
Sa slike 3.5. vidimo da je kut $(\pi - \varphi)$ također između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pa imamo

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + |b|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Primijenimo li definiciju 3.1. te svojstvo *i)* teorema 3.3., dobivamo

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

1.b Pretpostavimo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori iste orijentacije. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ i $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$.



Slika 3.6.

Sada imamo

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})^2 &= |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |b|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 \\ &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}.\end{aligned}$$

Slično se pokaže i za slučaj kada su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori suprotne orijentacije.

2. Ovaj slučaj se dokazuje analognim postupkom kao i slučaj 1. Važno je napomenuti da umjesto vektora $\vec{b}$ uzimamo njemu suprotan vektor $-\vec{b}$, pa će vektor $\vec{c}$ tada biti $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

□

Vratimo se sada na dokaz svojstva *v)* teorema 3.3.

Dokaz.

v) Za potrebe dokaza ovog svojstva uzmimo izraz $4(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$.

$$\begin{aligned}4(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= \left((\vec{a}+\vec{b})+2\vec{c}\right)^2 - (\vec{a}+\vec{b})^2 - 4\vec{c}^2 \\ &= \left((\vec{a}+\vec{b})+2\vec{c}\right)^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 \\ &= \left((\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})\right)^2 + \left((\vec{a}+\vec{c})-(\vec{b}+\vec{c})\right)^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 \\ &= 2(\vec{a}+\vec{c})^2 + 2(\vec{b}+\vec{c})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 \\ &= 4\vec{a}\cdot\vec{c} + 4\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

Sada podijelimo cijelu jednadžbu s 4 i dobivamo $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

□

Sljedeći korolar je posljedica teorema 3.3.

Korolar 3.5. *Za vektore* $\vec{a},\vec{b} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

1. $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Definicija 3.6. *Neka je* $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ *baza vektorskog prostora* V^3 *sa svojstvom da su vektori baze jedinični i međusobno okomiti, tj. ortogonalni. Tada vrijedi*

$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1, \qquad \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0, \qquad \vec{\imath}\cdot\vec{k} = 0, \qquad \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0.$$

Takvu bazu zovemo **ortonormirana baza**.

Kao što smo već spomenuli u poglavlju 1, svaki vektor iz prostora V^3 može se prikazati kao uređena trojka realnih brojeva. Ti brojevi predstavljaju koordinate vektora ovisno o bazi prostora V^3. Iz toga slijedi da je bilo koji vektor iz V^3 na isti način moguće prikazati pomoću ortonormirane baze. Koordinate tog vektora tada zovemo **ortogonalnim** ili **pravokutnim koordinatama**.

U nastavku ćemo izvesti formulu za skalarni produkt vektora koji su zadani ortogonalnim koordinatama.

Propozicija 3.7. *Neka je* $\{\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\}$ *ortonormirana baza za* V^3 *i neka su* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *i* $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{a},\vec{b} \in V^3$ *zadani svojim ortogonalnim koordinatama. Tada je*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Dokaz. Obzirom da je $\{\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\}$ ortonormirana baza za V^3, iz definicije 3.6. znamo da vrijedi $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$, dok iz teorema 3.3. slijedi da je $|i|^2 = \vec{\imath}^2$, $|j|^2 = \vec{\jmath}^2$ i $|k|^2 = \vec{k}^2$. Također, vrijedi da je skalarni produkt vektora ortonormirane baze jednak 0, imajući na umu da je isti komutativna operacija. Primjenom navedenoga, pomnožimo skalarno vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right) \\
&= a_xb_x\vec{\imath}^2 + a_xb_y\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + a_xb_z\vec{\imath} \cdot \vec{k} + a_yb_x\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + a_yb_y\vec{\jmath}^2 + a_yb_z\vec{\jmath} \cdot \vec{k} + \\
&\quad + a_zb_x\vec{k} \cdot \vec{\imath} + a_zb_y\vec{k} \cdot \vec{\jmath} + a_zb_z\vec{k}^2 \\
&= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z
\end{aligned}$$

□

Korolar 3.8. Vektori $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ *i* $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *zadani svojim ortogonalnim koordinatama su okomiti ako i samo ako vrijedi*

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Korolar 3.9. *Neka je vektor* $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{a} \in V^3$ *zadan svojim ortogonalnim koordinatama. Tada je njegov modul jednak*

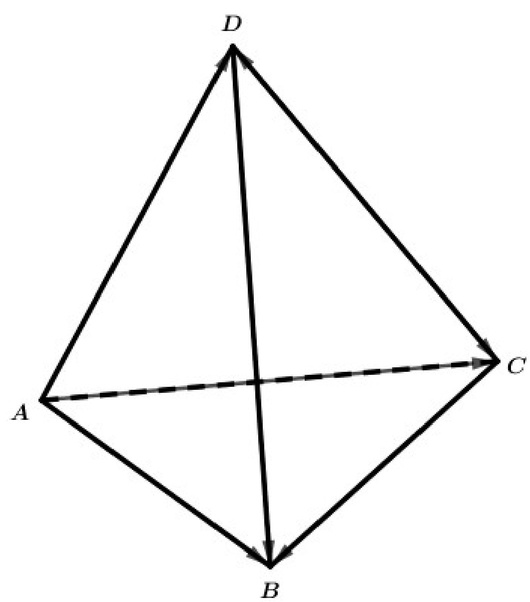
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Korolar 3.10. *Neka su vektori* $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ *i* $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *zadani svojim ortogonalnim koordinatama. Tada je kosinus kuta između njih jednak*

$$\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Slijedi nekoliko primjera stereometrijskih problema koje ćemo riješiti primjenom definicije i svojstava skalarnog produkta.

Primjer 3.11. *Zadan je tetraedar $ABCD$. Pokažite da je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$. Ako su u tetraedru dva para suprotnih bridova međusobno okomiti, pokažite da je zbroj kvadrata dvaju suprotnih bridova jednak zbroju kvadrata drugih dvaju suprotnih bridova i da su bridovi trećeg para također međusobno okomiti.*



Slika 3.7.

Rješenje.

Za početak pokažimo prvu tvrdnju zadatka.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.$$

Također je

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.$$

Pogledajmo parove nasuprotnih bridova, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$. Neka su bridovi $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ te $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ u parovima međusobno okomiti. Treba dokazati da je

a) $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |CB|^2$;
b) $\overline{AC} \perp \overline{DB}$.

Kako je

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + 2\,\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2.$$

Zbog okomitosti bridova $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, odnosno $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ znamo da vrijedi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Sada imamo

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CB}^2.$$

Prema svojstvu *i)* teorema 3.3. znamo da je $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2$ pa slijedi

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2.$$

Očito vrijedi

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |CB|^2.$$

Koristeći činjenicu da za bilo koje četiri točke A, B, C, D prostora vrijedi

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$$

pa je

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \,\&\, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}.$$

□

Primjer 3.12. *Dijagonala kocke i dijagonala jedne njene plohe ne sadrže zajednički vrh kocke. Dokažite da su te dvije dijagonale međusobno okomite.*

Rješenje. Neka su u kocki $ABCDEFGH$ vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Svaki od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je okomit na druga dva i očito vrijedi $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Neka su $\overline{AG}$ i $\overline{BE}$ dijagonale koje ne sadrže zajednički vrh kocke. Treba dokazati da je $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$, odnosno da je $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$. Izrazimo vektore $\overrightarrow{AG}$ i $\overrightarrow{BE}$ preko vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

$$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \vec{c} - \vec{a}$$

Promotrimo sada njihov skalarni umnožak.

