SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anda Rabatić

POTPUNO RAZGRANATI KONAČNI BAZNI OKVIRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima, sestri i babi koji su od prvog koraka moja najveća potpora. Najveće HVALA mojoj mami, koja me uvijek tješila u teškim trenucima i pružila mi sve što sam ikad mogla poželjeti. Mojoj novostečenoj obitelji, hvala vam na neizmjernoj ljubavi koju mi pružate svakodnevno. Volim vas.

Zahvaljujem i svim svojim prijateljima koji su bili uz mene tijekom trajanja studija, u lijepim i manje lijepim trenucima.

Na kraju, od srca zahvaljujem svome mentoru prof.dr.sc. Damiru Bakiću na bezrezervnoj pomoći pri pisanju ovog rada.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Operatori na Hilbertovim prostorima **3**
1.1 Osnovni pojmovi teorije normiranih prostora 3
1.2 Hilbertovi prostori 6
1.3 Sumabilnost i konvergencija redova 9
1.4 Pozitivno semidefinitni operatori 11
1.5 Teoremi o otvorenom preslikavanju i zatvorenom grafu 11

2 Bazni okviri **13**
2.1 Motivacija 13
2.2 Opća teorija baznih okvira 14
2.3 Konačni bazni okviri 27

3 Potpuno razgranati konačni bazni okviri **43**
3.1 Definicija i primjeri potpuno razgranatih konačnih baznih okvira 43
3.2 Konstrukcija potpuno razgranatih konačnih baznih okvira 46

Bibliografija **61**

Uvod

U ovome će se radu definirati i prikazati osnovna svojstva baznih okvira, struktura koje služe kao sustavi reprodukcije za separabilne Hilbertove prostore, te nam dopuštaju više slobode od ortonormiranih baza. Bazni okviri igraju važnu ulogu pri prijenosu podataka dopuštajući rekonstrukciju početnog podatka u slučaju smetnji. Posebnu ćemo pažnju obratiti na bazne okvire unitarnih prostora konačne dimenzije, jer su takvi u praksi najčešće korišteni.
U prvom su poglavlju navedeni neki od temeljnih rezultata linearne algebre i teorije normiranih prostora. Na te ćemo se rezultate oslanjati u svim preostalim poglavljima.
Drugo se poglavlje bavi baznim okvirima. Objasnit ćemo razlog njihovog uvođenja te navesti njihove temeljne karakteristike na separabilnim Hilbertovim prostorima proizvoljne dimenzije. Zatim ćemo se ograničiti na unitarne prostore konačne dimenzije, gdje ćemo promatrati svojstva matrice analize i matrice sinteze, te načine konstrukcije konačnih baznih okvira s nekim unaprijed pripisanim svojstvima.
Treće poglavlje čini glavni dio ovog rada. Ono govori o posebnoj klasi konačnih baznih okvira koje nazivamo potpuno razgranatim konačnim baznim okvirima. Takvi su okviri od posebne važnosti jer pružaju mogućnost rekonstrukcije početnog podatka uz maksimalne gubitke pri njegovom prijenosu. Pokazat ćemo da su takvi okviri usko povezani s totalno nesingularnim matricama, pa ćemo pokazati i način konstrukcije jedne klase takvih matrica.

Poglavlje 1

Operatori na Hilbertovim prostorima

$\mathbb{F}$ će označavati polje realnih ili kompleksnih brojeva.
Osnovne pojmove i rezultate linearne algebre smatramo poznatima iz [[4]], pa ih nećemo eksplicitno navoditi.

1.1 Osnovni pojmovi teorije normiranih prostora

Definicija 1.1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je definirano preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ sa svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V$,
2. $\langle x, x \rangle = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V$,
4. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$, $\forall x_1, x_2, y \in V$,
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in V$.

To preslikavanje zovemo skalarnim produktom te kažemo da je $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitaran prostor.

Definicija 1.1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je definirano preslikavanje $\| \cdot \| : V \to \mathbb{F}$ takvo da vrijedi*

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$,
2. $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$,

4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V.$

Tako definirano preslikavanje nazivamo normom i kažemo da je $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor.*

Teorem 1.1.3. *Neka je V unitaran prostor. Tada za sve* $x, y \in V$ *vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Dokaz. [4], Teorem 6.1.5. □

Napomena 1.1.4. *Pomoću C-S nejednakosti lako se pokaže da je svaki unitaran prostor V ujedno i normiran s normom izvedenom iz skalarnog produkta:*

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle, \forall x \in V,$$

što je pokazano u [4], Teorem 6.1.7.

Teorem 1.1.5. *(Jordan-von Neumann) Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Tada postoji skalarni produkt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *na X takav da za svaki* $x \in V$ *vrijedi* $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ *ako i samo ako ta norma zadovoljava jednakost paralelograma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), x, y \in V.$$

U tom je slučaju taj skalarni produkt jedinstven i dan je polarizacijskim formulama:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2, \text{ ako je } \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 + \frac{i}{4}\|x + iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x - iy\|^2, \text{ ako je } \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

Napomena 1.1.6. *Neka je* $(x_n)_n$ *konačan ili beskonačan linearno nezavisan niz u unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormiran niz* $(e_n)_n$ *u V takav da je za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *vektori* $x_1, ..., x_k$ *razapinju isti prostor kao vektori* $e_1, ..., e_k$*.*
Niz $(e_n)_n$ *konstruiramo induktivno Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije:*

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$$

$$e_{k+1} = \frac{1}{\|f_{k+1}\|}f_{k+1}, \text{ gdje je } f_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j, \text{ za } k \geq 1$$

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je normiran prostor V separabilan ako postoji prebrojiv skup* $S \subseteq V$ *takav da je* $\overline{S} = V$*.*

Propozicija 1.1.8. *Svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je separabilan.*

Dokaz. Direktna posljedica Propozicije 1.4.9. u [1]. □

Definicija 1.1.9. *Kažemo da je normiran prostor V potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira.*
Ako je V unitaran i potpun, kažemo da je V Hilbertov prostor.

Propozicija 1.1.10. *Svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je potpun.*

Dokaz. [1], Propozicija 1.2.2. □

Definicija 1.1.11. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru V. Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira prema vektoru $x \in V$ ako je $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, gdje je $(s_n)_n$ niz parcijalnih suma, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.*
Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u normiranom prostoru V konvergira apsolutno ako konvergira red brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Teorem 1.1.12. *Normiran prostor V je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red $(x_k)_k$ vektora iz V konvergira i obično u V. U tom je slučaju $\| \sum_{k=1}^{\infty} \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.*

Dokaz. [1], Teorem 1.2.10. □

Definicija 1.1.13. *Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator.*
Kažemo da je A ograničen ako postoji $M > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi $\|Ax\| \leq M\|x\|$.
Skup svih ograničenih operatora s X u Y označavamo s $\mathbb{B}(X, Y)$.

Propozicija 1.1.14. *Ograničenost operatora ekvivalentna je njegovoj neprekidnosti.*

Dokaz. [1], Propozicija 1.3.2. □

Propozicija 1.1.15. *Ako su X i Y normirani prostori i $\dim X < \infty$, svaki linearan operator $A : X \to Y$ je ograničen.*

Dokaz. [1], Propozicija 1.3.6. □

Definicija 1.1.16. *Za $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ definiramo operatorsku normu s*

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

Napomena 1.1.17. *Za proizvoljan $x \in X$, $x \neq 0$, imamo $\|A(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|A\|$, pa je $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, za svaki $x \in X$ i $\|A\|$ je najmanji od svih brojeva M za koje je $\|Ax\| \leq M\|x\|$, za svaki $x \in X$.*

Definicija 1.1.18. *Normirani prostori X i Y su izomorfni ako postoji bijektivan linearan operator $A : X \to Y$ takav da su A i A^{-1} ograničeni.*
Posebno, ako je A i izometričan ($\|Ax\| = \|x\|, x \in X$), kažemo da su X i Y izometrički izomorfni prostori, te ih kao takve poistovjećujemo.

Definicija 1.1.19. $l^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$.

Teorem 1.1.20. *l^2 je Hilbertov prostor. Za $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in l^2$ skalarni produkt je definiran s*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

pri čemu taj red konvergira i apsolutno, pa je norma na l^2 dana s

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

Dokaz. [1], Teorem 1.4.6. □

Definicija 1.1.21. *Niz $(b_n)_n$ u normiranom prostoru X zove se topološka baza za X ako za svaki $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara $(\alpha_n)_n$ takav da je*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$$

gdje ovaj red konvergira obično u normi prostora X.

Propozicija 1.1.22. *Svaki normiran prostor X koji posjeduje topološku bazu je separabilan.*

Dokaz. [1], Propozicija 1.4.9. □

Napomena 1.1.23. *Pošto za svaki $x \in l^2$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$, vrijedi da je $(e_n)_n$ topološka baza za l^2, pa je on separabilan.*

1.2 Hilbertovi prostori

Ortonormirana baza

Definicija 1.2.1. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$ takav da je $\overline{span S} = X$. Tada kažemo da je S fundamentalan u X.*

Propozicija 1.2.2. *U separabilnom unitarnom prostoru X svaki ortonormiran skup je konačan ili prebrojiv.*
U svakom separabilnom unitarnom prostoru postoji fundamentalan ortonormiran niz.

Dokaz. [1], Propozicija 2.1.3. □

Definicija 1.2.3. *Ortonormiran niz $(e_n)_n$ u unitarnom prostoru X je ortonormirana baza (ONB) prostora X ako svaki vektor $x \in X$ dopušta prikaz oblika $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, pri čemu ovaj red konvergira obično u normi prostora X.*

Napomena 1.2.4. *Svaka ONB je ujedno i topološka baza. Jedinstvenost prikaza u ONB nije potrebno zahtijevati, jer je $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$, za $n \in N$.*

Teorem 1.2.5. *Neka je X unitaran prostor i $(e_n)_n$ ortonormiran niz u X. Ekvivalentno je:*

1. *$(e_n)_n$ je ONB za X,*
2. *$(e_n)_n$ je fundamentalan u X,*
3. *$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$, $x \in X$ (Parsevalova jednakost)*
4. *$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$, $x, y \in X$*
5. *$(e_n)_n$ je maksimalan u X, tj. vrijedi da $x \perp e_n$, $n \in \mathbb{N}$ povlači $x = 0$.*

Dokaz. [1], Teorem 2.1.7. □

Teorem 1.2.6. *Svaki separabilan unitaran prostor posjeduje ortonormiranu bazu.*
Ako je X unitaran, separabilan i beskonačnodimenzionalan, onda je X izometrički izomorfan nekom gustom potprostoru od l^2.
Posebno, ako je X i potpun, on je izometrički izomorfan s l^2.

[1], Teorem 2.1.9.

Napomena 1.2.7. *Operator koji uspostavlja izometrički izomorfizam između prostora iz prethodnog teorema ima svojstvo čuvanja skalarnih produkata. U slučaju kad je X potpun, taj je operator bijektivan, te kažemo da je takav operator unitaran.*

Propozicija 1.2.8. *Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H, te neka je $(\alpha_n)_n$ niz skalara.*
Red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ konvergira u H ako i samo ako je $(\alpha_n) \in l^2$.
Posebno, taj red konvergira i apsolutno ako i samo ako je $(\alpha_n) \in l^1$.

Dokaz. [1], Propozicija 2.1.11. □

Ortogonalna projekcija

Teorem 1.2.9. *Neka je H Hilbertov prostor i $S \subseteq H$ neprazan, zatvoren i konveksan. Tada za svaki $x \in H$ postoji jedinstveni $x_0 \in S$ takav da je $\|x - x_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$.*

Dokaz. [1], Teorem 2.2.1. □

Definicija 1.2.10. *Neka je X unitaran prostor i $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$. Definiramo ortogonal skupa S sa*

$$S^{\perp} = \{x \in X : \langle x, s\rangle = 0, \forall s \in S\}.$$

Teorem 1.2.11. *(Rieszov teorem o projekciji) Neka je H Hilbertov prostor i $M \leq H$ zatvoren.*
Za svaki $x \in H$ postoje jedinstveni $a \in M$ i $b \in M^{\perp}$ takvi da je $x = a + b$.
Preslikavanje $P : H \to H$ takvo da je $Px = a$ zovemo ortogonalni projektor na potprostor M, a vektor a je ortogonalna projekcija prostora H na potprostor M. P je ograničen linearan operator za kojeg vrijedi $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$. Posebno, ako je $M = \{0\}$, imamo $P = 0$.

Dokaz. [1], Teorem 2.2.4. □

Teorem 1.2.12. *(Rieszov teorem o reprezentaciji linearnih funkcionala) Neka je H Hilbertov prostor i $f \in H'$. Tada postoji jedinstveni vektor $a \in H$ takav da je za svaki $x \in H$ $f(x) = \langle x, a\rangle$.*

Dokaz. [1], Teorem 2.2.7. □

Teorem 1.2.13. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada postoji jedinstven operator $A^* \in \mathbb{B}(K, H)$ takav da za sve $x \in H$ i za sve $y \in K$ vrijedi $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$. Pritom za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, te sve $A_1, A_2, A \in \mathbb{B}(H, K)$ vrijedi:*

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* = \overline{\alpha_1} A_1^* + \overline{\alpha_2} A_2^*,$$

$$(A^*)^* = A,$$

$$\|A^*\| = \|A\|,$$

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Ako se operatori A i B mogu komponirati, vrijedi i

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Kažemo da je operator A^* hermitski adjungiran operatoru A.

Dokaz. [1], Teorem 2.2.11. □

Definicija 1.2.14. *Neka je* $A \in \mathbb{B}(H, K)$*. Kažemo da je on:*

1. *unitaran, ako je* $A^*A = I_H$ *i* $AA^* = I_K$*,*
2. *hermitski, ako je* $H = K$ *i* $A^* = A$*,*
3. *normalan, ako je* $H = K$ *i* $A^*A = AA^*$*.*

Napomena 1.2.15. *Unitaran operator A je surjektivna izometrija, pa je takav onda i* A^**. Dakle, unitarni operatori su izomorfizmi Hilbertovih prostora.*
Operator $A \in \mathbb{B}(H, K)$ *je izometrija ako i samo ako vrijedi* $A^*A = I$*.*

Propozicija 1.2.16. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i* $A \in \mathbb{B}(H, K)$*.Tada je*

$$KerA = (\overline{\operatorname{Im} A^*})^{\perp},$$

$$KerA^* = (\overline{\operatorname{Im} A})^{\perp},$$

$$\overline{\operatorname{Im} A} = (KerA^*)^{\perp},$$

$$\overline{\operatorname{Im} A^*} = (KerA)^{\perp}.$$

Dokaz. [1], Propozicija 2.2.13. □

Propozicija 1.2.17. *Neka je* $A \in \mathbb{B}(X)$ *hermitski operator. Tada je njegova norma dana s*

$$||A|| = sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$$

Dokaz. [1], Propozicija 2.2.14. □

1.3 Sumabilnost i konvergencija redova

Definicija 1.3.1. *Usmjeren skup je uređen par* $(A, \leq)$ *koji se sastoji od nepraznog skupa A i binarne relacije* $\leq$ *definirane na A za koju vrijedi:*

1. $\alpha \leq \alpha$, $\forall \alpha \in A$,
2. $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \implies \alpha \leq \gamma$,
3. *Za sve* $\alpha, \beta \in A$ *postoji* $\gamma \in A$ *takav da je* $\alpha \leq \gamma$ *i* $\beta \leq \gamma$

Definicija 1.3.2. *Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup. Svako preslikavanje $x : A \to X$ zove se hiperniz u X.*
Kao i kod nizova, umjesto $x(\alpha)$ pisat ćemo x_α, i hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Konvergencija i Cauchyjevost hiperniza definira se isto kao za nizove, samo što sada skup $\mathbb{N}$ zamjenjujemo skupom A.

Propozicija 1.3.3. *U Banachovom prostoru svaki Cauchyjev hiperniz konvergira.*

Dokaz. [1], Propozicija 3.1.5. □

Definicija 1.3.4. *Neka je J proizvoljan beskonačan prebrojiv skup, Σ familija svih konačnih podskupova od J, X normiran prostor te $x : J \to X$ zadana funkcija. Kažemo da je familija $\{x(j) = x_j : j \in J\}$ sumabilna te da je njena suma vektor $x_0 \in X$ ako je x_0 limes hiperniza parcijalnih suma $(s_F)_{F \in \Sigma}$, $s_F = \sum_{j \in F} x_j$. Tada pišemo $x_0 = \sum_{j \in J} x_j$.*

Propozicija 1.3.5. *Neka je X Banachov prostor. Familija $\{x_j : j \in J\}$ je sumabilna ako i samo ako je za svaki $\epsilon > 0$ postoji $G(\epsilon) \in \Sigma$ takav da za $F \in \Sigma$, $F \subseteq J \setminus G(\epsilon)$ vrijedi $\| \sum_{j \in F} x_j \| < \epsilon$. Ovaj uvjet sumabilnosti zovemo Cauchyjev kriterij.*

Dokaz. [1], Propozicija 3.1.7. □

Propozicija 1.3.6. *(3.1.11) Neka je X Banachov prostor, J proizvoljan beskonačan skup i $x : J \to X$. Ako je familija $\{\|x_j\| : j \in J\}$ sumabilna u $\mathbb{R}$, tada je sumabilna i familija $\{x_j : j \in J\}$ u X i vrijedi $\| \sum_{j \in J} x_j \| \leq \sum_{j \in J} \|x_j\|$. Drugim riječima, apsolutna sumabilnost u Banachovom prostoru povlači običnu sumabilnost, isto kao što apsolutna konvergencija reda povlači običnu.*

Dokaz. [1], Propozicija 3.1.11. □

Teorem 1.3.7. *Neka je J prebrojiv skup i $x : J \to \mathbb{F}$.*
Familija $\{x_j : j \in J\}$ je sumabilna ako i samo ako je familija $\{|x_j| : j \in J\}$ sumabilna.

