

# Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja

---

**Topić, Ivan**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:155529>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Topić

SJENA ODBOJNOG RUTHERFORDOVOG  
RASPRŠENJA

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

**Ivan Topić**

Diplomski rad

**Sjena odbojnog Rutherfordovog  
raspršenja**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Petar Žugec

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem Trojedinom Bogu na daru životu.

Zahvaljujem svojoj obitelji: ocu Branku, majci Antoniji, bratu Filipu i sestri Marti na velikoj i požrtvovnoj ljubavi te neizmjernom strpljenju koje su mi iskazali.

Zahvaljujem svim svojim prijateljima i poznanicima koji su mi studiranje učinili lijepim i ugodnim. Naročito sam zahvalan prijatelju Danielu Biharu na vremenu provedenom s njime. Naši razgovori, duge šetnje i odlasci u McDonalds obilježili su me za cijeli život. Prijatelju, hvala ti što si mi pokazao što znači biti prijateljem i bratom.

Također zahvaljujem Antoniju Džeki na odanosti i potpori svake vrste (molitva, ohrabrenje, ali i suhomesnati proizvodi).

Zahvaljujem ljubavi mog života, supruzi mojoj Jeleni, koja mi je otvorila nove vidike i ni u jednom trenutku nije prestala vjerovati u mene.

Zahvaljujem mentoru doc.dr.sc. Petru Žugecu na brojnim konstruktivnim kritikama i pomoći pri izradi ovog diplomskog ispita.

## Sažetak

U ovom radu analizirana je sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja u sustavu fiksne mete i u sustavu centra mase. U sustavu fiksne mete napravljen je klasični izvod putanje projektila te je pokazano da je sjena projektila paraboloid. Također je pokazano da sjenu ne čine točke u kojima se projektil, ovisno o ulaznom parametru, najviše približava meti. Nadalje, koristeći rezultate iz sustava fiksne mete, nađene su putanje i sjene projektila i mete u sustavu centra mase. Sjene su uspoređene s onima iz sustava fiksne mete te je analizirana geometrija njihovog presjeka. Dobiveni su izrazi za opseg i površinu presjeka u dvije dimenzije te za oplošje i volumen presjeka u tri dimenzije. Vrijednosti dobivenih izraza u limesu beskonačno masivne mete uspoređene su s vrijednostima istih veličina koje se dobiju u sustavu fiksne mete te je objašnjeno nepodudaranje u rezultatima.

Ključne riječi: sjena, Rutherfordovo raspršenje, sustav fiksne mete, sustav centra mase

# Shadow of the repulsive Rutherford scattering

## Abstract

In this paper, the shadow of the repulsive Rutherford scattering is analyzed in the fixed-target frame and in the center-of-mass frame. Classical trajectories were derived in the fixed-target frame and it was shown that the shape of the shadow is a paraboloid. It was also shown that the shadow is not made out of points in which the projectile, depending on its impact parameter, comes the closest to the target. Furthermore, the results from the fixed-target frame were used to find the trajectories and shadows of the projectile and of the target in the center-of-mass frame. The shadows were compared with those in the fixed-target frame and the geometry of their cross section was analyzed. The expressions for the perimeter and the area of the 2D cross section and for the surface area and volume of the 3D cross section were obtained. The values obtained for these geometrical expressions in the limit of an infinitely massive target were compared to their values in the fixed-target frame and a discrepancy in the results was explained.

Keywords: shadow, Rutherford scattering, fixed-target frame, center-of-mass frame

# Sadržaj

|          |                                                                                       |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>                                                                           | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Teorijski uvod</b>                                                                 | <b>2</b>  |
| <b>3</b> | <b>Odbojno Rutherfordovo raspršenje u sustavu fiksne mete</b>                         | <b>4</b>  |
| 3.1      | Točka najbližeg približenja . . . . .                                                 | 9         |
| 3.2      | Zanimljivosti . . . . .                                                               | 12        |
| <b>4</b> | <b>Odbojno Rutherfordovo raspršenje u sustavu centra mase</b>                         | <b>14</b> |
| 4.1      | Analiza presjeka sjena . . . . .                                                      | 17        |
| <b>5</b> | <b>Zaključak</b>                                                                      | <b>21</b> |
| <b>6</b> | <b>Metodički dio</b>                                                                  | <b>22</b> |
| 6.1      | Značaj nastavne teme Rutherfordova modela atoma i moguće učeničke poteškoće . . . . . | 22        |
| 6.2      | Atom i modeli atoma . . . . .                                                         | 22        |
| 6.3      | Thomsonov model . . . . .                                                             | 23        |
| 6.4      | Rutherfordov model . . . . .                                                          | 24        |
| 6.5      | Istraživački usmjerena nastava . . . . .                                              | 24        |
| 6.6      | Nastavna priprema . . . . .                                                           | 25        |
|          | <b>Literatura</b>                                                                     | <b>30</b> |

# 1 Uvod

Promatrajući rezultate pokusa koje su Geiger i Marsden radili s  $\alpha$ -česticama i tankim listićima različitih metala,<sup>1-3</sup> Ernest Rutherford 1911. godine zaključuje da svaki atom ima pozitivno nabijenu jezgru<sup>4</sup> čime otvara čitavo novo područje nuklearne fizike. Raspršenje  $\alpha$ -čestica na jezgrama metala primjer je elastičnog raspršenja koje je kasnije nazvano Rutherfordovim, a ono pak podrazumijeva slučajeve i odbojnog i privlačnog kulonskog potencijala. Eksperimentalne tehnike kao što su rutherfordsko raspršenje unatrag<sup>5</sup> (eng. Rutherford Backscattering Spectrometry, RBS) i analiza detektiranog elastičnog odbijanja<sup>6</sup> (eng. Elastic Recoil Detection Analysis, ERDA) baziraju se upravo na Rutherfordovom raspršenju.

Pojam sjene (dijela prostora koji je nedostupan čestici) odbojnog Rutherfordovog raspršenja najčešće je usputno spomenut u literaturi te mu nije dana posebna pažnja. Rijetke iznimke su Sommerfeldov udžbenik mehanike<sup>7</sup> i rad Burgdörfera,<sup>8</sup> no i u tim slučajevima nema drugih rezultata osim izraza za oblik sjene. Sjenu je nemoguće dobiti u slučaju privlačnog kulonskog potencijala jer je projektil moguće kontinuirano približavati meti sve dok se putanje potpuno ne savinu oko nje, brišući tako čitav prostor.

Osim male pozornosti posvećene postojanju sjene u literaturi, motivacija za ovaj rad je i činjenica da sjena igra važnu ulogu u spektroskopiji raspršenih nisko energetskih iona<sup>9,10</sup> (Low-Energy Ion Scattering Spectroscopy, LEIS). Cilj ovog rada je izvesti oblik sjene u sustavu fiksne mete, odnosno sjenâ u sustavu centra mase te proučiti njihova svojstva. Također je cilj proučiti po čemu se sjene u navednim sustavima razlikuju, a po čemu su slične te usporediti rezultate u limesu beskonačno masivne mete.

