

# Realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva i primjene u geometriji trokuta

---

Sabati, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:704187>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maja Sabati

**REALNI I KOMPLEKSNI PRODUKT**  
**KOMPLEKSNIH BROJEVA I PRIMJENE**  
**U GEOMETRIJI TROKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Mario Krnić

Suvoditelj rada:  
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Obitelji i prijateljima.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 O kompleksnim brojevima</b>	<b>2</b>
1.1 Kompleksni brojevi i njihova svojstva . . . . .	2
1.2 Geometrijska interpretacija i osnovna svojstva . . . . .	4
<b>2 Realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva</b>	<b>11</b>
2.1 Realni produkt kompleksnih brojeva . . . . .	11
2.2 Kompleksni produkt kompleksnih brojeva . . . . .	16
2.3 Još neki primjeri . . . . .	20
<b>3 Primjene u geometriji trokuta</b>	<b>25</b>
3.1 Površina konveksnog mnogokuta . . . . .	25
3.2 Neke karakteristične točke trokuta . . . . .	26
3.3 Eulerova kružnica devet točaka . . . . .	31
3.4 Neke udaljenosti u trokutu . . . . .	36
3.5 Baricentričke koordinate točke s obzirom na trokut . . . . .	40
3.6 Nožišni trokut i Simsonov pravac . . . . .	47
<b>Bibliografija</b>	<b>52</b>

# Uvod

Još od davnina matematičari su zazirali od rješavanja kvadratnih jednadžbi čija rješenja nisu realni brojevi. Slavni matematičar Leonard Euler prvi je uveo imaginarnu jedinicu  $i$  kao oznaku za broj  $\sqrt{-1}$  i time izmijenio svijet matematike. Upravo taj simbol određuje kompleksne brojeve, a danas je nemoguće zamisliti modernu matematiku bez njih. U ovom radu posvetit ćemo se upravo njima, ali na način na koji to još nismo činili u školi ili na fakultetu.

U prvom poglavlju prisjetit ćemo se osnovnih definicija i svojstava vezanih uz kompleksne brojeve. Također, dati ćemo geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva te neke zanimljive rezultate u Euklidskoj geometriji primjenjujući iste.

U drugom poglavlju uvest ćemo realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva kao analogone uobičajenih operacija skalarnog i vektorskog množenja vektora. Te operacije služe kao efikasno sredstvo pri rješavanju geometrijskih problema, što ćemo i pokazati na nekoliko primjera.

Primjenom navedenih operacija i svojstava kompleksnih brojeva, u posljednjem poglavlju, posvetit ćemo se rješavanju problema iz geometrije trokuta. Pritom ćemo izvesti neke važne tvrdnje i teoreme o trokutu, te riješiti niz problema kako bismo pokazali učinkovitost u primjeni navedenih operacija.

# Poglavlje 1

## O kompleksnim brojevima

Za početak, reći ćemo osnovno o kompleksnim brojevima i njihova najvažnija svojstva, a zatim ćemo dati geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva i osnovnih operacija nad njima. S kompleksnim brojevima susreli smo se još u srednjoj školi, a kasnije smo na fakultetu proširili znanje o njihovim svojstvima i primjeni. Prisjetit ćemo se nekih od njih. Ovdje ćemo pokazati i neka geometrijska svojstva koristeći kompleksne brojeve.

### 1.1 Kompleksni brojevi i njihova svojstva

U daljnjem radu pretpostavljamo da su nam poznata osnovna svojstva skupa realnih brojeva  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 1.1.1.** Svaki broj  $z$  oblika  $z = x + yi$ , gdje su  $x, y \in \mathbb{R}$ , naziva se **kompleksan broj**. Broj  $x$  nazivamo **realni**, a  $y$  **imaginarni dio** kompleksnog broja  $z$ . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z).$$

Broj  $i$  je **imaginarna jedinica** kompleksnog broja te vrijedi  $i^2 = -1$ . Skup kompleksnih brojeva označavamo s

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Svaki kompleksni broj  $z = x + yi$  može se zapisati u obliku uređenog para realnih brojeva  $(x, y)$ .

**Definicija 1.1.2.** Dva kompleksna broja  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$  jednaka su ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi, tj. ako je  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ .

**Definicija 1.1.3.** Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva nad  $\mathbb{R}^2$  definirane su na sljedeći način:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Prisjetimo se svojstava koja vrijede za operacije zbrajanja i množenja u skupu kompleksnih brojeva.

**Propozicija 1.1.4.** Za sve kompleksne brojeve  $z, z_1, z_2, z_3$  vrijedi:

- 1)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (**komutativnost zbrajanja**),
- 2)  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  (**asocijativnost zbrajanja**),
- 3) Postoji jedinstveni kompleksni broj  $0 = (0, 0)$  takav da vrijedi  $z + 0 = 0 + z = z$  (**neutralni element za zbrajanje**),
- 4) Za svaki kompleksni broj  $z = (x, y)$  postoji jedinstveni kompleksni broj  $-z = (-x, -y)$  takav da je  $z + (-z) = (-z) + z = 0$  (**suprotni element**).

**Propozicija 1.1.5.** Za sve kompleksne brojeve  $z, z_1, z_2, z_3$  vrijede sljedeća svojstva:

- 1)  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$  (**komutativnost množenja**),
- 2)  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$  (**asocijativnost množenja**),
- 3) Postoji jedinstveni kompleksni broj  $1 = (1, 0)$  takav da vrijedi  $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$  (**neutralni element za množenje**),
- 4) Za svaki kompleksni broj  $z = (x, y) \neq 0$  postoji jedinstveni broj  $z^{-1} = (x', y')$  takav da vrijedi  $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$  (**inverzni element**),
- 5)  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$  (**distributivnost množenja prema zbrajanju**).

**Napomena 1.1.6.** Za svojstvo 4) iz Propozicije 1.1.5 primjenom definicije umnoška kompleksnih brojeva te rješavanjem sustava dviju linearnih jednažbi lako se dobiju  $x'$  i  $y'$ :

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

## Konjugirano kompleksni brojevi

**Definicija 1.1.7.** Ako je  $z = x + yi$  kompleksan broj, broj  $\bar{z} = x - yi$  je **konjugirano kompleksan** broju  $z$ .

**Propozicija 1.1.8.** Za sve kompleksne brojeve  $z, \bar{z}, z_1, z_2$  vrijede sljedeća svojstva:

- 1)  $z = \bar{\bar{z}}$  ako i samo ako je  $z \in \mathbb{R}$ ,
- 2)  $z = -\bar{\bar{z}}$  ako i samo ako je  $z \in i\mathbb{R}$ ,
- 3)  $z = \overline{\bar{z}}$ ,
- 4)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,



- 5)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ,  
 6)  $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ ,  $z \neq 0$ ,  
 7)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ,  $z_2 \neq 0$ ,  
 8)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .

## Modul kompleksnog broja

**Definicija 1.1.9.** Broj  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  naziva se **modul** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja  $z$ .

**Propozicija 1.1.10.** Za sve kompleksne brojeve  $z, \bar{z}, z_1, z_2$  vrijedi:

- 1)  $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ ,  $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$ ,
- 2)  $|z| \geq 0$ . Vrijedi  $|z| = 0$  ako i samo ako je  $z = 0$ ,
- 3)  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ ,
- 4)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ,
- 5)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ,
- 6)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
- 7)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
- 8)  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ ,  $z \neq 0$ ,
- 9)  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_2 \neq 0$ .

## 1.2 Geometrijska interpretacija i osnovna svojstva

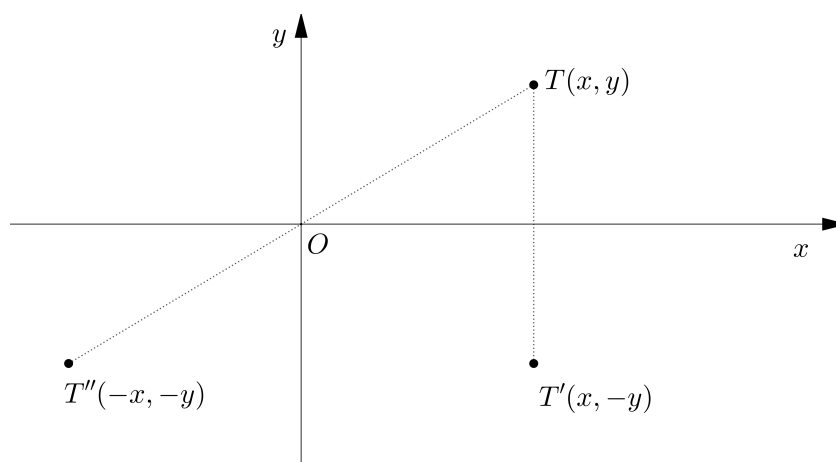
Ranije smo spomenuli da se svaki kompleksni broj  $z = x + yi$  može zapisati kao uređen par realnih brojeva  $(x, y)$ . Stoga se svakom kompleksnom broju  $z$  može pridružiti točka  $T(x, y)$  u ravnini  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Definicija 1.2.1.** Točka  $T(x, y)$  naziva se **geometrijska slika** kompleksnog broja  $z = x + yi$ . Kompleksan broj  $z$  naziva se **kompleksna koordinata** točke  $T$ , što označavamo s  $T(z)$ .

**Napomena 1.2.2.** Geometrijska slika broja konjugirano kompleksnog broju  $z = x + yi$  odnosimetrična je točki  $T$  s obzirom na os  $x$ .

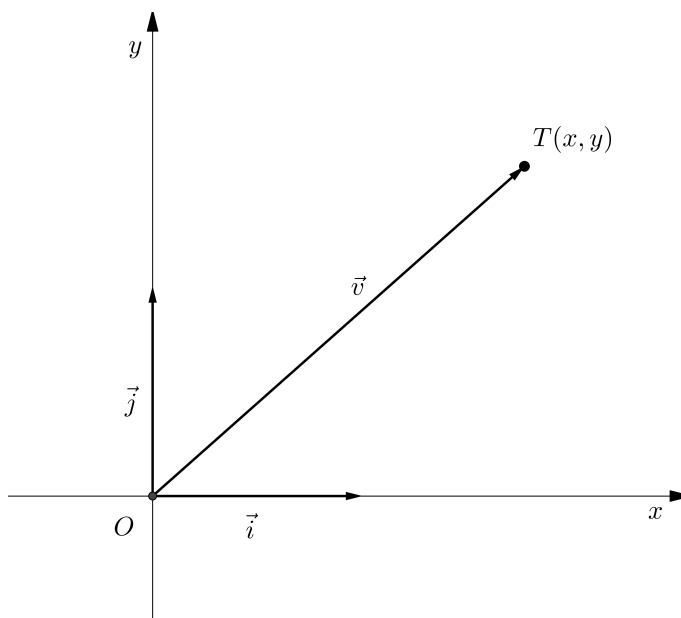
Geometrijska slika inverza za zbrajanje  $-z$  centralnosimetrična je točki  $T$  s obzirom na ishodište.

**Definicija 1.2.3.** Koordinatna ravnina u kojoj su smještene točke čije su koordinate kompleksni brojevi naziva se **kompleksna ravnina**. Os  $x$  naziva se **realna os**, a os  $y$  **imaginarna os**.



Slika 1.1: Geometrijske slike kompleksnih brojeva

Kompleksnom broju  $z = x + yi$ , osim točke, može se pridružiti i vektor  $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ , gdje je  $T$  geometrijska slika kompleksnog broja  $z$ . Vektor  $\vec{v}$  zapisujemo u obliku  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , gdje su  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$  jedinični vektori na  $x$ -osi i  $y$ -osi, redom.



Slika 1.2: Vektor pridružen kompleksnom broju

**Definicija 1.2.4.** Neka je  $z = x + yi$  kompleksan broj i neka je  $T(x, y)$  njegova geometrijska slika. **Euklidska udaljenost**  $|OT|$  dana je formulom

$$|OT| = \sqrt{(x_T - x_O)^2 + (y_T - y_O)^2},$$

pa je  $|OT| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{v}|$ . Drugim riječima, apsolutna vrijednost kompleksnog broja  $z$  je duljina dužine  $\overline{OT}$ , tj. duljina vektora  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

**Napomena 1.2.5.** 1) Za pozitivan realan broj  $r$ , skup kompleksnih brojeva kojima je modul jednak  $r$  predstavljaju kružnicu  $K$  sa središtem u ishodištu i radijusom  $r$ .

2) Kompleksni brojevi  $z$  čiji je modul  $|z| < r$  su točke unutar kružnice  $K(O, r)$ , a kompleksni brojevi čiji je modul  $|z| > r$  predstavljaju točke izvan kružnice  $K(O, r)$ .

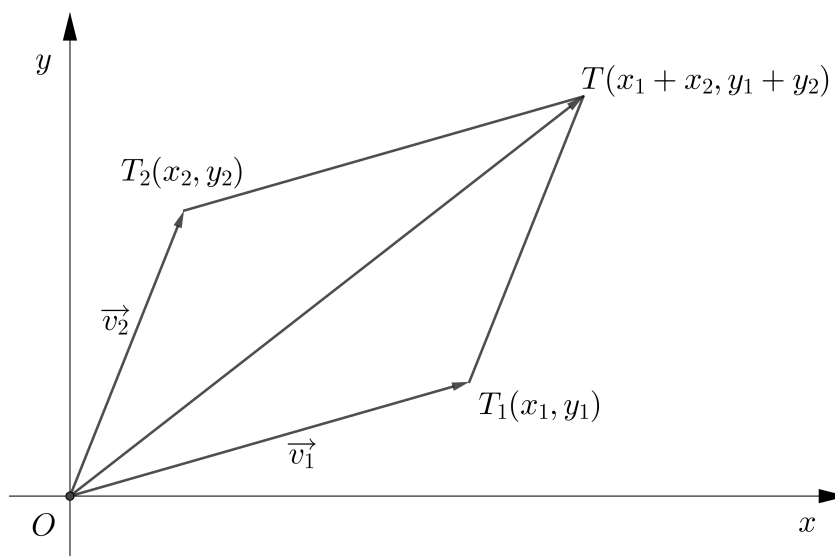
**Definicija 1.2.6.** Neka su  $z_1 = x_1 + y_1i$  i  $z_2 = x_2 + y_2i$  kompleksni brojevi te neka su im pridruženi vektori  $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$  i  $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ . Suma kompleksnih brojeva dana je s

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

a suma vektora s

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Stoga je geometrijska slika sume  $z_1 + z_2$  određena vektorom  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ .



Slika 1.3: Geometrijska slika sume kompleksnih brojeva

**Definicija 1.2.7.** Neka je  $z = x + yi$  kompleksan broj te neka mu je pridružen vektor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Neka je  $\lambda$  realan broj. Tada je umnošku  $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$  pridružen vektor

$$\lambda\vec{v} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}.$$

Uočimo, ako je  $\lambda > 0$  vektori  $\lambda\vec{v}$  i  $\vec{v}$  imaju istu orijentaciju i vrijedi  $|\lambda\vec{v}| = \lambda|\vec{v}|$ .