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c}^2 - \vec{c} \cdot \vec{a}$$

Budući da je

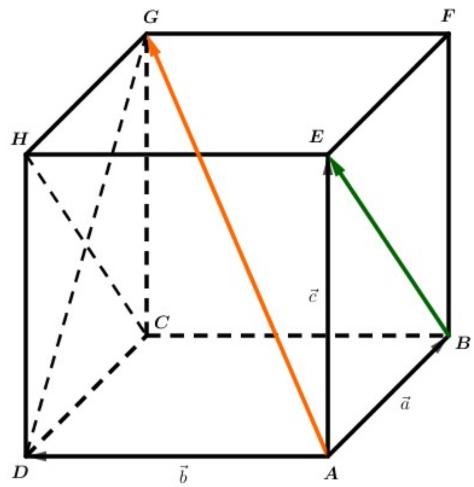
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \text{ i } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,\ \vec{c}^2 = |\vec{c}|^2,$$

slijedi da je

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$$

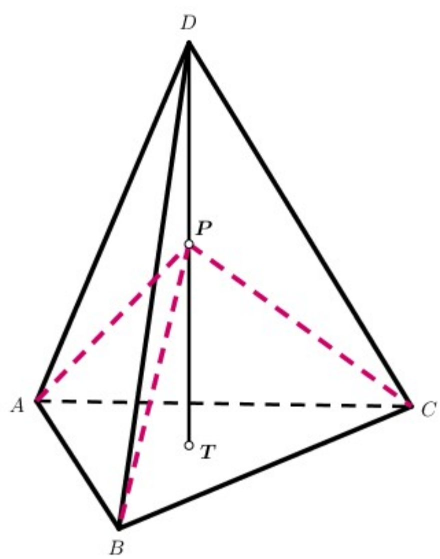
Zaključujemo $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$.

$\square$



Slika 3.8.

Primjer 3.13. *U pravilnom tetraedru $ABCD$ točka T je težište strane ABC, a točka P polovište dužine $\overline{TD}$. Dokažite da su bridovi tetraedra $ABCP$ koji se sastaju u vrhu P međusobno okomiti.*



Slika 3.9.

Rješenje. Tetraedar $ABCD$ je pravilan ako vrijedi $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ i $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \measuredangle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$, gdje je $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$. Trebamo pokazati da vrijedi jednakost $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$. Izrazimo vektor $\overrightarrow{DT}$ preko vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DT} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AT} \\
&= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)
\end{aligned}$$

Kako je točka P polovište dužine $\overline{TD}$, slijedi

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{6}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Pogledajmo sada vektore $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ i $\overrightarrow{PC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DP} \\
&= \vec{a} - \frac{1}{6}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \\
&= \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c} \\
\overrightarrow{PA} &= \frac{1}{6}\left(5\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right)
\end{aligned}$$

Analogno je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PB} &= \frac{1}{6}\left(-\vec{a} + 5\vec{b} - \vec{c}\right) \\
\overrightarrow{PC} &= \frac{1}{6}\left(-\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}\right).
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$6\overrightarrow{PA} \cdot 6\overrightarrow{PB} = \left(5\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right)\left(-\vec{a} + 5\vec{b} - \vec{c}\right)$$

$$36\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -5\vec{a}^2 - 5\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 25\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} - 5\vec{b} \cdot \vec{c}$$

Po definiciji skalarnog produkta te zbog svojstva *i)* teorema 3.3. i uvjeta zadatka vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = a^2 \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a^2.$$

Konačno je

$$36\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left(-5 - 5 + 1 + \frac{25}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)a^2 = 0,$$

odnosno $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

Analogno se pokaže da je $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$, pa slijedi da su bridovi $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ i $\overline{PC}$ međusobno okomiti.

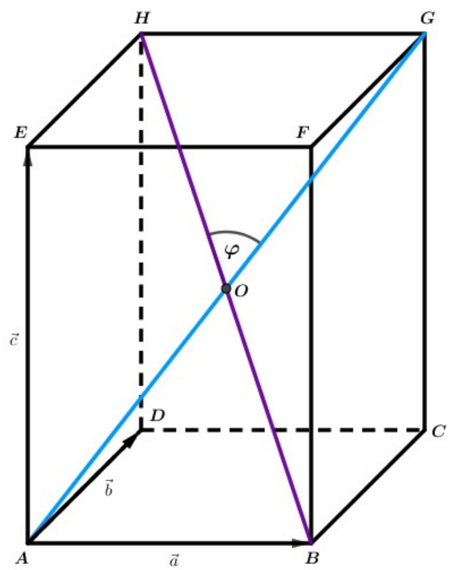
□

Primjer 3.14. *Izračunajte kut kojeg zatvaraju dvije prostorne dijagonale kvadra povučene iz dvaju vrhova koji određuju najkraći brid kvadra. Dimenzije kvadra su 1, 2 i 3.*

Rješenje. Neka su vektori u kvadru kao na slici 3.10.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \qquad |\vec{a}| = 1$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{b}, \qquad |\vec{b}| = 2$$
$$\overrightarrow{AE} = \vec{c}, \qquad |\vec{c}| = 3$$

Očito je da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.



Slika 3.10.

Treba izračunati kut što ga čine dijagonale povučene iz vrhova A i B, tj. $\measuredangle HOG = \measuredangle(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BH})$. Prikažimo vektore $\overrightarrow{AG}$ i $\overrightarrow{BH}$ pomoću vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

$$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$$

Prema korolaru 3.10. imamo da je kosinus kuta φ jednak

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})}{\sqrt{(\vec{b} + \vec{c} + \vec{a})^2} \cdot \sqrt{(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})^2}}$$
$$= \frac{(\vec{b} + \vec{c})^2 - \vec{a}^2}{\sqrt{\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a} + 2\vec{a}\vec{b}} \cdot \sqrt{\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a} - 2\vec{a}\vec{b}}}$$
$$= \frac{\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{a}^2}{\sqrt{\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a} + 2\vec{a}\vec{b}} \cdot \sqrt{\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a} - 2\vec{a}\vec{b}}}$$

Zbog uvjeta zadatka znamo da je $\vec{a}^2 = 1$, $\vec{b}^2 = 4$, $\vec{c}^2 = 9$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, pa slijedi da je

$$\cos\varphi = \frac{4 + 9 - 1}{\left(\sqrt{4 + 9 - 1}\right)^2} = \frac{6}{7}.$$

Primjenom funkcije arkus kosinus dobivamo traženi kut

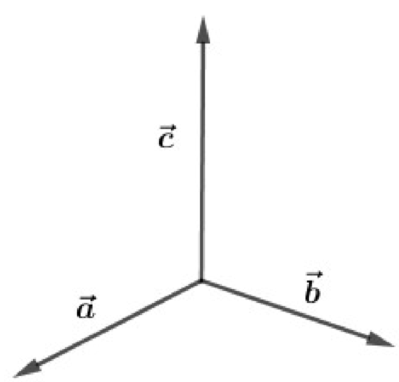
$$\varphi = 31°0'10''.$$

Poglavlje 4

Vektorski produkt

U ovom poglavlju razmotrit ćemo drugi oblik množenja vektora. Osim što ćemo ga definirati, navest ćemo i razne teoreme, propozicije i korolare koje ćemo u većini i dokazati. Također, nabrojat ćemo svojstva vektorskog produkta te pokazati da ona zaista vrijede, a na kraju ćemo primjenom svega navedenog riješiti nekoliko stereometrijskih problema vezanih uz vektorski produkt.