## 2 Teorijski uvod

Gibanje dviju čestica koje ćemo zvati projektilom i metom koje međudjeluju centralnom silom (ona sila koja ima smjer duž spojnice dvaju tijela) opisano je jednadžbama

$$m_p \ddot{\vec{r}}_p = -\nabla_{\vec{r}_p} U(|\vec{r}_p - \vec{r}_m|), \quad (2.1)$$

$$m_m \ddot{\vec{r}}_m = -\nabla_{\vec{r}_m} U(|\vec{r}_p - \vec{r}_m|) \quad (2.2)$$

gdje je  $U(|\vec{r}_p - \vec{r}_m|)$  potencijalna funkcija. Važno je primijetiti

$$\nabla_{\vec{r}_p} U(|\vec{r}_p - \vec{r}_m|) = -\nabla_{\vec{r}_m} U(|\vec{r}_p - \vec{r}_m|) = \nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|) \quad (2.3)$$

gdje je

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_p - \vec{r}_m \quad (2.4)$$

pa zbrajanjem (2.1) i (2.2) dobivamo

$$m_p \ddot{\vec{r}}_p + m_m \ddot{\vec{r}}_m = 0 \implies \frac{d^2}{dt^2} (m_p \vec{r}_p + m_m \vec{r}_m) = 0 \quad (2.5)$$

iz čega zaključujemo da se centar mase, definiran s

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_m \vec{r}_m}{m_p + m_m}, \quad (2.6)$$

može gibati samo jednoliko po pravcu što je poznati rezultat<sup>11</sup> za sustav na koji je rezultantna vanjska sila jednaka nuli. Nadalje, oduzimanjem (2.1) i (2.2) te korištenjem (2.3) dobivamo poznatu jednadžbu za relativno gibanje dvaju tijela

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla_{\vec{r}} U(|\vec{r}|), \quad \mu \equiv \frac{m_p m_m}{m_p + m_m} \quad (2.7)$$

gdje je  $\mu$  reducirana masa koja je poznata pokrata u problemu dvaju tijela. Budući da samo za odbojni kulonski potencijal postoji sjena kod Rutherfordovog raspršenja,<sup>11</sup> potencijalna funkcija glasi

$$U(|\vec{r}|) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|}. \quad (2.8)$$

Ovdje su  $Z$  i  $z$  nabojni brojevi mete i projektila. Ukoliko raspišemo akceleraciju u sfernim koordinatama te uvrstimo potencijalnu funkciju (2.8) jednadžba (2.7) pos-

taje

$$\mu \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \mu \left( 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \hat{\theta} = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (2.9)$$

Nadalje, iz jednadžbe (2.9) slijedi

$$\mu \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.10)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \quad (2.11)$$

Izraz (2.11) možemo napisati kao

$$2\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}, \quad (2.12)$$

odnosno

$$2\frac{d(\ln r)}{dt} = -\frac{d(\ln \dot{\theta})}{dt} \implies \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (2.13)$$

Iz (2.13) slijedi da je veličina  $l \equiv r^2 \dot{\theta}$  sačuvana što je također dobro poznati rezultat za gibanje u polju centralne sile. Da bismo iz (2.10) dobili oblik pogodniji za razmatranje (tzv. Binetovu jednadžbu) definiramo funkciju  $u(\theta) \equiv \frac{1}{r(t)}$  te izvodimo derivacije te funkcije po kutu  $\theta$ :

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{l}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{\dot{r}}{l} \right) = \frac{dt}{d\theta} \left( -\frac{\ddot{r}}{l} \right) = -\frac{r^2}{l^2} \ddot{r}, \quad (2.15)$$

što nam omogućuje da napišemo

$$u'' + u = -\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 \mu l^2} \quad (2.16)$$

čime smo dobili jednadžbu koja nema ovisnosti o  $r$  (odnosno  $u$ ) s desne strane pa ju je moguće analitički riješiti.

### 3 Odbojno Rutherfordovo raspršenje u sustavu fiksne mete

Po definiciji sustava fiksne mete meta miruje u ishodištu koordinatnog sustava.  $Z$ -os ćemo odabrati tako da je početna brzina projektila duž  $z$ -osi, odnosno  $\dot{\vec{r}}_p(t=0) = v_0 \hat{z}$ . Projektil prilazi meti iz  $z(t=0) = -\infty$  s ulaznim parametrom  $b^1$ . Budući da projektil i meta međudjeluju Coulombovom silom, gibanje projektila ograničeno je na ravninu (posljedica djelovanja centralne sile). Stoga ćemo koristiti sferni i cilindrični sustav u kojima će putanja biti opisana koordinatama  $r$  i  $\theta$ , odnosno  $\rho$  i  $z$ , a bit će neovisna o  $\varphi$ , odnosno o rotaciji oko  $z$ -osi kako ćemo kasnije vidjeti (osna simetrija). Budući da meta miruje u ishodištu, odnosno  $\vec{r}_m = \vec{0}$ , relativna koordinata  $\vec{r}$  je upravo  $\vec{r} = \vec{r}_p$  pa vrijedi i  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_p$ . Zbog očuvanja veličine  $l$  (jednadžba (2.13)) vrijedi

$$l = |\vec{r}_p(t) \times \dot{\vec{r}}_p(t)| = |\vec{r}_p(0) \times \dot{\vec{r}}_p(0)| = bv_0. \quad (3.1)$$

Ako uzmemo u obzir (3.1) i jednadžbu (2.16) postaje

$$u'' + u = -\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0\mu b^2 v_0^2}. \quad (3.2)$$

Ovdje smo izabrali pisati početnu brzinu, a ne kutnu količinu gibanja ili energiju jer će brzina  $v_0$ , budući da se radi o relativnoj brzini, ostati jednaka u svim koordinatnim sustavima što je korisno kada ćemo proučavati sustav centra mase. Nadalje, uvodimo pokratu (koja ima dimenziju duljine!)

$$k \equiv \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0\mu v_0^2} \quad (3.3)$$

pa je općenito rješenje ove jednadžbe

$$u(\theta) = u_0 \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{b^2}, \quad (3.4)$$

gdje je prvi faktor homogeno i drugi partikularno rješenje jednadžbe, a  $u_0$  i  $\theta_0$  ćemo pronaći iz početnih uvjeta. Vraćajući se na definiciju funkcije  $u(\theta)$  iz (3.2) možemo

---

<sup>1</sup>Početna udaljenost projektila od  $z$ -osi.

napisati

$$r(\theta) = \frac{1}{u_0 \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{b^2}}. \quad (3.5)$$

Prvi rubni uvjet je  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} r(\theta) = \infty$ :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{u_0 \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{b^2}} = \frac{1}{-u_0 \cos \theta_0 - \frac{k}{b^2}} = \infty \quad (3.6)$$

iz čega slijedi

$$u_0 = -\frac{k}{b^2 \cos \theta_0}. \quad (3.7)$$

Drugi rubni uvjet je  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} r(\theta) \sin \theta = b$  te ga, koristeći (3.7), možemo pisati kao:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{-\frac{k}{b^2 \cos \theta_0} \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{b^2}} = b. \quad (3.8)$$

Budući da su i brojnik i nazivnik u zadanom limesu jednaki nuli, koristimo L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{-\frac{k}{b^2 \cos \theta_0} \cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{b^2}} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\cos \theta}{\frac{k}{b^2 \cos \theta_0} \sin(\theta - \theta_0)} = \frac{-b^2}{k \tan \theta_0} = b \quad (3.9)$$

iz čega dobivamo

$$\theta_0 = \arctan \left( -\frac{b}{k} \right) + n\pi \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Budući da su  $b$  i  $k$  pozitivne konstante, argument funkcije  $\arctan$  je negativan. Iz definicije

$$\arctan : \langle -\infty, \infty \rangle \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \quad (3.11)$$

zaključujemo

$$\arctan \left( -\frac{b}{k} \right) \in [-\pi/2, 0]. \quad (3.12)$$

S druge strane, budući da kut  $\theta$  po definiciji ima vrijednosti u intervalu  $[0, \pi]$ , zaključujemo da je u izrazu (3.10)  $n = 1$ , odnosno

$$\theta_0 = \pi + \arctan \left( -\frac{b}{k} \right) = \pi - \arctan \frac{b}{k} \quad (3.13)$$

jer je  $\arctan$  neparna funkcija. Koristeći (3.13) i (3.7) dobivamo konačni oblik putanje:

$$r(\theta; b) = \frac{b^2}{-\sqrt{k^2 + b^2} \cos\left(\theta + \arctan \frac{b}{k}\right) - k}. \quad (3.14)$$