Ako je  $\lambda < 0$  vektori  $\lambda\vec{v}$  i  $\vec{v}$  imaju suprotnu orijentaciju i vrijedi  $|\lambda\vec{v}| = -\lambda|\vec{v}|$ .

Ako je  $\lambda = 0$ , onda je  $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ .

Pokažimo sada geometrijske interpretacije nekih osnovnih geometrijskih pojmova i zakonitosti te njihova svojstva u kompleksnoj ravnini.

**Definicija 1.2.8.** Neka su  $z_1$  i  $z_2$  kompleksni brojevi te neka su točke  $T_1$  i  $T_2$  njihove geometrijske slike. Udaljenost točaka  $T_1$  i  $T_2$  dana je s

$$|T_1 T_2| = |z_1 - z_2|,$$

tj. vrijedi

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

**Propozicija 1.2.9.** Za sve kompleksne brojeve  $z_1, z_2, z_3$  vrijede sljedeća svojstva:

- 1)  $d(z_1, z_2) \geq 0$  (**pozitivnost**),
- 2)  $d(z_1, z_2) = 0$  ako i samo ako je  $z_1 = z_2$ ,
- 3)  $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$  (**simetričnost**),
- 4)  $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$  (**nejednakost trokuta**).

**Definicija 1.2.10.** Neka su  $A(a)$  i  $B(b)$  dvije različite točke u kompleksnoj ravnini. Kažemo da se točka  $T(z)$  nalazi između točaka  $A$  i  $B$  ako  $z \neq a, z \neq b$  i

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|.$$

**Teorem 1.2.11.** Neka su  $A(a)$  i  $B(b)$  dvije različite točke. Sljedeće tvrdnje su ekvivalente:

- 1)  $T \in \overline{AB}$ ,
- 2) postoji realan broj  $k > 0$  takav da je  $z - a = k(b - z)$ ,
- 3) postoji realan broj  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  takav da je  $z = (1 - t)a + tb$ , gdje je  $z$  kompleksna koordinata točke  $T$ .

*Dokaz.* Dokažimo prvo da su tvrdnje 1) i 2) ekvivalentne. Znamo da je  $T \in \overline{AB}$  ako i samo ako je  $|a - z| + |z - b| = |a - b|$ . To možemo zapisati kao  $d(a, z) + d(z, b) = d(a, b)$ , tj. postoji realan broj  $k > 0$  takav da je  $z - a = k(b - z)$ .

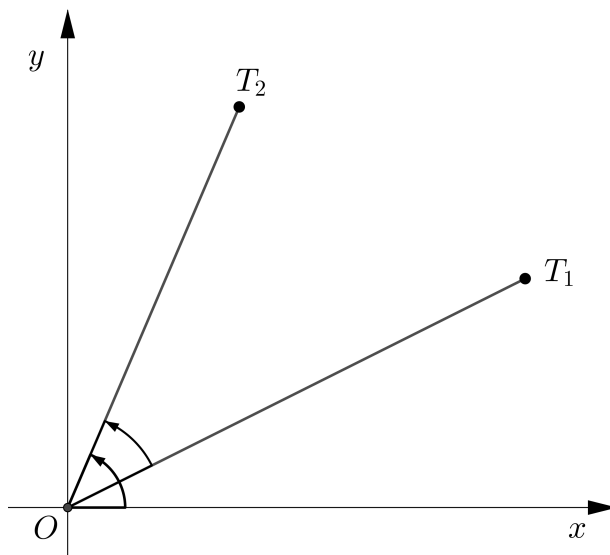
Da bismo dokazali ekvivalentnost tvrdnji 2) i 3) uzmimo  $t$  takav da je  $t = \frac{k}{k+1} \in \langle 0, 1 \rangle$ , tj.  $k = \frac{t}{1-t} > 0$ . Sada imamo  $z - a = k(b - z)$  ako i samo ako je  $z = \frac{1}{k+1}a + \frac{k}{k+1}b$ , tj.  $z = (1 - t)a + tb$ . □

**Definicija 1.2.12.** *Argument* kompleksnog broja  $z \neq 0$  definiramo kao realni broj  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  koji predstavlja mjeru kuta između pozitivnog dijela osi  $x$  i polupravca iz ishodišta koji prolazi kroz  $z$ . Pišemo:  $\varphi = \arg z$ .

Lako se vidi da za svaki kompleksni broj  $z \neq 0$  vrijedi

$$x = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \varphi, y = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \varphi.$$

**Definicija 1.2.13.** *Neka su  $T_1(z_1)$  i  $T_2(z_2)$  dvije različite točke u kompleksnoj ravnini s ishodištem  $O$ . Mjera pozitivno orijentiranog kuta  $\angle T_1OT_2$  jednaka je  $\arg \frac{z_2}{z_1}$ .*



Slika 1.4: Pozitivno orijentiran kut  $\angle T_1OT_2$

**Teorem 1.2.14.** *Neka su  $T_1(z_1), T_2(z_2), T_3(z_3)$  tri različite točke u kompleksnoj ravnini s ishodištem  $O$ . Mjera kuta  $\angle T_2T_1T_3$  dana je s  $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ .*

*Dokaz.* Translatirajmo točke  $T_1(z_1), T_2(z_2), T_3(z_3)$  za vektor  $-z_1$  tako da se preslikaju u točke  $O, T'_2, T'_3$  s koordinatama  $0, z_2 - z_1, z_3 - z_1$ . Vrijedi  $\angle T_2T_1T_3 = \angle T'_2OT'_3$ . Iz toga slijedi

$$\angle T'_2OT'_3 = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

kako smo i tvrdili. □

**Napomena 1.2.15.** Neka su  $T_i(z_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , četiri različite točke. Mjera kuta između pravaca  $T_1T_3$  i  $T_2T_4$  jednaka je  $\arg \frac{z_3-z_1}{z_4-z_2}$  ili  $\arg \frac{z_4-z_2}{z_3-z_1}$ . Tvrdnja se dokazuje koristeći ideje iz prethodnog teorema.

U daljnjem radu susretat ćemo se s problemima kolinearnosti točaka, okomitosti pravaca te sličnosti trokuta. Pokazat ćemo uvjete za navedena svojstva koristeći kompleksne brojeve.

Neka su  $T_i(z_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , četiri različite točke.

**Propozicija 1.2.16.** Točke  $T_1, T_2, T_3$  su kolinearne ako i samo ako je

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

*Dokaz.* Točke  $T_1, T_2, T_3$  su kolinearne ako i samo ako je  $\angle T_2T_1T_3 \in \{0, \pi\}$ . Slijedi  $\arg \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \{0, \pi\}$ , tj.  $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$ .  $\square$

**Propozicija 1.2.17.** Pravci  $T_1T_2$  i  $T_3T_4$  su okomiti ako i samo ako je

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

*Dokaz.* Pravci  $T_1T_2$  i  $T_3T_4$  su okomiti ako i samo ako je  $\angle(T_1T_2, T_3T_4) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ . Slijedi  $\arg \frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ , tj.  $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in i\mathbb{R}^*$ .  $\square$

**Propozicija 1.2.18.** Trokuti iste orijentacije  $A_1A_2A_3$  i  $B_1B_2B_3$  su slični ako i samo ako je

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

*Dokaz.* Znamo  $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$  ako i samo ako je  $\frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_1B_3|}$  i  $\angle A_3A_1A_2 = \angle B_3B_1B_2$ . To je ekvivalentno s  $\frac{|a_2-a_1|}{|a_3-a_1|} = \frac{|b_2-b_1|}{|b_3-b_1|}$  i  $\arg \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \arg \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$ . Dobivamo  $\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$ .  $\square$

Pokazat ćemo kako računamo površinu trokuta koristeći kompleksne koordinate njegovih vrhova.

**Teorem 1.2.19.** Površina trokuta  $A_1A_2A_3$  čiji vrhovi imaju koordinate  $z_1, z_2, z_3$  jednaka je apsolutnoj vrijednosti broja

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

*Dokaz.* Koristeći Kartezijeve koordinate, površina trokuta s vrhovima  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  jednaka je apsolutnoj vrijednosti determinante

$$\delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Budući da je

$$x_k = \frac{z_k + \bar{z}_k}{2}, y_k = \frac{z_k - \bar{z}_k}{2i}, k = 1, 2, 3,$$

dobivamo

$$\delta = \frac{1}{8i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

**Korolar 1.2.20.** *Površina pozitivno orijentiranog trokuta  $A_1A_2A_3$  čiji vrhovi imaju koordinate  $z_1, z_2, z_3$  dana je formulom*

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1).$$

*Dokaz.* Razvojem determinante iz prethodnog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} &= (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_1) \\ &= [(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) - \overline{(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)}] \\ &= 2i \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) \\ &= -2i \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1). \end{aligned}$$

Uvrštavajući dobiveni izraz u (1.1) slijedi da je

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1).$$

□

## Poglavlje 2

# Realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva

U ovom poglavlju definirat ćemo realni i kompleksni produkt dvaju kompleksnih brojeva. Skalarni i vektorski produkt vektora poznati su nam još iz srednjoškolskog obrazovanja, a sada ćemo ih primijeniti na kompleksne brojeve kako bismo uveli realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva kao njihove analogone. Nabrojat ćemo i dokazati neka njihova svojstva koja će nam kasnije znatno olakšati rješavanje raznih geometrijskih problema, s naglaskom na geometriju trokuta.

U daljnjem radu realni produkt ćemo označavati s  $\cdot$ , a kod uobičajene operacije množenja znak ćemo izostavljati, kako bismo jasno razlikovali te dvije operacije.

### 2.1 Realni produkt kompleksnih brojeva

Koncept skalarnog produkta dvaju vektora otprije nam je dobro poznat. Sada ćemo taj koncept primijeniti na kompleksne brojeve.

**Definicija 2.1.1.** *Neka su  $z_1$  i  $z_2$  kompleksni brojevi. **Realni produkt kompleksnih brojeva**  $z_1$  i  $z_2$  dan je sa*

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}).$$

Uočimo:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = z_1 \cdot z_2,$$

iz čega slijedi da je broj  $z_1 \cdot z_2$  realan, otkuda je taj produkt i dobio naziv.

Navedimo osnovna svojstva koja vrijede za realni produkt kompleksnih brojeva.



**Propozicija 2.1.2.** Za sve kompleksne brojeve  $z, z_1, z_2, i z_3$  vrijedi:

- 1)  $z \cdot z = |z|^2$ ,
- 2)  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$  (*komutativnost*),
- 3)  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$  (*distributivnost realnog produkta prema zbrajanju*),
- 4)  $(\alpha z_1) \cdot z_2 = z_1 \cdot (\alpha z_2)$ , za svaki  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- 5)  $z_1 \cdot z_2 = 0$  ako i samo ako je  $OA \perp OB$ , gdje su  $z_1$  i  $z_2$  koordinate točkaka  $A$  i  $B$ , redom,
- 6)  $(z_1 z) \cdot (z_2 z) = |z|^2 (z_1 \cdot z_2)$ .

**Napomena 2.1.3.** Neka su  $A$  i  $B$  točke s koordinatama  $a$  i  $b$ , redom. Tada je realni produkt  $a \cdot b$  jednak potenciji ishodišta  $O$  s obzirom na kružnicu promjera  $\overline{AB}$ .

Doista, neka je  $M(\frac{a+b}{2})$  polovište dužine  $\overline{AB}$ , odnosno središte kružnice, te neka je  $r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|a - b|$  radijus te kružnice. Potencija ishodišta s obzirom na danu kružnicu jednaka je

$$|OM|^2 - r^2 = \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 - \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 = \frac{(a+b)(\bar{a} + \bar{b})}{4} - \frac{(a-b)(\bar{a} - \bar{b})}{4} = \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{2} = a \cdot b,$$

kako smo i tvrdili.

**Propozicija 2.1.4.** Neka su  $A(a), B(b), C(c)$  i  $D(d)$  četiri različite točke. Sljedeće tvrdnje su ekvivalente:

- 1)  $AB \perp CD$ ,
- 2)  $(b - a) \cdot (d - c) = 0$ ,
- 3)  $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$  (odnosno  $Re(\frac{b-a}{d-c}) = 0$ ).

*Dokaz.* Neka su  $M(b - a)$  i  $N(d - c)$  točke takve da su  $OABM$  i  $OCDN$  paralelogrami. Tada vrijedi  $AB \perp CD$  ako i samo ako je  $OM \perp ON$ , tj. vrijedi  $m \cdot n = (b - a) \cdot (d - c) = 0$ , prema Propoziciji 2.1.2, svojstvo 5).

Ekvivalencija tvrdnji 2) i 3) slijedi direktno iz definicije realnog produkta. □

**Propozicija 2.1.5.** Neka se središte opisane kružnice trokuta  $ABC$  nalazi u ishodištu kompleksne ravnine. Ako su  $a, b, c$  koordinate točkaka  $A, B, C$ , onda je koordinata ortocentra  $H$  tog trokuta jednaka  $h = a + b + c$ .

*Dokaz.* Koristeći realni produkt kompleksnih brojeva dobivamo da su jednadžbe visina trokuta  $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$  jednake

$$\overline{AA'} : (z - a) \cdot (b - c) = 0, \overline{BB'} : (z - b) \cdot (c - a) = 0, \overline{CC'} : (z - c) \cdot (a - b) = 0.$$

Pokažimo da točka s koordinatama  $h = a + b + c$  leži na sve tri visine trokuta. Vrijedi  $(h - a) \cdot (b - c) = 0$  ako i samo ako je  $(b + c) \cdot (b - c) = 0$  što je ekvivalentno s  $b \cdot b - c \cdot c = 0$ , tj.  $|b|^2 = |c|^2$ . Dakle,  $H \in \overline{AA'}$ .

Analogno dobivamo  $H \in \overline{BB'}$  i  $H \in \overline{CC'}$ .

Dakle, točka s koordinatom  $h = a + b + c$  jest ortocentar trokuta  $ABC$ . □

**Napomena 2.1.6.** Ako su  $a, b, c, o, h$  redom koordinate vrhova trokuta  $ABC$ , središta  $O$  trokutu opisane kružnice te ortocentra  $H$ , tada je  $h = a + b + c - 2o$ .