Za početak, važno je napomenuti da vektorski produkt ili vektorsko množenje vektora definiramo samo u prostoru V^3 jer ne postoji njegov analogon u prostoru V^2 ili nekom drugom prostoru dimenzije veće od 3. Naime, za razliku od skalarnog množenja vektora, gdje smo kao rezultat dobili neki realan broj, kod vektorskog produkta vektora rezultat je ponovo vektor kojeg opisujemo pomoću njegovog modula, smjera i orijentacije. Kako bismo definirali orijentaciju vektorskog produkta dvaju vektora uvest ćemo pojam **desno orijentirane** (desne, pozitivno orijentirane) **baze** prostora V^3. Za bazu $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ od V^3 kažemo da je desno orijentirana ili desna ako se obilazak od vektora $\vec{a}$ do vektora $\vec{b}$ odvija u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu promatrajući s vrha vektora $\vec{c}$. Ukoliko se taj obilazak odvija u smjeru kazaljke na satu, kažemo da su takve baze **lijevo orijentirane** (lijeve, negativno orijentirane). Pogledajmo primjer desne baze $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$.



Slika 4.1.

Kako bismo odredili je li baza desna ili lijeva, poslužit ćemo se dvama jednostavnim pravilima.

Kod prvog pravila, kojeg nazivamo **pravilo desne ruke**, ispruženi palac pokazuje prvi vektor, ispruženi kažiprst drugi vektor, a savinuti srednji prst treći vektor.

Kod drugog pravila, kojeg pak nazivamo **pravilo desnog vijka**, zaokruženim prstima od malog prsta do kažiprsta pokazujemo obilazak od prvog do drugog vektora, dok je treći vektor određen ispruženim palcem.

Sada možemo definirati vektorski produkt vektora.

Definicija 4.1. Vektorski produkt *je operacija* $\times: V^3 \times V^3 \longrightarrow V^3$ *koja paru vektora* $(\vec{a}, \vec{b})$ *pridružuje vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *definiran na sljedeći način:*

- *ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *kolinearni, tada je* $\vec{c} = \vec{0}$
- *ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *nekolinearni, tada je*

  a) modul $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

  b) smjer od $\vec{c}$ *okomit je na smjer od* $\vec{a}$ *i smjer od* $\vec{b}$

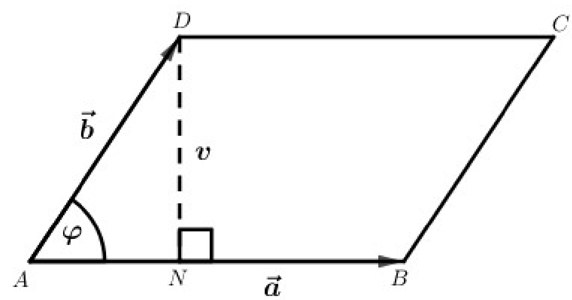
  c) orijentacija od $\vec{c}$ *je takva da je uređena trojka* $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ *desna baza od* V^3.

Rezultat $\vec{a} \times \vec{b}$ *nazivamo vektorskim umnoškom ili vektorskim produktom vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Promotrimo geometrijsku interpretaciju modula vektorskog produkta.

Propozicija 4.2. *Modul vektorskog produkta* $|\vec{a} \times \vec{b}|$ *jednak je površini paralelograma određenog vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Dokaz. Neka je $ABCD$ paralelogram određen vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Povucimo visinu iz vrha D na stranicu $\overline{AB}$. Nožište te visine označimo s N. Neka je φ kut pri vrhu A, odnosno kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika 4.2.

Uočimo da je trokut AND pravokutan s pravim kutom pri vrhu N. Pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta vidimo da je

$$\sin\varphi = \frac{v}{|AD|},$$

odnosno

$$v = |AD| \sin\varphi.$$

Kako je $|AD| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\vec{b}\right|$, vrijedi da je $v = \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$. S druge strane pak imamo da je $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$. Općenito, površina paralelograma računa se kao umnožak jedne njegove stranice i visine na tu stranicu pa je u ovom slučaju njegova površina

$$P = |AB| \cdot v = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi.$$

Kako je $\varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, primjenom definicije 4.1. slijedi da je $P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

□

Propozicija 4.3. *Vektori* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *su kolinearni ako i samo ako vrijedi* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Dokaz. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni, tada po definiciji 4.1. slijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Promotrimo sada drugi smjer ekvivalencije. Neka vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Pretpostavimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Tada bi vrijedilo

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0,$$

što povlači da je ili $|\vec{a}| = 0$ ili $\left|\vec{b}\right| = 0$ ili $\sin \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$. Iz prvog slučaja slijedi da je $\vec{a} = \vec{0}$, iz drugog da je $\vec{b} = \vec{0}$, a iz trećeg da je $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in \{0, \pi\}$. Ako je $\vec{a}$ nulvektor, tada je on kolinearan s bilo kojim vektorom u V^3 pa tako i s vektorom $\vec{b}$. Analogno vrijedi i ako je $\vec{b}$ nulvektor. Ako je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak 0 tada se oni poklapaju pa su ujedno i kolinearni. Također, ako je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak π tada vektori leže na istom pravcu pa su ponovo kolinearni. Razmatranjem svih mogućih slučajeva došli smo do kontradikcije s pretpostavkom da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Konačno, zaključujemo $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

□

Korolar 4.4. *Za* $\vec{a} \in V^3$ *vrijedi* $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

U nastavku ćemo navesti svojstva vektorskog produkta.

Teorem 4.5. *Za vektore* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, *antikomutativnost*

(2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, *kvaziasocijativnost*

(3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, *distributivnost prema zbrajanju*

Dokaz.

(1) Trebamo dokazati jednakost dvaju vektora, odnosno trebamo pokazati da su njihovi moduli, smjerovi i orijentacije iste. Pogledajmo prvo njihove module.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$|-\vec{b} \times \vec{a}| = |-\vec{b}||\vec{a}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Zbog definicije modula i komutativnosti množenja, slijedi da su moduli vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $-\vec{b} \times \vec{a}$ jednaki.

Vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ istog su smjera jer su oboje okomiti na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Vektor suprotan vektoru $\vec{b} \times \vec{a}$ ima isti smjer kao i $\vec{b} \times \vec{a}$ pa su očito vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $-\vec{b} \times \vec{a}$ istog smjera.