Dobiveni izraz je tipična jednačba čunjosječnice u polarnim koordinatama. Da bismo odredili o kojoj se čunjosječnici radi korisno je brojnik i nazivnik podijeliti s  $k$  jer je tada konstanta uz funkciju  $\cos$  upravo ekscentricitet te čunjosječnice, a iz njega zaključujemo o kojoj je vrsti krivulje riječ. Dakle, dijeljenjem s  $k$  izraz (3.14) postaje

$$r(\theta; b) = \frac{\frac{b^2}{k}}{-\sqrt{1 + \frac{b^2}{k^2}} \cos\left(\theta + \arctan \frac{b}{k}\right) - 1}. \quad (3.15)$$

iz čega je vidljivo

$$|e| = \sqrt{1 + \frac{b^2}{k^2}} > 1. \quad (3.16)$$

Zaključujemo da se radi o hiperboli što je već poznati rezultat za kulonsko raspršenje.<sup>11</sup> Drugim riječima, za odbojni potencijal moguće je dobiti samo hiperbolu kao krivulju. Hiperbola ima dvije asimptote koje pronalazimo rješavajući limes

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r; b) \implies \begin{cases} \theta_1 = \pi \\ \theta_2 = \pi - 2 \arctan \frac{b}{k} \end{cases} \quad (3.17)$$

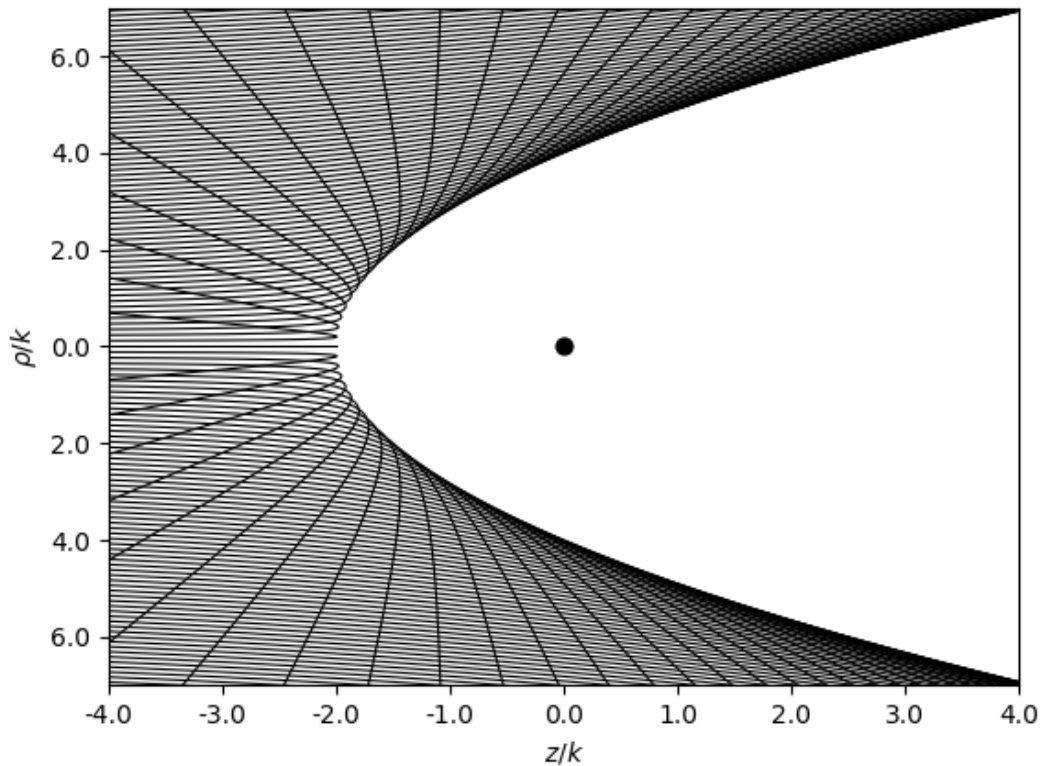
Prva asimptota je pod kutem  $\theta_1 = \pi$  što je jednostavno rekonstrukcija početnih uvjeta: za kut  $\pi$  čestica je beskonačno udaljena od mete. Posljedica djelovanja Coulombove sile je raspršenje na meti pa projektil mijenja smjer gibanja te se asimptotski približava pravcu koji sa  $z$  osi zatvara kut  $\theta_2 = \pi - 2 \arctan \frac{b}{k}$ . Taj kut, kut pod kojim se projektil raspršuje na meti, naziva se kutom raspršenja i označavat ćemo ga s  $\Theta$ . Nadalje, uz prikladno skaliranje s  $k$  možemo dobiti univerzalni oblik jednačbe putanje projektila (3.14)

$$\frac{r(\theta; b)}{k} = f\left(\theta; \frac{b}{k}\right) = \frac{\frac{b^2}{k^2}}{-\sqrt{1 + \frac{b^2}{k^2}} \cos\left(\theta + \arctan \frac{b}{k}\right) - 1}. \quad (3.18)$$

Drugim riječima, dijeljenjem jednadžbe (3.15) s  $k$  dobili smo funkciju položaja koja ovisi samo o kutu  $\theta$  i bezdimenzionalnoj veličini  $\frac{b}{k}$ . To nam sugerira da je  $k$  prirodna skala Rutherfordovog raspršenja, odnosno da su bitne udaljenosti poput udaljenosti tjemena od ishodišta reda veličine  $k$ . U grafovima ćemo koristiti upravo skalirane koordinate. Korisnom će se pokazati i formula koju možemo dobiti raspisivanjem nazivnika u izrazu (3.14):

$$r(\theta; b) = \frac{b^2}{b \sin \theta - k(1 + \cos \theta)}. \quad (3.19)$$

Iz slike 3.1 može se pretpostaviti da je oblik sjene parabola, odnosno, ako poopćimo na tri dimenzije, paraboloid. Tu činjenicu možemo pokazati na sljedeći način: za svaki kut  $\theta$  postoji jedinstvena putanja određena ulaznim parametrom  $b$  koja dodiruje krivulju sjene. Vezu između tog kuta i ulaznog parametra dobivamo minimizirajući  $r(\theta; b)$  iz (3.19) po  $b$ :



Slika 3.1: Slika prikazuje dijelove putanja projektila za razne vrijednosti ulaznog parametra.

$$\left. \frac{dr}{db} \right|_{b=\tilde{b}} = \frac{2\tilde{b} [\tilde{b} \sin \theta - k(1 + \cos \theta)] - \tilde{b}^2 \sin \theta}{[\tilde{b} \sin \theta - k(1 + \cos \theta)]^2} = 0 \implies \tilde{b} = 2k \cot \frac{\theta}{2}. \quad (3.20)$$

Ako substituiramo (3.20) u (3.14) dobivamo

$$r_b(\theta) = \frac{4k}{1 - \cos \theta}. \quad (3.21)$$

Ekscentricitet je  $|e| = 1$  pa zaključujemo da se radi o paraboli. To također vidimo raspisivanjem ove jednadžbe u cilindričnim koordinatama:

$$\rho(\theta) = r \sin \theta = \frac{4k}{\tan \frac{\theta}{2}} \quad (3.22)$$

$$z(\theta) = r \cos \theta = 2k \left( \cot^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \quad (3.23)$$