Dokaz. [1], Teorem 3.1.13. □

Definicija 1.3.8. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno u X ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ konvergira obično u X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.*

Teorem 1.3.9. *Neka je $(c_n)_n$ niz u polju $\mathbb{F}$. Red $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira bezuvjetno.*

Dokaz. [1], Teorem 3.2.2. □

Napomena 1.3.10. *Neka je X Banachov prostor i* $(x_n)_n$ *proizvoljan niz u X. Vrijedi:* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira apsolutno* $\implies$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira bezuvjetno* $\implies$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira obično.*

Teorem 1.3.11. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u normiranom prostoru X. Familija* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *je sumabilna ako i samo ako red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira bezuvjetno, te tada za svaku permutaciju* σ *skupa* $\mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{F \in \Sigma} \sum_{k \in F} x_k.$$

Dokaz. [1], Teorem 3.2.6. □

1.4 Pozitivno semidefinitni operatori

Definicija 1.4.1. *Neka je H Hilbertov prostor. Operator* $A \in \mathbb{B}(H)$ *je pozitivno semidefinitan, u oznaci* $A \geq 0$*, ako je A hermitski operator i ako za svaki* $x \in H$ *vrijedi* $\langle Ax, x \rangle \geq 0$*. Za A, B iz* $\mathbb{B}(H)$ *definiramo uređaj* $A \leq B \iff B - A \geq 0$*.*

Teorem 1.4.2. *Neka je H Hilbertov prostor i* $A \in \mathbb{B}(H)$ *pozitivno semidefinitan. Tada postoji jedinstven* $B \in \mathbb{B}(H)$ *takav da je* $B \geq 0$ *i* $B^2 = A$*. Ako za operator* $C \in \mathbb{B}(H)$ *vrijedi* $AC = CA$*, tada je i* $BC = CB$*.*

Dokaz. [1], Teorem 5.5.3. □

Definicija 1.4.3. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Operator* $V \in \mathbb{B}(H, K)$ *zovemo parcijalna izometrija ako je* $V|_{(KerV)^{\perp}}$ *izometrija.*

1.5 Teoremi o otvorenom preslikavanju i zatvorenom grafu

Teorem 1.5.1. *(Teorem o inverznom preslikavanju) Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je* $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ *bijekcija. Tada je* A^{-1} *ograničen operator.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.3. □

Teorem 1.5.2. *(Teorem o otvorenom preslikavanju) Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je* $A \in \mathbb{B}(X, K)$ *surjekcija. Tada je A otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.6. □

Teorem 1.5.3. *(Teorem o zatvorenom grafu) Neka su X i Y Banachovi prostori i* $A \in L(X, Y)$ *sa zatvorenim grafom. Tada je A ograničen.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.7. □

Teorem 1.5.4. *Teoremi o inverznom preslikavanju, otvorenom preslikavanju i zatvorenom grafu su ekvivalentni.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.9. □

Poglavlje 2

Bazni okviri

2.1 Motivacija

Naslov podsekcije

Dosad smo u separabilnim Hilbertovim prostorima promatrali baze kao temelj konstrukcije i rekonstrukcije svih elemenata prostora. Pritom su, zbog svojih specifično lijepih svojstava, posebno važnu ulogu igrale ortonormirane baze.

Činjenica da svaki separabilan Hilbertov prostor H posjeduje ortonormiranu bazu rezultirala je time da se svaki vektor $x \in H$ može prikazati u obliku

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

gdje je $(e_n)_n$ neka ONB prostora H.

Drugim riječima, sve informacije o vektoru $x \in H$ sadržane su u nizu koeficijenata $(\langle x, e_n \rangle)_n$, pa poznavajući ONB, svaki vektor $x \in H$ možemo rekonstruirati koristeći te iste koeficijente.

Dosad smo ovu jedinstvenost prikaza svakog pojedinog vektora u nekoj ONB Hilbertovog prostora smatrali krucijalnom, no u praksi se pokazuje da nas ona često ograničava.

Promotrimo sljedeću situaciju: Neka je $x \in H$ podatak prikazan pomoću ortonormirane baze $(e_n)_n$ koji se prenosi od pošiljatelja do primatelja. Pretpostavimo da je u prijenosu podatka došlo do neke smetnje te da se pritom izgubila informacija o samo jednom koeficijentu $\langle x, e_i \rangle$, $i \in \mathbb{N}$. Primatelj je, dakle, dobio niz podataka $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots,$ $\langle x, e_{i-1} \rangle, \langle x, e_{i+1} \rangle, \ldots$. Koristeći ONB, nije moguće rekonstruirati podatak x iz ovih koeficijenata.

Nameće se prirodno pitanje: kako otkloniti taj nedostatak? Ako nadjemo način da dodamo višak koeficijenata, možda bismo mogli rekonstruirati podatak x i uz gubitak nekih od njih. Upravo je to temeljna ideja koja stoji iza teorije baznih okvira.

Bazni je okvir u konačnodimenzionalnom prostoru niz vektora koji razapinju prostor, pri čemu ne zahtijevamo linearnu nezavisnost tih vektora. Drugim riječima, svaki bazni okvir za Hilbertov prostor H sadrži neku bazu za H, ali samo kao svoj podskup. Pošto vektori baznog okvira razapinju prostor, svaki je vektor prostora moguće prikazati pomoću njih, no taj prikaz nije jedinstven.

Pošto se u primjenama većinom susrećemo s konačnodimenzionalnim podacima (signalima) ili konačnodimenzionalnim aproksimacijama realnih signala, u glavnom ćemo se dijelu rada ograničiti na prostore konačnih dimenzija.

Potkrijepimo prethodnu priču jednostavnim primjerima za prostor $\mathbb{R}^2$.

Primjer 2.1.1. *Neka je* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Pošto je skup* $\{e_1, e_2\}$ *baza prostora* $\mathbb{R}^2$, *vrijedi da za svaki* $x \in \mathbb{R}^2$ *postoje jedinstveni skalari* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ *takvi da je* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. *Pošto je* $\{e_1, e_2\}$ *ortonormiran skup, vrijedi da je* $\alpha_1 = \langle x, e_1 \rangle$, $\alpha_2 = \langle x, e_2 \rangle$.

Primjer 2.1.2. *Neka su sada* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *i* $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *dva nekolinearna vektora jedinične norme u* $\mathbb{R}^2$.
Pošto oni čine bazu za R^2, *vrijedi da za svaki* $x \in \mathbb{R}^2$ *postoje jedinstveni skalari* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ *takvi da je* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. *Međutim, pošto bazni vektori nisu ortogonalni, koeficijente* α_1 *i* α_2 *nije moguće dobiti na isti način kao u prethodnom primjeru.*

Primjer 2.1.3. *Neka su sada* $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *i* $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *zadani vektori u* $\mathbb{R}^2$.
Imamo 3 *vektora u dvodimenzionalnom prostoru, pa su oni nužno linearno zavisni. Konkretno, vrijedi* $e_3 = e_1 - e_2$. *Ovi vektori čine sustav izvodnica za* $\mathbb{R}^2$, *pa za svaki* $x \in \mathbb{R}^2$ *postoje* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}$ *takvi da je* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. *Međutim, ti skalari više nisu jedinstveni. Pitamo se postoje li vektori* $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^2$ *takvi da je* $\alpha_i = \langle x, f_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. *Možemo uočiti da odabirom* $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2$, $f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *imamo jednu trojku vektora koja zadovoljava formulu rekonstrukcije.*

Napomena 2.1.4. *U sljedećem ćemo poglavlju vidjeti da su nizovi vektora iz prethodnih primjera zapravo jednostavni primjeri konačnih baznih okvira.*

2.2 Opća teorija baznih okvira

U ovom će poglavlju H označavati separabilan Hilbertov prostor proizvoljne dimenzije, a l^2 prostor svih kvadratno sumabilnih nizova.

Definicija 2.2.1. *Niz $(x_n)_n$ u H je Besselov ako za sve $x \in H$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty$$

Lema 2.2.2. *Ako je $(x_n)_n$ Besselov niz u H, preslikavanje $U : H \to l^2$ definirano s*

$$Tx = (\langle x, x_n \rangle)_n$$

je ograničen linearan operator. Posebno,

$$(\exists B > 0)(\forall x \in H) \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2$$

Operator U zovemo operatorom analize niza $(x_n)_n$.

Dokaz. Pošto je $(x_n)_n$ Besselov niz, za svaki $x \in H$ vrijedi

$$\|Ux\|_2^2 = \|(\langle x, x_n \rangle)_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty,$$

pa vidimo da je $U : H \to l^2$ dobro definirano preslikavanje.
Dovoljno je pokazati da U ima zatvoren graf, pa će tada po Teoremu o zatvorenom grafu (Teorem 1.5.3.) neposredno slijediti da je U ograničen.
Neka je niz $(y_N)_N$ u H takav da je $\lim_{N\to\infty} y_N = y \in H$, te neka je $\lim_{N\to\infty} Uy_N = (c_n)_n \in l^2$.
Za fiksirani $m \in \mathbb{N}$ promotrimo kvadrat udaljenosti c_m od $\langle y_N, x_m \rangle$:

$$|c_m - \langle y_N, x_m \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle y_N, x_n \rangle|^2 = \|(c_n)_n - Uy_N\|^2.$$

Pustimo li $N \to \infty$, vidimo da ovaj izraz teži k 0. Stoga za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $c_m = \lim_{N\to\infty}\langle y_N, x_m \rangle = \langle y, x_m \rangle$. Dakle, $(c_n)_n = (\langle y, x_n \rangle)_n = Uy$, pa za svaki niz $(y_N)_N$ u H takav da je $\lim_{N\to\infty} y_N = y \in H$ vrijedi $\lim_{N\to\infty} Uy_N = Uy$, što znači da U ima zatvoren graf. □

Očito je da granica B iz prethodnog teorema nije jedinstvena. Optimalna granica je upravo $B = \|U\|^2$ (Napomena 1.1.18.), koju zovemo Besselovom granicom.
Zbog ograničenosti linearnog operatora U te činjenice da su H i l^2 Hilbertovi prostori, po Teoremu 1.2.13. znamo da postoji jedinstveni njemu adjungirani operator $U^* : l^2 \to H$ koji je također ograničen. Operator U^* zovemo operatorom sinteze niza $(x_n)_n$.

Propozicija 2.2.3. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H s operatorom analize U.*
Tada za svaki niz $(c_n)_n$ iz prostora l^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno, te je pripadni operator sinteze U^* niza $(x_n)_n$ dan formulom

$$U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

Ako je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora l^2, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $U^* e_n = x_n$. Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\|x_n\| \leq \|U\|$.

Dokaz. Neka je B Besselova granica niza $(x_n)_n$, te neka je $(c_n)_n \in l^2$ proizvoljan. Po Teoremu 1.3.11., bezuvjetna konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ ekvivalentna je sumabilnosti familije $\{c_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Po Definiciji 1.3.4., trebamo pokazati da hiperniz $(\sum_{n \in F} c_n x_n)_{F \in \Sigma}$ konvergira. Mi ćemo pokazati da je to Cauchy-jev hiperniz, pa će zbog Propozicije 1.3.3. odmah slijediti da je on i konvergentan.
U računu koji slijedi koristit ćemo Teorem 1.2.12.
Neka je F proizvoljan podskup skupa $\mathbb{N}$ kardinaliteta N. Tada je

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n\in F} c_n x_n\|^2 &= \sup\{|\langle \sum_{n\in F} c_n x_n, y\rangle|^2 : \|y\| = 1\} = \sup\{|\sum_{n\in F} c_n \langle x_n, y\rangle|^2 : \|y\| = 1\} \\
&\leq \sup\{(\sum_{n\in F} |c_n|^2)(\sum_{n\in F} |\langle x_n, y\rangle|^2) : \|y\| = 1\} \\
&\leq \sup\{B\|y\|^2 \sum_{n\in F} |c_n|^2 : \|y\| = 1\} = B \sum_{n\in F} |c_n|^2
\end{aligned}$$

Pošto red $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergira apsolutno i bezuvjetno, po [2],Teorem 1.1.12., slijedi da je $(\sum_{n\in F} |c_n|^2)_{F\in\Sigma}$ Cauchy-jev hiperniz.
Iz toga i iz prethodnog računa zaključujemo da je hiperniz $(\sum_{n\in F} c_n x_n)_{F\in\Sigma}$ također Cauchy-jev.
Neka su sada $x \in H$ i $(c_n)_n \in l^2$ proizvoljni. Imamo

$$\langle x, U^*(c_n)_n\rangle = \langle Ux, (c_n)_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle \overline{c_n} = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\rangle$$

□

Željeli bismo da niz vektora $(x_n)_n$, koji će služiti za konstrukciju i rekonstrukciju početnog signala x, zadovoljava sljedeća svojstva:

1. Podatak x može biti savršeno rekonstruiran iz koeficijenata $(\langle x, x_n \rangle)_n$. Preciznije, želimo da $\langle x, x_n \rangle = \langle x, y_n \rangle, \forall n$, to jest, $Ux = Uy$ implicira $x = y, \forall x, y \in H$. Taj će zahtjev biti zadovoljen ako postoji konstanta $A > 0$ takva da za sve $x, y \in H$ vrijedi:

$$A\|x - y\|^2 \leq \|Ux - Uy\|^2.$$

   Primijetimo da je, stavljanjem $z := x - y$, to ekvivalentno zahtjevu da je za svaki $z \in H$

$$A\|z\|^2 \leq \|Uz\|^2.$$

2. l^2-norma niza koeficijenata Ux trebala bi biti povezana s normom podatka x. Znamo da za ONB u Hilbertovom prostoru vrijedi Parsevalova jednakost $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$. S obzirom na to da naš niz vektora $(x_n)_n$ nije nužno ONB, oslabljujemo taj zahtjev tražeći samo da postoji $B > 0$ takav da za sve $x \in H$

$$\|Ux\|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Sada smo spremni za definiciju baznog okvira.

Definicija 2.2.4. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ niz u H. Ako postoje pozitivne konstante A i B takve da je za svaki $x \in H$ zadovoljeno*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2,$$

kažemo da je niz $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Optimalne konstante A i B za koje je zadovoljena definicija baznog okvira zovemo granicama baznog okvira $(x_n)_n$.

Definicija 2.2.5. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H. Kažemo da je on:*

1. *A-napet, ako je $A = B$. Posebno, ako je $A = B = 1$, zadovoljena je Parsevalova jednakost, pa kažemo da je on Parsevalov.*

2. *Uniforman, ako postoji konstanta c takva da je $\|x_n\| = c$, $n \in \mathbb{N}$. Posebno, ako je $c = 1$, kažemo da je to bazni okvir jedinične norme.*

3. *Ekviangularan, ako postoji konstanta c takva da za sve $m \neq n$ vrijedi $|\langle x_m, x_n \rangle| = c$.*

4. *Egzaktan, ako niz dobiven izbacivanjem bilo kojeg vektora iz $(x_n)_n$ više ne čini bazni okvir za H.*

Kako bi stekli pravu predodžbu o tome kakvi sve vektori mogu sačinjavati bazne okvire, pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.2.6. *Neka je H Hilbertov prostor, te neka su $(e_n)_n$ i $(f_n)_n$ ONB za H.*

1. $(x_n)_n = (e_1, e_2, e_3, ...)$ *je jedinični Parsevalov egzaktan bazni okvir za H. Dakle, svaka ONB čini jedan bazni okvir.*
2. $(x_n)_n = (e_1, 0, e_2, 0, e_3, 0, ...)$ *je Parsevalov neegzaktni okvir za H. Dakle, bazni okvir može sadržavati nulvektore kao svoje članove.*
3. $(x_n)_n = (e_1, f_1, e_2, f_2, e_3, f_3, ...)$ *je 2-napet neegzaktni bazni okvir za H. Dakle, bazni okvir može biti unija ortonormiranih baza.*
4. $(x_n)_n = (ce_1, e_2, e_3, e_4, ...)$, *pri čemu je* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *je egzaktni bazni okvir. Ako je* $|c| > 1$, *granice su mu* $A = 1$ *i* $B = |c|$. *Ako je* $|c| < 1$, *granice su mu* $A = |c|$ *i* $B = 1$. *U slučaju* $|c| = 1$, *to je Parsevalov okvir.*
5. $(x_n)_n = (e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, ...)$ *je neegzaktan Parsevalov bazni okvir za H.*

Napomena 2.2.7. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Tada je $(x_n)_n$ fundamentalan u H. Obrat ne vrijedi.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Tada, po definiciji, za svaki $x \in H$ postoje pozitivne konstante A i B takve da je $A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2$. Po Teoremu 1.2.5., fundamentalnost niza je ekvivalentna njegovoj maksimalnosti. Pretpostavimo stoga da $(x_n)_n$ nije maksimalan u H. To znači da postoji $x \in H, x \neq 0$ takav da je $\langle x, x_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = 0$, pa zbog stoge pozitivnosti norme od x ne postoji $A > 0$ za koji bi definicija baznog okvira bila zadovoljena. Kontradikcija. Dakle, $(x_n)_n$ je maksimalan, odnosno fundamentalan u H.

Kako bi pokazali da obrat ne vrijedi, promotrimo niz vektora $(x_n)_n = (e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, ..)$ u H. Jasno je da on razapinje gust potprostor u H. Međutim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = |\langle x, e_1\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle x, e_2\rangle|^2 + \frac{1}{9}|\langle x, e_3\rangle|^2 + ... \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2,$$

pa je ovaj niz Besselov.
Kad bi postojala konstanta $A > 0$ za koju je zadovoljena prva nejednakost u definiciji baznog okvira, posebno bi, za sve $n \in \mathbb{N}$ moralo vrijediti

$$A\|e_n\|^2 \leq \frac{1}{n^2},$$

a to je, očito, nemoguće. Našli smo primjer skupa koji je ortogonalan i fundamentalan u H, ali ne čini njegov bazni okvir. □

Iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi da svaki bazni okvir razapinje gust potprostor od H. Kombinirajući to s prebrojivošću svakog baznog okvira, vidimo da je dovoljno ograničiti se na separabilne Hilbertove prostore.

Primijetimo još jednu posljedicu prethodne napomene:
Znamo da ne postoji konačan fundamentalan niz u beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru. Dakle, ne postoji konačan bazni okvir za beskonačnodimenzionalan prostor H.

Napomena 2.2.8. *Konačan niz vektora $(x_n)_{n=1}^M$ je bazni okvir za konačnodimenzionalan Hilbertov prostor H ako i samo ako vektori $x_1, ..., x_M$ razapinju H.*

Dokaz. U Napomeni 2.2.7. pokazali smo da je svaki bazni okvir za H fundamentalan u H. Obratno, pretpostavimo da $(x_n)_n$ razapinje H. Definirajmo operator $U : H \to \mathbb{F}^M$ sa $Ux = (\langle x, x_n\rangle)_{n=1}^M$. Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvom argumentu, jasno je da je U linearan operator. Nadalje, za $Ux = Uy$ imamo

$$0 = Ux - Uy = U(x - y) = (\langle x - y, x_n\rangle)_{n=1}^M,$$

pa zbog maksimalnosti niza vektora $(x_n)_{n=1}^M$, vrijedi da je $x = y$. Dakle, $\operatorname{Ker} U = \{0\}$.
Definirajmo operator $U_0 : H \to \operatorname{Im} U$ sa $U_0 x = Ux$. Zbog $KerU_0 = KerU$ i $\operatorname{Im} U_0 = \operatorname{Im} U$,vrijedi da je operator U_0 izomorfizam. Zbog $dimH < \infty$, vrijedi da je on i ograničen, pa postoji njegov inverz ${U_0}^{-1} : \operatorname{Im} U \to H$ koji je također ograničen. Dakle, za svaki $x \in H$ postoji $C > 0$ takav da je

$$||{U_0}^{-1}(Ux)||^2 \leq C||Ux||^2$$

Primijetimo da ovu jednakost možemo zapisati kao

$$||x||^2 \leq C \sum_{n=1}^{M} |\langle x, x_n\rangle|^2,$$

pa dijeljenjem sa C i definiranjem $A = \frac{1}{C}$ dobivamo prvu nejednakost u definiciji baznog okvira.