Zaista, ako uzmemo točku  $A'$  takvu da je  $\overline{AA'}$  promjer opisane kružnice trokuta  $ABC$ , tada je četverokut  $HBA'C$  paralelogram. Ako je točka  $M$  presjek dužina  $\overline{HA'}$  i  $\overline{BC}$ , onda vrijedi

$$z_M = \frac{b + c}{2} = \frac{z_H + z_{A'}}{2} = \frac{z_H + 2o - a}{2}$$

iz čega slijedi

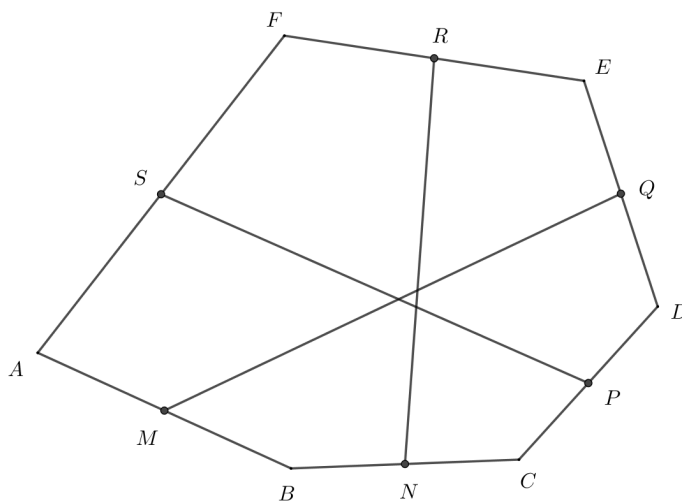
$$z_H = a + b + c - 2o.$$

Navedena svojstva realnog produkta kompleksnih brojeva uvelike nam olakšavaju rješavanje određenih geometrijskih problema. Pokazat ćemo njihovu primjenu na nekoliko primjera.

**Primjer 1.** Neka su točke  $M, N, P, Q, R, S$  redom polovišta stranica  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$  šesterokuta  $ABCDEF$ . Dokažimo da vrijedi

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2$$

ako i samo ako je  $MQ \perp PS$ .



Slika 2.1:

POGLAVLJE 2. REALNI I KOMPLEKSNI PRODUKT KOMPLEKSNIH BROJEVA 14

*Rješenje.* Neka su  $a, b, c, d, e, f$  koordinate vrhova šesterokuta  $ABCDEF$ . Točke  $M, N, P, Q, R, S$  imaju koordinate

$$m = \frac{a+b}{2}, n = \frac{b+c}{2}, p = \frac{c+d}{2}, q = \frac{d+e}{2}, r = \frac{e+f}{2}, s = \frac{f+a}{2},$$

redom.

Primjenjujući svojstva realnog produkta kompleksnih brojeva imamo

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2$$

ako i samo ako je

$$\begin{aligned} \left(\frac{e+f}{2} - \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{e+f}{2} - \frac{b+c}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2} - \frac{d+e}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - \frac{d+e}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{c+d}{2} - \frac{f+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+d}{2} - \frac{f+a}{2}\right), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} (e+f-b-c) \cdot (e+f-b-c) &= (d+e-a-b) \cdot (d+e-a-b) \\ &\quad + (f+a-c-d) \cdot (f+a-c-d), \end{aligned}$$

odatle sređivanjem dobivamo

$$(d+e-a-b) \cdot (f+a-c-d) = 0,$$

pa je  $MQ \perp PS$ .

**Primjer 2.** Neka su  $a, b, c$  različiti kompleksni brojevi takvi da vrijedi  $|a| = |b| = |c|$  i  $|b+c-a| = |a|$ . Dokažimo da vrijedi  $b+c=0$ .

*Rješenje.* Neka su  $A, B, C$  točke u kompleksnoj ravnini čije su koordinate  $a, b, c$ , redom. Neka je  $ABC$  trokut takav da je ishodište kompleksne ravnine središte njemu opisane kružnice, te neka je  $R$  radijus te kružnice. Tada vrijedi

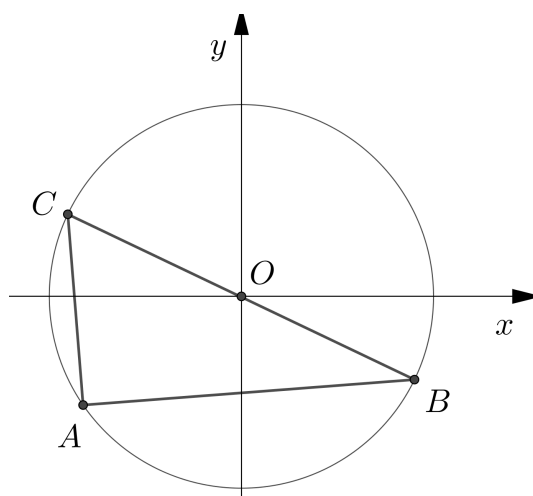
$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2.$$

Primjenjujući realni produkt kompleksnih brojeva imamo

$$|b+c-a| = |a| \text{ ako i samo ako je } |b+c-a|^2 = |a|^2,$$

tj.

$$(b+c-a) \cdot (b+c-a) = |a|^2,$$



Slika 2.2:

pa je

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2b \cdot c - 2a \cdot c - 2b \cdot c = |a|^2.$$

Dobivamo

$$2(R^2 + b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b) = 0,$$

tj.

$$a \cdot a + b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b = 0.$$

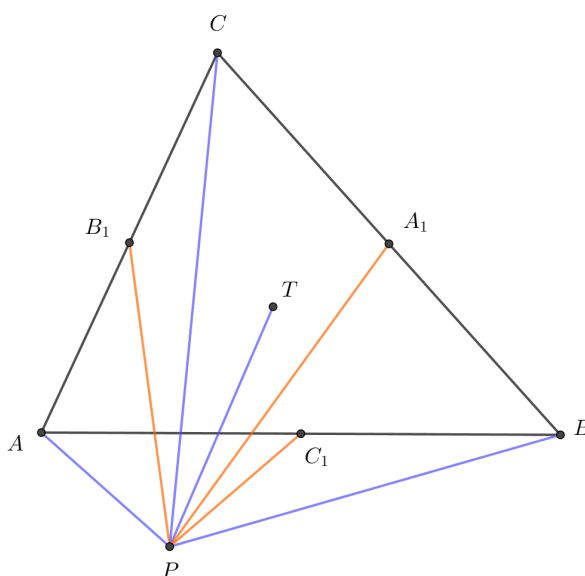
Iz toga slijedi da je  $(a - b) \cdot (a - c) = 0$ , pa je  $AB \perp AC$ , tj.  $\angle BAC = 90^\circ$ . Stoga je  $\overline{BC}$  promjer trokutu opisane kružnice pa je  $b + c = 0$ .

**Primjer 3.** Neka je  $T$  težište trokuta  $ABC$  te neka su točke  $A_1, B_1, C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , redom. Dokažimo da za svaku točku  $P$  u ravnini trokuta vrijedi

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + 9|PT|^2 = 4(|PA_1|^2 + |PB_1|^2 + |PC_1|^2).$$

*Rješenje.* Neka su  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, t, p$  redom koordinate točaka  $A, B, C, A_1, B_1, C_1, T, P$ . Vrijedi

$$t = \frac{a+b+c}{3}, a_1 = \frac{b+c}{2}, b_1 = \frac{c+a}{2}, c_1 = \frac{a+b}{2}.$$



Slika 2.3:

Primjenjujući realni produkt kompleksnih brojeva imamo

$$\begin{aligned}
 |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + 9|PT|^2 &= (p - a) \cdot (p - a) + (p - b) \cdot (p - b) + (p - c) \cdot (p - c) \\
 &\quad + 9 \left( p - \frac{a + b + c}{3} \right) \cdot \left( p - \frac{a + b + c}{3} \right) \\
 &= 12|p|^2 - 8(a + b + c) \cdot p + 2(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a.
 \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}
 4(|PA_1|^2 + |PB_1|^2 + |PC_1|^2) &= 4 \left[ \left( p - \frac{b + c}{2} \right) \cdot \left( p - \frac{b + c}{2} \right) + \left( p - \frac{c + a}{2} \right) \cdot \left( p - \frac{c + a}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( p - \frac{a + b}{2} \right) \cdot \left( p - \frac{a + b}{2} \right) \right] \\
 &= 12|p|^2 - 8(a + b + c) \cdot p + 2(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a,
 \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

## 2.2 Kompleksni produkt kompleksnih brojeva

Vektorski produkt dvaju vektora široko je primjenjiv u matematici i znanosti općenito. Taj dobro poznati koncept primijenit ćemo na kompleksne brojeve te pokazati njegovu

primjenu u rješavanju problema vezanih za površinu, kolinearnost i paralelnost.

**Definicija 2.2.1.** Neka su  $z_1$  i  $z_2$  kompleksni brojevi. **Kompleksni produkt** brojeva  $z_1$  i  $z_2$  dan je sa

$$z_1 \times z_2 = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}).$$

Uočimo:

$$z_1 \times z_2 + \overline{z_1 \times z_2} = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) + \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0,$$

pa je  $\operatorname{Re}(z_1 \times z_2) = 0$ , tj. produkt  $z_1 \times z_2$  je čisto imaginaran kompleksni broj.

Pokažimo sljedeća svojstva koja vrijede za kompleksni produkt kompleksnih brojeva.

**Propozicija 2.2.2.** Neka su  $z_1, z_2$  i  $z_3$  kompleksni brojevi. Vrijedi:

- 1)  $z_1 \times z_2 = 0$  ako i samo ako je  $z_1 = 0$  ili  $z_2 = 0$  ili  $z_1 = \lambda z_2$ , gdje je  $\lambda$  realan broj,
- 2)  $z_1 \times z_2 = -z_2 \times z_1$  (**antikomutativnost**),
- 3)  $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$  (**distributivnost kompleksnog produkta prema zbrajanju**),
- 4)  $\alpha(z_1 \times z_2) = (\alpha z_1) \times z_2 = z_1 \times (\alpha z_2)$ , za sve realne brojeve  $\alpha$ ,
- 5) Ako su  $A(z_1)$  i  $B(z_2)$  različite točke od kojih niti jedna nije ishodište, tada je  $z_1 \times z_2 = 0$  ako i samo ako su točke  $O, A, B$  kolinearne.

**Napomena 2.2.3.** a) Neka su  $A(a)$  i  $B(b)$  različite točke u kompleksnoj ravnini, od kojih ni jedna nije ishodište. Kompleksni produkt brojeva  $a$  i  $b$  ima sljedeće geometrijsko svojstvo:

$$a \times b = \begin{cases} 2iP(AOB), & \triangle OAB \text{ pozitivno orijentiran;} \\ -2iP(AOB), & \triangle OAB \text{ negativno orijentiran.} \end{cases}$$

Zaista, ako je  $\triangle OAB$  pozitivno orijentiran, onda je

$$\begin{aligned} 2iP(OAB) &= i|OA||OB| \sin \angle AOB = i|a||b| \sin \left( \arg \frac{b}{a} \right) \\ &= i|a||b| \operatorname{Im} \left( \frac{b}{a} \right) \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{2}|a|^2 \left( \frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\bar{b}) = a \times b. \end{aligned}$$

U drugom slučaju, primijetimo da je trokut  $OBA$  pozitivno orijentiran pa je stoga

$$2iP(OBA) = b \times a = -a \times b.$$

b) Neka su  $A(a), B(b), C(c)$  točke u kompleksnoj ravnini. Kompleksni produkt nam omogućuje da dobijemo sljedeću formulu za površinu trokuta  $ABC$ :

$$P(ABC) = \begin{cases} \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \Delta ABC \text{ pozitivno orijentiran;} \\ -\frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \Delta ABC \text{ negativno orijentiran.} \end{cases}$$

Nadalje, jednostavnom algebarskom manipulacijom se pokazuje da je

$$P(ABC) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$$

ako je  $\Delta ABC$  pozitivno orijentiran, kao što smo i pokazali u Korolaru 1.2.20.

Translatirajmo točke  $A, B, C$  za vektor  $-c$ . Točke  $A, B, C$  se preslikavaju redom u točke  $A', B', O$  s koordinatama  $a - c, b - c, 0$ . Trokuti  $ABC$  i  $A'B'O$  sukladni su i iste orijentacije. Ako je  $\Delta ABC$  pozitivno orijentiran, tada je

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(OA'B') = \frac{1}{2i}((a - c) \times (b - c)) = \frac{1}{2i}((a - c) \times b - (a - c) \times c) \\ &= \frac{1}{2i}(c \times (a - c) - b \times (a - c)) = \frac{1}{2i}(c \times a - c \times c - b \times a + b \times c) \\ &= \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), \end{aligned}$$

kako smo i tvrdili. Drugi slučaj se dokazuje na sličan način.

**Propozicija 2.2.4.** Neka su  $A(a), B(b), C(c)$  različite točke u kompleksnoj ravnini. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- 1) Točke  $A, B, C$  su kolinearne,
- 2)  $(b - a) \times (c - a) = 0$ ,
- 3)  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ .

*Dokaz.* Točke  $A, B, C$  su kolinearne ako i samo ako vrijedi  $P(ABC) = 0$ , tj. ako je  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ . Ta se jednadžba može zapisati u obliku  $(b - a) \times (c - a) = 0$ , pa vrijede ekvivalencije.  $\square$

**Propozicija 2.2.5.** Neka su  $A(a), B(b), C(c), D(d)$  različite točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Tada je  $AB \parallel CD$  ako i samo ako je  $(b - a) \times (d - c) = 0$ .

*Dokaz.* Odaberimo točke  $M(m)$  i  $N(n)$  takve da su  $OABM$  i  $OCDN$  paralelogrami. Vrijedi  $m = b - a, n = d - c$ .

Dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  su paralelne ako i samo ako su točke  $O, M, N$  kolinearne. Primjenjujući svojstvo 5) iz Propozicije 2.2.2 dobivamo

$$0 = m \times n = (b - a) \times (d - c).$$

$\square$

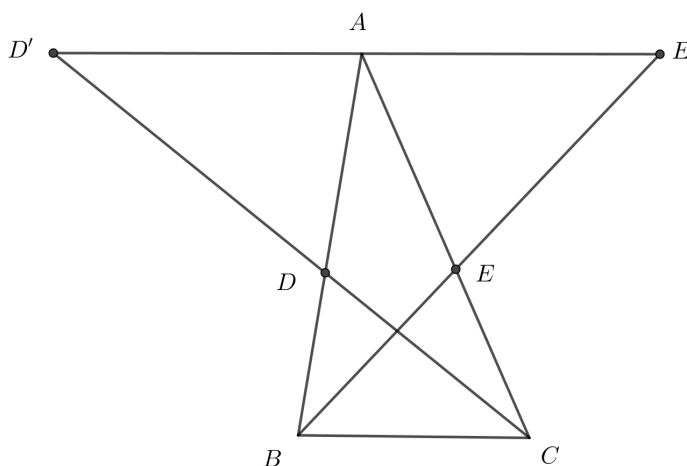
Riješimo nekoliko primjera u kojima se primjenom kompleksnog produkta kompleksnih brojeva olakšava rješavanje geometrijskih problema.

**Primjer 4.** Točke  $D$  i  $E$  nalaze se na stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  trokuta  $ABC$  tako da vrijedi

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{4}.$$

Neka se točke  $E'$  i  $D'$  nalaze na polupravcima  $BE$  i  $CD$  tako da vrijedi  $|EE'| = 3|BE|$  te  $|DD'| = 3|CD|$ . Dokažimo da vrijedi:

- 1) točke  $D', A, E'$  su kolinearne,
- 2)  $|AD'| = |AE'|$ .