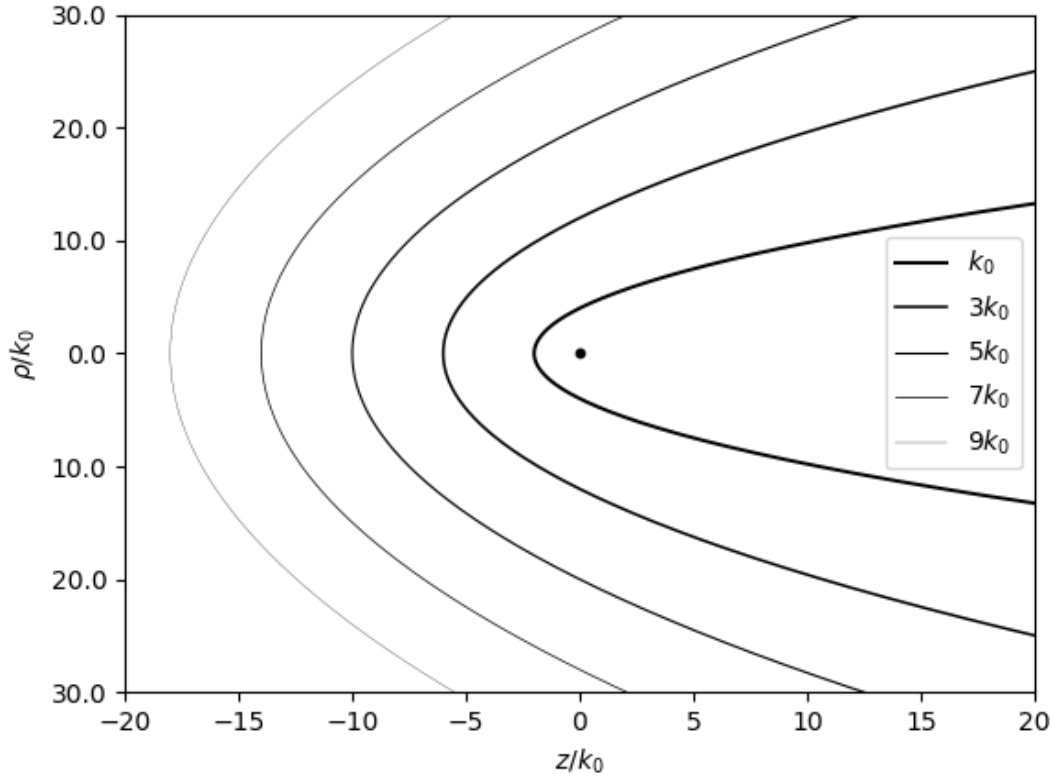
iz čega dobivamo

$$\rho^2 = 8kz + 16k^2 = 2 \cdot 4k(z + 2k). \quad (3.24)$$

Vidljivo je da je da oblik sjene zaista parabola i to s tjemenom u  $(-2k, 0)$  i parametrom parabole  $4k$ . Udaljenost između tjemena i fokusa je pola parametra parabole, odnosno  $2k$ , a to znači da se fokus parabole nalazi u ishodištu, odnosno da je meta u fokusu ove parabole. Ove brojeve također možemo shvatiti kao potvrdu postojanja prirodne skale za problem Rutherfordovog raspršenja. Iz (3.24) može se izvesti oblik koji ćemo kasnije više koristiti:

$$z = \frac{1}{8k} \rho^2 - 2k. \quad (3.25)$$

Faktor ispred  $\rho^2$  zvat ćemo parametrom tvrdoće (eng. stiffness parameter). Što je on veći, to je parabola manje otvorena. Za sada je bitno primjetiti da će se povećanjem konstante  $k$  smanjiti tvrdoća, a udaljenost tjemena od ishodišta (mete) će se povećati (slika 3.2). Iz izraza (3.3) vidljivo je da je  $k$  proporcionalan naboju mete i projektila, a obrnuto proporcionalan reduciranoj masi i kvadratu brzine. Ako promatramo par projektil-meta bez da mijenjamo naboje onda  $k$  ovisi samo o brzini projektila. Utjecaj brzine na oblik i položaj sjene je lako objasniti: što projektil ima manju kinetičku energiju manje se približava meti zbog njene odbojne sile (tjeme se udaljava od ishodišta) te mu je kut raspršenja veći (sjena je manje tvrda).



Slika 3.2: Sjene za različite vrijednosti konstante  $k$  skalirane s proizvoljno vrijednošću  $k_0$ .

### 3.1 Točka najbližeg približenja

Intuitivno bismo mogli očekivati da putanje projektila dodiruju dobivenu parabolu u točkama najmanje udaljenosti projektila od mete. Takvu točku za zadani ulazni parametar  $b$  ćemo zvati točkom najbližeg približenja. Kako bismo provjerili je li ta intuicija točna potrebno je minimizirati funkciju  $r(\theta; b)$  po  $\theta$  (upotrijebit ćemo izraz (3.19)):

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{\text{TNP}}} = -b^2 \frac{b \cos \theta_{\text{TNP}} + k \sin \theta_{\text{TNP}}}{[b \sin \theta_{\text{TNP}} - k(1 + \cos \theta_{\text{TNP}})]^2} = 0 \implies \theta_{\text{TNP}} = \pi - \arctan \frac{b}{k} \quad (3.26)$$

čime dobivamo kut  $\theta_{\text{TNP}}$  za koji je projektil ulaznog parametra  $b$  najbliži meti. Supstitucijom tog izraza u (3.14) dobivamo krivulju koju čine točke najbližeg približenja:

$$r_{\text{TNP}}(b) = \frac{b^2}{\sqrt{k^2 + b^2} - k}. \quad (3.27)$$

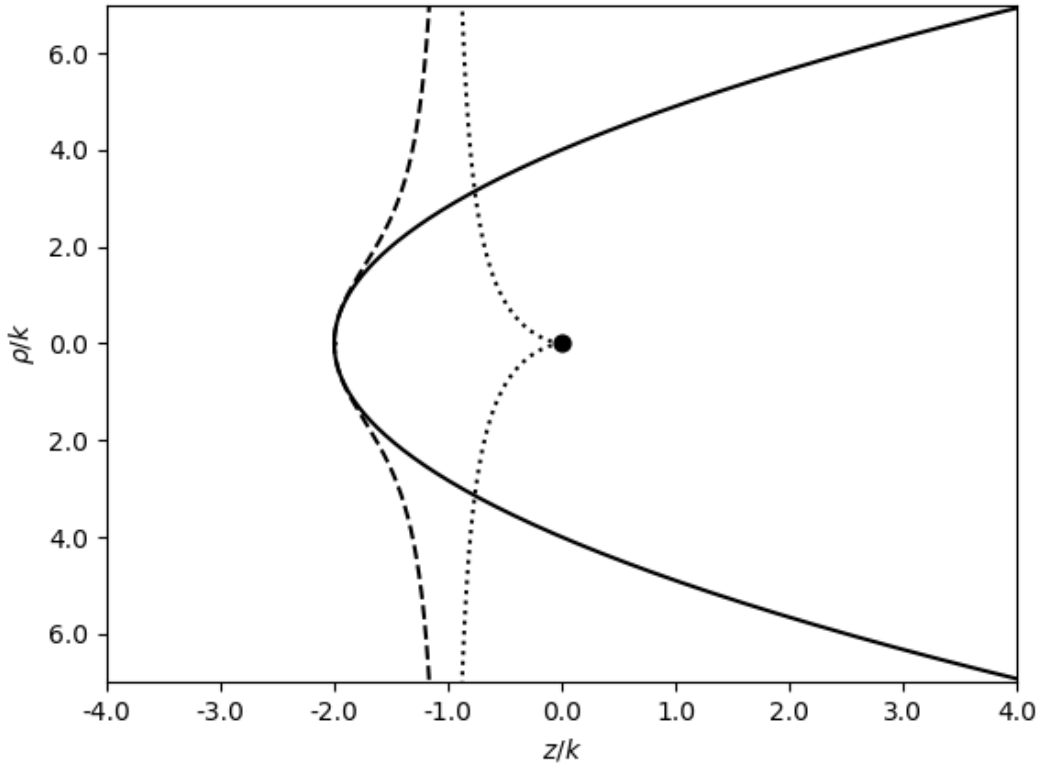
Ovaj oblik je parametarski dok je oblik u sfernim koordinatama

$$r_{\text{TNP}}(\theta) = k \left( 1 - \frac{1}{\cos \theta} \right), \quad (3.28)$$

a u cilindričnim

$$\rho^2 = -\frac{z^4 + 2kz^3}{(z+k)^2} \implies \rho_{\text{TNP}}(z) = \pm \frac{z\sqrt{-z^2 - 2kz}}{z+k}. \quad (3.29)$$

Iz ove jednadžbe vidimo da je funkcija  $\rho_{\text{TNP}}(z)$  dobro definirana samo za  $z \in \langle -2k, 0 \rangle$  te da ima asimptotu u  $z = -k$ . Obje činjenice su vidljive na slici 3.3 koja sadrži graf funkcije  $\rho_{\text{TNP}}(z)$  i sjenu. Važno je primjetiti da je dio funkcije  $\rho_{\text{TNP}}(z)$  nefizikalan za  $z \in \langle -k, 0 \rangle$  jer bi to značilo da čestica ulazi u sjenu. Također, slika 3.3 pobija početnu intuiciju da je sjena skup točaka najbližeg približenja.