S druge strane, koristeći CS nejednakost, za svaki $x \in H$ imamo

$$\sum_{n=1}^{M} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{M} ||x||^2 ||x_n||^2,$$

pa uzimanjem $B = \sum_{n=1}^{M} ||x_n||^2$ slijedi tvrdnja. □

Pošto za svaki bazni okvir vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 < \infty$, vidimo da je svaki bazni okvir Besselov niz, te je optimalna konstatnta B u definiciji baznog okvira zapravo Besselova granica niza $(x_n)_n$.
U Lemi 2.2.2. definirali smo operator analize Besselovog niza $(x_n)_n$ te vidjeli da je on ograničen u normi prostora l^2. Sada vidimo da je, ukoliko niz $(x_n)_n$ čini bazni okvir za H, njegov operator analize ograničen i odozdo. U Propoziciji 2.2.3. vidjeli smo i kako izgleda pripadni operator sinteze niza $(x_n)_n$.

Kako bi dalje gradili teoriju, trebat će nam neki generalni rezultati o ograničenim operatorima na Hilbertovim prostorima koje navodimo u nastavku.

Lema 2.2.9. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Ako je $T : H \to K$ ograničen linearan operator koji je uz to i surjekcija, njemu adjungirani operator T^* je ograničen odozdo.*

Dokaz. [2], Lema 2.1.6. □

Propozicija 2.2.10. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T : H \to K$ ograničen linearan operator. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. $\operatorname{Im} T$ *je zatvoren ako i samo ako je* $\operatorname{Im} T^*$ *zatvoren,*
2. *T surjekcija ako i samo ako je T^* odozdo ograničen,*
3. *Ako je* $\operatorname{Im} T$ *zatvoren, TT^* je invertibilan na* $\operatorname{Im} T$.

Dokaz. [2], Propozicija 2.1.7. □

Teorem 2.2.11. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H.*
Njegov operator analize $U : H \to l^2$ je ograničen i odozdo ograničen, te je pripadni operator sinteze $U^* : l^2 \to H$ surjekcija.
Obratno, neka je $T : l^2 \to H$ ograničen surjektivan linearan operator i neka je $(e_n)_n$ standardna baza prostora l^2. Tada je niz $(x_n)_n$ definiran s $x_n = Te_n$, $n \in \mathbb{N}$ bazni okvir za H s operatorom analize T^*.

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Iz definicija baznog okvira i operatora analize neposredno slijedi da je U ograničen i ograničen odozdo. Po Propoziciji 2.2.10. slijedi da je U^* surjekcija.

Obratno, neka je $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$ surjekcija. Ponovo se pozivamo na Propoziciju 2.2.10. i vidimo da je T^* odozdo ograničen. Dakle, postoji $A > 0$ takav da za sve $x \in H$ vrijedi $A\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2$. Također, iz Teorema 1.2.13. slijedi da postoji $B > 0$ takav da za sve $x \in H$ vrijedi $\|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2$.
S druge strane, zbog $T^*x \in H$ i $(e_n)_n$ ONB za H, za svaki $x \in H$ imamo

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle T^*x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, Te_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle e_n = (\langle x, x_n\rangle)_n$$

Dakle, T^* je operator analize niza $(x_n)_n$. Ako $\|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$ uvrstimo u prethodno dokazane nejednakosti $A\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2$, vidimo da $(x_n)_n$ zadovoljava definiciju baznog okvira za H. □

Korolar 2.2.12. *Niz $(x_n)_n$ u H je bazni okvir za H ako i samo ako postoji separabilan Hilbertov prostor L, surjekcija $T \in \mathbb{B}(L, H)$ i ONB $(f_n)_n$ za L tako da je $x_n = Tf_n, n \in \mathbb{N}$*

Dokaz. Ako je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, po prethodnom teoremu znamo da je njegov operator sinteze $U^* : l^2 \to H$ ograničen i surjektivan. Također je poznato da je l^2 separabilan Hilbertov prostor. Označimo njegovu kanonsku bazu s $(e_n)_n$. Tada po Propoziciji 2.2.3. vidimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $U^*e_n = x_n$.
Obratno, uzmimo separabilan Hilbertov prostor L, surjektivan $T \in \mathbb{B}(L, H)$ i ONB $(f_n)_n$ za L takve da je $x_n = Tf_n$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $(e_n)_n$ standardna baza za l^2. Znamo da je L izometrički izomorfan s l^2 (Teorem 1.2.6.), pa po Napomeni 1.2.7. postoji unitaran operator $V \in \mathbb{B}(l^2, L)$ takav da je $Ve_n = f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Iz toga odmah slijedi da je $x_n = TVe_n$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je komponirani operator $TV : l^2 \to H$ surjekcija kao kompozicija unitarnog i surjektivnog operatora. Niz $(x_n)_n$ je bazni okvir za H s pripadnim operatorom analize V^*T^*. □

Dakle, bazni okviri su upravo slike ortonormiranih baza, pri čemu preslikavanje mora biti surjektivan i ograničen operator.
Ako preslikavanje T nije surjektivno, niz $(x_n)_n$ definiran s $x_n = Te_n, n \in \mathbb{N}$ ne može biti bazni okvir.

Korolar 2.2.13. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako postoji ko-izometrija $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Te_n = x_n$, pri čemu je $(e_n)_n$ standardna ONB za prostor l^2.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir i U pripadni operator analize. Tada za svaki $x \in H$ vrijedi

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|Ux\|^2.$$

Dakle, operator analize baznog okvira $(x_n)_n$ $U : H \to l^2$ je izometrija, pa je $U^* : l^2 \to H$ ko-izometrija za koju po definiciji vrijedi $U^*e_n = x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Obratno, neka je $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$ ko-izometrija i neka za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = Te_n$, gdje je $(e_n)_n$ standardna ONB za l^2. Tada je $T^* \in \mathbb{B}(H, l^2)$ izometrija. Pošto je $(e_n)_n$ ONB za l^2, za svaki $x \in H$ možemo pisati

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n\rangle e_n,$$

odakle slijedi

$$\|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle T^*x, e_n\rangle\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle x, Te_n\rangle\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle x, x_n\rangle\|^2,$$

što je zbog izometričnosti operatora T^* jednako $\|x\|^2$. Dakle, $(x_n)_n$ je Parsevalov okvir.

□

Definicija 2.2.14. *Neka je $(x_n)_n$ niz vektora u H s pripadnim operatorom analize $U : H \to l^2$.*
Pripadni operator baznog okvira $S : H \to H$ definira se kao kompozicija operatora sinteze i operatora analize:

$$Sx = U^*Ux = U^*(\langle x, x_n\rangle)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$$

Neka je $(x_n)_n$ niz vektora u H. Primijetimo da direktno iz definicije operatora baznog okvira S slijedi da je on hermitski operator. Također, vidimo da je za svaki $x \in H$

$$\langle Sx, x\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \geq 0$$

Dakle, S je pozitivno definitan operator ($S \geq 0$).

Propozicija 2.2.15. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H s operatorom analize U. Tada je operator baznog okvira $S = U^*U$ invertibilan.*
Optimalne granice baznog okvira okvira dane su sa

$$A = \frac{1}{\|S^{-1}\|} = min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$$

$$B = \|S\| = max\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$$

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H s operatorom analize U. Znamo da je pripadni operator sinteze $U^* : l^2 \to H$ surjekcija, pa je

$$\operatorname{Im} U^* = H = \overline{\operatorname{Im} U^*} \oplus \operatorname{Ker} U.$$

Dakle, slika od U^* je zatvorena, pa je po Propoziciji 2.2.10. operator U^*U invertibilan na $\operatorname{Im} U^* = H$.
Kako bi dokazali ostale tvrdnje, primijetimo da je za svaki $x \in H$

$$Sx = U^*Ux = U^*(\langle x, x_n\rangle)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$$

Pomnožimo li ovu jednakost skalarno s x, dobivamo:

$$\langle Sx, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle\langle x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, x_n\rangle|^2$$

Pošto je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, za svaki $x \in H$ vrijedi

$$A\|x\|^2 \leq \langle Sx, x\rangle \leq B\|x\|^2,$$

iz čega slijedi $AI \leq S \leq BI$.

Nadalje, $B = \|U\|^2 = \|U^*U\| = \|S\|$.

S druge strane, invertiranjem nejednakosti $AI \leq S$ dobivamo $S^{-1} \leq \frac{1}{A}I$, pa vrijedi $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{A}$. Pretpostavimo da postoji konstanta C takva da je $\|S^{-1}\| = C < \frac{1}{A}$. Iz toga slijedi da je $S^{-1} \leq CI$. Invertiranjem ove nejednakosti dobivamo $\frac{1}{C}I \leq S$, što je, zbog $\frac{1}{C} > A$ kontradiktorno s činjenicom da je A najveća donja ograda baznog okvira $(x_n)_n$.

Jednakosti

$$A = min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$$

$$B = max\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$$

slijede iz svojstava spektra hermitskih operatora na Hilbertovim prostorima: $m = inf\{\langle Sx, x\rangle : \|x\| = 1\}$, $M = sup\{\langle Sx, x\rangle : \|x\| = 1\}$, $\sigma(S) \subset [m, M]$ i $m, M \in \sigma(S)$. □

Korolar 2.2.16. *Neka su H i K Hilbertovi prostori, $(x_n)_n$ bazni okvir za H i $T \in \mathbb{B}(H, K)$ surjektivan operator. Definiramo novi niz $(y_n)_n$ sa $y_n = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tako definiran niz čini bazni okvir za K.*
Ako su brojevi A i B granice baznog okvira $(x_n)_n$, tada su granice baznog okvira $(y_n)_n$ jednake $\frac{A}{\|(TT^*)^{-1}\|}$ i $B\|T\|^2$.

Dokaz. Neka je $U : H \to l^2$ operator analize niza $(x_n)_n$ i neka je $(e_n)_n$ standardna baza za l^2. Znamo da je tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ $x_n = U^*e_n$, pri čemu je $U^* \in \mathbb{B}(l^2, H)$ surjekcija. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $y_n = Tx_n = TU^*e_n$. Pošto je kompozicija $TU^* \in \mathbb{B}(l^2, K)$ surjektivan operator, zadovoljeni su uvjeti Korolara 2.2.12., pa je niz $(y_n)_n$ bazni okvir za K.

Označimo s U operator analize niza $(x_n)_n$. Tada je za svaki $x \in H$ $Ux = (\langle x, x_n\rangle)_n$. Neka je V operator analize niza $(y_n)_n$. Tada za svaki $x \in K$ vrijedi

$$Vx = (\langle x, y_n\rangle)_n = (\langle x, Tx_n\rangle)_n = (\langle T^*x, x_n\rangle)_n = UT^*x.$$

Dakle, $V = UT^*$.

Primijetimo prvo da je $\|TT^*\|I - TT^* \geq 0$, pa je

$$V^*V = (TU^*)(TU^*)^* = T(U^*U)T^* \leq BTT^* \leq B\|TT^*\|I = B\|T\|^2 I$$

Zbog surjektivnosti operatora T, vrijedi da je operator TT^* invertibilan, pa možemo primijetiti i da je $\|(TT^*)^{-1}\|I - (TT^*)^{-1} \geq 0$, što možemo zapisati kao $TT^* \geq \frac{1}{\|(TT^*)^{-1}\|}I$. Sada je

$$V^*V = (TU^*)(TU^*)^* = T(U^*U)T^* \geq ATT^* \geq A\frac{1}{\|TT^*\|^{-1}}I$$

□

Posvetimo se sada pitanju rekonstrukcije početnog podatka x pomoću njegovih koeficijenata. Znamo da je, u slučaju da imamo ONB $(e_n)_n$ u H, svaki $x \in H$ moguće rekonstrurirati pomoću jednakosti $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$, te je, u tom slučaju, niz koeficijenata rekonstrukcije $(\langle x, e_n\rangle)_n$ jedinstveno određen. Već smo kod uvodnih primjera vidjeli da to općenito nije slučaj kad umjesto ONB promatramo proizvoljan bazni okvir.

Teorem 2.2.17. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H s operatorom analize U. Tada je $U^*U : H \to H$ invertibilan operator te je niz $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$ također bazni okvir za H kojeg zovemo kanonskim dualnim baznim okvirom od (x_n). Za svaki $x \in H$ tada vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, y_n\rangle x_n$$

Posebno, ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n$$

Dokaz. Operator baznog okvira $(x_n)_n$ zadan je s $U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n$, $x \in H$.
Već smo dokazali njegovu invertibilnost, pa djelujmo na ovu jednakost slijeva operatorom $(U^*U)^{-1} : H \to H$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle (U^*U)^{-1}x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle y_n, x \in H$$

Pošto je operator $(U^*U)^{-1}$ invertibilan, posebno je i surjektivan, pa po Korolaru 2.2.12., niz $(y_n)_n$ također čini bazni okvir prostora H.

Označimo njegov operator analize s V. Tada za svaki $x \in H$ jednakost $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle y_n$ možemo zapisati kao $x = V^*Ux$, odnosno $I = V^*U$.

Adjungiranjem te jednakosti dobivamo $I = U^*V$, što ponovo možemo zapisati u obliku rekonstrukcijske formule: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n$. Dakle, $(y_n)_n$ je kanonski dualni bazni okvir za $(x_n)_n$ ako i samo ako je $(x_n)_n$ kanonski dualni bazni okvir za $(y_n)_n$.
U slučaju da je $(x_n)_n$ Parsevalov, nejednakost $AI \leq U^*U \leq BI$ iz dokaza Propozicije 2.2.15. i $A = B = 1$ daju nam $U^*U = I$. Dakle, $(U^*U)^{-1} = I$, pa je time i zadnja jednakost dokazana.

□

Kao što smo ranije napomenuli, radi moguće linearne zavisnosti vektora baznog okvira, jasno je da kanonski dual općenito nije jedini niz koji može poslužiti za rekonstrukciju vektora $x \in H$.

Definicija 2.2.18. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za Hilbertov prostor H. Svaki niz vektora $(y_n)_n$ u H takav da za svaki $x \in H$ vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n$$

zovemo dual od $(x_n)_n$.

Pogledajmo sada neke primjere duala baznih okvira.

Primjer 2.2.19. *Neka je $(e_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor H.*

1. *Neka je $(x_n)_n = (e_1, e_1, e_2, e_2, ...)$ bazni okvir za H s pripadnim operatorom analize U. Tada je za svaki $x \in H$*

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = 2x.$$

   Dakle, $U^*U = 2I$. Označimo s $(y_n)_n$ njegov kanonski dual. Tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = (U^*U)^{-1} x_n = (2I)^{-1} x_n = \frac{1}{2} x_n.$$

   No, odmah vidimo da je još jedan bazni okvir koji zadovoljava rekonstrukcijsko svojstvo zadan s $(e_1, 0, e_2, 0, ...)$.

2. *Neka je $(x_n)_n = (e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...)$.*
   To je Parsevalov bazni okvir za H, pa znamo da je njegov kanonski dual upravo $(x_n)_n$. Primijetimo da je još jedan niz koji zadovoljava svojstvo rekonstrukcije $(e_1, \sqrt{2}e_2, 0, \sqrt{3}e_3, 0, 0, ...)$. Međutim, ovaj niz nije Besselov, pa on posebno nije ni bazni okvir za H. Dakle, niz koji je dualan baznom okviru ne mora i sam biti bazni okvir.

Propozicija 2.2.20. *Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Besselovi nizovi u H takvi da je za svaki $x \in H$*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Tada su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ bazni okviri za H koji su jedan drugome dualni.

Dokaz. Kako su nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Besselovi, njihovi su operatori analize ograničeni. Neka je U operator analize niza $(x_n)_n$, a V operator analize niza $(y_n)_n$. Iz jednakosti

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n$$

slijedi da je $V^*U = I$. Dakle, operator V^* je surjektivan, pa je po Korolaru 2.2.12. $(y_n)_n$ bazni okvir za H. Adjungiranjem jednakosti $V^*U = I$ i koristeći iste argumente, dobivamo analognu tvrdnju za niz $(x_n)_n$. □

Na kraju, promotrimo neka dodatne rezultate za Parsevalove okvire.

Propozicija 2.2.21. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H s operatorom analize U. Definirajmo novi niz vektora $(y_n)_n$ sa $y_n = (U^*U)^{-\frac{1}{2}} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tako definiran niz čini Parsevalov bazni okvir za H.*

Dokaz. Pošto je operator U^*U pozitivno semidefinitan i invertibilan, njegov je inverz $(U^*U)^{-1}$ također pozitivno semidefinitan. Stoga znamo da postoji jedinstven operator B takav da je $B^2 = (U^*U)^{-1}$ te je on također pozitivno semidefinitan. Očito, $B = (U^*U)^{-\frac{1}{2}}$. Taj je operator invertibilan, pa je, posebno, i surjektivan. Koristeći Korolar 2.1.15., vidimo da je niz $(y_n)_n$ definiran u iskazu bazni okvir za H.
Označimo njegov operator analize s V. Tada je za svaki $x \in H$

$$Vx = (\langle x, y_n \rangle)_n = (\langle x, (U^*U)^{-\frac{1}{2}} x_n \rangle)_n = (\langle ((U^*U)^{-\frac{1}{2}})^* x, x_n \rangle)_n = (\langle (U^*U)^{-\frac{1}{2}} x, x_n \rangle)_n = U(U^*U)^{-\frac{1}{2}} x$$

Pošto je

$$(U(U^*U)^{-\frac{1}{2}})^* U(U^*U)^{-\frac{1}{2}} = I,$$

vidimo da je $(y_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. □

Propozicija 2.2.22. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H.*
On čini Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako je za svaki $x \in H$ zadovoljena jednakost $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$.
Posebno, ako je $(f_n)_n$ ONB prostora H i $M \leq H$ zatvoren, tada je niz $(Pf_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M, gdje $P : H \to H$ označava ortogonalnu projekciju na potprostor M.

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Tada je $S = S^{-1} = I$, pa je kanonski dual baznog okvira upravo on sam.
Obratno, neka za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$. Skalarnim množenjem te jednakosti s x dobivamo $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$, pa je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H.
Neka je $(f_n)_n$ ONB za Hilbertov prostor H. Tada za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle f_n$. Posebno, ako uzmemo $x \in M$, imamo

$$x = Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Px, f_n \rangle P f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, P f_n \rangle P f_n.$$

Dakle, Besselov niz $(P f_n)_n$ je dualan samome sebi, pa on čini Parsevalov okvir za M.

□

2.3 Konačni bazni okviri

U ovom ćemo se poglavlju posvetiti konačnim baznim okvirima. U prehodnoj smo sekciji napomenuli da ne postoje konačni bazni okviri za beskonačnodimenzionalne prostore, pa se ovdje ograničavamo na prostore konačne dimenzije.

H^N će označavati prostor jednostupčanih matrica s N redaka, dok će l^M označavati prostor $\mathbb{F}^M$. Svi rezultati koje smo naveli u prethodnoj točki vrijede posebno i na prostorima konačne dimenzije.