Slika 2.4:

*Rješenje.* Točke  $D, E, D', E'$  imaju koordinate

$$d = \frac{a+3b}{4}, e = \frac{a+3c}{4}, e' = 4e - 3b = a + 3c - 3b, d' = 4d - 3c = a + 3b - 3c,$$

redom.

1) S obzirom da vrijedi

$$(a - d') \times (e' - d') = (3c - 3b) \times (6c - 6b) = 18(c - b) \times (c - b) = 0,$$

iz Propozicije 2.2.2 slijedi da su točke  $D', A, E'$  kolinearne.

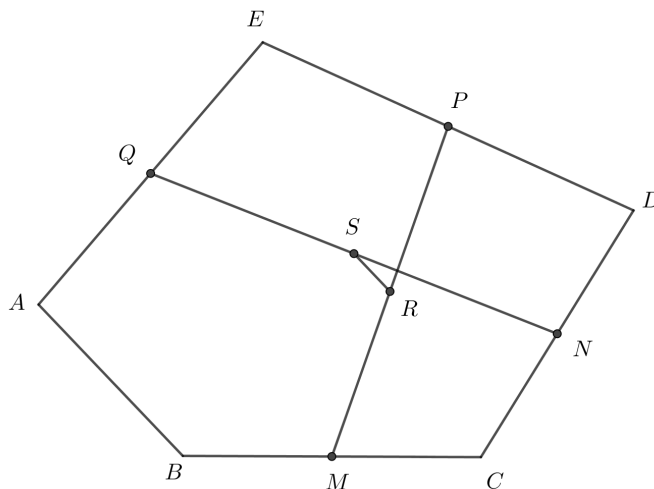
2) Uočimo:

$$\frac{|AD'|}{|D'E'|} = \left| \frac{a - d'}{e' - d'} \right| = \frac{1}{2},$$

tj.  $A$  je polovište  $\overline{D'E'}$ , pa tvrdnja vrijedi.



**Primjer 5.** Neka je  $ABCDE$  konveksan peterokut te neka su  $M, N, P, Q, R, S$  polovišta dužina  $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{MP}, \overline{NQ}$ , redom. Dokažimo da je  $RS \parallel AB$ .



Slika 2.5:

*Rješenje.* Neka su  $a, b, c, d, e$  koordinate vrhova  $A, B, C, D, E$ , redom. Točke  $M, N, P, Q, R, S$  imaju redom koordinate

$$m = \frac{b+c}{2}, n = \frac{c+d}{2}, p = \frac{d+e}{2}, q = \frac{e+a}{2}, r = \frac{b+c+d+e}{4}, s = \frac{c+d+e+a}{4}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\frac{s-r}{b-a} = \frac{\frac{a-b}{4}}{b-a} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R},$$

pa je

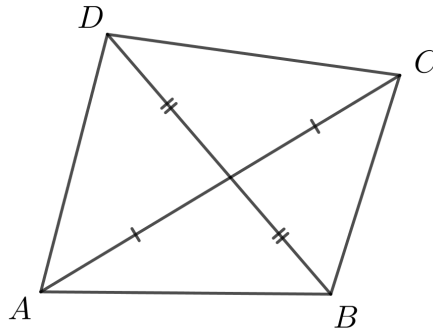
$$(s-r) \times (b-a) = -\frac{1}{4}(b-a) \times (b-a) = 0.$$

Iz Propozicije 2.2.5 slijedi da je  $RS \parallel AB$ .

## 2.3 Još neki primjeri

Pokazali smo na nekoliko primjera kako se direktnom primjenom realnog i kompleksnog produkta kompleksnih brojeva te svojstava kompleksnih brojeva brzo i efikasno mogu riješiti brojni geometrijski problemi. U tu svrhu navest ćemo još nekoliko bazičnih primjera iz geometrije.

**Primjer 6.** Neka je  $ABCD$  četverokut takav da mu se dijagonale  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  raspolavljaju. Dokažimo da je  $ABCD$  paralelogram.



Slika 2.6:

*Rješenje.* Neka su  $a, b, c, d$  koordinate vrhova četverokuta  $ABCD$ . Koordinate polovišta dijagonala  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  su redom  $\frac{a+c}{2}$  i  $\frac{b+d}{2}$ . S obzirom da se dijagonale raspolavljaju, polovišta im se podudaraju pa vrijedi

$$\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2},$$

tj.

$$a+c = b+d,$$

što možemo zapisati kao

$$b-a = c-d. \tag{2.1}$$

Vrijedi da su dužine  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  paralelne ako i samo ako je  $\frac{b-a}{c-d}$  realan broj (vidi [5]). Podijelimo izraz (2.1) s  $c-d$ . Dobivamo

$$\frac{b-a}{c-d} = 1,$$

tj.  $\frac{b-a}{c-d}$  je realan broj pa su  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  su paralelne. Nadalje, iz (2.1) slijedi da je  $|b-a| = |c-d|$ , pa je  $|AB| = |CD|$ .

Analogno se dobije da su  $\overline{BC}$  i  $\overline{DA}$  su paralelne i jednakih duljina. Zaključujemo, četverokut  $ABCD$  je paralelogram.

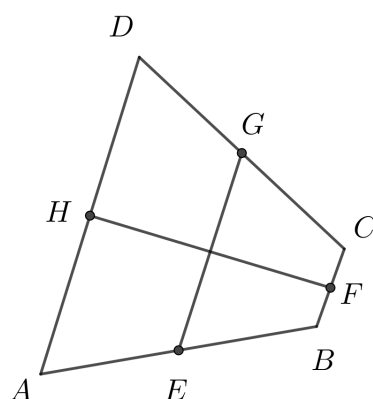
POGLAVLJE 2. REALNI I KOMPLEKSNI PRODUKT KOMPLEKSNIH BROJEVA 22

**Primjer 7.** Neka su  $E, F, G, H$  redom polovišta stranica  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  konveksnog četverokuta  $ABCD$ . Dokažimo da su pravci  $AB$  i  $CD$  okomiti ako i samo ako vrijedi

$$|BC|^2 + |AD|^2 = 2(|EG|^2 + |FH|^2).$$

*Rješenje.* Neka su koordinate polovišta stranica četverokuta  $E, F, G, H$  dane redom s  $e, f, g, h$ . Tada je

$$e = \frac{a+b}{2}, f = \frac{b+c}{2}, g = \frac{c+d}{2}, h = \frac{d+a}{2}.$$



Slika 2.7:

Primjenom realnog produkta kompleksnih brojeva, iz relacije

$$|BC|^2 + |AD|^2 = 2(|EG|^2 + |FH|^2)$$

dobivamo

$$(c-b) \cdot (c-b) + (d-a) \cdot (d-a) = \frac{1}{2}(c+d-a-b) \cdot (c+d-a-b) + \frac{1}{2}(a+d-b-c) \cdot (a+d-b-c).$$

To je ekvivalentno s

$$c \cdot c + b \cdot b + d \cdot d + a \cdot a - 2b \cdot c - 2a \cdot d = a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d - 2a \cdot c + 2b \cdot d,$$

tj.

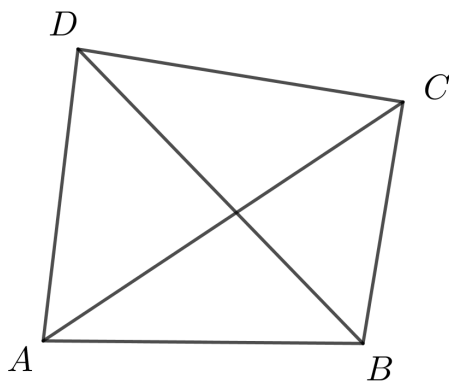
$$a \cdot d + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot d.$$

Iz toga slijedi  $(a-b) \cdot (d-c) = 0$  ako i samo ako je  $AB \perp CD$ , što smo i trebali dokazati.

**Primjer 8.** Neka je  $ABCD$  konveksan četverokut. Dokažimo da vrijedi

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$$

ako i samo ako je  $AC \perp BD$ .



Slika 2.8:

*Rješenje.* Koristeći svojstva realnog produkta kompleksnih brojeva slijedi da je

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$$

ako i samo ako je

$$(b - a) \cdot (b - a) + (d - c) \cdot (d - c) = (c - b) \cdot (c - b) + (a - d) \cdot (a - d),$$

odnosno

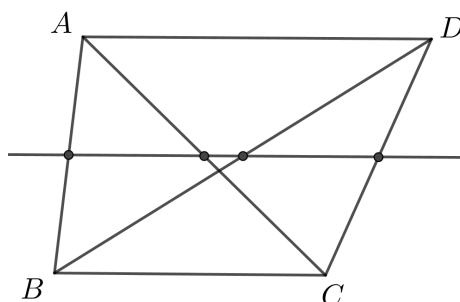
$$a \cdot b + c \cdot d = b \cdot c + d \cdot a.$$

Konačno, imamo

$$(c - a) \cdot (d - b) = 0,$$

što je ekvivalentno s  $AC \perp BD$ .

**Primjer 9.** Dan je konveksni četverokut  $ABCD$ . Polovišta dužina  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  su kolinearna. Dokažimo da taj pravac prolazi kroz polovište dužine  $\overline{CD}$ .



Slika 2.9:

*Rješenje.* Neka su polovišta dužina  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  i  $\overline{CD}$  dana redom s  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ . Vrijedi

$$a' = \frac{a+b}{2}, b' = \frac{a+c}{2}, c' = \frac{b+d}{2}, d' = \frac{c+d}{2}. \quad (2.2)$$

Iz činjenice da su polovišta dužina  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  kolinearna prema Propoziciji 2.2.4 slijedi

$$(b' - a') \times (c' - a') = 0.$$

Uvrštavajući (2.2) dobivamo

$$\left(\frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \times \left(\frac{b+d}{2} - \frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

odnosno

$$\left(\frac{c-b}{2}\right) \times \left(\frac{d-a}{2}\right) = 0.$$

Prethodnu relaciju možemo zapisati kao

$$\left(\frac{c+d}{2} - \frac{b+d}{2}\right) \times \left(\frac{c+d}{2} - \frac{a+c}{2}\right) = 0,$$

tj.

$$(d' - c') \times (d' - b') = 0,$$

iz čega slijedi da su polovišta dužina  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  i  $\overline{CD}$  kolinearna, čije je tvrdnja dokazana.

## Poglavlje 3

### Primjene u geometriji trokuta

U ovom poglavlju izvest ćemo neke važne teoreme i tvrdnje o trokutu koristeći svojstva realnog i kompleksnog produkta kompleksnih brojeva, te ćemo ih primijeniti za rješavanje nekih geometrijskih problema. Prvo ćemo izvedene tvrdnje i svojstva primijeniti na konveksni mnogokut, a zatim ćemo se usredotočiti na geometriju trokuta. Neki koncepti koje ćemo iznijeti poznati su nam otprije, dobrim dijelom s kolegija Elementarna geometrija, no ovdje ćemo im pridodati malo drugačije tumačenje.

#### 3.1 Površina konveksnog mnogokuta

Kažemo da je konveksni mnogokut  $A_1A_2\dots A_n$  pozitivno orijentiran ako su za bilo koju točku  $M$ , koja se nalazi unutar mnogokuta, trokuti  $MA_kA_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , pozitivno orijentirani.

**Teorem 3.1.1.** *Neka je  $A_1A_2\dots A_n$  pozitivno orijentiran konveksan mnogokut kojemu su koordinate vrhova  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Tada vrijedi:*

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1).$$

*Dokaz.* Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Za bazu  $n = 3$ , tvrdnju smo ranije dokazali u Napomeni 2.2.3, koristeći kompleksni produkt.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $n = k$ . Dokažimo da vrijedi i za  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} P(A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1}) &= P(A_1A_2 \cdots A_k) + P(A_kA_{k+1}A_1) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1 + \overline{a_1}a_k) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1), \end{aligned}$$

jer je  $\text{Im}(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k) = 0$ . □

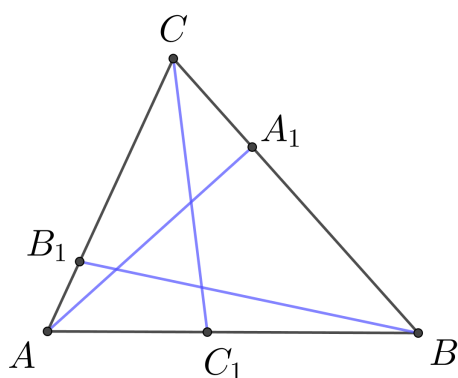
**Napomena 3.1.2.** Točke  $A_1(a_1), A_2(a_2), \dots, A_n(a_n)$  su kolinearne ako i samo ako je

$$\text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \dots + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1) = 0.$$

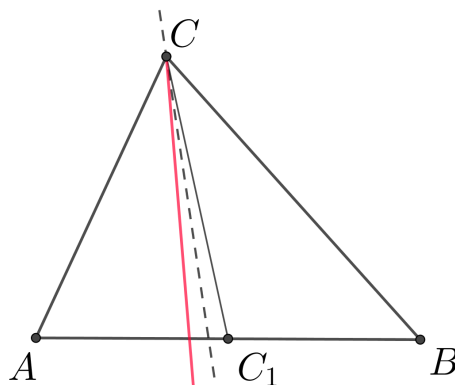
## 3.2 Neke karakteristične točke trokuta

Navest ćemo neke istaknute točke u trokutu, većinom poznate otprije, te pokazati neka važna svojstva trokuta koristeći navedene točke. No, uvedimo prvo nekoliko novih pojmova.

**Definicija 3.2.1.** Neka točke  $A', B', C'$  leže na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Dužine  $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$  nazivamo **čevijanama** trokuta  $ABC$ .



Slika 3.1: Čevijane trokuta



Slika 3.2: Simedijana trokuta

**Definicija 3.2.2.** Pravac dobiven preslikavanjem težišnice trokuta osnosimetrično s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta naziva se **simedijana** trokuta.

**Propozicija 3.2.3.** Neka su točke  $A', B', C'$  na stranicama  $BC, CA, AB$  trokuta  $ABC$ , redom, takve da se čevijane  $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$  trokuta  $ABC$  sijeku u točki  $Q$ , te neka vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{p}{n}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{m}{p}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{n}{m}.$$

Ako točke  $A, B, C$  redom imaju koordinate  $a, b, c$ , tada točka  $Q$  ima koordinate

$$q = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}.$$

*Dokaz.* Koordinate točaka  $A', B', C'$  su redom jednake

$$a' = \frac{nb + pc}{n + p}, b' = \frac{ma + pc}{m + p}, c' = \frac{ma + nb}{m + n}.$$

Neka je  $Q$  točka čije su koordinate

$$q = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}.$$

Dokažimo da se čevijane  $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$  sijeku u toj točki.