Kako vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ imaju suprotne orijentacije, slijedi da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ jednako orijentiran kao i vektor $-\vec{b} \times \vec{a}$. Konačno, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

(2) Da bismo dokazali jednakost vektora, također trebamo provjeriti njihov modul, smjer i orijentaciju. Ako je $\lambda = 0$ jednakost očito vrijedi. Neka je $\lambda \neq 0$. Ovisno o parametru λ razlikujemo dva slučaja

- $\lambda > 0$ povlači da su vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ iste orijentacije pa je $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

  Moduli vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ su

  $$|\lambda\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

  $$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

  Očito je da su im moduli jednaki. Također, vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ su istog smjera te iste orijentacije kao i smjer i orijentacija vektora $\vec{a} \times \vec{b}$. Zaključujemo $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

- $\lambda < 0$ povlači da su vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ suprotne orijentacije pa je

  $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$,no $\sin\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \sin\left(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})\right) = \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

  Odredimo sada module vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

  $$|\lambda\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$$

  $$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

  Očito su im moduli jednaki. Također, vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ su istog smjera kao i smjer vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ te iste orijentacije, ali suprotne onoj vektora $\vec{a} \times \vec{b}$. Zaključujemo $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Dakle, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Svojstvo (3) ćemo pokazati nakon propozicije 4.8.

Za vektorski produkt također vrijedi sljedeće.

Korolar 4.6. *Za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(1') $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, *kvaziasocijativnost*

(2') $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, *distributivnost prema zbrajanju*

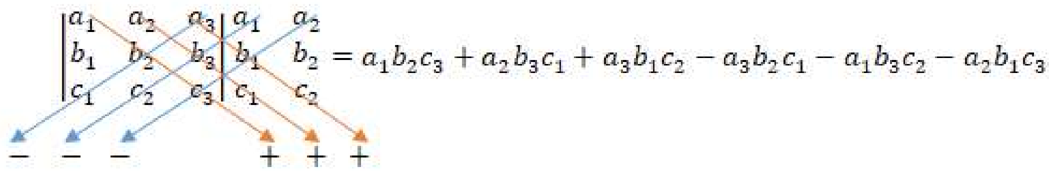
Napomena 4.7. Vektorsko množenje nije asocijativno, tj. ne vrijedi jednakost $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Također, vektorsko množenje ne posjeduje neutralni element.

Kako bismo pronašli formulu za vektorski produkt vektora koji su zadani svojim koordinatama u nekoj (desnoj) ortonormiranoj bazi, uvest ćemo pojam **determinante** trećeg reda.

Determinanta trećeg reda je funkcija koja brojevima a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj na sljedeći način.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Determinanta trećeg reda može se izračunati **Sarrusovim pravilom**:



Svojstva determinante trećeg reda su:

1. Ako je jedan redak (stupac) determinante jednak 0, onda je determinanta 0
2. Zamjenom dva retka (stupca) determinanta mijenja predznak
3. Ako su retci (stupci) determinante proporcionalni, tada je determinanta 0

Propozicija 4.8. *Neka je* $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ *desna ortonormirana baza vektorskog prostora* V^3 *i neka su* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *koordinatni prikazi vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *u toj bazi. Tada vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Pogledajmo tablicu vektorskog množenja za elemente baze.

$\times$	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{\jmath}$
$\vec{\jmath}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{\imath}$
$\vec{k}$	$\vec{\jmath}$	$-\vec{\imath}$	$\vec{0}$

Koristeći prethodnu tablicu imamo sljedeće.

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}\right) \\
&= a_1b_1\vec{\imath} \times \vec{\imath} + a_1b_2\vec{\imath} \times \vec{\jmath} + a_1b_3\vec{\imath} \times \vec{k} + a_2b_1\vec{\jmath} \times \vec{\imath} + a_2b_2\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + a_2b_3\vec{\jmath} \times \vec{k} \\
&\qquad + a_3b_1\vec{k} \times \vec{\imath} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{\jmath} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k} \\
&= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{\jmath} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{\imath} + a_3b_1\vec{\jmath} - a_3b_2\vec{\imath} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

Ako rezultat napišemo pomoću determinante trećeg reda, dobivamo tvrdnju.

□

Dokažimo sada svojstvo (3) teorema 4.5.

Dokaz.

(3) Neka su $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ koordinatni prikazi vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u ortonormiranoj bazi $\{\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\}$ prostora V^3. Tada vrijedi

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \times (c_1, c_2, c_3).$$

Primjenom propozicije 4.8. slijedi

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

□

Korolar 4.9. *(Lagrangeov identitet)*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2.$$

Korolar 4.10. *(Jacobijev identitet)*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

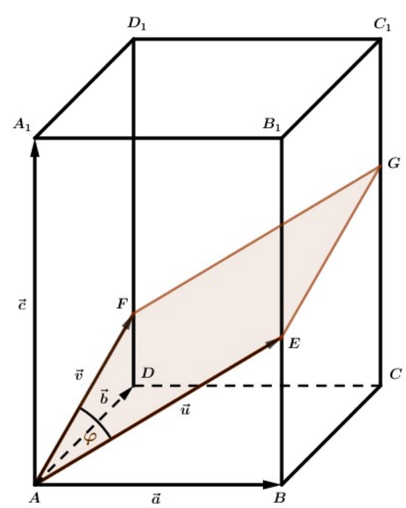
U nastavku slijedi nekoliko stereometrijskih problema pri čijim ćemo rješavanjima koristiti vektorski produkt vektora.

Primjer 4.11. *Zadana je uspravna pravokutna prizma* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *kojoj su bridovi* $|AB| = a = 5$, $|AD| = b = 4$ *i* $|AA_1| = c = 30$. *Na bridu* $\overline{BB_1}$ *uzeta je točka* E, *a na bridu* $\overline{DD_1}$ *točka* F *tako da je* $|BE| = 12$ *i* $|DF| = 3$. *Izračunajte površinu presjeka prizme ravninom određenom točkama* A, E *i* F.

Rješenje 1. Neka je točka G presjek ravnine AEF i pravca CC_1. Budući da ravnina AEF siječe usporedne ravnine u usporednim pravcima, slijedi da je $\overline{AE} \parallel \overline{FG}$ i $\overline{AF} \parallel \overline{EG}$. Vidimo da vrijedi $|CG| = |BE| + |DF| = 15 < |CC_1|$, zbog čega se paralelogram $AEGF$ nalazi u unutrašnjosti prizme. Naš zadatak je izračunati površinu paralelograma $AEGF$. Ako označimo vektore $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$, tražena površina paralelograma je $P = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Nadalje, neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Tada je zbog uvjeta zadatka

$$\vec{u} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

$$\vec{v} = \vec{b} + \frac{1}{10}\vec{c}.$$



Slika 4.3.