Napomena 2.3.1. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ bazni okvir prostora H^N s operatorom analize T, te neka su $e = (e_1, ..., e_N)$ i $f = (f_1, ..., f_M)$ kanonske baze prostora H^N i l^M.*
Matrična reprezentacija operatora sinteze T^* u paru baza e i f je $N \times M$ matrica

$$[T^*]_e^f = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_M \end{bmatrix}$$

Dakle, svaki konačan bazni okvir za H^N možemo poistovijetiti s matričnim prikazom pripadnog operatora sinteze $T^* : l^M \to H^N$ u paru kanonskih baza za l^M i H^N.

Znamo također da je, u slučaju konačnog baznog okvira, matrični prikaz njegovog operatora analize u paru kanonskih baza $M \times N$ matrica koju dobijemo adjungiranjem matrice operatora sinteze.

Lema 2.3.2. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ niz vektora u H^N. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $(x_n)_{n=1}^M$ ONB za H^N, onda je to Parsevalov okvir za H^N. Obrat ne vrijedi.*

2. *$(x_n)_{n=1}^M$ je bazni okvir za H^N ako i samo ako je to sustav izvodnica za H^N.*

3. *$(x_n)_{n=1}^M$ je ONB za H^N ako i samo ako je to Parsevalov okvir jedinične norme.*

4. *$(x_n)_{n=1}^M$ je egzaktan bazni okvir za H^N ako i samo ako je ujedno i baza za H^N.*

Dokaz. 1. Neka je $(x_i)_{i=1}^M$ ONB za H^N. Tadaje za svaki $x \in H^N$ zadovoljena Parsevalova jednakost, pa je to ujedno i Parsevalov bazni okvir.
Kako bi pokazali da obrat ne vrijedi nužno, uzmimo dvije ONB za H^N, nazovimo ih $(e_i)_{i=1}^N$ i $(f_j)_{j=1}^N$. Definirajmo niz vektora $(x_n)_{n=1}^M$ sa $(x_n)_{n=1}^M = (e_i)_{i=1}^N \cup (f_j)_{j=1}^N$. Tada je za svaki $x \in H^N$

$$\sum_{n=1}^{M} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{N} |\langle x, f_j\rangle|^2 = 2\|x\|^2.$$

Dijeljenjem ove jednakosti s 2 dobivamo $\sum_{i=n}^M |\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} x_n\rangle|^2 = \|x\|^2$. Dakle, niz $(\frac{1}{\sqrt{2}} x_n)_{n=1}^M$ je Parsevalov, ali nije ONB za H^N.

2. Ovo smo pokazali u Napomeni 2.2.8. Primijetimo da obrat nije vrijedio na Hilbertovim prostorima beskonačne dimenzije, što smo pokazali u Napomeni 2.2.7.

3. Prva je implikacija očita.
Obratno, neka je $(x_n)_{n=1}^M$ Parsevalov bazni okvir jedinične norme. Pošto je tada jednakost $\sum_{n=1}^M |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2$ zadovoljena za svaki $x \in H^N$, ona posebno vrijedi i za svaki vektor baznog okvira.
Neka je $j \in \{1, ..., M\}$. Tada je

$$\|x_j\|^2 = \sum_{n=1}^{M} |\langle x_j, x_n\rangle|^2 = \|x_j\|^2 + \sum_{n=1, n\neq j}^{M} |\langle x_j, x_n\rangle|^2.$$

Pošto je $(x_n)_{n=1}^M$ bazni okvir jedinične norme, dobili smo

$$\sum_{i=n, i\neq j}^{M} |\langle x_j, x_n\rangle|^2 = 0, j = 1, ..., M.$$

Slijedi da je $\langle x_n, x_j\rangle = 0$, za svaki $n \neq j$. Dakle, niz $(x_n)_{n=1}^M$ je ortogonalan, po pretpostavci normiran, a zbog (2) je on i sustav izvodnica, pa čini ONB za H^N.

4. Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ egzaktan bazni okvir za H^N. Znamo da je on tada i sustav izvodnica za H^N. Pretpostavimo da on ne čini bazu za taj prostor, odnosno da je linearno zavisan. Tada postoji $j \in \{1, ..., M\}$ i skalari λ_n, $n \in \{1, ..., M\} \setminus \{j\}$ takvi da je

$x_j = \sum_{n=1, n\neq j}^{M} \lambda_n x_n$, što govori da je niz $(x_n)_{n=1}^{M}$ isključenjem j-tog člana ostao bazni okvir. Kontradikcija s egzaktnošću.

□

Lema 2.3.3. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{M}$ niz vektora u H^N s pripadnim operatorom analize U. Ekvivalentno je:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{M}$ je bazni okvir za H^N.*
2. *Operator analize niza $(x_n)_{n=1}^{M}$ je injektivan operator.*
3. *Operator sinteze niza $(x_n)_{n=1}^{M}$ je surjektivan operator.*

Dokaz. Označimo s U operator analize niza $(x_n)_{n=1}^{M}$, te s U^* njegov operator sinteze.
1. $\implies$ 2. Neka je $(x_n)_{n=1}^{M}$ bazni okvir za H^N. Pretpostavimo da U nije injektivan. Tada postoji $x \in H^N$, $x \neq 0$ takav da je $Ux = 0$. No, tada je $0 = \|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^{M} |\langle x, x_n\rangle|^2$, pa vidimo da ne možemo naći $A > 0$ koji zadovoljava definiciju baznog okvira. Kontradikcija.
2. $\implies$ 3. Znamo da je $\operatorname{Ker} U \oplus \operatorname{Im} U^* = H^N$, pa je, zbog pretpostavke $\operatorname{Ker} U = \{0\}$, operator U^* surjektivan.
3. $\implies$ 1. Pošto je U^* surjekcija, po Korolaru 2.2.12. znamo da za svaki $n = 1, ..., M$ vrijedi $x_n = U^* e_n$, gdje je $(e_n)_{n=1}^{M}$ ONB prostora H^N.

□

Propozicija 2.3.4. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{M}$ bazni okvir za H^N s operatorom analize U i operatorom baznog okvira S. Ekvivalentno je:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{M}$ je A-napet okvir za H^N*
2. *$S = AI$*
3. *$x = A^{-1} \sum_{i=1}^{M} \langle x, x_i\rangle x_i$, $x \in H^N$*
4. *$A\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{M} |\langle x, x_i\rangle|^2$*
5. *$\frac{U}{\sqrt{A}}$ je izometrija.*

Dokaz. [5], Propozicija 1.17. □

Teorem 2.3.5. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{M}$ bazni okvir za H^N s operatorom baznog okvira S. Neka su $(\lambda_j)_{j=1}^{N}$ svojstvene vrijednosti operatora S, te $(e_j)_{j=1}^{N}$ njima pridruženi svojstveni vektori. Optimalne granice baznog okvira $(x_n)_{n=1}^{M}$ podudaraju se s najmanjom i najvećom svojstvenom vrijednošću od S. Također, za svaki $j \in \{1, ..., N\}$ vrijedi:*

$$\lambda_j = \sum_{n=1}^{M} |\langle e_j, x_n\rangle|^2$$

Posebno, $TrS = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \sum_{n=1}^{M} \|x_n\|^2$.
Ako je $(x_n)_{n=1}^{M}$ *uniforman Parsevalov okvir, za svaki* $n = 1, ..., M$ *vrijedi* $\|x_n\|^2 = \frac{N}{M}$.

Dokaz. Prvu smo tvrdnju već dokazali u slučaju beskonačnih baznih okvira, pa ona posebno vrijedi i za konačne bazne okvire.
Po definiciji operatora baznog okvira, za svaki $j \in \{1, ..., N\}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{M} |\langle e_j, x_n\rangle|^2 = \langle S e_j, e_j\rangle = \langle \lambda_j e_j, e_j\rangle = \lambda_j,$$

gdje smo kod druge jednakosti koristili da je za svaki $j \in \{1, ..., N\}$ e_j svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_j.
Nadalje, imamo:

$$TrS = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \|e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \langle S e_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{M} \langle U^* U e_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle U e_j, U e_j\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \|U e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} (\sum_{n=1}^{M} |\langle e_j, x_n\rangle|^2) = \sum_{n=1}^{M} (\sum_{j=1}^{N} |\langle e_j, x_n\rangle|^2) = \sum_{i=1}^{M} \|x_n\|^2,$$

gdje smo s U označili pripadni operator analize niza $(x_n)_{n=1}^{M}$.
Ako je $(x_n)_{n=1}^{M}$ uniforman, imamo $\sum_{n=1}^{M} \|x_n\|^2 = M\|x_n\|^2$, a ako je Parsevalov, vrijedi da je $S = I$, pa je $TrS = N$. Dakle, za $(x_n)_{n=1}^{M}$ uniforman i Parsevalov vrijedi $\|x_n\|^2 = \frac{N}{M}$, $n = 1, ..., M$. □

Sljedeća nam propozicija daje potpunu karakterizaciju matrice sinteze baznog okvira u terminima operatora baznog okvira.

Propozicija 2.3.6. *Neka je* $T : l^M \to H^N$ *linearan operator,* $(f_k)_{k=1}^{N}$ *ONB za* H^N, $(e_n)_{n=1}^{M}$ *kanonska baza za* l^M *i* $(\lambda_k)_{k=1}^{N}$ *niz pozitivnih brojeva. Neka je* $[T]_e^f$ *matrična reprezentacija operatora* T *u paru baza* e *i* f*. Ekvivalentno je:*

1. $(Te_n)_{n=1}^{M}$ *je bazni okvir za* H^N *i* TT^* *ima svojstvene vektore* $(f_k)_{k=1}^{N}$ *pridružene svojstvenim vrijednostima* $(\lambda_k)_{k=1}^{N}$
2. *Retci matrice* $[T]_e^f$ *su ortogonalni i kvadrat norme* j*-tog retka je* λ_j, $j = 1, ..., N$
3. *Stupci matrice* $[T]_e^f$ *čine bazni okvir za* H^N *i vrijedi* $[T]_e^f [T^*]_f^e = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$

Dokaz. Djelovanje operatora T i T^* na vektore $(e_n)_{n=1}^M$ i $(f_k)_{k=1}^N$ zadano je sa:

$$Te_n = \sum_{k=1}^{N} t_{kn} f_k, n = 1, ..., M$$

$$T^* f_k = \sum_{n=1}^{M} \overline{t_{nk}} e_n, k = 1, ..., N$$

Neka su $[T]_e^f = [t_{kn}] \in M_{MN}$ i $[T^*]_f^e = [\overline{t_{nk}}] \in M_{NM}$ matrične reprezentacije operatora T i T^* u parovima baza e i f, respektivno.
Pretpostavimo da vrijedi prva tvrdnja.
Tada za sve $i, j = 1, ..., N$ imamo:

$$\langle (x_{i1}, ..., x_{iM}), (x_{j1}, ..., x_{jM}) \rangle = \sum_{n=1}^{M} x_{in} \overline{x_{jn}} = \langle \sum_{n=1}^{M} \overline{x_{jn}} e_n, \sum_{n=1}^{M} \overline{x_{in}} e_n \rangle = \langle \sum_{n=1}^{M} y_{nj} e_n, \sum_{n=1}^{M} y_{ni} e_i \rangle$$

$$= \langle T^* f_j, T^* f_i \rangle = \langle TT^* f_j, f_i \rangle = \langle \lambda_j f_j, f_i \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$$

Dakle, retci matrice $[T]_e^f$ su ortogonalni i kvadrat norme j-tog retka je λ_j, $j = 1, ..., N$.

Pretpostavimo sada da vrijedi druga tvrdnja.
Pošto su retci od $[T]_e^f$ ortogonalni, oni su posebno i linearno nezavisni. Dakle, rang matrice $[T]_e^f$ je N, pa je $dim(\text{Im}\, T) = N = dim(H^N)$, to jest, T je surjektivan operator. Po Teoremu 2.2.11. slijedi da je tada $(Te_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za H^N.
Promotrimo sad linearno preslikavanje $\phi : H^N \to H^N$ koji svaki vektor $x \in H^N$ preslikava u $[x]^f$. Očito je takvo preslikavanje ϕ izomorfizam ([4], Propozicija 5.4.1.), te je n-ti stupac od X upravo $\phi(Te_n)$, $n = 1, ..., M$.
Pošto je $(Te_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za H^N i ϕ je izomorfizam (pa je, posebno, i surjekcija), po Korolaru 2.2.16. slijedi da je i $(\phi(Te_n))_{n=1}^M$ bazni okvir za H^N. Zbog pretpostavki, jasno je da vrijedi $[T]_e^f [T^*]_f^e = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$. Dakle, dokazali smo da vrijedi treća tvrdnja.

Pretpostavimo sada da vrijedi treća tvrdnja.
Ako definiramo preslikavanje ϕ na isti način kao i gore, zbog činjenice da je n-ti stupac od X jednak $\phi(Te_n)$, za sve $n = 1, ..., M$ slijedi da je $(Te_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za H^N.
Iz jednakosti $[T]_e^f [T^*]_f^e = [TT^*]_f^f = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$ automatski slijedi da su $(\lambda_k)_{k=1}^N$ svojstvene vrijednosti operatora TT^*, s pripadnim svojstvenim vektorima $(f_k)_{k=1}^N$.

□

Korolar 2.3.7. *Neka je X proizvoljna $N \times M$ matrica oblika*

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

Ekvivalentno je:

1. $XX^* = I$
2. *Retci matrice X čine ortonormiran sustav u l^M*
3. *Stupci matrice X čine Parsevalov bazni okvir za H^N.*

Dokaz. Za zadanu matricu $X \in M_{NM}$, adjungirana matrica $X^* \in M_{MN}$ je oblika

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{M1} & y_{M2} & \cdots & y_{MN} \end{bmatrix},$$

gdje za sve $i = 1, ..., M$, $j = 1, ..., N$ vrijedi $y_{ij} = \overline{x_{ji}}$.
Po definiciji matričnog množenja, vidimo da je $XX^* \in M_N$ matrica takva da za sve $i, j = 1, ..., N$ vrijedi:

$$x_{i1}\overline{x_{j1}} + x_{i2}\overline{x_{j2}} + ... + x_{iM}\overline{x_{jM}} = \langle (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iM}), (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jM}) \rangle$$

Time smo pokazali ekvivalenciju prvih dviju tvrdnji.

Pretpostavimo sada da vrijedi druga tvrdnja.
Neka su $e = (e_n)_{n=1}^M$ i $f = (f_k)_{k=1}^N$ kanonske baze za l^M i H^N, respektivno, te neka je $T : l^M \to H^N$ linearan operator čija je matrična reprezentacija u paru kanonskih baza e i f dana matricom X.
Pošto retci matrice X čine ortonormiran sustav u l^M, oni su ortogonalni i kvadrat sume svakog retka je jednak 1. Dakle, ispunjen je drugi uvjet iz prethodne propozicije, uz $\lambda_k = 1$, $k = 1, ..., N$. Ista nam propozicija kaže da tada stupci $(x_1, ..., x_M)$ matrice X čine bazni okvir za H^N. Označimo li s U operator analize tog baznog okvira, znamo da je $U^* = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \end{bmatrix} = X$. Zbog $XX^* = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N) = I$, vrijedi $U^*U = XX^* = I$. Dakle, operator baznog okvira U^*U je identiteta, pa je $(x_1, ..., x_M)$ Parsevalov bazni okvir.

Pokazali smo da druga tvrdnja povlači treću.

Pretpostavimo sada da stupci od X čine Parsevalov bazni okvir za H^N.
Ako je U pripadni operator analize tog baznog okvira, znamo da je matrični prikaz operatora sinteze U^* u paru kanonskih baza jednak X, pa je, radi činjenice da je $(x_i)_{i=1}^M$ Parsevalov bazni okvir, $U^*U = I$, pa je i $XX^* = I$.
Dokazali smo da treća tvrdnja povlači prvu, čime je dokaz gotov. □

Primjer 2.3.8. *Neka je X proizvoljna $M \times M$ unitarna matrica. Znamo da je tada $XX^* = X^*X = I$. Brisanjem bilo kojih $M - N$ redaka te matrice dobivamo $N \times M$ matricu X_1 takvu da je $X_1 {X_1}^* = I_N$.*
Prethodna nam propozicija jamči da tada stupci te matrice čine Parsevalov okvir za prostor H^N.

Primjer 2.3.9. *Diskretna Fourierova transformacija čini pretvorbu konačnog niza kompleksnih brojeva $x_0, x_1, ..., x_{M-1}$ u drugi niz kompleksnih brojeva $X_1, X_2, ..., X_{M-1}$. Dana je formulama:*

$$X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-i2\pi kn/M},$$

$$x_n = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X_k e^{i2\pi kn/M}.$$

Ovdje M predstavlja broj zadanih uzoraka, x_n vrijednost uzorka u trenutku n, k trenutnu frekvenciju koju promatramo (od 0 do $M - 1$), X_k količinu frekvencije k u signalu.
Uvedimo oznaku $\omega = e^{-i2\pi/M}$. Tada sustav $X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-i2\pi kn/M} = \sum_{n=0}^{M-1} x_n \omega^{kn}$od M jednadžbi ($k = 0, ..., M - 1$) s M nepoznanica $X_0, ..., X_{M-1}$ možemo zapisati u matričnom obliku:

$$X = Wx,$$

gdje je X vektor frekvencija, x vektor vrijednosti uzorka, a W matrica diskretne Fourierove transformacije dana s

$$W = \begin{bmatrix} \omega^{0\cdot 0} & \omega^{0\cdot 1} & \omega^{0\cdot 2} & \cdots & \omega^{0\cdot(M-1)} \\ \omega^{1\cdot 0} & \omega^{1\cdot 1} & \omega^{1\cdot 2} & \cdots & \omega^{1\cdot(M-1)} \\ \omega^{2\cdot 0} & \omega^{2\cdot 1} & \omega^{2\cdot 2} & \cdots & \omega^{2\cdot(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \omega^{(M-1)\cdot 0} & \omega^{(M-1)\cdot 1} & \omega^{(M-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{(M-1)\cdot(M-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{1\cdot 1} & \omega^{1\cdot 2} & \cdots & \omega^{1\cdot(M-1)} \\ 1 & \omega^{2\cdot 1} & \omega^{2\cdot 2} & \cdots & \omega^{2\cdot(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \omega^{(M-1)\cdot 1} & \omega^{(M-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{(M-1)\cdot(M-1)} \end{bmatrix}.$$

Inverznu Fourierovu transformaciju tada možemo pisati u obliku $x = F^{-1}X$, gdje je $F^{-1} = \frac{1}{M}F^*$.