Točke  $A, Q$  i  $A'$  su kolinearne ako i samo ako vrijedi  $(q - a) \times (a' - a) = 0$ . To je ekvivalentno s

$$\left( \frac{ma + nb + pc}{m + n + p} - a \right) \times \left( \frac{nb + pc}{n + p} - a \right) = 0,$$

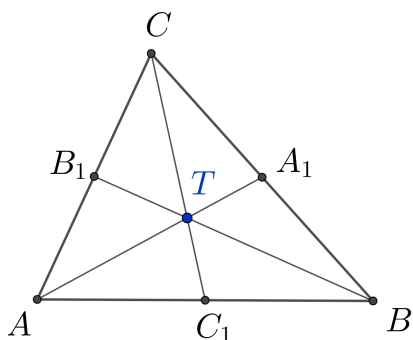
tj.  $(nb + pc - (n + p)a) \times (nb + pc - (n + p)a) = 0$ , što vrijedi po definiciji kompleksnog produkta.

Analogno, dobivamo da točka  $Q$  leži na čevijanima  $\overline{BB'}$  i  $\overline{CC'}$  te je time tvrdnja dokazana.  $\square$

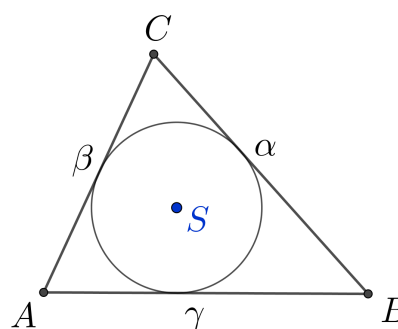
Navedimo sada neke važne karakteristične točke trokuta  $ABC$  i njihova svojstva.

1) **Težište.** Ako je točka  $Q$  iz Propozicije 3.2.3 ujedno i težište  $T$  trokuta  $ABC$ , onda vrijedi  $m = n = p = 1$ . Iz toga slijedi da je koordinata točke  $T$  dana sa

$$z_T = \frac{a + b + c}{3}.$$



Slika 3.3: Težište trokuta



Slika 3.4: Središte trokutu upisane kružnice



2) **Središte upisane kružnice.** Neka su duljine stranica  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  trokuta dane redom s  $\gamma, \alpha, \beta$ . Ako je točka  $Q$  ujedno i središte  $S$  trokutu upisane kružnice, tada, koristeći svojstvo simetrale kutova, vrijedi  $m = \alpha, n = \beta, p = \gamma$ . Iz toga slijedi da je koordinata točke  $S$

$$z_S = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{2s}[\alpha a + \beta b + \gamma c],$$

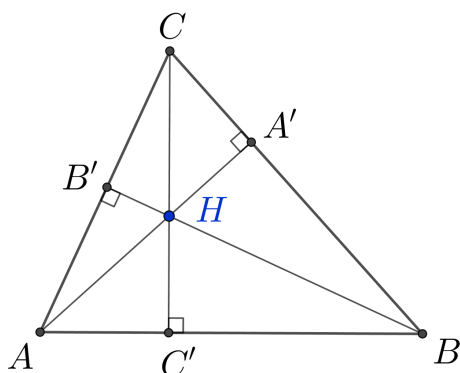
gdje je  $s$  poluopseg trokuta  $ABC$ .

3) **Ortocentar.** Ako je točka  $Q$  ortocentar  $H$  trokuta  $ABC$ , tada vrijedi

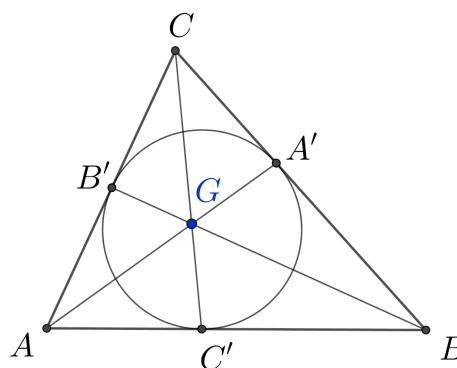
$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}.$$

Slijedi da je  $m = \operatorname{tg} A, n = \operatorname{tg} B, p = \operatorname{tg} C$  te su koordinate ortocentra  $H$  dane s

$$z_H = \frac{(\operatorname{tg} A)a + (\operatorname{tg} B)b + (\operatorname{tg} C)c}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$



Slika 3.5: Ortocentar trokuta



Slika 3.6: Gergonneova točka

**Napomena 3.2.4.** *Dokaz postojanja težišta, središta upisane kružnice i ortocentra trokuta možemo pronaći u [7] i [9].*

4) **Gergonneova točka.** Ako su točke  $A', B', C'$  dirališta trokutu upisane kružnice i stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , redom, tada se čevijane  $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$  trokuta  $ABC$  sijeku u tzv. Gergonneovoj točki  $G$ . Tada vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{1}{s-\gamma}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{1}{s-\alpha}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{1}{s-\beta}.$$

Koordinata točke  $G$  dana je sa

$$z_G = \frac{r_\alpha a + r_\beta b + r_\gamma c}{r_\alpha + r_\beta + r_\gamma},$$

gdje su  $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$  radijusi pripisanih kružnica trokutu  $ABC$ . Lako se pokaže da vrijedi

$$r_\alpha = \frac{P}{s - \alpha}, r_\beta = \frac{P}{s - \beta}, r_\gamma = \frac{P}{s - \gamma},$$

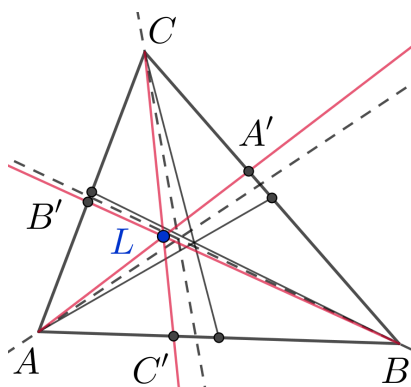
gdje je  $P$  površina trokuta  $ABC$ , a  $s$  njegov poluopseg.

5) **Lemoineova točka.** Lemoineova točka  $L$  sjecište je simedijana trokuta  $ABC$ . Vrijedi

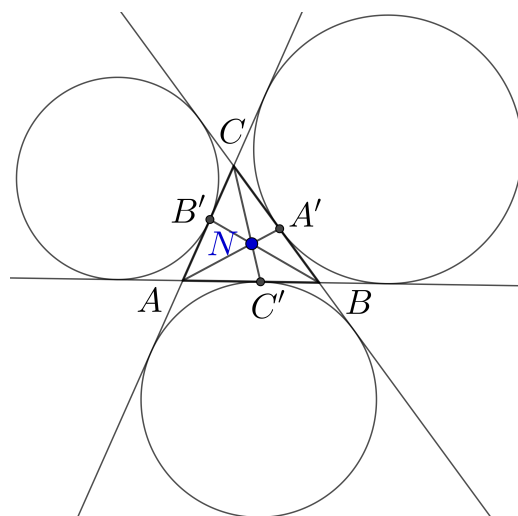
$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Slijedi da je koordinata točke  $L$  dana s

$$z_L = \frac{\alpha^2 a + \beta^2 b + \gamma^2 c}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$



Slika 3.7: Lemoineova točka



Slika 3.8: Nagelova točka

5) **Nagelova točka.** Ako su točke  $A', B', C'$  dirališta trokutu pripisanih kružnica sa stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , redom, onda se čevijane trokuta  $ABC$  sijeku u tzv. Nagelovoj točki  $N$ . Tada vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{s - \gamma}{s - \beta}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{s - \alpha}{s - \gamma}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{s - \beta}{s - \alpha},$$

te iz Propozicije 3.2.3 slijedi da su koordinate Nagelove točke dane s

$$\begin{aligned} z_N &= \frac{(s - \alpha)a + (s - \beta)b + (s - \gamma)c}{(s - \alpha) + (s - \beta) + (s - \gamma)} \\ &= \frac{1}{s}[(s - \alpha)a + (s - \beta)b + (s - \gamma)c] \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c. \end{aligned}$$

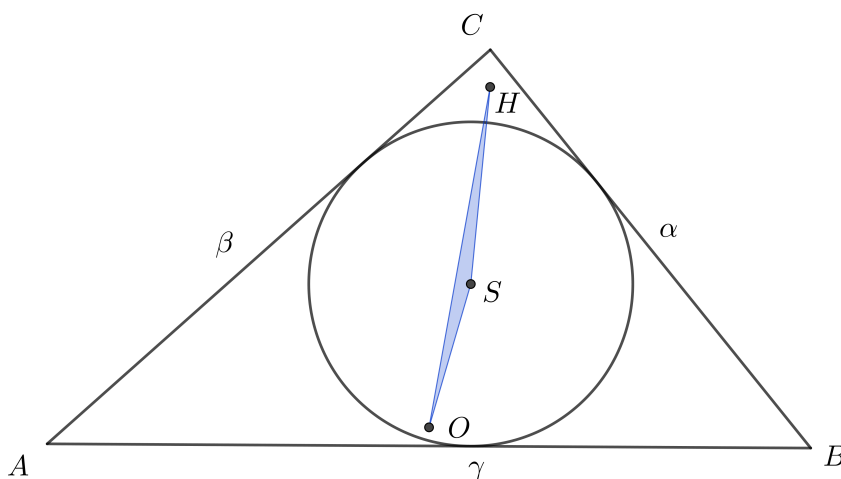
**Napomena 3.2.5.** Dokaz postojanja Gergonneove, Nagelove i Lemoineove točke trokuta možemo pronaći u [6] i [9].

Riješimo jedan primjer primjenjujući pokazana svojstva.

**Primjer 10.** Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  duljine stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Pretpostavimo da je  $\alpha < \beta < \gamma$ . Neka su točke  $O, S, H$  redom središte opisane kružnice, središte upisane kružnice i ortocentar trokuta  $ABC$ . Dokažimo da vrijedi

$$P(OSH) = \frac{1}{8r}(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha),$$

gdje je  $r$  polumjer trokutu upisane kružnice.



Slika 3.9: Trokut  $OSH$

**Rješenje.** Smjestimo trokut  $ABC$  u kompleksnu ravninu s ishodištem u točki  $O$  tako da je trokut pozitivno orijentiran. Primjenjujući kompleksni produkt i koordinate točaka  $S$  i  $H$

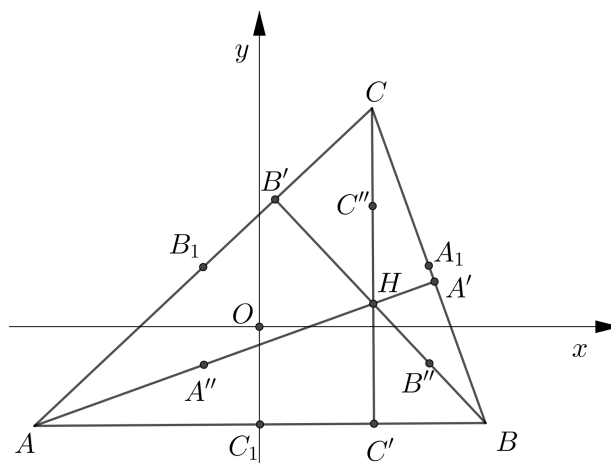
dobivamo

$$\begin{aligned}
 P(OSH) &= \frac{1}{2i}(z_S \times z_H) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma} \times (a + b + c) \right] \\
 &= \frac{1}{4si} [(\alpha - \beta)a \times b + (\beta - \gamma)b \times c + (\gamma - \alpha)c \times a] \\
 &= \frac{1}{2s} [(\alpha - \beta)P(OAB) + (\beta - \gamma)P(OBC) + (\gamma - \alpha)P(OCA)] \\
 &= \frac{1}{2s} \left[ (\alpha - \beta) \frac{R^2 \sin 2C}{2} + (\beta - \gamma) \frac{R^2 \sin 2A}{2} + (\gamma - \alpha) \frac{R^2 \sin 2B}{2} \right] \\
 &= \frac{R^2}{4s} [(\alpha - \beta) \sin 2C + (\beta - \gamma) \sin 2A + (\gamma - \alpha) \sin 2B] \\
 &= \frac{1}{8r} (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha),
 \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

### 3.3 Eulerova kružnica devet točaka

Neka je trokut  $ABC$  smješten u kompleksnoj ravnini tako da mu se središte opisane kružnice nalazi u ishodištu  $O$ , te neka su  $a, b, c$  koordinate vrhova  $A, B, C$ . Već smo ranije pokazali u Propoziciji 2.1.5 da ortocentar  $H$  ima koordinate  $z_H = a + b + c$ .



Slika 3.10:

Označimo s  $A_1, B_1, C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , s  $A', B', C'$  nožišta visina iz odgovarajućih vrhova na nasuprotne stranice, te s  $A'', B'', C''$  polovišta dužina  $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ ,

redom.

Lako se vidi da točke  $A_1, B_1, C_1, A'', B'', C''$  imaju sljedeće koordinate:

$$z_{A_1} = \frac{1}{2}(b+c), z_{B_1} = \frac{1}{2}(c+a), z_{C_1} = \frac{1}{2}(a+b),$$

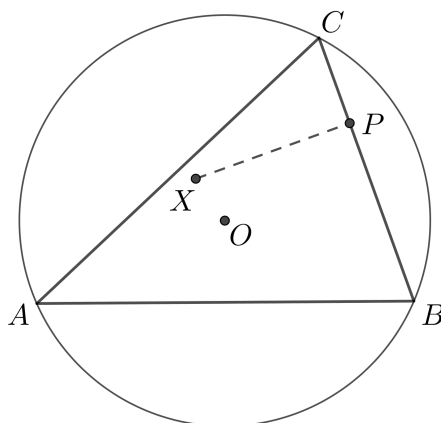
$$z_{A''} = a + \frac{1}{2}(b+c), z_{B''} = b + \frac{1}{2}(c+a), z_{C''} = c + \frac{1}{2}(a+b).$$

Koordinate točaka  $A', B', C'$  ne mogu se tako lako odrediti. U tome će nam pomoći sljedeća propozicija.

**Propozicija 3.3.1.** *Neka se točka  $X(x)$  nalazi u ravnini trokuta  $ABC$  te neka je  $P$  njena ortogonalna projekcija na pravac  $BC$ . Tada je koordinata točke  $P$  jednaka*

$$p = \frac{1}{2} \left( x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right),$$

gdje je  $R$  radijus trokutu opisane kružnice.