Sada imamo

$$P = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left|\left(\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}\right) \times \left(\vec{b} + \frac{1}{10}\vec{c}\right)\right|,$$

odnosno, primjenom korolara 4.6. je

$$P = \left|\vec{a} \times \vec{b} + \frac{1}{10}\vec{a} \times \vec{c} + \frac{2}{5}\vec{c} \times \vec{b} + \frac{1}{25}\vec{c} \times \vec{c}\right|.$$

Ako su $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{c}_0$ jedinični vektori vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tada je

$$\begin{aligned} P &= \left|ab\vec{c}_0 + \frac{1}{10}ac\left(-\vec{b}_0\right) + \frac{2}{5}cb(-\vec{a}_0)\right| \\ &= \left|20\vec{c}_0 - 15\vec{b}_0 - 48\vec{a}_0\right| \\ &= \sqrt{20^2 + 15^2 + 48^2} \\ &= \sqrt{2929} \\ P &\approx 54.12 \end{aligned}$$

Rješenje 2. Zadatak ćemo riješiti uz pomoć trigonometrije. Za početak odredimo norme vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$\vec{v} = \vec{b} + \frac{1}{10}\vec{c}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Sada izračunajmo kut između vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Znamo da je kosinus kuta između vektora jednak kvocijentu njihovog skalarnog produkta i umnoška njihovih normi.

$$\cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\frac{1}{25}c^2}{13 \cdot 5} = \frac{36}{65}$$

U nastavku koristimo trigonometrijski identitet $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

$$\begin{aligned}
\sin^2\varphi + \left(\frac{36}{65}\right)^2 &= 1 \\
\sin^2\varphi &= 1 - \frac{1296}{4225} \\
\sin^2\varphi &= \frac{2929}{4225} \\
\sin\varphi &= \frac{\sqrt{2929}}{65}
\end{aligned}$$

Općenito, površinu paralelograma također možemo računati kao umnožak susjednih stranica i sinusa šiljastog kuta kojeg iste zatvaraju. U našem slučaju tada vrijedi

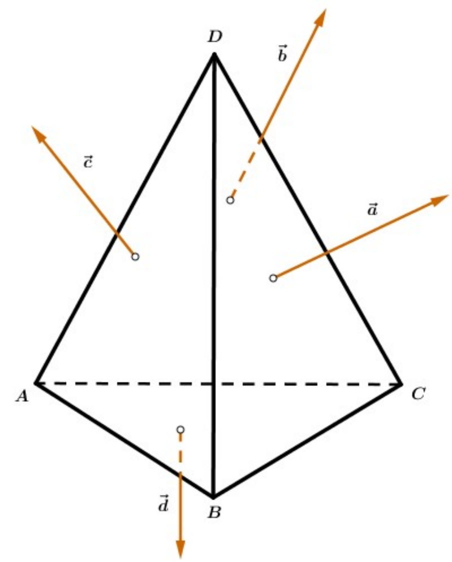
$$\begin{aligned}
P &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi \\
&= 13 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2929}}{65} \\
P &= \sqrt{2929} \\
P &\approx 54.12.
\end{aligned}$$

Rješenje 3. Postavimo koordinatni sustavu prostoru s ishodištem u točki A, tako da bridovi $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$ pripadaju redom koordinatnim osima x, y, z. Tada je $A(0,0,0)$, $E(5,0,12)$, $F(0,4,3)$, pa vrijdi $\overrightarrow{AE} = 5\vec{\imath} + 12\vec{k}$, $\overrightarrow{AF} = 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Kako je paralelogram $AEGF$ određen vektorima $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AF}$, slijedi da je tražena površina paralelograma vektorski produkt vektora $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AF}$.

$$P = \left|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \end{matrix}\right\| = \left|-48\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 20\vec{k}\right|$$

$$P = \sqrt{48^2 + 15^2 + 20^2} = \sqrt{2929} \approx 54.12.$$

Primjer 4.12. (Poučak o ježu) *U tetraedru $ABCD$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ su okomiti na plohe BCD, CDA, DAB i ABC te usmjereni prema vanjštini tetraedra. Također, njihove su duljine razmjerne površinama odgovarajućih strana. Dokažite da vrijedi $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.*



Slika 4.4.

Rješenje. Dan je tetraedar $ABCD$. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ redom vektori okomiti na plohe BCD, CDA, DAB i ABC i orijentirani na vanjsku stranu tetraedra. Kako je vektor $\vec{a}$ okomit na plohu BCD, to povlači da je on okomit na vektore $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$. Usput možemo primijetiti da vektori $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ i $\vec{a}$ čine desnu bazu za prostor V^3. Uz to, znamo da je duljina vektora $\vec{a}$ razmjerna površini plohe BCD koja čini polovinu paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$. Koristeći propoziciju 4.2. slijedi da je

$$|\vec{a}|=\lambda\frac{\left|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}\right|}{2},$$

odnosno

$$\vec{a}=\lambda\left(\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}\right).$$

Analognim postupkom dobivamo da je

$$\vec{b} = \lambda(\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA})$$

$$\vec{c} = \lambda(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB})$$

$$\vec{d} = \lambda(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}).$$

Zapišimo vektor $\vec{d}$ pomoću vektora $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$$

Slijedi

$$\vec{d} = \lambda\left((\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) \times (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})\right),$$

odnosno

$$\vec{d} = \lambda\left(\left(\overrightarrow{DC} + (-\overrightarrow{DA})\right) \times \left(\overrightarrow{DB} + (-\overrightarrow{DA})\right)\right).$$

Iz distributivnosti vektorskog množenja prema zbrajanju vektora (korolar 4.6., (2')) imamo

$$\vec{d} = \lambda\left(\overrightarrow{DC} \times \left(\overrightarrow{DB} + (-\overrightarrow{DA})\right) + (-\overrightarrow{DA}) \times \left(\overrightarrow{DB} + (-\overrightarrow{DA})\right)\right)$$

$$\vec{d} = \lambda\left(\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \times (-\overrightarrow{DA}) + (-\overrightarrow{DA}) \times \overrightarrow{DB} + (-\overrightarrow{DA}) \times (-\overrightarrow{DA})\right).$$

Primijenimo svojstvo kvaziasocijativnosti (korolar 4.6., (1')) te tvrdnju korolara 4.4.:

$$\vec{d} = \lambda(\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} + \vec{0}).$$

Zbog antikomutativnosti vektorskog množenja (teorem 4.5., (1)), slijedi

$$\vec{d} = \lambda\left(-\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}\right).$$

Konačno je

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} =$$

$$= \lambda\left(\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}\right) + \lambda\left(-\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}\right)$$
$$= \lambda\left(\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}\right)$$
$$= \vec{0},$$

što smo trebali i dokazati.

□

Poglavlje 5

Mješoviti produkt

U ovom poglavlju pokazat ćemo još jedan način množenja vektora. Radi se o takozvanom mješovitom ili vektorsko-skalarnom množenju, čiji je rezultat neki prirodan broj ili skalar. Uobičajeno, na početku ćemo definirati mješoviti produkt, iskazati i dokazati neke bitne tvrdnje vezane uz isti te navesti njegova svojstva. Na kraju ćemo primjenom teoretskog dijela poglavlja riješiti nekoliko stereometrijskih problema.