Uzmemo li umjesto W matricu $U = \sqrt{\frac{1}{M}}W$*, diskretna Fourierova transformacija postaje unitarna transformacija. Zaista, neka su* $j, k \in \{0, ..., M-1\}$ *proizvoljni. Tada je element koji se nalazi na presjeku j-tog stupca i k-tog retka matrice* UU^* *jednak*

$$\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\omega^{jn}\overline{\omega^{kn}} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\omega^{n(j-k)}.$$

Vidimo da je za $j = k$ *to jednako* 1*, što znači da su svi dijagonalni elementi jednaki* 1*.*
Za $j \neq k$*, imamo da je* $\omega^{j-k} \neq 1$*, no to je tada, po definiciji od* ω*, M-ti korijen jedinice.*
Tada je

$$\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\omega^{n(j-k)} = \frac{1}{M}\frac{1-\omega^{(j-k)M}}{1-\omega^{j-k}} = 0.$$

Dakle, pokazali smo da je $U^*U = UU^* = I$*.*

Sada nam Korolar 2.3.9. kaže da odabir bilo kojih $N < M$ *redaka te matrice čini Parsevalov bazni okvir za* H^N*.*
Posebno, odaberemo li prvih N redaka, dobivamo Parsevalov okvir $(x_n)_{n=1}^{M}$ *kojeg zovemo kompleksni harmonijski okvir.*

Primjer 2.3.10. *Neka je* $M \in \mathbb{N}$*. Za* $M = 2k$ *definiramo matricu*

$$D_{M=2k}(\mathbb{R}) = \sqrt{\frac{2}{M}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos(\frac{2\pi}{M}) & \cos(2\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \cos((M-1)\frac{2\pi}{M}) \\ 0 & \sin(\frac{2\pi}{M}) & \sin(2\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \sin((M-1)\frac{2\pi}{M}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos((k-1)\frac{2\pi}{M}) & \cos(2(k-1)\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \cos((M-1)(k-1)\frac{2\pi}{M}) \\ 0 & \sin((k-1)\frac{2\pi}{M}) & \sin(2(k-1)\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \sin((M-1)(k-1)\frac{2\pi}{M}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Označimo retke ove matrice sa $x_0, x_1, ..., x_{M-1}$*. Ako elemente ove matrice označimo s* d_{ij}*,* $i, j = 0, 1, , ..., M-1$*, tada za sve* $j \in \{0, ..., M-1\}$ *vrijedi:*

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & za\ i = 0 \\ \cos(ij\frac{2\pi}{M}), & za\ 1 \leq i \leq M-3,\ neparan \\ \sin(ij\frac{2\pi}{M}), & za\ 2 \leq i \leq M-2,\ paran \\ (-1)^j\frac{1}{\sqrt{2}}, & za\ i = M-1 \end{cases}$$

Tvrdimo da je $D_{M=2k}(\mathbb{R})$ *unitarna matrica.*

Trebamo pokazati da je $D_{M=2k}(\mathbb{R})(D_{M=2k}(\mathbb{R}))^T = (D_{M=2k}(\mathbb{R}))^T D_{M=2k}(\mathbb{R}) = I_M$. *Pokažimo prvo da su dijagonalni elemenati matrice jednake* $D(\mathbb{R})_{M=2k}(D(\mathbb{R})_{M=2k})^T$ *jednaki* 1*:*

$$\langle x_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2 = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{2}{M}\cdot\frac{M}{2} = 1.$$

Na isti način pokaže se da je i

$$\|x_{M-1}\|^2 = 1.$$

Za $1 \leq i \leq M-3$ *neparan imamo:*

$$\langle x_i, x_i\rangle = \|x_i\|^2 = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\cos^2(ij\frac{2\pi}{M}) = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\frac{1}{2}(1+\cos(2ij\frac{2\pi}{M})) = \frac{1}{M}(M+\sum_{j=0}^{M-1}\cos(2ij\frac{2\pi}{M}))$$

$$= 1 + \frac{1}{M}Re(\sum_{j=0}^{M-1}(\omega^{2i})^j) = 1 + \frac{1}{M}Re(\frac{1-\omega^{2iM}}{1-\omega^{2i}}) = 1,$$

gdje je $\omega = e^{2\pi/M}$*, pa je* $\omega^M = 1$*, a za svaki* $n \in \mathbb{N}$*,* $n < M$ *vrijedi da je* $\omega^n \neq 1$*.Tu činjenicu koristimo i u nastavku.*
Za $2 \leq i \leq M-2$ *paran imamo:*

$$\|x_i\|^2 = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\sin^2(ij\frac{2\pi}{M}) = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\frac{1}{2}(1-\sin(2ij\frac{2\pi}{M})) = \frac{1}{M}(M-\sum_{j=0}^{M-1}\sin(2ij\frac{2\pi}{M}))$$

$$= 1 - \frac{1}{M}Im(\sum_{j=0}^{M-1}(\omega^{2i})^j) = 1 - \frac{1}{M}Im(\frac{1-\omega^{2iM}}{1-\omega^{2i}}) = 1.$$

Pokažimo sada da su retci matrice $D_{M=2k}(\mathbb{R})$ *međusobno ortogonalni:*
Neka je $1 \leq i \leq M-3$ *neparan. Tada je*

$$\langle x_0, x_i\rangle = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(ij\frac{2\pi}{M}) = \frac{\sqrt{2}}{M}Re(\sum_{j=0}^{M-1}\omega^{ij}) = \frac{\sqrt{2}}{M}Re(\frac{1-\omega^{iM}}{1-\omega^{i}}) = 0.$$

Ako je $2 \leq i \leq M-2$ *paran, dobivamo* $\langle x_0, x_i\rangle = 0$ *na isti način, koristeći* $\sin(ij\frac{2\pi}{M}) = Im(\omega^{ij})$*.*
Analogno pokazujemo da je $\langle x_i, x_{M-1}\rangle = 0$*, za sve* $i \in 1, ..., M-2$*. Za i paran, k neparan*

imamo

$$\langle x_i, x_k\rangle = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}(\cos(ij\frac{2\pi}{M}))(\sin(kj\frac{2\pi}{M})) =$$

$$= \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\frac{1}{2}(\sin(ij\frac{2\pi}{M} + kj\frac{2\pi}{M}) - (sin(ij\frac{2\pi}{M} - kj\frac{2\pi}{M}))$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}(\sin((i+k)\frac{2\pi}{M})) - \sin((i+k)\frac{2\pi}{M})))$$

$$= \frac{1}{M}Im(\sum_{j=0}^{M-1}\omega^{(i+k)j} - \sum_{j=0}^{M-1}\omega^{(i-k)j}) = 0.$$

Za i, k parne dobivamo ortogonalnost na isti način koristeći formulu $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$*, a za i, k neparne koristeći formulu* $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$.
Preostalo nam je još pokazati ortogonalnost prvog i zadnjeg retka matrice:

$$\langle x_0, x_{M-1}\rangle = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M-1}(-1)^j(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{M}(1-1+1-...+1-1) = 0.$$

Dakle, dokazali smo da je $D(\mathbb{R})_{M=2k}$ unitarna matrica.
Neka je $N < M$, N neparan. Uzimanjem prvih N redaka matrice $D_{M=2k}(\mathbb{R})$ dobivamo $N \times M$ matricu čiji stupci čine realan harmonijski okvir za H^N.

Primjer 2.3.11. *Neka je $M \in \mathbb{N}$, $M = 2k+1$. Definiramo matricu*

$$D(\mathbb{R})_{M=2k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos(\frac{2\pi}{M}) & \cos(2\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \cos((M-1)\frac{2\pi}{M}) \\ 0 & \sin(\frac{2\pi}{M}) & \sin(2\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \sin((M-1)\frac{2\pi}{M}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(k\frac{2\pi}{M}) & \cos(2k\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \cos((M-1)k\frac{2\pi}{M}) \\ 0 & \sin(k\frac{2\pi}{M}) & \sin(2k\frac{2\pi}{M}) & \cdots & \sin((M-1)k\frac{2\pi}{M}) \end{bmatrix}$$

Na isti način kao u prethodnom primjeru možemo se uvjeriti da je to unitarna matrica.
Neka je $N < M$, N paran. Označimo retke matrice $D_{M=2k+1}(\mathbb{R})$ s $x_0, ..., x_{M-1}$. Uzimanjem redaka $x_1, ..., x_{N+1}$ dobivamo realan harmonijski okvir za H^N.

Posvetimo se sada pitanju konstrukcije konačnih baznih okvira. Pretpostavimo da imamo zadan neki konačan niz vektora. Kako ga nadopuniti do baznog okvira koji zadovoljava neka dodatna svojstva?

Sljedeći će nam teorem služiti kao sredstvo konstrukcije baznih okvira s određenim svojstvima. Dokaz se može naći u [6].

Teorem 2.3.12. *Neka je S pozitivan operator na H^N sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N > 0$.*
Fiksirajmo $M \geq N$ i realne brojeve $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_M > 0$. Ekvivalentno je:

1. *Postoji bazni okvir $(x_i)_{i=1,...,M}$ za H^N s operatorom analize U takav da je $U^*U = S$ i za svaki $i = 1, ..., M$ vrijedi $\|x_i\| = a_i$.*

2. *Za svaki $k \in \{1, 2, ..., N\}$ vrijedi $\sum_{i=1}^k a_i^2 \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$ i $\sum_{i=1}^M a_i^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i$*

Sljedeća nam propozicija daje način nadopunjavanja niza jediničnih vektora do uniformnog napetog okvira.

Propozicija 2.3.13. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ niz jediničnih vektora u H^N. Tada postoji uniforman napet okvir $(x_{nj})_{n,j=1}^{M,N}$ za H^N takav da za svaki $n \in 1, ..., M$ vrijedi $x_{n1} = x_n$.*

Dokaz. Definirajmo $x_{11} = x_1$, te nadopunimo vektorima $x_{12}, ..., x_{1N}$ tako da niz $(x_{1i})_{i=1,...,N}$ čini bazu za H^N.
Definirajmo $x_{21} = x_2$, te nadopunimo vektorima $x_{22}, ..., x_{2N}$ tako da niz $(x_{2i})_{i=1,...,N}$ čini bazu za H^N.
Nastavimo postupak do $x_{M1} = x_M$. Pošto svaki od nizova (x_{nj}), $j = 1, ..., M$ čini ONB za H^N, za svaki $x \in H^N$ vrijedi Parsevalova jednakost, pa imamo

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^N |\langle x, x_{1j}\rangle|^2 = \sum_{j=1}^N |\langle x, x_{2j}\rangle|^2 = ... = \sum_{j=1}^N |\langle x, x_{Mj}\rangle|^2$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$M\|x\|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N |\langle x, x_{ji}\rangle|^2$$

Dakle, $(x_{nj})_{n,j=1}^{M,N}$ je M-napet bazni okvir za H^N koji je očito i uniforman po samoj definiciji nizova (x_{nj}), $j = 1, ..., M$. □

Propozicija 2.3.14. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ niz vektora u H^N takav da je $x_n \neq 0$ za barem jedan $n \in 1, ..., M$.*
Tada postoji niz $(h_j)_{j=2}^N$ takav da je $(x_n)_{n=1}^M \cup (h_j)_{j=2}^N$ napet bazni okvir za H^N.

Dokaz. Neka je U operator analize niza $(x_n)_{n=1}^M$. Stavimo $S = U^*U : H^N \to H^N$, $Sx = \sum_{n=1}^M \langle x, x_n \rangle x_n$, za $x \in H^N$.
Neka je $(g_j)_{j=1}^N$ ONB za H^N koja se sastoji od svojstvenih vektora za S pridruženih svojstvenim vrijednostima $(\lambda_j)_{j=1}^N$, pri čemu je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N$. Primijetimo da, radi pretpostavke $x_n \neq 0$ za barem jedan $n \in \{1, ..., M\}$, vrijedi $S \neq 0$, pa je $\lambda_1 > 0$.
Definiramo niz $(h_j)_{j=2}^N$ sa $h_j = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_j} g_j$,$j = 2, ..., N$ i označimo s U_1 operator analize niza $(x_n)_{n=1}^M \cup (h_j)_{j=2}^N$. Stavimo $S_1 = U_1{}^* U_1$. Pokažimo da je to operator baznog okvira za H^N te da postoji $A > 0$ takav da je $S_1 = AI$:

$$
\begin{aligned}
S_1 x &= \sum_{n=1}^{M} \langle x, x_n \rangle x_n + \sum_{j=2}^{N} \langle x, h_j \rangle h_j \\
&= Sx + \sum_{j=2}^{N} \langle x, h_j \rangle h_j \\
&= S(\sum_{j=1}^{N} \langle x, g_j \rangle g_j) + \sum_{j=2}^{N} \langle x, \sqrt{\lambda_1 - \lambda_j} g_j \rangle \sqrt{\lambda_1 - \lambda_j} g_j \\
&= \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle x, g_j \rangle g_j + \sum_{j=2}^{N} (\lambda_1 - \lambda_j) \langle x, g_j \rangle g_j \\
&= \lambda_1 \langle x, g_1 \rangle g_1 + \lambda_1 \sum_{j=2}^{N} \langle x, g_j \rangle g_j \\
&= \lambda_1 x.
\end{aligned}
$$

Dakle, $(x_n)_{n=1}^M \cup (h_j)_{j=2}^N$ je λ_1-napet bazni okvir za H^N.

□

Prethodna nam je propozicija dala način izgradnje napetog baznog okvira za Hilbertov prostor H^N, no takav bazni okvir nije uniforman.
Ilustrirajmo tu konstrukciju jednim primjerom:

Primjer 2.3.15. *Neka je $N = 2$, pa promatramo prostor jednostupčanih matrica s 2 retka. Uzmimo niz od 3 vektora u H^2 zadan s*

$$(x_1, x_2, x_3) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Znamo da je tada matrica operatora sinteze U^* *u paru kanonskih baza dana s* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *a matrica operatora analize* U *u paru kanonskih baza je* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Sada je* $S = U^*U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *pa vidimo da su njene svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 3$ *i* $\lambda_2 = 1$, *te njima pridruženi ortonormirani svojstveni vektori* $g_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ *i* $g_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.
Definiramo $h_2 = \sqrt{3-1}g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Tada niz vektora (x_1, x_2, x_3, g_2) *čini* 3*-napet bazni okvir za* H^2*, jer je* $S_1 = 3I$.

Pogledajmo sada kako, počevši od niza jediničnih vektora, doći do uniformnog napetog baznog okvira s kontroliranom Beselovom granicom.

Propozicija 2.3.16. *Neka je* $(x_n)_{n=1}^M$ *niz jediničnih vektora u* H^N *takav da je za svaki* $x \in H^N$ $\sum_{n=1}^M |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2$.
Tada postoji niz jediničnih vektora $(g_j)_{j=1}^K$ *takav da je* $(x_n)_{n=1}^M \cup (g_j)_{j=1}^K$ *uniforman napet okvir s granicom* $A \leq B + 2$.

Dokaz. Neka je U operator analize niza $(x_n)_{n=1}^M$. Neka je $S = U^*U$ s pripadnim svojstvenim vrijednostima $(\lambda_i)_{i=1}^N$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N$ čiji pripadni svojstveni vektori $(e_i)_{i=1}^N$ čine ortonormiranu bazu za H^N.
U Propoziciji 2.2.15. smo pokazali da je $B = \lambda_1$.
Po Teoremu 2.3.7., znamo da je $TrS = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \sum_{n=1}^M \|x_n\|^2$, što je, zbog normiranosti vektora x_n, $n = 1, ..., M$ jednako M.
Za $\epsilon \in [0, 1]$ promotrimo pomoćnu funkciju $f(\epsilon) = N(\lambda_1 + 1 + \epsilon) - M$. Zbog $f(1) - f(0) = (N\lambda_1 + 2N - M) - (N\lambda_1 + N - M) = N$, pa zbog neprekidnosti funkcije f zaključujemo da postoji $\epsilon \in [0, 1]$ takav da je $f(\epsilon) = N(\lambda_1 + 1 + \epsilon) - M = K \in \mathbb{N}$. Pošto je $M = \sum_{i=1}^N \lambda_i$ i $\lambda_1 \geq \lambda_i$, za sve $i \in 1, ..., N$ vrijedi da je $K \geq N$.
Definirajmo operator $S_0 : H^N \to H^N$ sa $S_0 e_i = ((\lambda_1 + 1 + \epsilon) - \lambda_i)e_i$, $i = 1, ..., N$. Primijetimo da je tako definiran operator očito hermitski, te za svaki $x \in H^N$ vrijedi $\langle S_0 x, x\rangle \geq 0$. Dakle, S_0 je pozitivan operator. Pošto su sve svojstvene vrijednosti $(\nu_i)_{i=1}^N$ operatora S_0 dane sa $\nu_i = \lambda_1 + 1 + \epsilon - \lambda_i$, vidimo da su one strogo veće od 1. Definiranjem $a_i = 1$, $i = 1, ..., K$ održavamo svojstvo Teorema 2.3.12., $\sum_{i=1}^K a_i^2 \leq \sum_{i=1}^K \nu_i$. Također, vrijedi

$$\sum_{i=1}^N \nu_i = \sum_{i=1}^N (\lambda_1 + 1 + \epsilon - \lambda_i) = N(\lambda_1 + 1 + \epsilon) - \sum_{i=1}^N \lambda_i = N(\lambda_1 + 1 + \epsilon) - M = K = \sum_{i=1}^K a_i^2.$$

Sada možemo primijeniti Teorem 2.3.12.:
Postoji bazni okvir $(g_j)_{j=1}$ za H^N s operatorom baznog okvira S_0 takav da za svaki $j = 1, ..., K$ vrijedi $\|g_j\| = a_j = 1$.
Promotrimo sada niz $(x_n)_{n=1}^M \cup (g_j)_{j=1}^K$. Za svaki $x \in H^N$ je

$$(S + S_0)x = \sum_{n=1}^{M} \langle x, x_n \rangle x_n + \sum_{j=1}^{K} \langle x, g_j \rangle g_j$$

S druge strane, imamo:
$(S + S_0)e_i = \lambda_i e_i + ((\lambda_1 + 1 + \epsilon) - \lambda_i)e_i = (\lambda_1 + 1 + \epsilon)e_i$, $i = 1, ..., N$
Stavimo $A = \lambda_1 + 1 + \epsilon$
Tada je $A \leq \lambda_1 + 2 = B + 2$, pa nam jednakost $(S + S_0)e_i = (\lambda_1 + 1 + \epsilon)e_i$, $i = 1, ..., N$ govori da je $(x_n)_{n=1}^M \cup (g_j)_{j=1}^K$ A-napet bazni okvir za H^N.

□

Sljedeći je rezultat tehničke prirode i navodimo ga bez dokaza.

Lema 2.3.17. *Neka je H Hilbertov prostor i $S : H \to H$ pozitivan operator.*
Tada postoji Besselov niz $(x_n)_n$ u H s operatorom analize T takav da je $T^*T = S$.
U slučaju $dimH = N < \infty$, postoji niz koji se sastoji od točno N elemenata koji zadovoljava traženo svojstvo.

Propozicija 2.3.18. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ konačan niz vektora u H^N takav da je za svaki $x \in H^N$ zadovoljeno $\sum_{n=1}^M |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2$.*
Tada postoji niz $(g_j)_{j=1}^N$ u H^N takav da je $(x_n)_{n=1}^M \cup (g_j)_{j=1}^N$ B-napet bazni okvir za H^N.