Slika 3.3: Sjenu Rutherfordovog raspršenja crtana je punom crtom. Krivulja koju čine točke najbližeg približenja nacrtana je crtkano, a nefizikalni dio te krivulje točkasto.

Iako je pojam točke najbližeg približenja koristan pojam, bitno je dodatno ga razjasniti. Naime, taj pojam ne označava točku koja je najbliže meti za zadani  $\theta$ , već točku u kojoj je projektil najbliže meti za zadani ulazni parametar  $b$ . Drugim riječima, za

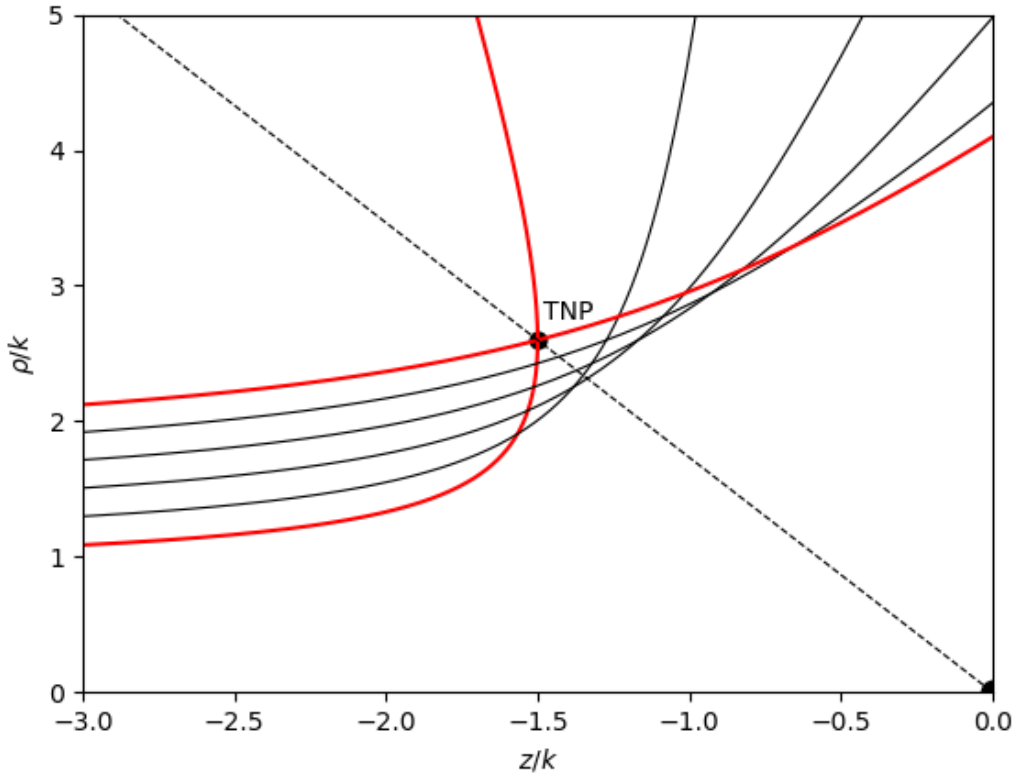
svaki kut  $\theta$  postoji interval vrijednosti ulaznog parametra za koje projektil prilazi meti bliže od točke najbližeg približenja (slika 3.4). Ako s  $b_0$  označimo ulazni parametar projektila koji za neki kut  $\theta_0$  ima točku najbližeg približenja, onda ćemo spomenuti interval dobiti rješavanjem nejednadžbe

$$r(\theta_0; b) < r(\theta_0; b_0). \quad (3.30)$$

Rješenje je interval

$$b \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{k^2}}}, b_0 \right\rangle, \quad (3.31)$$

a poveznica između  $b_0$  i  $\theta_0$  je jednadžba (3.26).



Slika 3.4: Crtkana crta je spojnica mete i točke najbližeg približenja za kut  $\theta_0 = 120^\circ$ . Crvenom bojom su označene putanje s ulaznim parametrima koji odgovaraju granicama intervala u (3.31). Za te dvije putanje projektil je jednako udaljen od mete za kut  $\theta_0$ . Ostale imaju ulazni parametar čija je vrijednost unutar intervala u (3.31) i vidljivo je da je projektil na tim putanjama bliži meti od točke najbližeg približenja.

### 3.2 Zanimljivosti

Poznata je činjenica da je radij-vektor projektila okomit na vektor brzine u točki najbližeg približenja što se može pokazati na sljedeći način: skalarni umnožak radij-vektora i vektora brzine projektila je

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{r}^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \frac{d(\vec{r}^2)}{d\theta}, \quad (3.32)$$

a uvrstimo li umjesto  $\vec{r}$  izraz (3.19) i (3.26) dobivamo

$$\vec{r}_{TNP} \cdot \dot{\vec{r}}_{TNP} = 0. \quad (3.33)$$

Ova činjenica se ne vidi na slici 3.4 jer su jedinične duljine koordinatnih osi različite pa je pravi kut prividno deformiran.

Druga zanimljivost na koju je vrijedno svratiti pažnju je da u nazivniku položaja projektila (3.14) oba faktora imaju negativan predznak što bi ispočetka izgledalo kao problem jer je položaj pozitivno definitna veličina. Rješavanje nejednadžbe koja proizlazi iz te činjenice,

$$-\sqrt{k^2 + b^2} \cos\left(\theta + \arctan \frac{b}{k}\right) - k > 0, \quad (3.34)$$

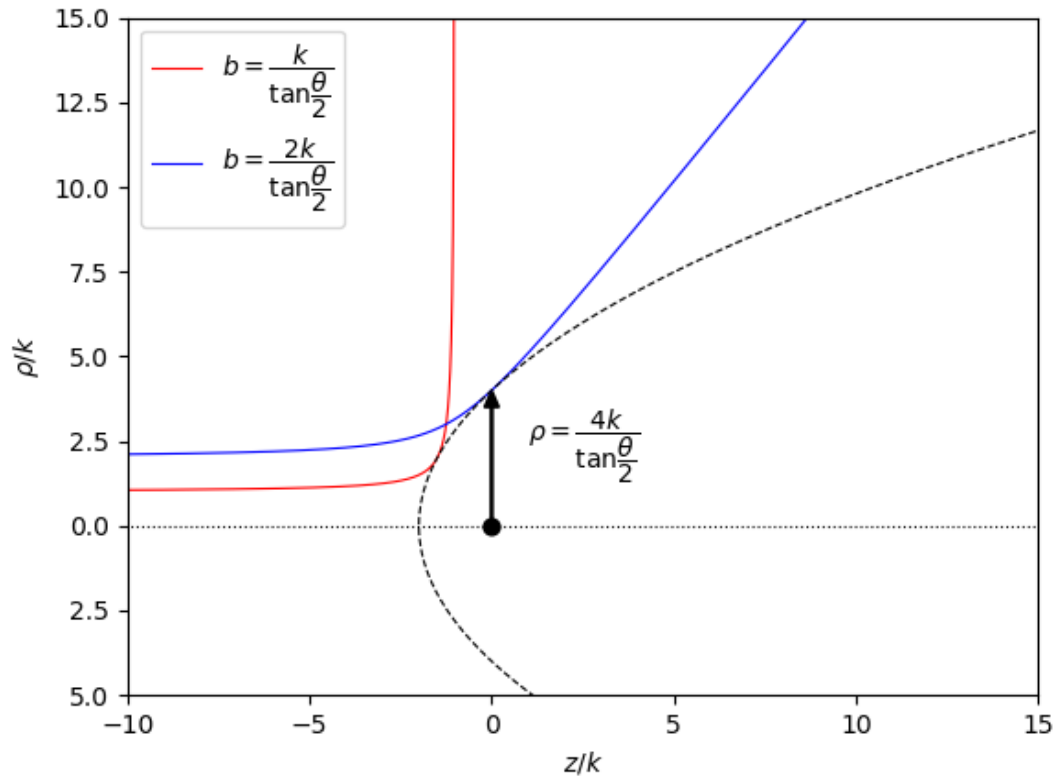
daje dozvoljene vrijednosti kuta  $\theta \in \left\langle \pi - 2 \arctan \frac{b}{k}, \pi \right\rangle$ . Rubovi ovog intervala su upravo asimptote iz (3.17) što znači da je  $r(\theta; b) > 0$ , odnosno da je položaj projektila dobro definiran.