Definicija 5.1. *Operaciju* $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *koja uređenoj trojci vektora* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *pridružuje skalar* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ *nazivamo* **mješovito množenje vektora**. *Rezultat mješovitog množenja vektora je mješoviti umnožak ili produkt u oznaci* $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Propozicija 5.2. *Vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ *su komplanarni ako i samo ako je njihov mješoviti produkt jednak nuli.*

Dokaz. Neka su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni. Pokazat ćemo da je njihov mješoviti produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ jednak nuli. Promotrimo dva slučaja:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$

   Prema propoziciji 4.3., $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ povlači da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, pa su zaista vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni. Tada vrijedi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

2) $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ i $\vec{c} \neq \vec{0}$

   Kako je $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, to povlači da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, nego su paralelni s nekom ravninom π. Prema pretpostavci da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni, slijedi da je i $\vec{c}$ paralelan s ravninom π. No, po definiciji vektorskog produkta, vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na ravninu π pa vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$, odnosno prema propoziciji 3.2. slijedi $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$.

Promotrimo sada drugi smjer ekvivalencije. Neka je $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$. To znači da je

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili
2) $\vec{c} = \vec{0}$ ili
3) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$.

U prvom slučaju vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ su kolinearni jer je nulvektor kolinearan s bilo kojim vektorom u V^3. Nadalje, iz propozicije 4.3. slijedi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni pa su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni. U drugom slučaju vrijedi da je $\vec{c}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$, ali i vektorom $\vec{b}$ pa slijedi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni. Pogledajmo još treći slučaj. Prema definiciji 4.1. znamo da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit na ravninu koju razapinju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kako je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$, slijedi da je $\vec{c}$ paralelan s ravninom određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno zaključujemo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni.

□

U nastavku ćemo navesti neka bitna svojstva mješovitog produkta vektora.

Propozicija 5.3. *Za* $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

(1) $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right)$

(2) $\left(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

Dokaz.

(1) Prema definiciji 5.1. znamo da

$$\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Primjenom svojstva (3) teorema 4.5. imamo

$$\left((\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Prema teoremu 3.3, tj. svojstvu distributivnosti prema zbrajanju skalarnog produkta, slijedi

$$\left(\vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}_1\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}_2\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},$$

odnosno

$$\left(\vec{a}_1\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}_2\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right).$$

(2) Primijenimo definiciju 5.1. na lijevu stranu jednakosti. Dobivamo

$$\left(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left((\lambda\vec{a})\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Prema teoremu 4.5., odnosno kvaziasocijativnosti vektorskog produkta vrijedi

$$\left((\lambda\vec{a})\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

pa slijedi konačno

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

□

Kao posljedica prethodne propozicije, vrijede i sljedeća svojstva mješovitog produkta.

Korolar 5.4. *Za* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{c}$, $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2\in V^3$, $\lambda\in\mathbb{R}$ *vrijedi*

(1') $\left(\vec{a},\vec{b}_1+\vec{b}_2,\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b}_2,\vec{c}\right)$

(2') $\left(\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$

(1'') $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1+\vec{c}_2\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_2\right)$

(2'') $\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

U nastavku slijedi izvod formule mješovitog produkta vektora koji su dani svojim koordinatnim prikazom u desnoj ortonormiranoj bazi.

Propozicija 5.5. *Neka je* $\{\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\}$ *desna ortonormirana baza te neka su* $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ *koordinatni prikazi vektora u toj bazi. Tada je mješoviti produkt vektora jednak*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Za početak, izraz $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ zapišimo u obliku mješovitog produkta vektora, odnosno

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Nadalje, prema propoziciji 4.8. znamo da je

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\Big((a_2b_3-a_3b_2)\vec{\imath}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{\jmath}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\Big)\left(c_1\vec{\imath}+c_2\vec{\jmath}+c_3\vec{k}\right).$$

Prije nego odredimo skalarni produkt vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{c}$, valja napomenuti kako su vektori baze ortonormirani, što povlači da su oni međusobno okomiti i jedinični, pa je prema propoziciji 3.2. njihov skalarni umnožak jednak nuli, a norma svakog od njih jednaka jedan, odnosno, prema teoremu 3.3. vrijedi $\vec{\imath}^2=\vec{\jmath}^2=\vec{k}^2=1$.

Sada imamo

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=a_2b_3c_1-a_3b_2c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3.$$

Zapišimo desnu stranu jednakosti u obliku determinante trećeg reda

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

i time smo dokazali tvrdnju propozicije.

$\square$

Korolar 5.6. *Vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ *su komplanarni ako i samo ako za njihove koordinatne prikaze u ortonormiranoj bazi vrijedi*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Propozicija 5.7. *Za* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Korolar 5.8. *Za* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dokaz. Zapišimo mješoviti umnožak na lijevoj strani drugim zapisom.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Primjenom propozicije 5.7. imamo

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}),$$

odnosno

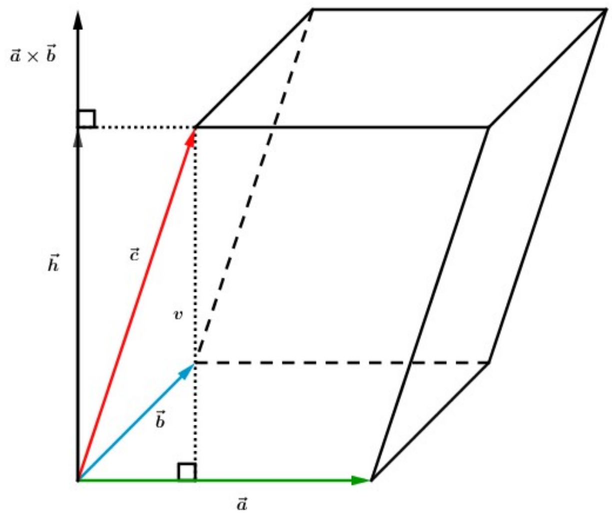
$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

Sada, zbog svojstva komutativnosti skalarnog produkta, slijedi tvrdnja.

□

Pogledajmo sada geometrijsku interpretaciju mješovitog produkta vektora.

Propozicija 5.9. *Obujam paralelepipeda što ga određuju vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V^3$ *jednak je modulu mješovitog produkta* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.



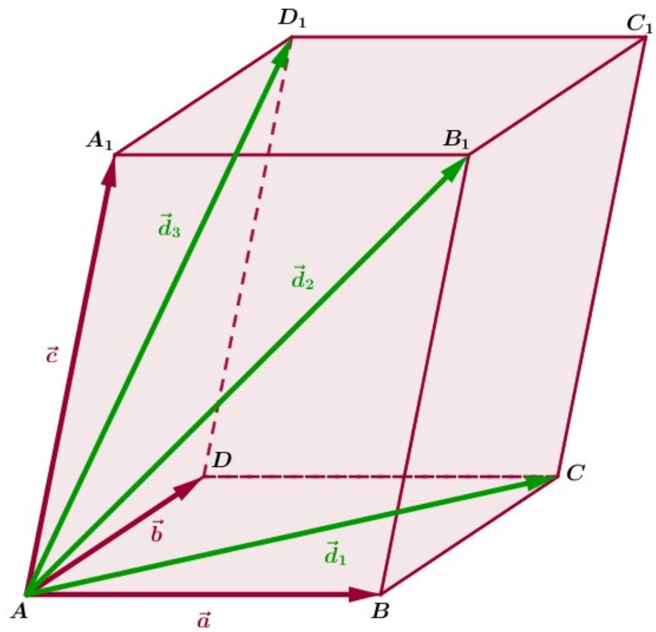
Slika 5.1.