Dokaz. Neka je U operator analize niza $(x_n)_{n=1}^M$. Znamo da je tada $U^*U \leq BI$, odnosno $BI - U^*U$ je pozitivan operator. Po prethodnoj lemi, zbog $dimH^N = N < \infty$, znamo da postoji konačan niz $(g_j)_{j=1}^N$ u H^N s operatorom analize V takav da je $V^*V = BI - U^*U$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} \langle x, x_n \rangle x_n + \sum_{j=1}^{N} \langle x, g_j \rangle g_j &= U^*Ux + V^*Vx \\
&= U^*Ux + (BI - U^*U)x \\
&= Bx
\end{aligned}$$

Dakle, $(x_n)_{n=1}^M \cup (g_j)_{j=1}^N$ je B-napet bazni okvir za H^N. □

U prehodnoj smo sekciji razmatrali problem rekonstrukcije početnog signala x kada je promatrani sustav reprodukcije Hilbertovog prostora bazni okvir, a ne ortonormirana baza. Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za prostor H^N s operatorom baznog okvira S. Tada je njegov

kanonski dual definiran sa $y_n = S^{-1}x_n$, $n = 1, ..., M$. Pokazali smo da kanonski dual nije jedini niz koji nam može poslužiti kao sredstvo rekonstrukcije, već da postoji beskonačno mnogo nizova koji zadovoljavaju rekonstrukcijsku formulu. Napomenuli smo da dual baznog okvira ne mora činiti bazni okvir za isti prostor. To nije slučaj u prostorima konačne dimenzije, jer je u konačnodimenzionalnom prostoru svaki niz Besselov, pa po Propoziciji 2.2.20. svaki dual od $(x_n)_{n=1}^M$ čini bazni okvir.
Primijetimo sada jedan jednostavan rezultat o jedinstvenosti dualnog baznog okvira.

Korolar 2.3.19. *Bazni okvir $(x_n)_{n=1}^M$ za H^N ima jedinstveni dualni okvir ako i samo ako je $N = M$, odnosno, ako $(x_n)_{n=1}^M$ čini bazu prostora H^N.*

U praksi je često egzaktna rekonstrukcija signala numerički nestabilna i spora, pa posežemo za algoritmima koji nam daju iterativne metode dobivanja konvergentnog niza aproksimacija signala x. Promotrimo jedan od njih, kojeg zovemo algoritmom baznog okvira:

Propozicija 2.3.20. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za H^N s granicama A i B i operatorom baznog okvira S. Za zadani $x \in H^N$ definiramo niz $(y_j)_{j=0}^\infty$ u H^N sa:*

$$y_0 = 0,$$

$$y_j = y_{j-1} + \frac{2}{A+B} S(x - y_{j-1}),\ j \geq 1.$$

Tada je $\lim_{j\to\infty} y_j = x$ s brzinom konvergencije

$$\|x - y_j\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^j \|x\|,\ j \geq 0$$

Dokaz. Za svaki $x \in H^N$ vrijedi

$$\langle (I - \frac{2}{A+B}S)x, x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle \frac{2}{A+B}Sx, x\rangle = \|x\|^2 - \frac{2}{A+B}\langle Sx, x\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \frac{2}{A+B}\sum_{n=1}^M |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2(1 - \frac{2A}{A+B}) = \frac{B-A}{A+B}\|x\|^2.$$

S druge strane,

$$\langle (I - \frac{2}{A+B}S)x, x\rangle = \|x\|^2 - \frac{2}{A+B}\sum_{n=1}^M |\langle x, x_n\rangle|^2 \geq \|x\|^2(1 - \frac{2B}{A+B}) = -\|x\|^2\frac{B-A}{A+B}.$$

U oba smo slučaja za ograničavanje odozdo, odnosno odozgo, koristili definiciju baznog okvira.
Dakle, dobili smo:

$$-\frac{B-A}{A+B}\|x\|^2 \leq \langle (I - \frac{2}{A+B})x, x\rangle \leq \frac{B-A}{A+B}\|x\|^2.$$

To možemo zapisati kao

$$-\frac{B-A}{A+B} \leq I - \frac{2}{A+B}S \leq \frac{B-A}{A+B},$$

odnosno

$$\|I - \frac{2}{A+B}S\| \leq \frac{B-A}{A+B}.$$

Iz definicije niza $(y_j)_{j=0}^{\infty}$ slijedi:

$$x - y_j = x - y_{j-1} - \frac{2}{A+B}S(x - y_{j-1}) = (I - \frac{2}{A+B}S)(x - y_{j-1}).$$

Iteriranjem ove jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} x - y_j &= (I - \frac{2}{A+B}S)^2(x - y_{j-2}) \\ &= (I - \frac{2}{A+B}S)^3(x - y_{j-3}) \\ &\vdots \\ &= (I - \frac{2}{A+B})^j(x - y_0),\ j \geq 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\|x - y_j\| = \|(I - \frac{2}{A+B}S)^j(x - y_0)\| \leq \|I - \frac{2}{A+B}S\|^j\|x\| \leq (\frac{B-A}{A+B})^j\|x\|.$$

□

Primijetimo da, iako iteracijska formula u prethodnom algoritmu sadrži x, algoritam koristi samo bazne koeficijente $(\langle x, x_n\rangle)_{n=1}^{M}$ pošto je

$$y_j = y_{j-1} + \frac{2}{A+B}S(x - y_{j-1}) = y_{j-1} + \frac{2}{A+B}(\sum_{n=1}^{M}\langle x, x_n\rangle x_n - \sum_{n=1}^{M}\langle y_{j-1}, x_n\rangle x_n).$$

Poglavlje 3

Potpuno razgranati konačni bazni okviri

3.1 Definicija i primjeri potpuno razgranatih konačnih baznih okvira

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je bazni okvir $(x_n)_{n=1}^M$ za H^N 1-robustan ako izbacivanjem bilo kojeg vektora reducirani niz ostaje bazni okvir za H^N.*
Kažemo da je bazni okvir $(x_n)_{n=1}^M$ za H^N K-robustan ako izbacivanjem bilo kojih K vektora reducirani niz ostaje bazni okvir za H^N.

Neka je $x \in H^N$ zadani signal, te neka je $(x_n)_{n=1}^M$ K-robustan bazni okvir za H^N. Tada gubitkom bilo kojih K koeficijenata niza $(\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^M$ i dalje možemo rekonstruirati x iz preostalih $M - K$ koeficijenata.
Očito je da želimo maksimizirati broj K, to jest, želimo da bazni okvir $(x_n)_{n=1}^M$ bude maksimalno robustan. Tako dolazimo do definicije potpuno razgranatog konačnog baznog okvira.

Definicija 3.1.2. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za prostor H^N. Kažemo da je to potpuno razgranati konačni bazni okvir ako je on $(M - N)$-robustan.*
Drugim riječima, niz dobiven izbacivanjem bilo kojih $M - N$ elemenata ostaje bazni okvir za prostor H^N.

Ako je $(x_n)_{n=1}^M$ potpuno razgranat bazni okvir za H^N, izbacivanjem $M - N$ vektora reducirani niz je i dalje bazni okvir za isti prostor koji se sastoji od N vektora; dakle, on je baza za H^N.
To znači da zapravo tražimo da izbacivanjem bilo kojih $M - N$ vektora iz $(x_n)_{n=1}^M$, njih N preostalih čine bazu.

Definicija 3.1.3. *Neka je $T \in M_{NM}$ matrica sa stupcima $S_1, ..., S_M$. Definiramo razgranatost matrice T, u oznaci $spark(T)$, kao kardinalitet najmanjeg linearno zavisnog podskupa skupa $\{S_1, ..., S_M\}$.*

Primjer 3.1.4. *Ilustrirajmo pojam razgranatosti matrice na primjeru matrica $T \in M_{34}$, čije stupce redom označimo sa $S_1, ..., S_4$:*

1. *Neka je* $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Pošto ona sadrži nulstupac, slijedi da je* $spark(T) = card\{S_4\} = 1$.

2. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Tada je* $S_3 = 5S_1$ *i* $S_4 = 2S_2$, *te matrica T ne sadrži nijedan nulstupac, pa slijedi da je* $spark(T) = card\{S_2, S_4\} = card\{S_1, S_3\} = 2$.

3. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Imamo* $S_4 = 2S_1 + 2S_2$ *i nikoja* 2 *stupca nisu linearno zavisna, pa slijedi da je* $spark(T) = card\{S_1, S_2, S_4\} = 3$.

4. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Zbog* $S_4 = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3$ *i činjenice da nikoja* 3 *stupca nisu linearno zavisna, slijedi da je* $spark(T) = card\{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 4$.

Očito je da za sve matrice $T \in M_{NM}$ takve da je $M > N$ vrijedi $spark(T) \in \{1, ..., N+1\}$, te je bilo koji skup od $N + 1$ stupaca linearno zavisan. Pošto radimo s baznim okvirima, upravo su nam takve matrice zanimljive, no napomenimo još jedan mogući slučaj.
Ako je $T \in M_{NM}$ takva da je $M \leq N$, moguće je da su svi stupci od T linearno nezavisni. U tom slučaju definiramo $spark(T) = \infty$.

Definicija 3.1.5. *Neka je $T \in M_{NM}$, gdje je $M > N$. Kažemo da je T potpuno razgranata matrica ako je $spark(T) = N + 1$. Drugim riječima, $T \in M_{NM}$, gdje je $M > N$, je potpuno razgranata matrica ako je bilo koji skup od N stupaca te matrice linearno nezavisan.*

Napomena 3.1.6. *Neka je $(x_n)_{n=1}^M$ bazni okvir za H^N, i neka je T pripadni operator analize tog niza. Znamo da bazni okvir poistovjećujemo s matričnim prikazom operatora sinteze T^* u paru kanonskih baza za l^M i H^N.*
Stoga vrijedi da je $(x_n)_{n=1}^M$ potpuno razgranati bazni okvir ako i samo ako je matrica operatora T^* u paru kanonskih baza za l^M i H^N potpuno razgranata matrica.

Primjer 3.1.7. *Neka su $N, M \in \mathbb{N}$ takvi da je $M > N$, te neka je $(\alpha_n)_{n=1}^{M}$ proizvoljan niz skalara. Vandermondeova matrica dana je s*

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{N-1} & \alpha_2^{N-1} & \cdots & \alpha_M^{N-1} \end{bmatrix}$$

Vandermondeova determinanta svake $N \times N$ podmatrice matrice V dana je s

$$detV = \prod_{1 \le i \le j \le N} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Pod uvjetom da su svi skalari α_i, $i = 1, ..., M$ međusobno različiti, vrijedi da je determinanta svake kvadratne $N \times N$ podmatrice različita od 0.
Dakle, svaka kvadratna $N \times N$ podmatrica matrice V je regularna, pa su posebno svi njeni stupci linearno nezavisni. Zaključujemo da je $spark(V) = N + 1$, to jest, V je potpuno razgranata matrica.

Primjer 3.1.8. *Vidimo da na kompleksni harmonijski okvir*

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{M-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^{2\cdot 2} & \cdots & \omega^{(M-1)\cdot 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{(M-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{(M-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

gdje je $\omega = e^{-i2\pi/M}$, možemo gledati kao na poseban slučaj Vandermondeove matrice sa skalarima $(1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{M-1})$.
Dakle, kompleksni harmonijski okvir je potpuno razgranati konačni bazni okvir, pa odabir bilo kojih N stupaca te matrice čini bazu za H^N.

Napomena 3.1.9. *Neka je $U \in M_M$ matrica diskretne Fourierove transformacije. U prethodnom smo primjeru pokazali da odabirom prvih $N \le M$ redaka te matrice dobivamo potpuno razgranatu matricu.*
Pokazat ćemo da to nije slučaj kad umjesto prvih N redaka odaberemo proizvoljnih $N < M$ redaka.

Neka je $M = 4$. Tada je $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$. Neka je $U_1 \in M_{24}$ matrica dobivena iz matrice U izbacivanjem drugog i četvrtog retka, to jest, $U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Znamo da, zbog unitarnosti matrice U, stupci od U_1 čine Parsevalov okvir za prostor H^2. Označimo li redom stupce matrice U_1 sa $S_1, ..., S_4$, imamo $S_1 = S_3$ i $S_2 = S_4$. Dakle, $spark(T) = card S_1, S_3 = card S_2, S_4 = 2 \neq 3$, pa tako konstruirana matrica nije potpuno razgranata.

3.2 Konstrukcija potpuno razgranatih konačnih baznih okvira

Uveli smo definiciju potpuno razgranatog konačnog baznog okvira, te smo vidjeli da je Vandermondeova matrica jedan primjer takvog okvira. U drugom smo poglavlju naveli nekolicinu načina konstrukcije baznih okvira s određenim svojstvima, pa se sada prirodno nameće pitanje: kako konstruirati konačni bazni okvir sa svojstvom potpune razgranatosti? Zanimljivo je da jedan od odgovora na to pitanje leži u simetričnim totalno pozitivnim matricama.

Na početku navodimo važan teorem koji će nam poslužiti u jednoj od konstrukcija potpuno razgranatih matrica. Dokaz izostavljamo radi izrazite kompleksnosti.

Teorem 3.2.1. *(Chebotarëv) Neka je $M \in \mathbb{N}$ prost broj, te neka je $U \in M_M$ matrica diskretne Fourierove transformacije. Tada je svaka kvadratna podmatrica matrice U invertibilna.*

Korolar 3.2.2. *Neka je $M \in \mathbb{N}$ prost broj i $N < M$. Neka je $U \in M_M$ matrica diskretne Fourierove transformacije. Odabirom bilo kojih N redaka matrice U dobivamo potpuno razgranat uniforman Parsevalov bazni okvir za H^N.*

Dokaz. Neka je $U \in M_M$ matrica diskretne Fourierove transformacije. Znamo da je ona unitarna, pa iz Korolara 2.3.9. znamo da odabirom bilo kojih N njenih redaka dobivamo Parsevalov bazni okvir za H^N.
Također, zbog činjenice da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|\omega^n|^2 = |\cos(\frac{2n\pi}{M})|^2 + |\sin(\frac{2n\pi}{M})|^2 = 1$ vrijedi da je taj bazni okvir i uniforman s normom $\frac{N}{\sqrt{M}}$.
Iz prethodnog teorema znamo da je bilo koja kvadratna podmatrica matrice U invertibilna, pa je, posebno, svaka $N \times N$ podmatrica punog ranga. Dakle, stupci svake $N \times N$ podmatrice matrice U čine bazu za prostor H^N. Stoga zaključujemo da je U potpuno razgranata matrica. □

Sljedeći nam teorem, koji je utemeljen na teoremu Chebotarëva, daje prvi način konstrukcije potpuno razgranatog konačnog baznog okvira.

Teorem 3.2.3. *Neka je $M \in \mathbb{N}$ prost broj, te neka je $U \in M_M$ matrica diskretne Fourierove transformacije. Označimo s $W \in M_{NM}$ matricu koju dobijemo odabirom bilo kojih $N \leq M$*

redaka iz matrice U.
Odaberimo zatim $K \in \mathbb{N}$ takav da je $K \leq N$, te označimo s $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^{N} \in M_N$ dijagonalnu matricu za koju je $d_{11} = ... = d_{K,K} = \sqrt{\frac{M+K-N}{MN}}$ te $d_{K+1,K+1}, ..., d_{N,N} = \sqrt{\frac{M+K}{MN}}$.
Konkatenacija produkta matrica D i W s prvih K elemenata kanonske baze za H^N čini uniforman, napet i potpuno razgranat bazni okvir za H^N koji se sastoji od $M + K$ vektora.

Dokaz. Neka je $U \in M_M$ matrica diskretne Fourierove transformacije. Označimo indekse N odabranih redaka te matrice s $\{i_1, i_2, ..., i_N\}$. Dobili smo matricu

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \omega^{i_1} & \omega^{i_1 \cdot 2} & \cdots & \omega^{i_1(M-1)} \\ 1 & \omega^{i_2} & \omega^{i_2 \cdot 2} & \cdots & \omega^{i_2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{i_N} & \omega^{i_N \cdot 2} & \cdots & \omega^{i_N(M-1)} \end{bmatrix}$$

Neka je $K \leq N$ te neka je dijagonalna matrica $D = [d_{ij}] \in M_N$ zadana s $d_{11} = ... = d_{K,K} = \sqrt{\frac{M+K-N}{MN}}$, $d_{K+1,K+1}, ..., d_{N,N} = \sqrt{\frac{M+K}{MN}}$. Stavimo $\alpha = \sqrt{\frac{M+K-N}{MN}}, \beta = \sqrt{\frac{M+K}{MN}}$.
Označimo s F matricu dobivenu spajanjem produkta matrica D i W s prvih K vektora kanonske baze prostora H^N. Tada je F oblika

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\omega^{i_1} & \alpha\omega^{i_1 \cdot 2} & \cdots & \alpha\omega^{i_1(M-1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \alpha\omega^{i_2} & \alpha\omega^{i_2 \cdot 2} & \cdots & \alpha\omega^{i_2(M-1)} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha\omega^{i_K} & \alpha\omega^{i_K \cdot 2} & \cdots & \alpha\omega^{i_K(M-1)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \beta & \beta\omega^{i_{K+1}} & \beta\omega^{i_{K+1} \cdot 2} & \cdots & \beta\omega^{i_{K+1}(M-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta\omega^{i_N} & \beta\omega^{i_N \cdot 2} & \cdots & \beta\omega^{i_N(M-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Pošto stupci matrice W čine bazni okvir za H^N, množenjem s invertibilnom matricom D oni to i ostaju, što smo pokazali u Korolaru 2.2.16.. Jasno je da je dodavanjem bilo kojih K vektora to i dalje bazni okvir za isti prostor, pa su stupci matrice $F \in M_{N,M+K}$ bazni okvir za H^N.
Očito je da svaki od K dodanih stupaca ima jediničnu normu, pošto svaki od njih predstavlja jedan vektor kanonske baze za prostor H^N. Označimo sa $S_1, ..., S_M$ prvih M stupaca matrice F. Za svaki $j = 1, ..., M$ vrijedi

$$||S_j||^2 = \sum_{k=1}^{N} |\alpha\omega^{i_k \cdot j}|^2 + \sum_{k=K+1}^{N} |\beta\omega^{i_k \cdot j}|^2 = |\alpha|^2 \sum_{k=1}^{K} |\omega^{i_k \cdot j}|^2 + |\beta|^2 \sum_{k=K+1}^{N} |\omega^{i_k \cdot j}|^2$$

$$= (\frac{M+K-N}{MN})K + (\frac{M+K}{MN})(N-K) = 1$$

Dakle, F je bazni okvir jedinične norme.