Slika 3.11: Ortogonalna projekcija točke na stranicu trokuta

*Dokaz.* Primjenjujući realni i kompleksni produkt, jednadžbe pravaca  $BC$  i  $XP$  možemo zapisati kao

$$BC : (z - b) \times (c - b) = 0,$$

$$XP : (z - x) \cdot (c - b) = 0.$$

Koordinata točke  $P$  zadovoljava obje jednadžbe pa imamo

$$(p - b) \times (c - b) = 0,$$

$$(p - x) \cdot (c - b) = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$(p - b)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{p} - \bar{b})(c - b) = 0,$$

$$(p - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{p} - \bar{x})(c - b) = 0.$$

Zbrajanjem tih dviju relacija dobivamo

$$(2p - b - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{x})(c - b) = 0.$$

Iz toga slijedi da je koordinata točke  $P$  dana s

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left[ b + x + \frac{c - b}{\bar{c} - \bar{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ b + x + \frac{c - b}{\frac{R^2}{c} - \frac{R^2}{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ b + x - \frac{bc}{R^2} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right). \end{aligned}$$

□

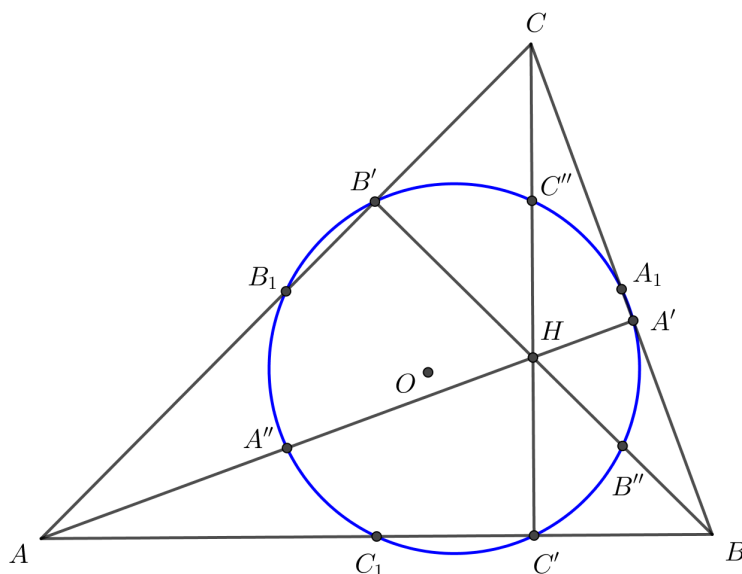
Iz gornje propozicije slijedi da su koordinate točaka  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{bc\bar{a}}{R^2} \right), \\ z_{B'} &= \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{ca\bar{b}}{R^2} \right), \\ z_{C'} &= \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{ab\bar{c}}{R^2} \right). \end{aligned}$$

**Teorem 3.3.2.** (*Kružnica devet točaka.*) U svakom trokutu  $ABC$  točke  $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C''$  leže na istoj kružnici, čije središte se nalazi u polovištu dužine  $\overline{OH}$ , a radijus je dvostruko manji od radijusa trokutu opisane kružnice.

*Dokaz.* Označimo s  $O'$  polovište dužine  $\overline{OH}$ . Prema pretpostavci slijedi da je njena koordinata  $z_{O'} = \frac{1}{2}(a + b + c)$ . Znamo  $|a| + |b| + |c| = R$ , gdje je  $R$  radijus trokutu opisane kružnice.

Uočimo da vrijedi  $|O'A_1| = |z_{A_1} - z_{O'}| = \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}R$ , pa je i  $|O'B_1| = |O'C_1| = \frac{1}{2}R$ .



Slika 3.12: Eulerova kružnica devet točaka

Nadalje,  $|O'A''| = |z_{A''} - z_{O'}| = \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}R$ . Analogno,  $|O'B''| = |O'C''| = \frac{1}{2}R$ .  
Udaljenost točaka  $O'$  i  $A'$  lako izračunamo:

$$\begin{aligned} |O'A'| &= |z_{A'} - z_{O'}| = \left| \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{bc\bar{a}}{R^2} \right) - \frac{1}{2}(a + b + c) \right| \\ &= \frac{1}{2R^2} |bc\bar{a}| = \frac{1}{2R^2} |\bar{a}||b||c| = \frac{R^3}{2R^2} = \frac{1}{2}R. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je  $|O'B'| = |O'C'| = \frac{1}{2}R$ .

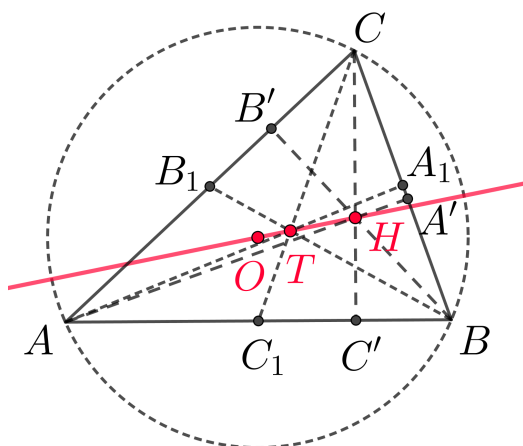
Dakle, vrijedi

$$|O'A_1| = |O'B_1| = |O'C_1| = |O'A'| = |O'B'| = |O'C'| = |O'A''| = |O'B''| = |O'C''|,$$

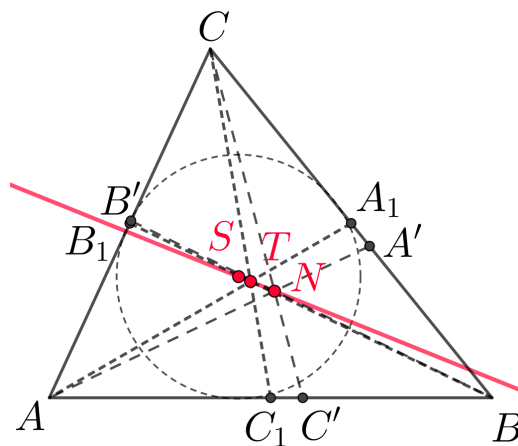
pa točke  $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C''$  leže na istoj kružnici, sa središtem u  $O'$  i radijusom  $\frac{1}{2}R$ .  $\square$

**Teorem 3.3.3.** 1) (*Eulerov pravac.*) U svakom trokutu  $ABC$  točke  $O, T, H$  su kolinearne.  
2) (*Nagelov pravac.*) U svakom trokutu  $ABC$  točke  $S, T, N$  su kolinearne.

*Dokaz.* 1) Ako je središte trokutu opisane kružnice  $O$  ujedno i ishodište kompleksne ravnine, imamo  $z_O = 0$ ,  $z_T = \frac{1}{3}(a + b + c)$ ,  $z_H = a + b + c$ . Prema Propoziciji 2.2.4. točke  $O, T, H$  su kolinearne.



Slika 3.13: Eulerov pravac



Slika 3.14: Nagelov pravac

2) Imamo  $z_S = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c$ ,  $z_T = \frac{1}{3}(a + b + c)$ ,  $z_N = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c$ .  
Lako se dobije da vrijedi  $z_N = 3z_T - 2z_S$ .

Primjenom svojstava kompleksnog produkta na gornju relaciju dobivamo

$(z_T - z_S) \times (z_N - z_S) = (z_T - z_S) \times [3(z_T - z_S)] = 0$ , pa su točke  $S, T, N$  kolinearne.  $\square$

Riješimo sada jedan primjer primjenjujući prethodna svojstva i tvrdnje.

**Primjer 11.** Neka se točka  $M$  nalazi na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Dokažimo da središta Eulerovih kružnica trokuta  $MBC, MCA, MAB$  čine trokut sličan trokutu  $ABC$ .

*Rješenje.* Označimo s  $A'(a')$ ,  $B'(b')$ ,  $C'(c')$  središta Eulerovih kružnica trokuta  $MBC, MCA, MAB$ , redom. Neka je središte opisane kružnice trokuta  $ABC$  smješteno u ishodištu kompleksne ravnine. Koordinate točaka  $A', B', C'$  su redom

$$a' = \frac{m + b + c}{2}, b' = \frac{m + a + c}{2}, c' = \frac{m + a + b}{2},$$

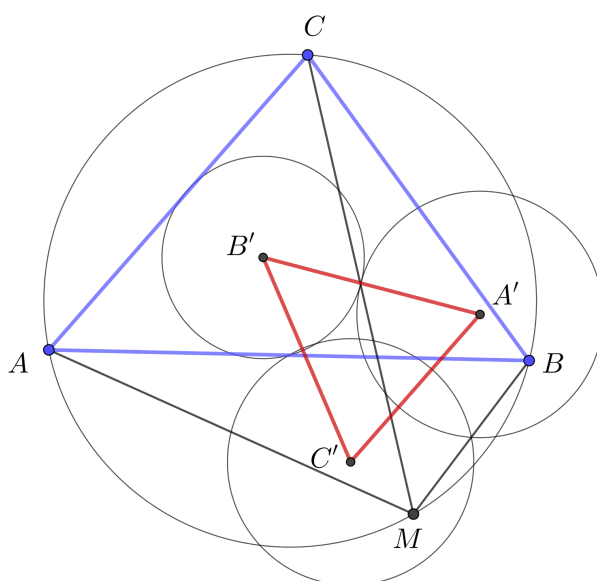
s obzirom da se  $M$  nalazi na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

Slijedi

$$\frac{b' - a'}{c' - a'} = \frac{a - b}{a - c} = \frac{b - a}{c - a},$$

iz čega slijedi  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ , prema Propoziciji 1.2.18.





Slika 3.15:

### 3.4 Neke udaljenosti u trokutu

Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  duljine stranica trokuta  $ABC$ . Poluopseg trokuta dan je sa  $s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ , radijus trokutu upisane kružnice s  $r$ , a radijus opisane kružnice s  $R$ .

**Teorem 3.4.1.** *Duljine stranica trokuta  $\alpha, \beta, \gamma$  rješenja su kubne jednadžbe*

$$t^3 - 2st^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)t - 4sRr = 0.$$

*Dokaz.* Dokažimo da  $\alpha$  zadovoljava jednadžbu. Imamo

$$\alpha = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$s - \alpha = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

odakle je

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\alpha(s - \alpha)}{4Rr}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\alpha r}{4R(s - \alpha)}.$$

Iz identiteta  $\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} = 1$  slijedi

$$\frac{\alpha(s - \alpha)}{4Rr} + \frac{\alpha r}{4R(s - \alpha)} = 1,$$

tj. sređivanjem dobivamo

$$\alpha^3 - 2s\alpha^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)\alpha - 4sRr = 0.$$

Analogno se pokaže da su  $\beta$  i  $\gamma$  rješenja dane jednadžbe. □

Iz Teorema 3.4.1, koristeći relacije rješenja i koeficijenata jednadžbe, slijedi

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 2s, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= s^2 + r^2 + 4Rr, \\ \alpha\beta\gamma &= 4sRr.\end{aligned}$$

**Korolar 3.4.2.** U svakom trokutu  $ABC$  vrijede sljedeće formule:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 2(s^2 - r^2 - 4Rr), \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr).\end{aligned}\tag{3.1}$$

*Dokaz.* Imamo

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 4s^2 - 2(s^2 + r^2 + 4Rr) \\ &= 2s^2 - 2r^2 - 8Rr \\ &= 2(s^2 - r^2 - 4Rr).\end{aligned}$$

Za dokaz druge formule imamo

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 2s(2s^2 - 2r^2 - 8Rr - s^2 - r^2 - 4Rr) + 12sRr \\ &= 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr).\end{aligned}$$

□

Pretpostavimo da je središte  $O$  opisane kružnice trokuta  $ABC$  smješteno u ishodištu kompleksne ravnine, te neka su  $a, b, c$  koordinate vrhova  $A, B, C$ , redom.

**Lema 3.4.3.** Realni produkti  $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot a$  dani su s

$$a \cdot b = R^2 - \frac{\gamma^2}{2}, b \cdot c = R^2 - \frac{\alpha^2}{2}, c \cdot a = R^2 - \frac{\beta^2}{2}.$$

*Dokaz.* Primjenjujući svojstva realnog produkta imamo

$$\gamma^2 = |a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2a \cdot b - b^2 = 2R^2 - 2a \cdot b,$$

iz čega slijedi prva formula. Preostale dvije dokazuju se analogno.  $\square$

U sljedećim teoremima, radi pojednostavljenja zapisa, koristit ćemo tzv. **cikličku sumu**. Cikličke sume koriste se za zbrajanje preko permutacija. Promotrimo permutaciju  $(a, b, c)$ . Ciklička suma  $\sum_{cyc}$  je zbroj proveden kroz jedan ciklus permutacije:

$$\sum_{cyc} a = a + b + c.$$

**Teorem 3.4.4. (Eulerov teorem.)** *Neka je  $k(O, R)$  kružnica opisana, a  $k(S, r)$  kružnica upisana trokutu. Tada je*

$$|OS|^2 = R^2 - 2Rr.$$

*Dokaz.* Koordinata točke S dana je sa

$$z_S = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c,$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned} |OS|^2 &= |z_S|^2 = \left( \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c \right) \cdot \left( \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c \right) \\ &= \frac{1}{4s^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + 2 \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha\beta)a \cdot b. \end{aligned}$$

Koristeći Lemu 3.4.3 dobivamo

$$\begin{aligned} |OS|^2 &= \frac{1}{4s^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + \frac{2}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha\beta) \left( R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4s^2}(\alpha + \beta + \gamma)^2 R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{4s^2} \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = R^2 - \frac{1}{2s} \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Konačno, koristeći poznate formule  $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4P}$  i  $r = \frac{P}{s}$  (vidi [7]), gdje je  $P$  površina trokuta, dobivamo

$$|OS|^2 = R^2 - 2 \frac{\alpha\beta\gamma}{4P} \cdot \frac{P}{s} = R^2 - 2Rr.$$

$\square$

**Teorem 3.4.5.** *Neka je  $N$  Nagelova točka trokuta  $ABC$ . Tada je*

$$|ON| = R - 2r.$$

*Dokaz.* Koordinata točke  $N$  dana je sa

$$z_N = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c.$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} |ON|^2 &= |z_N|^2 = z_N \cdot \overline{z_N} = R^2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) a \cdot b \\ &= R^2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \\ &= R^2 \left(3 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{s}\right)^2 - \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \gamma^2 \\ &= R^2 - \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \gamma^2 = R^2 - E. \end{aligned}$$

Da bismo izračunali  $E$  uočimo prvo

$$\begin{aligned} E &= \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{s} + \frac{\alpha\beta}{s^2}\right) \gamma^2 = \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{s} \sum_{cyc} (\alpha + \beta) \gamma^2 + \frac{1}{s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 \\ &= \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{s} \sum_{cyc} (2s - \gamma) \gamma^2 + \frac{2\alpha\beta\gamma}{s} = - \sum_{cyc} \alpha^2 + \frac{1}{s} \sum_{cyc} \alpha^3 + 8 \frac{\alpha\beta\gamma}{4P} \cdot \frac{P}{s} \\ &= - \sum_{cyc} \alpha^2 + \frac{1}{s} \sum_{cyc} \alpha^3 + 8Rr. \end{aligned}$$

Sada, primjenjujući formulu (3.1), dobivamo

$$E = -2(s^2 - r^2 - 4Rr) + 2(s^2 - 3r^2 - 6Rr) + 8Rr = -4r^2 + 4Rr.$$

Konačno, slijedi da je

$$|ON|^2 = R^2 - E = R^2 - 4Rr + 4r^2 = (R - 2r)^2,$$

iz čega slijedi da je  $|ON| = R - 2r$ . □

**Teorem 3.4.6.** *Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Tada je*

$$|OH|^2 = 9R^2 + 2r^2 + 8Rr - 2s^2.$$

*Dokaz.* Koordinata točke  $H$  dana je s  $z_H = a + b + c$ . Koristeći realni produkt dobivamo

$$\begin{aligned} |OH|^2 &= |z_H|^2 = z_H \cdot z_H = (a + b + c) \cdot (a + b + c) \\ &= \sum_{cyc} |a|^2 + 2 \sum_{cyc} a \cdot b = 3R^2 + 2 \sum_{cyc} a \cdot b. \end{aligned}$$

Koristeći formule iz Leme 3.4.3 i Korolara 3.4.2, dobivamo

$$\begin{aligned} |OH|^2 &= 3R^2 + 2 \sum_{cyc} \left( R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) = 9R^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &= 9R^2 - 2(s^2 - r^2 - 4Rr) = 9R^2 + 2r^2 + 8Rr - 2s^2. \end{aligned}$$

□

### 3.5 Baricentričke koordinate točke s obzirom na trokut

Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  redom duljine stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$ .