Treća zanimljivost je da se u analizi sjene Rutherfordovog raspršenja pojavljuju tri slične veličine koje je potrebno razlučiti:

$$\frac{k}{\tan \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{2k}{\tan \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{4k}{\tan \frac{\theta}{2}}. \quad (3.35)$$

Prvu od njih izvodimo iz jednadžbe (3.17), odnosno možemo je tumačiti kao ulazni parametar putanje za koju je  $\theta$  kut raspršenja. Druga veličina se pojavljuje kod izvoda oblika sjene u jednadžbi (3.20), odnosno tumačimo je kao ulazni parametar putanje koja dotiče sjenu za kut  $\theta$ . Treća veličina se javlja kad prebacujemo jednadžbu sjene u cilindrične koordinate u jednadžbi (3.22), a tumačimo je kao  $\rho$  koordinatu projektila koji dira sjenu za kut  $\theta$ . Drugim riječima, projektilu s ulaznim parametrom  $\frac{2k}{\tan \frac{\theta}{2}}$  je  $\rho$

koordinata dvostruko veća od ulaznog parametra u trenutku doticanja sjene. Sve tri veličine su nacrtane na slici 3.5.



Slika 3.5: Sjena i putanje određene ulaznim parametrima  $\frac{k}{\tan \frac{\theta}{2}}$  i  $\frac{2k}{\tan \frac{\theta}{2}}$ .

## 4 Odbojno Rutherfordovo raspršenje u sustavu centra mase

Položaj centra mase dvaju tijela definiran je izrazom (2.6), a u terminima mete i projektila ga možemo zapisati kao

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_m \vec{r}_m}{m_p + m_m}. \quad (4.1)$$

U sustavu centra mase po definiciji vrijedi  $\vec{R}_{\text{cm}}^{\text{cm}} = \vec{0}$  gdje eksponent cm označava da se radi o radij-vektoru u sustavu centra mase. Drugim riječima, vrijedi

$$m_p \vec{r}_p^{\text{cm}} + m_m \vec{r}_m^{\text{cm}} = \vec{0}. \quad (4.2)$$

Kako bismo našli putanje projektila i mete u ovom sustavu potrebno je povezati relativnu koordinatu  $\vec{r}$  s vektorima  $\vec{r}_p^{\text{cm}}$  i  $\vec{r}_m^{\text{cm}}$ . Budući da relativna koordinata  $\vec{r}$  ne ovisi o izboru koordinatnog sustava moguće je napisati je kao

$$\vec{r} = \vec{r}_p^{\text{cm}} - \vec{r}_m^{\text{cm}} \quad (4.3)$$

iz čega se, koristeći (4.2), dobiva

$$\vec{r}_p^{\text{cm}} = \frac{m_m}{m_p + m_m} \vec{r} \quad (4.4)$$

$$\vec{r}_m^{\text{cm}} = -\frac{m_p}{m_p + m_m} \vec{r}. \quad (4.5)$$

Iz istog razloga vektor smjera i kut  $\theta$  nije potrebno mijenjati jer se centar mase, odnosno ishodište novog referentnog sustava nalazi na spojnici projektila i mete. Drugim riječima, putanje u sustavu centra mase nije potrebno ispočetka računati već ih se može pisati pomoću (3.14) ili (3.19) uzimajući u obzir suprotnu orijentaciju radij-vektora projektila i mete. Jedina razlika su koeficijenti  $\eta_p$  i  $\eta_m$  definirani na sljedeći način:

$$\eta_p \equiv \frac{m_m}{m_p + m_m} \implies \vec{r}_p^{\text{cm}} = \eta_p \vec{r} \quad (4.6)$$

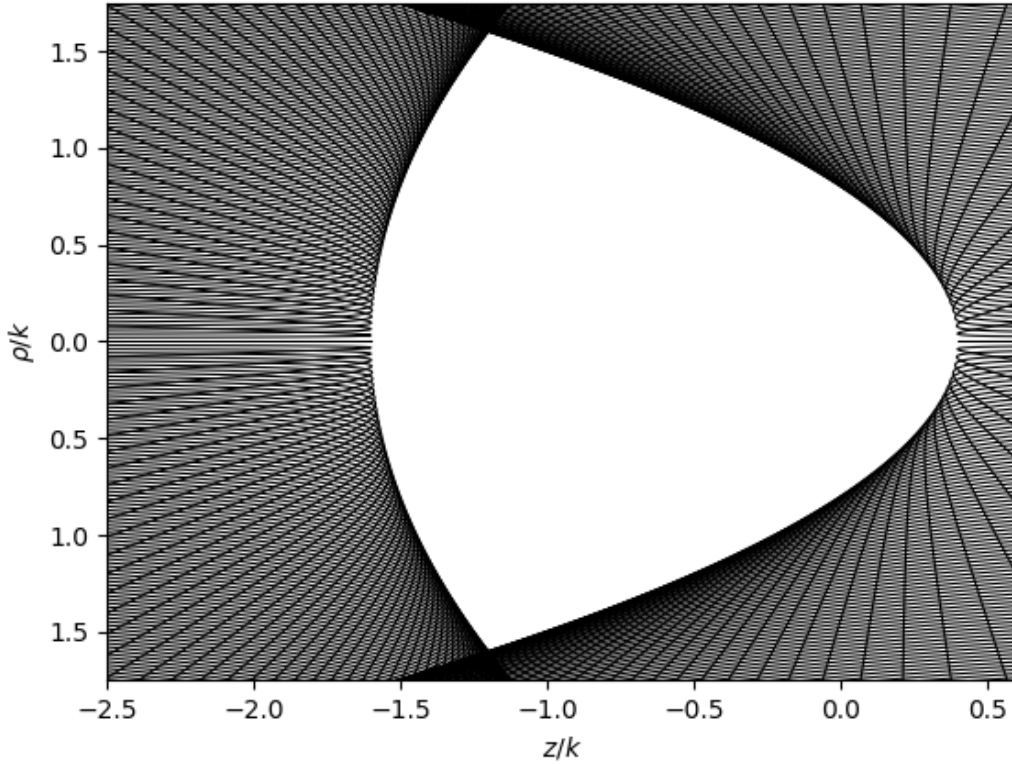
$$\eta_m \equiv -\frac{m_p}{m_p + m_m} \implies \vec{r}_m^{\text{cm}} = \eta_m \vec{r}. \quad (4.7)$$

Slika 4.1 prikazuje putanje projektila i mete u sustavu centra mase i njihove sjene. Usporedbom s izvodima u sustavu fiksne mete dolazimo do jednadžbi sjenâ

$$z_p = \frac{1}{8k\eta_p} \rho_p^2 - 2k\eta_p, \quad (4.8)$$

$$z_m = \frac{1}{8k\eta_m} \rho_m^2 - 2k\eta_m. \quad (4.9)$$

Sjene su istog oblika kao sjena u sustavu fiksne mete do na faktor  $\eta_{p,m}$ . Zbog toga možemo zaključiti da te sjene imaju tjemenâ u točkama  $(-2k\eta_{p,m}, 0)$  te da je ishodište, odnosno centar mase, u njihovom fokusu. Da bismo lakše proučavali ove parabolične sjene, korisno je pobliže pogledati umnožak  $k\eta_{p,m}$  koji određuje tvrdoću tih parabola.



Slika 4.1: S lijeve strane su putanje projektila, a s desne mete u sustavu centra mase.