Da bismo pokazali da je F napet, dovoljno je pokazati da postoji konstanta A takva da je $FF^* = AI_N$. Neka su $i \in \{1, ..., N\}$ i $j \in \{1, ..., N\}$ proizvoljni. Umnožak i-otg retka matrice $F = [f_{ij}] \in M_{N,M+K}$ s j-tim stupcem matrice $F^* = [\overline{f_{ji}}] \in M_{M+K,N}$ jednak je:

$$\sum_{n=1}^{M+K} f_{i,n}\overline{f_{j,n}} = \sum_{n=1}^{M} f_{i,n}\overline{f_{j,n}} + \sum_{n=M+1}^{M+K} f_{i,n}\overline{f_{j,n}}$$

Otprije znamo da je, zbog ortogonalnosti redaka DFT matrice, prva suma jednaka nuli kada je $i \neq j$. Za $i \neq j$ i druga je suma jednaka nuli radi ortogonalnosti vektora kanonske baze. Dakle, FF^* je dijagonalna matrica. Promotrimo istu sumu za $i = j$.
Uzmimo prvo da je $i \in \{1, ..., K\}$:

$$\sum_{n=1}^{M+K} f_{i,n}\overline{f_{i,n}} = \sum_{n=1}^{M} f_{i,n}\overline{f_{i,n}} + \sum_{n=M+1}^{M+K} f_{i,n}\overline{f_{i,n}} = M \cdot \frac{M+K-N}{MN} + 1 = \frac{M+K}{N}$$

Neka je sada $i \in \{K + 1, .., N\}$:

$$\sum_{n=1}^{M+K} f_{i,n}\overline{f_{i,n}} = \sum_{n=1}^{M} f_{i,n}\overline{f_{i,n}} + \sum_{n=M+1}^{M+K} f_{i,n}\overline{f_{i,n}} = M \cdot \frac{M+K}{MN} + 0 = \frac{M+K}{N}$$

Dakle, $FF^* = \frac{M+K}{N} I_N$.
Kako bismo pokazali da je F potpuno razgranata matrica, primijetimo prvo da je svaka $N \times N$ podmatrica matrice DW invertibilna, jer je

$$|det(DW)_{N\times N}| = |detD| \cdot |detW_{N\times N}| > 0$$

radi invertibilnosti svake dijagonalne kvadratne matrice i Teorema 3.2.1.
U slučaju $K = N$, očito je da je i $N \times N$ podmatrica sastavljena od vektora kanonske baze za H^N invertibilna.
Neka je $L \in \mathbb{N}$, $L < N$. Preostaje nam dokazati da je svaka $N \times N$ podmatrica od F koja se sastoji od $N-L$ vektora matrice DW te L vektora kanonske baze za H^N također invertibilna. Označimo s C $N \times N$ matricu čijih prvih $N - L$ stupaca čine neki stupci matrice DW, a preostalih L neki od nadodanih vektora kanonske baze za H^N. Permutiramo retke matrice C i stupce sastavljene od vektora kanonske baze kako bi u donjem lijevom $L \times L$ kvadratu dobili jediničnu matricu. Permutacijama smo dobili matricu

$$C' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I_L \end{bmatrix}$$

Tada je $det(C) = det(A) \cdot det(I_L)$, pri čemu je $A \in M_{N-L}$ kvadratna podmatrica matrice U pomnožena s nekom dijagonalnom matricom s elementima α i β na dijagonali. Koristeći Teorem 3.2.1., zaključujemo da je ona invertibilna. Dakle, $det(C') \neq 0$, pa je i $det(C) \neq 0$ pošto determinanta pri permutaciji stupaca i redaka mijenja jedino predznak. Zaključujemo da je F potpuno razgranata matrica. □

Ilustrirajmo prethodni teorem jednim primjerom.

Primjer 3.2.4. *Neka je $M = 5$, $N = 3$, $K = 1$. Matrica diskretne Fourierove transformacije $U \in M_5$ dana je s*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^{2\cdot 2} & \omega^{2\cdot 3} & \omega^{2\cdot 4} \\ 1 & \omega^3 & \omega^{3\cdot 2} & \omega^{3\cdot 3} & \omega^{3\cdot 4} \\ 1 & \omega^4 & \omega^{4\cdot 2} & \omega^{4\cdot 3} & \omega^{4\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix},$$

gdje je $\omega = e^{-i2\pi/5}$. Pošto je $N = 3$, odaberimo bilo koja 3 retka ove matrice. Konkretno, neka to budu prvi, drugi i zadnji redak te matrice. Tada je

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$$

Matrica D je oblika $D = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix}$.

Rezultirajuća potpuno razgranata matrica F je dobivena spajanjem matrice DF s prvim vektorom kanonske baze za H^3. Dakle,

$$F = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega^2 & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega^3 & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega^4 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega^4 & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega^3 & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega^2 & \sqrt{\frac{2}{5}}\omega & 0 \end{bmatrix},$$

te njeni stupci čine 2-napet, potpuno razgranat bazni okvir jedinične norme za H^3.

Definicija 3.2.5. *Kažemo da je matrica $T \in M_{NM}$ totalno nesingularna ako je svaka njena kvadratna podmatrica invertibilna.*

Teorem 3.2.6. *Neka je $(x_n)_{n=1}^N$ baza za prostor H^N, te neka je $T = (t_{ij}) \in M_{NK}$, $K \in \mathbb{N}$, totalno nesingularna matrica.*
Definiramo vektore $x_{N+1}, x_{N+2}, ..., x_{N+K} \in H^N$ sa

$$x_{N+j} = \sum_{i=1}^{N} t_{ij} x_i, \ j = 1, 2, ..., K$$

Tada je $(x_n)_{n=1}^{N+K}$ potpuno razgranat bazni okvir za H^N.
Vrijedi i obrat, odnosno svaki potpuno razgranati bazni okvir za H^N je upravo ovog oblika.

Dokaz. Neka je $(x_1, ..., x_N)$ neka baza prostora H^N, te neka je $T = [t_{ij}] \in M_{NK}$ totalno nesingularna matrica. Tada je

$$\begin{bmatrix} x_{N+1} & x_{N+2} & \cdots & x_{N+K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1K} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \cdots & t_{NK} \end{bmatrix}$$

Neka je $F = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{N+K} \end{bmatrix}$. Trebamo pokazati da je $F \in M_{N,N+K}$ potpuno razgranata matrica, to jest, da odabir bilo kojih N stupaca matrice F čini bazu prostora H^N.
U slučaju da uzmemo prvih N stupaca, oni čine bazu za H^N po pretpostavci teorema.
Neka je $K \geq N$. Pretpostavimo da smo od zadnjih K stupaca matrice T odabrali proizvoljnih N stupaca. Označimo ih sa $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_N}$ i zapišimo ih pomoću baze $(x_n)_{n=1}^N$. Tada je

$$\begin{bmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,i_1} & t_{1,i_2} & \cdots & t_{1,i_N} \\ t_{2,i_1} & t_{2,i_2} & \cdots & t_{2,i_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N,i_1} & t_{N,i_2} & \cdots & t_{N,i_N} \end{bmatrix}$$

Po pretpostavci je svaka kvadratna podmatrica matrice T regularna, pa vektori $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_N}$ čine bazu za H^N.

Preostaje nam pokazati da odabir $k < N$ vektora iz $(x_1, ..., x_N)$ i njih $N - k$ iz niza $(x_{N+1}, ..., x_{N+K})$ čini bazu za H^N.
Neka je $A \in M_N$ matrica čije stupce čine vektori $\{x_{i_1}, ...x_{i_k}\} \subset \{x_1, ..., x_N\}$, te $\{x_{j_1}, ...x_{j_{N-k}}\} \subset \{x_{N+1}, ..., x_{N+K}\}$ prikazani u bazi $(x_1, ..., x_N)$. Pokazat ćemo da je $detA \neq 0$.
Prvih k stupaca matrice A čine vektori $x_{i_1}, ...x_{i_k}$ (koji imaju jedinicu na jednom, a nule na svim ostalim mjestima), a sljedećih $N - k$ vektori $x_{j_1}, ...x_{j_{N-k}}$, oblika $\begin{bmatrix} t_{1,j_1} \\ t_{2,j_1} \\ \vdots \\ t_{N,j_1} \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} t_{1,j_{N-k}} \\ t_{2,j_{N-k}} \\ \vdots \\ t_{N,j_{N-k}} \end{bmatrix}$.

Kako je apsolutna vrijednost determinante invarijantna na permutacije redaka i stupaca, presložimo retke i stupce matrice A kako bi dobili matricu $A' \in M_N$ oblika

$$A' = \begin{bmatrix} I_k & T' \\ 0 & T'' \end{bmatrix}$$

Tu je I_k jedinična matrica dimenzija $k \times k$, dok su $T' \in M_{k,N-k}$ i $T'' \in M_{N-k,N-k}$ podmatrice od T dobivene odgovarajućim permutacijama stupaca i redaka. Po pretpostavci, $det(T'') \neq 0$, pa je

$$det(A') = det(I_k) \cdot det(T'') \neq 0.$$

Pošto je matrica A' dobivena iz matrice A odgovarajućim permutacijama stupaca i redaka, vrijedi da je $|det(A)| = |det(A')|$, pa je $det(A) \neq 0$.

Pokažimo sada da vrijedi i obrat.
Neka je $(x_n)_{n=1}^{N+K}$ proizvoljan potpuno razgranati bazni okvir za H^N. Posebno, tada je $(x_n)_{n=1}^{N}$ baza za H^N, pa postoje brojevi t_{ij} takvi da je $x_{N+j} = \sum_{i=1}^{N} t_{ij} x_i$, za $j = 1, ..., K$. Posložimo te brojeve u matricu $T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1K} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & ... & t_{NK} \end{bmatrix}$. Trebamo pokazati da je svaka njena kvadratna podmatrica invertibilna.
Neka je $k \in \{1, ..., \min\{N, K\}\}$ proizvoljan. Neka su $I = \{i_1, ..., i_k\}$ i $J = \{j_1, ..., j_k\}$ dva skupa indeksa, te neka je $T_{I,J} = [t_{ij}]_{i \in I, j \in J}$ odgovarajuća $k \times k$ podmatrica matrice T. Označimo s $I^C = \{1, 2, ..., N\} \setminus I$ i promotrimo reducirani niz $(x_n)_{n \in I^C} \cup (x_{N+j})_{j \in J}$. Po pretpostavci, ovih N vektora čini bazu prostora H^N.
Označimo s A matričnu reprezentaciju te baze u bazi $(x_n)_{n=1}^{N}$. Tada se prvih $N - k$ stupaca matrice C sastoji od vektora kanonske baze za H^N, odnosno od skupa vektora $\{e_1, ..., e_N\} \setminus \{e_{i_1}, ..., e_{i_k}\}$, a preostalih k stupaca čine vektori $x_{j_1} = \begin{bmatrix} t_{1,j_1} \\ t_{2,j_1} \\ \vdots \\ t_{N,j_1} \end{bmatrix}$,$x_{j_2} = \begin{bmatrix} t_{1,j_2} \\ t_{2,j_2} \\ \vdots \\ t_{N,j_2} \end{bmatrix}$,..., $x_{j_k} = \begin{bmatrix} t_{1,j_k} \\ t_{2,j_k} \\ \vdots \\ t_{N,j_k} \end{bmatrix}$. Ova je matrica invertibilna, pa su, posebno, njeni retci linearno nezavisni.
Uzmemo li samo retke matrice T čiji se indeksi redaka nalaze u skupu I, dobivamo podmatricu A_I dimenzija $k \times N$,

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & T_{I,J} \end{bmatrix},$$

gdje je $0 \in M_{k,N-k}$, a $T_{I,J} \in M_{k,k}$. Posebno, retci ove matrice su linearno nezavisni, pa su očito i retci od $T_{I,J}$ linearno nezavisni.
Dakle, pokazali smo da je za proizvoljan $k \in \{1, ..., \min\{N, K\}\}$ svaka kvadratna $k \times k$ podmatrica od T punog ranga, pa je i invertibilna. $\square$

Definicija 3.2.7. *Kažemo da je kvadratna matrica T totalno pozitivna ako su sve njene minore pozitivni realni brojevi.*

Ako je matrica totalno pozitivna, sve su njene minore pozitivni realni brojevi, pa je, posebno, svaka njena kvadratna podmatrica invertibilna. Dakle, totalna pozitivnost matrice povlači njenu totalnu nesingularnost.

Neka je $T = [t_{ij}] \in M_n$ matrica, te neka su $I, J \subseteq \{1, 2, ..., N\}$ dva proizvoljna skupa indeksa istog kardinaliteta. U nastavku će $\Delta(T)_{I,J}$ će označavati odgovarajuću minoru matrice T, to jest, determinantu matrice $T_{I,J} = [t_{ij}]_{i\in I, j\in J}$.
Reći ćemo da je minora $\Delta(T)_{I,J}$ solidna ako se skupovi I i J sastoje od uzastopnih indeksa. Posebno, ako je minora $\Delta(T)_{I,J}$ solidna i $1 \in I \cup J$, reći ćemo da je minora inicijalna.

Neka je $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ beskonačna matrica i $n \in \mathbb{N}$. $T^{(n)}$ će biti oznaka za kvadratnu podmatricu koja čini $n \times n$ gornji lijevi kut matrice T. Dakle, $T^{(n)} = [t_{ij}]_{i,j=1}^{n}$. Minore te matrice ćemo označavati s $\Delta(T^{(n)})_{I,J}$.

U sljedećem ćemo teoremu konstruirati klase beskonačnih totalno pozitivnih simetričnih matrica koje ćemo, primjenom Teorema 3.1.15., koristiti za konstrukciju potpuno razgranatih baznih okvira. Koristit ćemo sljedeći kriterij totalne pozitivnosti koji je dokazan u [7]:
Kvadratna je matrica totalno pozitivna ako i samo ako su sve njene inicijalne minore pozitivne.

Teorem 3.2.8. *Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ nizovi prirodnih brojeva koji zadovoljavaju $b_1 = a_2$ i $a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1} = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji beskonačna matrica $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ sa svojstvima:*

1. *$t_{ij} \in \mathbb{N}$, $i, j \in \mathbb{N}$ (svi koeficijenti matrice T su prirodni brojevi) ,*
2. *$t_{ij} = t_{ji}$, $i, j \in \mathbb{N}$ (T je simetrična matrica),*
3. *$t_{1n} = t_{n1} = a_n$ i $t_{2n} = t_{n2} = b_n$, $n \in \mathbb{N}$ (prvi redak i prvi stupac matrice T čini niz $(a_n)_n$, a drugi redak i drugi stupac niz $(b_n)_n$) ,*
4. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ matrica $T^{(n)}$ je totalno pozitivna (sve minore matrice $T^{(n)}$ su pozitivne),*
5. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\Delta(T^{(n)})_{\{n\},\{1\}} = t_{n1} = a_n,$$

$$\Delta(T^{(n)})_{\{n,n-1\},\{1,2\}} = 1,$$

$$\Delta(T^{(n)})_{\{n,n-1,n-2\},\{1,2,3\}} = 1,$$

$$\vdots$$

$$\Delta(T^{(n)})_{\{n,n-1,...,2,1\},\{1,2,...,n-1,n\}} = det(T^{(n)}) = 1,$$

Drugim riječima, sve solidne minore matrice $T^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ koje sadrže donji lijevi kut od $T^{(n)}$ su jednake 1*, osim možda $\Delta(T^{(n)})_{\{n\},\{1\}}$.*

Dokaz. Konstruirat ćemo beskonačnu matricu T induktivno.
Za $n = 1$, imamo $T^{(1)} = [t_{11}] = [a_1]$.
Za $n = 2$, imamo $T^{(2)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Po pretpostavkama na nizove $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ vrijedi da je $b_1 = a_2$, pa je matrica $T^{(2)}$ simetrična, te je $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 1$, pa je $det(T^{(2)}) = 1$.

Neka je sada $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo da imamo simetričnu totalno pozitivnu matricu s cjelobrojnim koeficijentima $T^{(n)} \in M_n$ koja zadovoljava uvjete teorema. $T^{(n)}$ je oblika

$$T^{(n)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_3 & b_3 & t_{3,3} & \cdots & t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & t_{n-1,3} & \cdots & t_{n-1,n} \\ a_n & b_n & t_{n,3} & \cdots & t_{n,n} \end{bmatrix}$$

Stavimo

$$T^{(n+1)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & b_{n+1} \\ a_3 & b_3 & t_{3,3} & \cdots & t_{3,n} & t_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1} & b_{n-1} & t_{n-1,3} & \cdots & t_{n-1,n} & t_{n-1,n+1} \\ a_n & b_n & t_{n,3} & \cdots & t_{n,n} & t_{n,n+1} \\ a_{n+1} & b_{n+1} & t_{n+1,3} & \cdots & t_{n+1,n} & t_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

Svi elementi ove matrice su poznati, osim zadnjih $n - 1$ elemenata zadnjeg retka i zadnjeg stupca. Da bi matrica $T^{(n+1)}$ bila simetrična, treba vrijediti $t_{n+1,3} = t_{3,n+1}, t_{n+1,4} = t_{4,n+1}, ..., t_{n+1,n} = t_{n,n+1}$. Označimo te elemente redom s $x_3, ..., x_{n+1}$. Dakle, zbog uvjeta (2), sveli smo problem na traženje $n - 1$ nepoznanica.
Uvjet (3) je zadovoljen samom konstukcijom matrice $T^{(n+1)}$.
Pogledajmo sada sve solidne minore matrice $T^{(n+1)}$ koje sadrže element a_{n+1}. Vrijedi :

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1\},\{1\}} = a_{n+1}$$

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n\},\{1,2\}} = det(\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix}) = 1$$

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n,n-1\},\{1,2,3\}} = det(\begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} & t_{n-1,3} \\ a_n & b_n & t_{n,3} \\ a_{n+1} & b_{n+1} & x_3 \end{bmatrix}) = a_{n+1}\begin{vmatrix} b_{n-1} & t_{n-1,3} \\ b_n & t_{n,3} \end{vmatrix} - b_{n+1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & t_{n-1,3} \\ a_n & t_{n,3} \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix}$$

Označimo li s $\alpha = \begin{vmatrix} b_{n-1} & t_{n-1,3} \\ b_n & t_{n,3} \end{vmatrix}$ i s $\beta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & t_{n-1,3} \\ a_n & t_{n,3} \end{vmatrix}$, koristeći pretpostavku $a_{n-1}b_n - b_{n-1}a_n = 1$ i svojstvo (5),dobivamo linearni sustav s jednom nepoznanicom:

$$a_{n+1}\alpha - b_{n+1}\beta + x_3 \cdot 1 = 1$$

Dakle, $x_3 = 1 - a_{n+1}\alpha + b_{n+1}\beta$, pa zaključujemo da je $x_3 \in \mathbb{Z}$. Stavimo $x_3 = t_{n+1,3}$.
Pogledajmo sada

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n,n-1,n-2\},\{1,2,3,4\}} = det(\begin{bmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} & t_{n-2,3} & t_{n-2,4} \\ a_{n-1} & b_{n-1} & t_{n-1,3} & t_{n-1,4} \\ a_n & b_n & t_{n,3} & t_{n,4} \\ a_{n+1} & b_{n+1} & t_{n+1,3} & x_4 \end{bmatrix})$$

$$= -a_{n+1}\begin{vmatrix} b_{n-2} & t_{n-2,3} & t_{n-2,4} \\ b_{n-1} & t_{n-1,3} & t_{n-1,4} \\ b_n & t_{n,3} & t_{n,4} \end{vmatrix} + b_{n+1}\begin{vmatrix} a_{n-2} & t_{n-2,3} & t_{n-2,4} \\ a_{n-1} & t_{n-1,3} & t_{n-1,4} \\ a_n & t_{n,3} & t_{n,4} \end{vmatrix} - t_{n+1,3}\begin{vmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} & t_{n-2,4} \\ a_{n-1} & b_{n-1} & t_{n-1,4} \\ a_n & b_n & t_{n,4} \end{vmatrix} + x_4\begin{vmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} & t_{n-2,3} \\ a_{n-1} & b_{n-1} & t_{n-1,3} \\ a_n & b_n & t_{n,3} \end{vmatrix}$$

Označimo li redom ove minore s α, β, γ i iskoristimo li pretpostavku indukcije $\Delta(T^{(n)})_{\{n,n-1,n-2\},\{1,2,3\}} = 1$, imamo linearan sustav s jednom nepoznanicom

$$-a_{n+1}\alpha + b_{n+1}\beta - t_{n+1,3}\gamma + x_4 \cdot 1 = 1.$$

Dakle, $x_4 \in \mathbb{Z}$. Stavimo $x_4 = t_{n+1,4}$.
Induktivno nastavljamo postupak za pronalazak preostalih nepoznanica $x_5, ..., x_{n+1}$, te na taj način ispunjavamo svojstvo (5) iz iskaza teorema.