Propoziciju 5.9. nećemo detaljno dokazivati, već ukratko objasniti.

Promotrimo sliku 5.1. Znamo da je vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ zapravo vektor okomit na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a njegova duljina jednaka je površini paralelograma koji je određen tim vektorima. Skalarni produkt vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ možemo shvatiti kao produkt duljine vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, odnosno površine paralelograma i projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, koja ustvari predstavlja visinu paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, kao što je vidljivo sa slike. Iz svega navedenog slijedi da mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ predstavlja volumen paralelepipeda određenog tim vektorima.

U nastavku slijedi nekoliko stereometrijskih problema koje ćemo riješiti primjenom mješovitog produkta vektora.

Primjer 5.10. *Neka je V_1 obujam paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$, a V_2 obujam paralelepipeda određenog vektorima plošnih dijagonala prvog paralelepipeda. Dokažite da je $V_2 = 2V_1$.*



Slika 5.2.

Rješenje. Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepiped razapet vektorima $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Prema propoziciji 5.9. znamo da je njegov volumen jednak modulu mješovitog produkta vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, odnosno vrijedi

$$V_1 = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|.$$

Neka je $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AC}$ plošna dijagonala plohe $ABCD$. Očito vrijedi, prema pravilu paralelograma za zbrajanje vektora,

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}.$$

Neka su $\vec{d}_2 = \overrightarrow{AB_1}$ i $\vec{d}_3 = \overrightarrow{AD_1}$ redom plošne dijagonale ploha ABB_1A_1 i ADD_1A_1. Analognim postupkom kao za dijagonalu $\vec{d}_1$ dobivamo da vrijedi

$$\vec{d}_2 = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\vec{d}_3 = \vec{b} + \vec{c}.$$

Sada je volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$ jednak

$$V_2 = \left|\left(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right) \cdot \vec{d}_3\right|,$$

odnosno

$$V_2 = \left|\left(\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times (\vec{a} + \vec{c})\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right|.$$

Primijenimo svojstvo (3) teorema 4.5. kako bi vektorski pomnožili vektore.

$$V_2 = \left|\left(\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{a} + \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right|$$

$$V_2 = \left|\left(\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right|.$$

Pomnožimo sada vektore skalarno primjenom teorema 3.3.

$$V_2 = \left|\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{b} + \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{c}\right|.$$

Uočimo sljedeće:

- $\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = 0$ jer je vektor $\vec{b} \times \vec{a}$ okomit na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pa je ujedno i okomit na vektor $\vec{b}$
- $\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{b} = 0$ jer je vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ okomit na ravninu razapetu vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, pa je ujedno i okomit na vektor $\vec{b}$
- $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$ jer je vektor $\vec{a} \times \vec{c}$ okomit na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{c}$, pa je ujedno i okomit na vektor $\vec{c}$

- $\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{c} = 0$ jer je vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ okomit na ravninu razapetu vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, pa je ujedno i okomit na vektor $\vec{c}$

Tada preostaje

$$V_2 = \left|(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c}\right|$$
$$V_2 = \left|\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right)\right|.$$

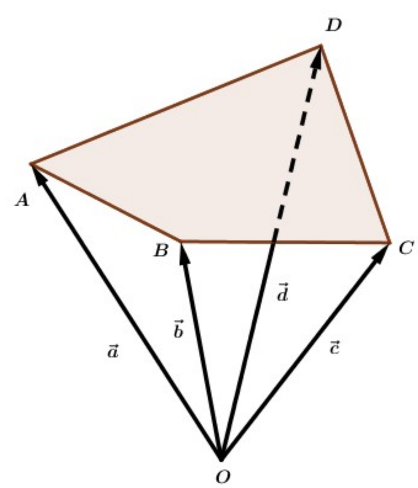
Prema propoziciji 5.7. vrijedi

$$V_2 = \left|-\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) - \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$
$$V_2 = \left|-2\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$
$$V_2 = |-2|\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$
$$V_2 = 2V_1,$$

što smo trebali i dokazati.

□

Primjer 5.11. *Zadani su nekomplanarni vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Neka je $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$. Koji uvjet moraju zadovoljavati α, β i γ da točke A, B, C i D pripadaju jednoj ravnini?*



Slika 5.3.

Rješenje. Kako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu komplanarni, slijedi da točke A, B i C nisu kolinearne, pa je njima jednoznačno određena ravnina. Uočimo da točka D mora pripadati toj ravnini, odnosno četverokut $ABCD$ mora biti ravninski. Slijedi da vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ pripadaju toj ravnini, što je ekvivalentno s činjenicom da su vektori $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{c}-\vec{a}$ i $\vec{d}-\vec{a}$ komplanarni. Prema korolaru 5.6. vrijedi sljedeće.

$$\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times(\vec{c}-\vec{a})\right]\cdot\left(\vec{d}-\vec{a}\right)=0,$$

odnosno

$$\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times(\vec{c}-\vec{a})\right]\cdot\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}-\vec{a}\right)=0$$

$$\left[\left(\vec{b}+(-\vec{a})\right)\times\left(\vec{c}+(-\vec{a})\right)\right]\cdot\left((\alpha-1)\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right)=0.$$

Primjenom teorema 4.5., (3) vrijedi

$$\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}+(-\vec{a})\right)+(-\vec{a})\times\left(\vec{c}+(-\vec{a})\right)\right]\cdot\left((\alpha-1)\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right)=0$$

$$\left[\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{a}\right]\cdot\left((\alpha-1)\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right)=0.$$

Zbog antikomutativnosti vektorskog produkta te korolara 4.4. imamo

$$\left[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}\right]\cdot\left((\alpha-1)\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right)=0$$

$$(\alpha-1)\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}+\beta(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}+\gamma\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$$

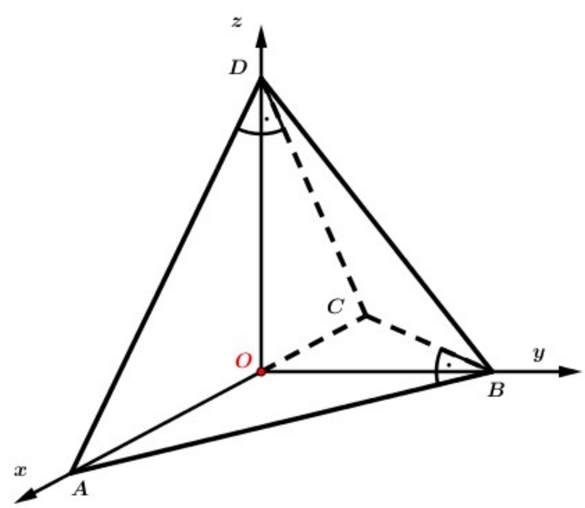
$$(\alpha-1)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\beta\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\gamma\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma-1)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0.$$

Kako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu komplanarni, slijedi $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\neq 0$, pa je $\alpha+\beta+\gamma-1=0$, odnosno traženi uvjet je $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Primjer 5.12. *Dvije strane tetraedra su jednakostranični trokuti duljine stranice* a, *a druge dvije su jednakokračni pravokutni trokuti. Izračunajte obujam tetraedra.*

Rješenje. Uočimo jednu stranu tetraedra $ABCD$ koja je pravokutan jednakokračan trokut. Neka je to na primjer strana ABC s pravim kutom pri vrhu B. Zbog uvjeta zadatka, druga strana koja je pravokutan jednakokračan trokut može biti jedino ADC s pravim kutom pri vrhu D. Postavimo pravokutan koordinatni sustav s ishodištem u polovištu brida $\overline{AC}$ kao na slici. Označimo koordinate vrha A s $A(u, 0, 0)$. Tada su koordinate ostalih vrhova $B(0, u, 0)$, $C(-u, 0, 0)$ i $D(0, 0, u)$, pri čemu je $|AB| = |BC| = |DA| = |DB| = |DC| = a = u\sqrt{2}$ i $|CA| = 2u = a\sqrt{2}$.