Iz jednadžbe (3.3) vidljivo je

$$k \propto \frac{1}{\mu} = \frac{m_p + m_m}{m_p m_m} \quad (4.10)$$

pa je

$$\frac{1}{k\eta_{p,m}} \propto \frac{m_p m_m}{m_p + m_m} \frac{m_p + m_m}{m_{m,p}} = m_{p,m}. \quad (4.11)$$

Zanimljivo je primjetiti da promatrani umnožak, odnosno faktor tvrdoće, ovisi samo o jednoj masi, a ne o obje kako bismo očekivali u sustavu centra mase. Drugim riječima, što je masa projektila ili mete veća to će pripadajuća sjena biti tvrđa, neovisno o masi onog drugog.

Uspoređujući sjene u sustavu centra mase i u sustavu fiksne mete zaključujemo da sjena u sustavu fiksne mete ima manji parametar tvrdoće, odnosno da je otvorenija. Intuitivno bismo stoga mogli zaključiti da projektil ulaznog parametra  $b$  ima veći kut raspršenja u sustavu fiksne mete. No, ako ponovimo postupak za pronalaženje kuta raspršenja u ovisnosti o ulaznom parametru, dobivamo istu jednadžbu kao u sustavu fiksne mete što je poznati rezultat:<sup>11</sup>

$$\Theta_p^{\text{cm}} = 2 \arctan \frac{k}{b}. \quad (4.12)$$

Osim iz samoga izvoda, već smo iz jednadžbi (4.6) i (4.7) mogli zaključiti da će kut raspršenja ostati isti jer skaliranje ne rezultira promjenom kuteva.

Nadalje, u limesu  $m_m \rightarrow \infty$  valja primjetiti da vrijedi

$$\eta_p \equiv \frac{m_m}{m_p + m_m} \rightarrow 1 \implies \vec{r}_p^{\text{cm}} = \vec{r} \quad (4.13)$$

$$\eta_m \equiv -\frac{m_p}{m_p + m_m} \rightarrow 0 \implies \vec{r}_m^{\text{cm}} = \vec{0}, \quad (4.14)$$

odnosno da se sjene u sustavu centra mase u limesu  $m_m \rightarrow \infty$  podudaraju s onima iz sustava fiksne mete, a to potvrđuje i izraz (4.8) koji u promatranom limesu postaje

$$z_p = \frac{1}{8k} \rho_p^2 - 2k. \quad (4.15)$$

Ovaj izraz isti je kao (3.25), odnosno opisuje krivulju sjene u sustavu fiksne mete. S druge strane, u promatranom limesu tvrdoća sjene mete (izraz (4.9)) je beskonačno velika pa ima oblik polupravca, odnosno spljoštene parabole što se kosi s činjenicom da je sjena mete u sustavu fiksne mete čitav prostor (naime, budući da meta u sustavu fiksne mete miruje, onda joj je čitav prostor nedozvoljen).

## 4.1 Analiza presjeka sjena

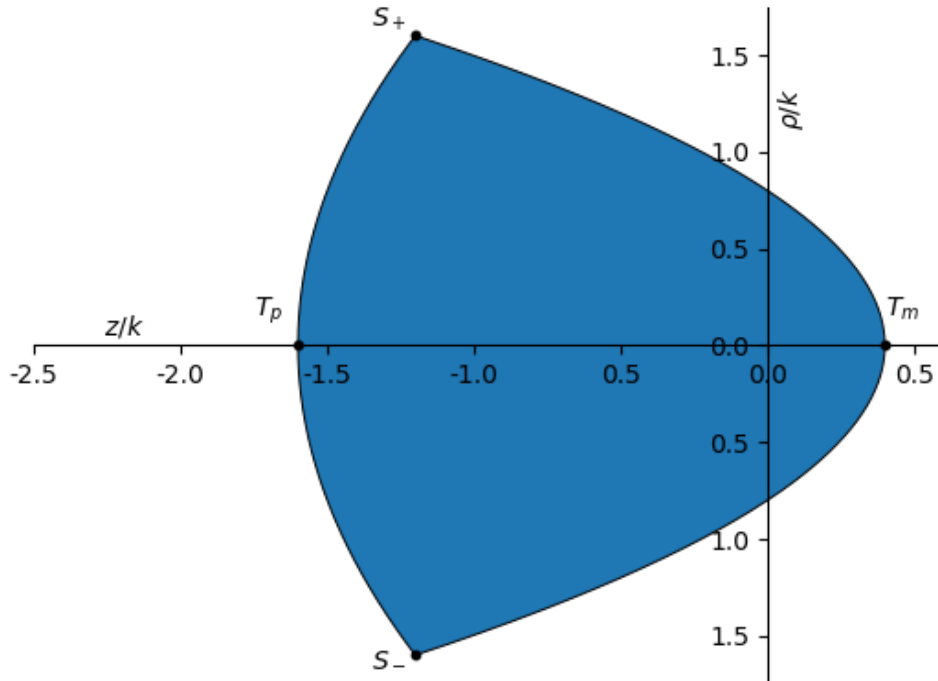
Korisna vježba integracije je računanje opsega i površine presjeka parabolâ, odnosno oplošja i volumena presjeka paraboloida (slika 4.2). Prvo je potrebno odrediti sjecište parabola, a to možemo tako da riješimo sustav jednadžbi (4.9) i (4.8)

$$\begin{cases} z = \frac{1}{8k\eta_p}\rho^2 - 2k\eta_p \\ z = \frac{1}{8k\eta_m}\rho^2 - 2k\eta_m \end{cases}$$

iz čega slijedi da je sjecište paraboloida kružnica čiji su polumjer i položaj središta dani s

$$\rho = 4k\sqrt{-\eta_p\eta_m} \quad (4.16)$$

$$z = -2k(\eta_p + \eta_m). \quad (4.17)$$



Slika 4.2: Slika prikazuje presjek sjenâ mete i projektila u sustavu centra mase u dvije dimenzije za  $\eta_p = 0.8$ ,  $\eta_m = -0.2$ . Točke  $T_p$  i  $T_m$  označavaju tjemena, a  $S_+$  i  $S_-$  sjecišta dviju parabola.

Opseg se računa kao integral pomaka po parabolama koje određuje promatranu površinu. Ovdje ćemo ih označiti s  $\gamma_p$  i  $\gamma_m$  pa je opseg

$$o = 2 \left( \int_{\gamma_p} dl + \int_{\gamma_m} dl \right) \quad (4.18)$$

gdje faktor dva uračunava činjenicu da je promatrana površina simetrična s obzirom na  $z$  os. Diferencijal pomaka se može napisati preko Pitagorinog poučka i tu se odabire po kojoj će se koordinati vršiti integracija:

$$dl = \sqrt{(dz)^2 + (d\rho)^2} = d\rho \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2} = d\rho \sqrt{\frac{\rho^2}{1 + 4k\eta_{m,p}}} \quad (4.19)$$

$$dl = \sqrt{(dz)^2 + (d\rho)^2} = dz \sqrt{1 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2} = dz \sqrt{\frac{z + 4k\eta_{m,p}}{z + 2k\eta_{m,p}}}. \quad (4.20)$$

Koristi se  $\eta_m$  ili  $\eta_p$ , ovisno duž koje parabole (sjene) integriramo. Dakle, dva moguća načina računanja opsega su:

$$o = 2 \left( \int_0^{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}} d\rho \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{4k\eta_p}} + \int_{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}}^0 d\rho \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{4k\eta_m}} \right) \quad (4.21)$$

$$o = 2 \left( \int_{-2k\eta_p}^{-2k(\eta_p+\eta_m)} dz \sqrt{\frac{z + 4k\eta_{m,p}}{z + 2k\eta_{m,p}}} + \int_{-2k(\eta_p+\eta_m)}^{-2k\eta_m} dz \sqrt{\frac{z + 4k\eta_{m,p}}{z + 2k\eta_{m,p}}} \right) \quad (4.22)$$

gdje je integral opsega potrebno razdvojiti na dva jer je promatrana krivulja sastavljena od dviju parabola. Rezultat je

$$o = 4k (\sqrt{-\eta_m} + \sqrt{\eta_p}) + 4k \left( \eta_p \operatorname{Arsh} \sqrt{-\frac{\eta_m}{\eta_p}} - \eta_m \operatorname{Arsh} \sqrt{-\frac{\eta_p}{\eta_m}} \right). \quad (4.23)$$