Pokažimo sada da su sve inicijalne minore matrice T^{n+1} pozitivne.
Primijetimo prvo da je, po pretpostavci indukcije, matrica $T^{(n)}$ totalno pozitivna, pa je svaka inicijalna minora sadržana u njoj nužno pozitivna.
Pogledajmo sada inicijalne minore koje sadrže neke (uzastopne) elemente prvog stupca i zadnjeg retka matrice $T^{(n+1)}$. Upravo smo dokazali da je svaka od njih, osim eventualno 1×1 minore $\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1\}\{1\}} = a_{n+1}$ jednaka $1 > 0$. Znamo da je niz (a_n) sastavljen od prirodnih brojeva, pa je i $a_{n+1} \geq 1$. Dakle, sve inicijalne minore matrice $T^{(n+1)}$ koje sadrže elemente prvog stupca su pozitivne.
Radi simetričnosti matrice $T^{(n+1)}$ vrijedi da je

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{1\},\{n+1\}} = \Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1\},\{1\}} = a_{n+1},$$

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{2,1\},\{n,n+1\}} = \Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n\},\{1,2\}} = 1,$$

$$\vdots$$

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n,...,2,1\},\{1,2,...,n,n+1\}} = \Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n,...,2,1\},\{1,2,...,n,n+1\}} = 1$$

Dakle, sve inicijalne minore koje sadrže neke (uzastopne) elemente prvog retka i zadnjeg stupca matrice $T^{(n+1)}$ su također pozitivne.
Zaključujemo da je matrica $T^{(n+1)}$ totalno pozitivna.
Primijetimo da smo time zadovoljili i svojstvo (1) teorema, jer je svaka 1×1 minora matrice $T^{(n+1)}$ pozitivna, pa su svi izračunati $x_3, ..., x_{n+1} \in \mathbb{N}$. $\square$

Primjer 3.2.9. *Neka su nizovi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ zadani sa $a_n = 1$ i $b_n = n$, za $n \in \mathbb{N}$.*
$a_2 = 1$ i $b_2 = 1$, pa je $a_2 = b_1$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = a_{n+1} = 1$, $b_n = n$, $b_{n+1} = n + 1$, pa je $a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1} = 1$, za $n \in \mathbb{N}$.
Dakle, zadani nizovi zadovoljavaju uvjete Teorema 3.1.17., pa po istom teoremu vrijedi da postoji beskonačna matrica $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ koja zadovoljava svojstva (1)-(5).
Konstruirajmo tu matricu induktivno kao u dokazu prethodnog teorema.
Na početku konstrukcije imamo matricu kojoj su prva dva retka i prva dva stupca određeni nizovima $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$, dok su svi preostali koeficijenti matrice nepoznati:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} & \cdots \\ 1 & 3 & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} & \cdots \\ 1 & 3 & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} & \cdots \\ 1 & 3 & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Krećemo od podmatrice $T^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t_{33} \end{bmatrix}$, koja mora zadovoljavati $\Delta(T^{(3)})_{\{3,2,1\},\{1,2,3\}} = 1$.
Laplaceovim razvojem determinante po trećem retku dobivamo $t_{33} = 6$.
Sada promotrimo matricu $T^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & t_{34} \\ 1 & 4 & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}$. Zbog simetričnosti matrice T mora vrijediti $t_{34} = t_{43}$, pa imamo samo 2 nepoznata koeficijenta koja moramo izračunati. Iz uvjeta $\Delta(T^{(4)})_{\{4,3,2\},\{1,2,3\}} = 1$ Laplaceovim razvojem po trećem retku dobivamo $t_{43} = 10$. Zatim iz uvjeta $\Delta(T^{(4)})_{\{4,3,2,1\},\{1,2,3,4\}} = 1$ dobivamo $t_{44} = 20$.

Nastavljamo s istim postupkom promatrajući matrice $T^{(n)}$, $n \geq 5$. *U svakoj od njih pojavit će se* $n-2$ *nepoznata koeficijenta, koje redom dobivamo iz* $n-2$ *uvjeta*

$$\Delta(T^{(n)})_{\{3,2,1\},\{1,2,3\}} = 1, ..., \Delta(T^{(n)})_{\{n,n-1,...,1\},\{1,2,...,n\}} = 1.$$

Na kraju dolazimo do matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \cdots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \cdots \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Sve koeficijente matrice T *koje smo računali induktivno mogli smo alternativno izačunati koristeći*

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + t_{i-1,j+1}, i \geq 3, j \geq 2.$$

To zapravo znači da je T *Pascalova matrica (matrica binomnih koeficijenata).*
U prethodnom smo teoremu vidjeli da su brojevi t_{ij} *jedinstveno određeni zadavanjem nizova* $(a_n)_n$ *i* $(b_n)_n$, *jer smo do svakog od njih došli rješavanjem jedne linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Dakle, nađemo li bilo koje druge brojeve koji zadovoljavaju sva svojstva iz prethodnog teorema uz* $a_n = 1$, $b_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, *vrijedi da su to upravo koeficijenti matrice* T.
Pokažimo da za matricu čiji su elementi zadani s

$$t_{1n} = t_{n1} = a_n = 1, n \in \mathbb{N}$$

$$t_{2n} = t_{n2} = b_n = n, n \in \mathbb{N}$$

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + t_{i-1,j+1}, i \geq 3, j \geq 2$$

vrijede svojstva prethodnog teorema, pa će se ovaj način pokazati kao alternativna konstrukcija matrice T.
Indukcijom po n, pokazat ćemo da $\Delta(T^{(n)})$ *zadovoljava (1)-(5), za svaki* $n \in \mathbb{N}$.
Za $n = 1$, $n = 2$ *svojstva teorema su očito zadovoljena.*
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ *takav da su za matricu* $T^{(n)}$ *zadovoljena sva svojstva teorema. Posebno, sve inicijalne minore kojima je donji lijevi kut u n-tom retku su jednake* 1. *Pokažimo da to vrijedi i za matricu* $T^{(n+1)}$.

Pokazat ćemo da je

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1\},\{1\}} = a_{n+1} = 1,$$
$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n\},\{1,2\}} = 1,$$
$$\vdots$$
$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,n,\dots,1\},\{1,2,\dots,n+1\}} = 1.$$

Kompaktniji zapis ovih uvjeta dan je s

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,\dots,n+1-j\},\{1,2,\dots,j+1\}} = 1,\ j = 0, 1, \dots, n.$$

Neka je $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ *proizvoljan. Tada je*

$$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,\dots,n+1-j\},\{1,2,\dots,j+1\}} = \begin{vmatrix} 1 & n-j+1 & t_{n-j+1,3} & \cdots & t_{n-j+1,j} & t_{n-j+1,j+1} \\ 1 & n-j+2 & t_{n-j+2,3} & \cdots & t_{n-j+2,j} & t_{n-j+2,j+1} \\ 1 & n-j+3 & t_{n-j+3,3} & \cdots & t_{n-j+3,j} & t_{n-j+3,j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & t_{n,3} & \cdots & t_{n,j} & t_{n,j+1} \\ 1 & n+1 & t_{n+1,3} & \cdots & t_{n+1,j} & t_{n+1,j+1} \end{vmatrix}$$

Oduzimanjem redaka vrijednost determinante se ne mijenja, pa od svakog retka oduzmimo prethodni i iskoristimo $t_{i,j+1} - t_{i-1,j+1} = t_{ij}$. *Takvim postupkom dolazimo do:*

$$\begin{vmatrix} 1 & n-j+1 & t_{n-j+1,3} & \cdots & t_{n-j+1,j} & t_{n-j+1,j+1} \\ 0 & 1 & t_{n-j+2,2} & \cdots & t_{n-j+2,j-1} & t_{n-j+2,j} \\ 0 & 1 & t_{n-j+3,2} & \cdots & t_{n-j+3,j-1} & t_{n-j+3,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & t_{n,2} & \cdots & t_{n,j-1} & t_{n,j} \\ 0 & 1 & t_{n+1,2} & \cdots & t_{n+1,j-1} & t_{n+1,j} \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$\begin{vmatrix} 1 & t_{n-j+2,2} & \cdots & t_{n-j+2,j-1} & t_{n-j+2,j} \\ 1 & t_{n-j+3,2} & \cdots & t_{n-j+3,j-1} & t_{n-j+3,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{n,2} & \cdots & t_{n,j-1} & t_{n,j} \\ 1 & t_{n+1,2} & \cdots & t_{n+1,j-1} & t_{n+1,j} \end{vmatrix} = \Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,\dots,n+2-j\},\{1,2,\dots,j\}}.$$

Nastavimo li dalje istim putem, dolazimo do gornjetrokutaste matrice koja ima jedinice duž cijele dijagonale. Jasno je da je determinanta takve matrice jednaka 1. *Zaključujemo da je*

$\Delta(T^{(n+1)})_{\{n+1,...,n+1-j\},\{1,2,...,j+1\}} = 1,\ j = 0, ..., n$. *Dakle, dokazali smo da matrica* $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ *zadana s*

$$t_{1n} = t_{n1} = a_n = 1, n \in \mathbb{N},$$

$$t_{2n} = t_{n2} = b_n = n, n \in \mathbb{N},$$

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + t_{i-1,j+1}, i \geq 3, j \geq 2,$$

zadovoljava uvjete prethodnog teorema, a dokaz tog teorema nam daje jedinstvenost te matrice.

Primjer 3.2.10. *Neka su nizovi* $(a_n)_n$ *i* $(b_n)_n$ *zadani sa* $a_n = n$, $b_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Lako se provjeri da ovako zadani nizovi zadovoljavaju uvjete* $a_2 = b_1$ *i* $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$. *Sada ponovo, induktivnim postupkom kao u dokazu Teorema 3.1.7. dobivamo beskonačnu matricu*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & \cdots \\ 3 & 8 & 14 & 21 & 29 & 38 & \cdots \\ 4 & 11 & 21 & 35 & 54 & 79 & \cdots \\ 5 & 14 & 29 & 54 & 94 & \cdots & \cdots \\ 6 & 17 & 38 & 79 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Očito je da odabirom bilo kojih nizova $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ koji zadovoljavaju svojstva $a_2 = b_1$ i $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$ na isti način kao u prethodna dva primjera možemo konstruirati različite totalno pozitivne simetrične matrice s cjelobrojnim koeficijentima.

Neka je H^N Hilbertov prostor za koji želimo konstruirati potpuno razgranati konačni bazni okvir određene duljine. Neka je T beskonačna simetrična totalno pozitivna matrica konsturirana pomoću Teorema 3.1.17. Fiksiramo $K \in \mathbb{N}$ i odaberemo dva proizvoljna skupa indeksa $I = \{i_1, ..., i_N\}$ i $J = \{j_1, ..., j_K\}$. Označimo s $T_{I,J}$ $N \times K$ podmatricu matrice T. Ona je totalno pozitivna, pa je i totalno nesingularna. Sada možemo primijeniti Teorem 3.1.15. kako bi konstruirali potpuno razgranati konačni bazni okvir za H^N koji se sastoji od $N + K$ vektora.
Ilustrirajmo ovaj postupak jednim konkretnim primjerom.

Primjer 3.2.11. *Neka je* $(x_n)_{n=1}^N$ *kanonska baza za* H^N, *te neka je* $K \in \mathbb{N}$ *proizvoljan. Uzmimo prvih* N *redaka i prvih* K *stupaca Pascalove matrice konstruirane u Primjeru 3.1.18.*

Po Teoremu 3.1.15., znamo da stupci matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & K \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 & t_{33} & \cdots & t_{3K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & N-1 & t_{N-1,3} & \cdots & t_{N-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & N & t_{N,3} & \cdots & t_{N,K} \end{bmatrix},$$

čine potpuno razgranat bazni okvir za prostor H^N.
Koeficijenti t_{ij} *su dani s* $t_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}$, *za* $i = 1, 2, .., N$ *i* $j = 1, 2, ..., K$.

Sljedeći nam teorem, kojeg navodimo bez dokaza, kaže da su matrice iz Primjera 3.1.18. i 3.1.19. samo dva reprezentanta beskonačne familije beskonačnih simetričnih totalno pozitivnih matrica.

Teorem 3.2.12. *Neka je* $d \in \mathbb{R}$ *pozitivan i neka je* $T^d = [t_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ *beskonačna matrica čiji su koeficijenti definirani s*

$$t_{ij}(d) = (1 + (i-1)d)(1 + (j-1)d) + \binom{i+j-2}{j-1} - 1, i, j \in \mathbb{N}$$

Tada je T^d *beskonačna simetrična totalno pozitivna matrica čije su sve inicijalne* $k \times k$ *minore za* $k \geq 2$ *jednake* 1.
Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $T^{d,n} = [t_{ij}(d)]_{i,j=1}^{n}$ *je realna simetrična totalno pozitivna matrica s dekompozicijom Choleskog*

$$T^{d,n} = L^{d,n}(L^{d,n})^T,$$

gdje je matrica $L^{d,n} = [l_{ij}(d)]_{i,j=1}^{n}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *zadana s*

$$l_{ij}(d) = \begin{cases} 1 + (i-1)d, & j = 1 \\ \binom{i-1}{j-1}, & j > 1 \end{cases}$$

Pogledajmo sada kako od matrice T^d doći do matrica iz Primjera 3.1.18. i 3.1.19. Raspišemo li koeficijente matrice T^d vidimo da je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1+d & 1+2d & 1+3d & \cdots \\ 1+d & (1+d)(1+d)+1 & (1+d)(1+2d)+2 & (1+d)(1+3d)+3 & \cdots \\ 1+2d & (1+2d)(1+d)+2 & (1+2d)(1+2d)+5 & (1+2d)(1+3d)+9 & \cdots \\ 1+3d & (1+3d)(1+d)+3 & (1+2d)(1+3d)+9 & (1+3d)(1+3d)+19 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Uzmemo li $d = 0$, dobivamo upravo Pascalovu matricu, a uzimanjem $d = 1$ dobivamo matricu iz Primjera 3.1.19.

Napomena 3.2.13. *Za sve $d \geq 0$ i za sve prirodne brojeve n matrica $T^{d,n}$ definirana u Teoremu 3.1.21. je realna, simetrična i pozitivno definitna, pa je poznato da ima jedinstvenu dekompoziciju Choleskog koja je dana matricom $L^{d,n}$.*

Fiksiramo li $n \in \mathbb{N}$, možemo primijetiti da se elementi matrica $L^{d,n}$ razlikuju samo u prvom stupcu. Npr, za $n = 6$ imamo:

$$T^{d,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+2d & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+3d & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1+4d & 4 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1+5d & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Za $d = 0$, matrica $L^{0,n}$ predstavlja donjetrokutasti faktor dekompozicije Choleskog Pascalove matrice reda $n \in \mathbb{N}$.

Bibliografija

[1] https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_17_18.pdf.

[2] https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/frames/notes%20on%20frames%20final.pdf.

[3] Cahill J. Mixon D. G. Alexeev, B., *Full spark frames*, Journal of Fourier Analysis and Applications **18** (2012), 1167–1194.

[4] Damir Bakic, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb (2008).

[5] Kutyniok G. Casazza, P. G., *Finite frames: Theory and applications*, Springer, 2012.

[6] Leon M. Casazza, P. G., *Existence and construction of finite frames with a given frame operator*, Int. J. Pure Appl. Math **63** (2010), 149–157.

[7] Pena J. M. Gasca, M., *Total positivity and Neville elimination*, Linear algebra and its applications **165** (1992).

[8] C. Heil, *A basis theory primer: expanded edition*, Springer Science & Business Media, 2010.

[9] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Sveučilišna naklada liber, 1986.

[10] Kovacevic J. Puschel, M., *Real, tight frames with maximal robustness to erasures*, Data Compression Conference, IEEE, 2005, str. 63–72.

Sažetak

Ovaj je rad izložio neke od osnovnih rezultata o baznim okvirima na separabilnim Hilbertovim prostorima, pri čemu smo se oslanjali na već poznate činjenice iz linearne algebre i normiranih prostora. Pritom smo posebnu pažnju posvetili konačnim baznim okvirima, koji su u praksi najčešće korišteni.
Glavni je dio rada posvećen potpuno razgranatim konačnim baznim okvirima, koji su posebno važni radi svoje maksimalne otpornosti na gubitke informacija prilikom prijenosa podataka. Opisali smo dva načina konstrukcije takvih konačnih baznih okvira. Jedan od njih je utemeljen na teoremu Chebotarëva, dok drugi koristi svojstva totalno nesingularnih matrica. Opisali smo i jednu metodu konstrukcije beskonačnih totalno pozitivnih matrica.

Summary

In this thesis we have presented some of the crucial results about frames in separabile Hilbert spaces, whereby we had relied on some well known facts from linear algebra and normed spaces. We paid special attention to finite frames, since they are the ones that are most commonly used in practice.
The main part of this thesis is dedicated to finite full spark frames which are especially important due to their maximal robustness to erasures of informations during data transmissions. We have described two ways of constructing such frames. One of them is based on Chebotarev's theorem, while the other one uses the properties of totally non-singular matrices. We have also described a particular method of construction of infinite totally positive matrices.

Životopis

Rođena sam 31.12.1992. godine u Puli. Pohađala sam osnovnu školu Tone Peruška u Puli te sam 2007. godine upisala prirodoslovno-matematički smjer Gimnazije Pula. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja, upisujem Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji završavam 2017. godine. Iste godine upisujem diplomski studij Primijenjene matematike.
Tijekom preddiplomskog studija bila sam članica odbojkaškog tima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Za vrijeme srednjoškolskog obrazovanja i studija neprestano držim individualne poduke iz matematike i fizike učenicima osnovnih i srednjih škola te studentima. Uz to, radila sam i razne studentske poslove nevezane uz struku. 2019. godine počinjem raditi u Photomathu kao kreator matematičkog sadržaja.