**Propozicija 3.5.1.** *Neka su  $a, b, c$  koordinate vrhova  $A, B, C$  trokuta  $ABC$ , te neka je  $P$  točka u ravnini trokuta. Neka je koordinata točke  $P$  dana sa  $z_P$ . Tada postoje jedinstveni realni brojevi  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$  takvi da vrijedi*

$$\begin{aligned} z_P &= \mu_a a + \mu_b b + \mu_c c, \\ \mu_a + \mu_b + \mu_c &= 1. \end{aligned}$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da se točka  $P$  nalazi u unutrašnjosti trokuta  $ABC$  te neka je  $A'$  točka takva da vrijedi  $AP \cap BC = \{A'\}$ . Neka je  $k_1 = \frac{|PA|}{|PA'|}, k_2 = \frac{|A'B|}{|A'C|}$ . Tada vrijedi

$$z_P = \frac{a + k_1 z_{A'}}{1 + k_1}, z_{A'} = \frac{b + k_2 c}{1 + k_2}.$$

To možemo zapisati kao

$$z_P = \frac{1}{1 + k_1} a + \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)} b + \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)} c.$$

Nadalje, ako uzmemo u obzir da je

$$\mu_a = \frac{1}{1 + k_1}, \mu_b = \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)}, \mu_c = \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)}$$

tada imamo

$$\begin{aligned} \mu_a + \mu_b + \mu_c &= \frac{1}{1+k_1} + \frac{k_1}{(1+k_1)(1+k_2)} + \frac{k_1k_2}{(1+k_1)(1+k_2)} \\ &= \frac{1+k_1+k_2+k_1k_2}{(1+k_1)(1+k_2)} = 1. \end{aligned}$$

Dokaz je analogan u slučaju kada se  $P$  nalazi izvan trokuta.

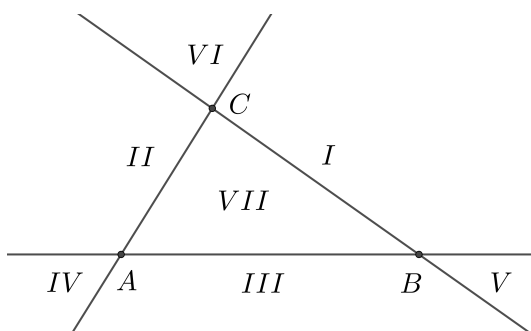
Ako se  $P$  nalazi na pravcu koji sadrži stranicu  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ , onda je

$$z_P = \frac{1}{1+k}b + \frac{k}{1+k}c = 0 \cdot a + \frac{1}{1+k}b + \frac{k}{1+k}c,$$

gdje je  $k = \frac{|PB|}{|PC|}$ .

□

**Definicija 3.5.2.** Realni brojevi  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$  zovu se **apsolutne baricentričke koordinate** točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .



Slika 3.16: Sedam područja ravnine trokuta

Predznaci brojeva  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$  ovise o području ravnine trokuta u kojem je smještena točka  $P$ . Trokut  $ABC$  određuje takvih sedam područja.

U sljedećoj tablici dani su predznaci brojeva  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$ :

	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\mu_a$	-	+	+	+	-	-	+
$\mu_b$	+	-	+	-	+	-	+
$\mu_c$	+	+	-	-	-	+	+

Tablica 3.1: Predznaci apsolutnih baricentričkih koordinata točke

**Teorem 3.5.3.** *Neka su točke  $P_1, P_2$  s koordinatama  $z_{P_1}, z_{P_2}$  smještene u ravnini trokuta  $ABC$ . Ako je  $z_{P_k} = \alpha_k a + \beta_k b + \gamma_k c$ , gdje su  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  realni brojevi takvi da vrijedi  $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, k = 1, 2$ , onda je*

$$|P_1 P_2|^2 = - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2. \quad (3.2)$$

*Dokaz.* Neka se središte trokutu opisane kružnice  $O$  nalazi u ishodištu kompleksne ravnine. Koristeći svojstva realnog produkta imamo

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= |z_{P_2} - z_{P_1}|^2 = |(\alpha_2 - \alpha_1)a + (\beta_2 - \beta_1)b + (\gamma_2 - \gamma_1)c|^2 \\ &= \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 a \cdot a + 2 \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)a \cdot b \\ &= \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 R^2 + 2 \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) \left( R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ &= R^2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1)^2 - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2. \end{aligned}$$

S obzirom da vrijedi  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$ , slijedi

$$|P_1 P_2|^2 = - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2.$$

□

**Teorem 3.5.4.** *Točke  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  smještene su na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$  tako da se dužine  $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$  sijeku u točki  $P_1$ , a dužine  $\overline{AA_2}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}$  u točki  $P_2$ . Neka je*

$$\frac{|BA_k|}{|A_k C|} = \frac{p_k}{n_k}, \frac{|CB_k|}{|B_k A|} = \frac{m_k}{p_k}, \frac{|AC_k|}{|C_k B|} = \frac{n_k}{m_k}, k = 1, 2,$$

*gdje su  $m_k, n_k, p_k$  realni brojevi različiti od nule, te neka je  $S_k = m_k + n_k + p_k, k = 1, 2$ . Tada je*

$$|P_1 P_2|^2 = \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \left[ S_1 S_2 \sum_{cyc} (n_1 p_2 + p_1 n_2) \alpha^2 - S_1^2 \sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 - S_2^2 \sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2 \right]. \quad (3.3)$$

*Dokaz.* Koordinate točaka  $P_1, P_2$  dane su sa

$$z_{P_k} = \frac{m_k a + n_k b + p_k c}{m_k + n_k + p_k}, k = 1, 2.$$

Slijedi da su apsolutne baricentričke koordinate točkaka  $P_1, P_2$  dane s

$$\alpha_k = \frac{m_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{m_k}{S_k}, \beta_k = \frac{n_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{n_k}{S_k}, \gamma_k = \frac{p_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{p_k}{S_k}, k = 1, 2.$$

Uvođenjem supstitucije u (3.2) dobivamo

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= - \sum_{cyc} \left( \frac{n_2}{S_2} - \frac{n_1}{S_2} \right) \left( \frac{p_2}{S_2} - \frac{p_1}{S_2} \right) \alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \sum_{cyc} (S_1 n_2 - S_2 n_1) (S_1 p_2 - S_2 p_1) \alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \sum_{cyc} [S_1^2 n_2 p_2 + S_2^2 n_1 p_1 - S_1 S_2 (n_1 p_2 + n_2 p_1)] \alpha^2 \\ &= \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \left[ S_1 S_2 \sum_{cyc} (n_1 p_2 + p_1 n_2) \alpha^2 - S_1^2 \sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 - S_2^2 \sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2 \right], \end{aligned}$$

kako smo i tvrdili. □

**Primjer 12.** Izračunajmo udaljenost točkaka  $T$  i  $S$ , gdje je  $T$  težište trokuta, a  $S$  središte trokutu upisane kružnice.

*Rješenje.* Za računanje udaljenosti koristit ćemo formulu (3.3).

Imamo  $m_1 = n_1 = p_1 = 1$  i  $m_2 = \alpha, n_2 = \beta, p_2 = \gamma$  iz čega slijedi

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{cyc} m_1 = 3, S_2 = \sum_{cyc} m_2 = \alpha + \beta + \gamma = 2s, \\ \sum_{cyc} (n_1 p_2 + n_2 p_1) \alpha^2 &= (\beta + \gamma) \alpha^2 + (\gamma + \alpha) \beta^2 + (\alpha + \beta) \gamma^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) (\alpha \beta + \beta \gamma + \gamma \alpha) - 3\alpha \beta \gamma \\ &= 2s(s^2 + r^2 + 4Rr) - 12sRr \\ &= 2s^3 + 2sr^2 - 4sRr. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 = \alpha^2 \beta \gamma + \beta^2 \gamma \alpha + \gamma^2 \alpha \beta = \alpha \beta \gamma (\alpha + \beta + \gamma) = 8s^2 Rr$$

i

$$\sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr.$$



Prema tome, slijedi

$$|TS|^2 = \frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 16Rr).$$

Pokazali smo kako računati udaljenost dviju točaka u ravnini trokuta koristeći bari-centričke koordinate. Sada ćemo izvesti nekoliko zanimljivih tvrdnji vezanih za površinu trokuta koristeći spomenute koordinate.

**Teorem 3.5.5.** *Neka su  $P_j(z_{P_j})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , tri točke u ravnini trokuta  $ABC$ , te neka je  $z_{P_j} = \alpha_j a + \beta_j b + \gamma_j c$ , gdje su  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  baricentričke koordinate točaka  $P_j$ . Ako trokuti  $ABC$  i  $P_1P_2P_3$  imaju istu orijentaciju, onda je*

$$\frac{P(P_1P_2P_3)}{P(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}. \quad (3.4)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da su trokuti  $ABC$  i  $P_1P_2P_3$  pozitivno orijentirani. Označimo s  $O$  ishodište kompleksne ravnine. Primjenjujući kompleksni produkt imamo

$$\begin{aligned} 2iP(P_1OP_2) &= z_{P_1} \times z_{P_2} = (\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c) \times (\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c) \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) a \times b + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) b \times c + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) c \times a \\ &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & c \times a \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iP(ABC) \\ \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Na analogan način se dobije

$$\begin{aligned} 2iP(P_2OP_3) &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iP(ABC) \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ 2iP(P_3OP_1) &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iP(ABC) \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da se ishodište  $O$  nalazi unutar trokuta  $P_1P_2P_3$  slijedi da je

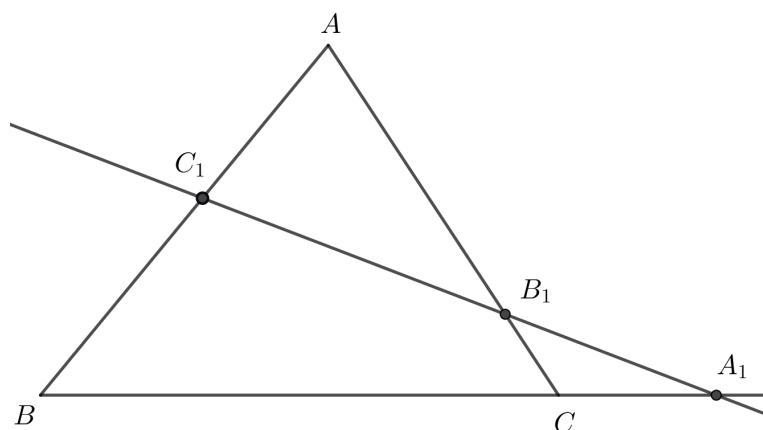
$$\begin{aligned} P(P_1P_2P_3) &= P(P_1OP_2) + P(P_2OP_3) + P(P_3OP_1) \\ &= \frac{1}{2i}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_1) a \times b - \frac{1}{2i}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_3 - \gamma_1) b \times c \\ &\quad + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3) P(ABC) \\ &= P(ABC) \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \alpha_1 \\ 1 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ 1 & \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = P(ABC) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kako smo i tvrdili. □

U dokazu idućeg korolara pozivat ćemo se na poznati Menelajev teorem. Iskazat ćemo ovdje Menelajev teorem, bez dokazivanja. Dokaz možemo pronaći u [7].

**Teorem 3.5.6.** (Menelajev teorem.) *Neka su  $B_1, C_1$  točke na stranicama  $\overline{AC}, \overline{AB}$ , a točka  $A_1$  na produžetku stranice  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ . Točke  $A_1, B_1, C_1$  su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



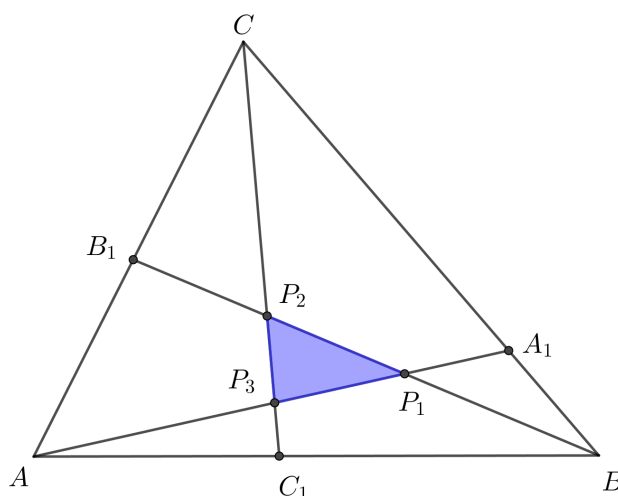
Slika 3.17: Menelajev teorem

**Korolar 3.5.7.** *Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1, B_1, C_1$  smještene na pravcima  $BC, CA, AB$ , redom, tako da vrijedi*

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = k_1, \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = k_2, \frac{|C_1A|}{|C_1B|} = k_3.$$

*Nadalje, neka su točke  $P_1, P_2, P_3$  takve da  $AA_1 \cap BB_1 = \{P_1\}, BB_1 \cap CC_1 = \{P_2\}, CC_1 \cap AA_1 = \{P_3\}$ . Tada je*

$$\frac{P(P_1P_2P_3)}{P(ABC)} = \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)}.$$



Slika 3.18:

*Dokaz.* Primjenjujući Menelajev teorem 3.5.6 na trokut  $AA_1B$ , dobivamo

$$\frac{|C_1A|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB|}{|CA_1|} \cdot \frac{|P_3A_1|}{|P_3A|} = 1.$$

Odatle je

$$\frac{|P_3A|}{|P_3A_1|} = \frac{|C_1A|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB|}{|CA_1|} = k_3(1 + k_1).$$