Slika 5.4.

Sada vrijedi da je $\overrightarrow{DA} = (u, 0, -u)$, $\overrightarrow{DB} = (0, u, -u)$, $\overrightarrow{DC} = (-u, 0, -u)$. Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme iste površine baze i visine, a kako je površina baze zadanog tetraedra dvostruko manja od površine baze paralelepipeda, slijedi da je volumen tog tetraedra jednak šestini volumena paralelepipeda.

Primjenom propozicije 5.9., imamo da je volumen tetraedra jednak

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} u & 0 & -u \\ 0 & u & -u \\ -u & 0 & -u \end{matrix} \right\| = \frac{u^3}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{u^3}{6} \cdot |-2| = \frac{1}{3}u^3,$$

a kako je $u = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, slijedi da je

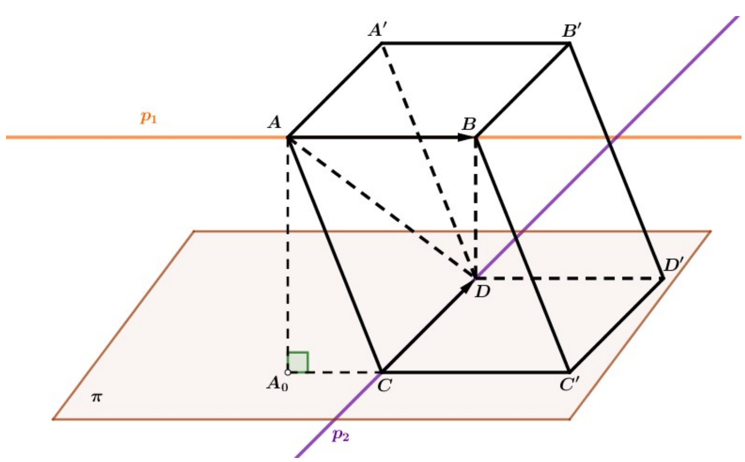
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Primjer 5.13. *Na dvama mimosmjernim pravcima zadane su dvije dužine. Dokažite da obujam tetraedra, kojemu su vrhovi rubovi dužina, ne ovisi o položaju dužina na zadanim pravcima.*

Rješenje. Neka su p_1 i p_2 dva mimosmjerna pravca te neka su A, B točke na p_1, a C, D na p_2. Nadalje, neka je A' točka prostora takva da je $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CD}$. Vektorima $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA'}$ određen je paralelepiped $ABB'A'CC'D'D$ kao na slici 5.5. Volumen tog paralelepipeda jednak je

$$V_P = \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'}\right) \cdot \overrightarrow{AC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right| \cdot |AA_0|,$$

pri čemu je A_0 ortogonalna projekcija točke A na ravninu osnovke $CC'D'D$.



Slika 5.5.

Uočimo da vektorski umnožak $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$ ne ovisi o položaju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ na pravcima p_1, odnosno p_2. Duljina $|AA_0|$ je udaljenost ravnina osnovaka $ABB'A'$ i $CC'D'D$, odnosno visina paralelepipeda. Ta visina također ne ovisi o položaju točaka A, B, C, D na pravcima p_1 i p_2, već samo o njihovim smjerovima. Iz svega navedenog, slijedi da obujam zadanog paralelepipeda ne ovisi o položaju dužina na zadanim pravcima, što također vrijedi i za obujam tetraedra $ABCD$ jer je on jednak

$$V_T = \frac{1}{6} V_P.$$

□

Bibliografija

[1] M. Bombardelli, Ž. Milin Šipuš, *Analitička geometrija*, Matematički odjel, PMF, Zagreb, 2016./2017.

[2] L. Čeliković, *Vektori (odabrani zadaci)*, Društvo mladih matematičara „Pitagora" Beli Manastir, Beli Manastir, 1990.

[3] A. Marić, *Vektori*, Element, Zagreb, 1997.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

Na samom početku rada, u prvom poglavlju, obradili smo temeljne pojmove o vektorima i vektorskom računu, definirali usmjerenu dužinu, pojam vektora te pravila za njihovo zbrajanje i množenje istih skalarom. Zatim smo spomenuli pojmove kolinearnosti, komplanarnosti i linearne nezavisnosti vektora koji su potrebni za daljne razumijevanje rada.

U narednom poglavlju uveli smo pravokutni Kartezijev koordinatni sustav, definirali radijvektore i podjelu dužine u zadanom omjeru, a formulu za udaljenost dviju točaka izveli vektorski. Također smo definirali ortonormiranu bazu i spomenuli pravila „desne ruke“ i „desnog vijka“.

U trećem, četvrtom i petom poglavlju bavili smo se skalarnim, vektorskim i mješovitim produktom vektora. Za svaki smo naveli njihova svojstva pomoću raznih teorema i propozicija, koje smo potom i dokazali, te smo posebno za vektorski i mješoviti produkt prikazali i objasnili njihove geometrijske interpretacije.

Na kraju svakog poglavlja riješili smo nekoliko stereometrijskih problema primjenom vektorske metode.

Summary

At the very beginning of the thesis, in the first chapter, we have dealt with the basic concepts of vectors and vector calculus, defined the directed line segment, concept of vectors and the rules for their addition and multiplication by a scalar. We then mentioned the concept of collinearity, coplanarity and linear independence of vectors which are crucial for further understanding.

In the next chapter, we introduced the Cartesian coordinate system, defined the radius vectors, the line segment division in a given ratio and the distance formula is derived using vector method. We also defined the orthonormal basis and mentioned the "right-hand" and "corkscrew" rules.

In the third, fourth, and fifth chapters, the scalar, vector, and mixed product of vectors are dealt with. For each of them we specified their properties by means of various theorems and propositions, which we then proved, and in particular for the vector and mixed product we showed and explained their geometric interpretations.

At the end of each chapter, we solved several stereometric problems using the vector method.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 13.12.1993. godine. 2000. godine započela sam svoje školovanje u Osnovnoj školi Augusta Šenoe u Zagrebu. Po završetku osnovne škole, 2008. godine, upisala sam IX. gimnaziju, a nakon toga, 2012. godine, Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2015. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, smjer: nastavnički. Nakon stjecanja titule univ. bacc. educ. math, 2017. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer: nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.