Koordinata točke  $P_3$  dana je sa

$$z_{P_3} = \frac{a + k_3(1 + k_1)z_{A_1}}{1 + k_3(1 + k_1)} = \frac{a + k_3(1 + k_1)\frac{b+k_1c}{1+k_1}}{1 + k_3 + k_3k_1} = \frac{a + k_3b + k_3k_1c}{1 + k_3 + k_3k_1}.$$

Na analogan način dobivamo koordinate točaka  $P_1$  i  $P_2$ :

$$z_{P_1} = \frac{b + k_1c + k_1k_2a}{1 + k_1 + k_1k_2}, z_{P_2} = \frac{c + k_2a + k_2k_3b}{1 + k_2 + k_2k_3}.$$

Trokuti  $ABC$  i  $P_1P_2P_3$  imaju jednaku orijentaciju pa primjenjujući (3.4) dobivamo

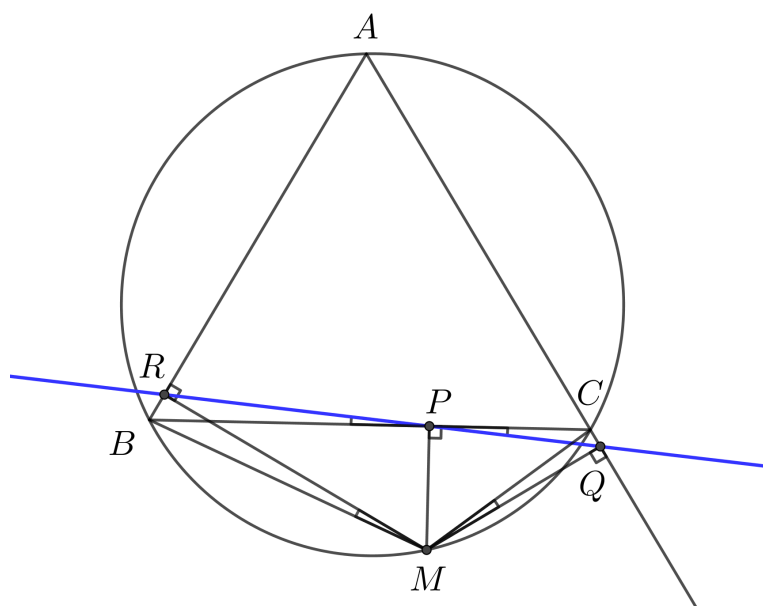
$$\begin{aligned} \frac{P(P_1P_2P_3)}{P(ABC)} &= \frac{1}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)} \begin{vmatrix} k_1k_2 & 1 & k_1 \\ k_2 & k_2k_3 & 1 \\ 1 & k_3 & k_3k_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)}. \end{aligned}$$

□

### 3.6 Nožišni trokut i Simsonov pravac

Neka se točka  $M$  nalazi u ravnini trokuta  $ABC$  te neka su točke  $P, Q, R$  ortogonalne projekcije točke  $M$  na pravce  $BC, CA, AB$ , redom.

**Teorem 3.6.1.** (Simsonov pravac.) *Točke  $P, Q, R$  su kolinearne ako i samo ako se  $M$  nalazi na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .*



Slika 3.19: Simsonov pravac

*Dokaz.* Pretpostavimo da  $M$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da  $M$  pripada kružnom luku  $\widehat{BC}$ . Za kolinearnost točaka  $P, Q, R$  dovoljno je pokazati da su kutovi  $\angle BPR$  i  $\angle CPQ$  jednaki. Uočimo  $\angle BRM$  i  $\angle BPM$  su jednaki te  $\angle MPC + \angle MQC = 180^\circ$ , pa su četverokuti  $PRBM$  i  $PCQM$  tetivni. Iz toga slijedi  $\angle BPR = \angle BMR$  i  $\angle CPQ = \angle CMQ$ . Nadalje,  $\angle BMR = 90^\circ - \angle ABM = 90^\circ - \angle MCQ$  jer je i  $ABMC$  tetivni četverokut. Konačno, dobivamo  $\angle BMR = 90^\circ - \angle MCQ = \angle CMQ$ , pa su kutovi  $\angle BPR$  i  $\angle CPQ$  jednaki.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da su točke  $P, Q, R$  kolinearne. Tada su  $\angle BPR$  i  $\angle CPQ$  jednaki, pa je  $\angle ABM + \angle ACM = 180^\circ$ , tj. četverokut  $ABMC$  je tetivan. Stoga točka  $M$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .  $\square$

**Definicija 3.6.2.** *Ako  $M$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ , pravac  $PQR$ , iz prethodnog teorema, naziva se **Simsonov pravac** točke  $M$  s obzirom na trokut  $ABC$ .*

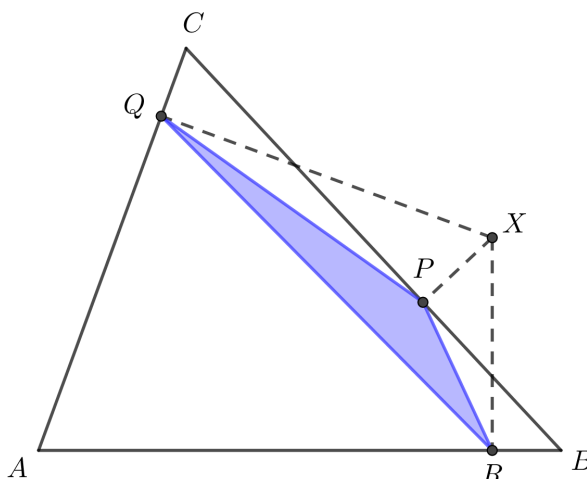
**Definicija 3.6.3.** Za proizvoljnu točku  $X$  u ravnini trokuta  $ABC$  neka su točke  $P, Q, R$  njene ortogonalne projekcije na pravce  $BC, CA, AB$ , redom. Trokut  $PQR$  naziva se **nožišni** ili **pedalni trokut** pola  $X$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

Neka je trokut  $ABC$  takav da mu je središte opisane kružnice  $O$  u ishodištu kompleksne ravnine.

**Teorem 3.6.4.** Površina nožišnog trokuta pola  $X$  s obzirom na trokut  $ABC$  dana je formulom

$$P(PQR) = \frac{P(ABC)}{4R^2} |x\bar{x} - R^2|, \quad (3.5)$$

gdje je  $R$  radijus opisane kružnice trokutu  $ABC$ .



Slika 3.20: Nožišni trokut

*Dokaz.* Primjenjujući formulu iz Propozicije 3.3.1 dobivamo da su koordinate točaka  $P, Q, R$  redom

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right), \\ q &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{ca}{R^2} \bar{x} + c + a \right), \\ r &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{ab}{R^2} \bar{x} + a + b \right). \end{aligned}$$

Iz (1.1) imamo

$$P(PQR) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} q-p & \bar{q}-\bar{p} \\ r-p & \bar{r}-\bar{p} \end{vmatrix}.$$

Za koordinate  $p, q, r$  vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{2} \left( \bar{x} - \frac{\bar{bc}}{R^2} x + \bar{b} + \bar{c} \right), \\ \bar{q} &= \frac{1}{2} \left( \bar{x} - \frac{\bar{ca}}{R^2} x + \bar{c} + \bar{a} \right), \\ \bar{r} &= \frac{1}{2} \left( \bar{x} - \frac{\bar{ab}}{R^2} x + \bar{a} + \bar{b} \right). \end{aligned}$$

Sada, slijedi

$$\begin{aligned} q-p &= \frac{1}{2}(a-b) \left( 1 - \frac{c\bar{x}}{R^2} \right), r-p = \frac{1}{2}(a-c) \left( 1 - \frac{b\bar{x}}{R^2} \right), \\ \bar{q}-\bar{p} &= \frac{1}{2abc}(a-b)(x-c)R^2, \bar{r}-\bar{p} = \frac{1}{2abc}(a-c)(x-b)R^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} P(PQR) &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} q-p & \bar{q}-\bar{p} \\ r-p & \bar{r}-\bar{p} \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} 1 - \frac{c\bar{x}}{R^2} & (x-c)R^2 \\ 1 - \frac{b\bar{x}}{R^2} & (x-b)R^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} R^2 - c\bar{x} & x-c \\ R^2 - b\bar{x} & x-b \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} (b-c)\bar{x} & b-c \\ R^2 - b\bar{x} & x-b \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(b-c)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} \bar{x} & 1 \\ R^2 - b\bar{x} & x-b \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(b-c)(a-c)}{16abc} (x\bar{x} - R^2). \end{aligned}$$

Primjenjujući modul kompleksnog broja, dobivamo

$$\begin{aligned} P(PQR) &= \frac{|a-b||b-c||c-a|}{16|a||b||c|} |x\bar{x} - R^2| \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{16R^3} |x\bar{x} - R^2| \\ &= \frac{P(ABC)}{4R^2} |x\bar{x} - R^2|, \end{aligned}$$

gdje su  $\alpha, \beta, \gamma$  duljine stranica trokuta  $ABC$ . □

**Napomena 3.6.5.** Formula u prethodnom teoremu sadrži svojstvo Simsonovog pravca. Zaista, točke  $P, Q, R$  su kolinearne ako i samo ako je  $P(PQR) = 0$ . To vrijedi ako je  $|x\bar{x} - R^2| = 0$ , tj. ako je  $x\bar{x} = R^2$ , odnosno  $|x| = R$ . Dakle,  $X$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

**Teorem 3.6.6.** Za svaku točku  $X$  u ravnini trokuta  $ABC$  možemo konstruirati trokut sa stranicama  $|AX||BC|, |BX||CA|, |CX||AB|$ . Dobiveni trokut sličan je nožišnom trokutu pola  $X$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

*Dokaz.* Neka je  $PQR$  nožišni trokut pola  $X$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Iz (3.6) dobivamo

$$q - p = \frac{1}{2}(a-b)(x-c) \frac{R^2 - c\bar{x}}{R^2(x-c)}. \quad (3.7)$$

Primijenimo li modul na (3.7), dobivamo

$$|q - p| = \frac{1}{2R^2} |a-b||x-c| \left| \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \right|. \quad (3.8)$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} \left| \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \right|^2 &= \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \cdot \frac{R^2 - \bar{c}x}{\bar{x} - \bar{c}} = \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \cdot \frac{R^2 - \bar{c}x}{\bar{x} - \frac{R^2}{c}} \\ &= \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \cdot \frac{R^2(c-x)}{c\bar{x} - R^2} = R^2, \end{aligned}$$

pa iz (3.8) dobivamo

$$|q - p| = \frac{1}{2R} |a-b||x-c|.$$

Stoga je

$$\frac{|PQ|}{|CX||AB|} = \frac{|QR|}{|AX||BC|} = \frac{|RP|}{|BX||CA|} = \frac{1}{2R}, \quad (3.9)$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja. □

Pokazat ćemo na primjeru primjenu prethodno navedenih svojstava.

**Primjer 13.** *Neka je  $X$  točka u ravnini trokuta  $ABC$  te neka je  $A'B'C'$  trokut sa stranicama  $|AX||BC|$ ,  $|BX||CA|$ ,  $|CX||AB|$ . Dokažimo da vrijedi*

$$P(A'B'C') = P(ABC)|x\bar{x} - R^2|.$$

*Rješenje.* Iz (3.9) slijedi da je

$$P(A'B'C') = 4R^2 P(PQR),$$

gdje je  $PQR$  nožišni trokut pola  $X$  s obzirom na trokut  $ABC$ . Uvrstimo li dobivenu jednakost u (3.5), dobivamo

$$P(A'B'C') = P(ABC)|x\bar{x} - R^2|,$$

što smo i trebali dokazati.



# Bibliografija

- [1] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.
- [2] Lj. Arambašić, *Kompleksna analiza*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kompa/files/predavanja/1uvodLjA.pdf> (svibanj 2019.).
- [3] R. Deaux, *Introduction to the geometry of complex numbers*, Dover Publications Inc., New York, 2008.
- [4] C. W. Dodge, *Euclidean geometry and transformations*, Dover Publications Inc., New York, 2004.
- [5] L. S. Hahn, *Complex numbers and geometry*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1994.
- [6] H. Halas, M. Bombardelli *Izotomične točke trokuta*, Matematičko fizički list, 239 (2010.), 158-165.
- [7] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb, 2007., dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf> (lipanj 2019.).
- [8] T. Needham, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [9] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
- [10] D. Pedoe, *Geometry: A comprehensive course*, Dover Publications Inc., New York, 1998.
- [11] M. Radovanović, *Complex numbers in geometry*, dostupno na <https://pdfslide.net/documents/marko-radovanovic-complex-numbers-in-geometry.html> (srpanj 2019.)

- [12] Y. Sun, *Complex Numbers in Geometry*, dostupno na <http://yisun.io/notes/complex.pdf> (srpanj 2019.).
- [13] V. Volenec, *Baricentričke koordinate*, Osječki matematički list 15 (2015.), 1-11.
- [14] I. M. Yaglom, *Complex numbers in geometry*, Academic press, New York, 1968.

# Sažetak

Iako su stoljećima bili potpuna nepoznanica, kompleksni brojevi danas su u širokoj primjeni u matematici i znanosti općenito.

Cilj ovog diplomskog rada je zagrebati ispod površine i otkriti čari kompleksnih brojeva te pokazati kako operacijama nad njima možemo znatno olakšati rješavanje brojnih geometrijskih problema. U tu svrhu uvest ćemo operacije realnog i kompleksnog produkta kompleksnih brojeva te pomoću njih izvesti neke važne i zanimljive koncepte i rezultate iz geometrije, s naglaskom na geometriju trokuta.

# Summary

Although completely unknown for centuries, complex numbers are nowadays widely used in mathematics and science in general.

The aim of this thesis is to scratch beneath the surface and to discover the beauty of complex numbers as well as to show how operations with them can make it much easier to solve many geometric problems. For this purpose, we will introduce the operations of the real and complex product of complex numbers and use them to derive some important and interesting concepts and results in geometry, with an emphasis on triangle geometry.

# Životopis

Rođena sam 15. siječnja 1993. godine u Zagrebu. Godine 1999. upisujem osnovnu školu Ivana Gorana Kovačića gdje razvijam veliki interes za matematiku i strane jezike. Nakon završetka osnovne škole upisujem XVIII. gimnaziju u Zagrebu gdje ipak matematika postaje područje mog najvećeg interesa. Po završetku jezične gimnazije upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. U srpnju 2017. godine stječem akademski naziv prvostupnice edukacije matematike. U listopadu iste godine nastavljam školovanje na diplomskom sveučilišnom studiju Matematika, smjer; nastavnički na već spomenutom fakultetu. Na drugoj godini diplomskog studija odrađujem metodičku praksu iz matematike u osnovnoj školi Dobriše Cesarića i XV. gimnaziji u Zagrebu.

Tijekom srednje škole i studija radila sam razne učeničke i studentske poslove čime sam stekla odgovornost i sposobnost rada u timu te unaprijedila komunikacijske, organizacijske i analitičke vještine. Aktivno se služim engleskim jezikom, a pasivno francuskim i talijanskim.