Nadalje, površinu računamo na dva načina:

$$P = \int_{\rho(S_-)}^{\rho(S_+)} z d\rho = \int_{z(T_p)}^{z(T_m)} \rho dz \quad (4.24)$$

Kao i kod integrala opsega nužno je dodati faktor 2 ispred te razdvojiti integral na

dva:

$$P = 2 \left[ \int_0^{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}} d\rho \left( \frac{1}{8k\eta_p} \rho^2 - 2k\eta_p \right) + \int_{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}}^0 d\rho \left( \frac{1}{8k\eta_m} \rho^2 - 2k\eta_m \right) \right]. \quad (4.25)$$

$$P = 2 \left( \int_{-2k\eta_p}^{-2k(\eta_p+\eta_m)} dz \sqrt{8k\eta_p z + 16k^2\eta_p^2} + \int_{-2k(\eta_p+\eta_m)}^{-2k\eta_m} dz \sqrt{8k\eta_m z + 16k^2\eta_m^2} \right), \quad (4.26)$$

a rezultat obiju jednadžbi je

$$P = \frac{32}{3} k^2 \sqrt{-\eta_p\eta_m}. \quad (4.27)$$

Kako bi se izračunalo oplošje presjeka ovih paraboloida najlakše je podijeliti oplošje na koncentrične kružne trake površine  $dA = 2\pi\rho dl$  gdje je  $\rho(z)$  polumjer kružne trake iz izrazâ (4.8) i (4.9), a  $dl$  ponovno diferencijal duž parabole iz izrazâ (4.19) i (4.20). Iz gore navedenih izraza slijede opet dvije opcije

$$O = \int_{z(T_p)}^{z(T_m)} 2\pi\rho dz \sqrt{1 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2} \quad (4.28)$$

$$O = \int_0^{\rho(S_+)} 2\pi\rho d\rho \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2} \quad (4.29)$$

koje je potrebno razdvojiti na dva integrala - jedan po paraboloidu:

$$O = 2\pi \int_0^{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}} \rho d\rho \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{16k^2\eta_p^2}} + 2\pi \int_{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}}^0 \rho d\rho \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{16k^2\eta_m^2}} \quad (4.30)$$

$$O = 2\pi \int_{-2k\eta_p}^{-2k(\eta_p+\eta_m)} dz \sqrt{8k\eta_p z + 32k^2\eta_p^2} + 2\pi \int_{-2k(\eta_p+\eta_m)}^{-2k\eta_m} dz \sqrt{8k\eta_m z + 32k^2\eta_m^2} \quad (4.31)$$

što daje rezultat

$$O = \frac{32k^2}{3} \left( -\eta_p^2 - \eta_m^2 + \sqrt{\eta_p} + \sqrt{-\eta_m} \right). \quad (4.32)$$

Na sličan način moguće je pronaći volumen presjeka ovih paraboloida. Za diferencijal volumena najlakše je uzeti disk radijusa  $\rho$  i visine  $dz$  pa vrijedi  $dV = \rho^2\pi dz$  što

možemo napisati na dva načina:

$$V = \frac{\pi}{4k\eta_p} \int_0^{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}} \rho^3 d\rho + \frac{\pi}{4k\eta_m} \int_{4k\sqrt{-\eta_p\eta_m}}^0 \rho^3 d\rho \quad (4.33)$$

$$V = \pi \int_{-2k\eta_p}^{-2k(\eta_p+\eta_m)} (8k\eta_p z + 16k^2\eta_p^2) dz + \pi \int_{-2k(\eta_p+\eta_m)}^{-2k\eta_m} (8k\eta_m z + 16k^2\eta_m^2) dz \quad (4.34)$$

pa je rezultat

$$V = -16\pi k^3 \eta_p \eta_m. \quad (4.35)$$

Zanimljivo je ponovno pogledati što se događa sa dobivenim izrazima za opseg, površinu, oplošje i volumen presjeka sjenâ u limesu  $m_m \rightarrow \infty$ . Tim limesom vraćamo se natrag u sustav fiksne mete gdje je presjek sjenâ upravo sjena projektila, odnosno beskonačno veliki poluprostor. Drugim riječima, vrijednosti navedenih geometrijskih veličina bi trebale biti beskonačno velike. Računanje limesa daje rezultate

$$\lim_{m_m \rightarrow \infty} o = 4k, \quad \lim_{m_m \rightarrow \infty} P = 0 \quad (4.36)$$

$$\lim_{m_m \rightarrow \infty} O = 0, \quad \lim_{m_m \rightarrow \infty} V = 0 \quad (4.37)$$

iz čega vidimo da ni jedna veličina u limesu  $m_m \rightarrow \infty$  ne daje očekivani rezultat. Ovo je slično uspoređivanju sjene mete u sustavu centra mase i u sustavu fiksne mete. Sjena mete u gore navedenom limesu postala je polupravac, a trebala je biti čitav prostor. Ta dva primjera su primjeri artefakata koji se javljaju pri prelasku iz sustava u sustav, a razlog je taj što je u sustavu fiksne mete  $z_m(t=0) = 0$ , a u sustavu centra mase  $z_m^{\text{cm}}(t=0) = +\infty$ .

## 5 Zaključak

Cilj ovog rada bio je dati dublji uvid u sjenu koja se pojavljuje kod odbojnog Rutherfordovog raspršenja. U sustavu fiksne mete pokazano je da sjena projektila ima oblik paraboloida i da je ne čine tzv. točke najbližeg približenja te da je sjena mete cijeli prostor. U sustavu centra mase pokazano je da su sjene obiju čestica, projektila i mete, također paraboloidi koji se međusobno razlikuju po parametru tvrdoće i udaljenosti tjemena od ishodišta, a također se i razlikuju od sjene u sustavu fiksne mete. Nađeni su i izrazi za opseg, površinu, oplošje i volumen presjeka dviju sjena u sustavu centra mase te je pokazano da njihove vrijednosti u limesu beskonačno masivne mete ne odgovaraju vrijednostima istih veličina u sustavu fiksne mete.

## 6 Metodički dio

### 6.1 *Značaj nastavne teme Rutherfordova modela atoma i moguće učeničke poteškoće*

Ovoj temi prethode razvoj ideje atoma te otkrića vezana za strukturu atoma (uključujući otkriće i objašnjenje katodnih zraka), a prati je Bohrov model atoma. Jedan od razloga za učenje o modelima atoma je taj da se učenici upoznaju s bitnim dijelom fizike, a to je stvaranje modela fizičkih pojava. Također je važno probati približiti učenicima da su otkrića u fizici najčešće rezultat dugotrajnog procesa spekulacije, stvaranja modela, eksperimentiranja te obaranja i nadopunjavanja postojećih modela. Primjer jednog takvog procesa je upravo razvoj modela atoma počevši od spekulacije Grka do modela biljarske kugle, preko Thomsonovog modela do Rutherfordovog, preko Bohrovog do kvantno-mehaničkog modela. Thomsonov model je "pao" jer nije objašnjavao raspršenje alfa čestica, Rutherfordov jer nije bilo razloga da takav atom ostane stabilan, a Bohrov jer nije mogao objasniti spektre većine atoma težih od vodika te finu i superfinu strukturu.

Najveća poteškoća u poučavanju moderne fizike u školi je nemogućnost izvođenja pokusa za dio gradiva. Čak je i gradivo koje bi se moglo demonstrirati, poput fotoelektričnog efekta ili katodnih zraka, problematično jer nemaju sve škole izvor ultraljubičaste svjetlosti ili katodnu cijev. Rješenja toga problema su pokusi kroz koje se analogijom nastoji shvatiti procese i pojave atomske i nuklearne fizike te simulacije na računalu. Druga poteškoća je ta da gradivo 4. razreda zahtjeva poznavanje gradiva svih triju prethodnih razreda i povezivanje mnogih prethodno obrađenih koncepata.

Tip nastave koji bih koristio za ovo gradivo bila bi istraživački usmjerena nastava s frontalnim istraživanjem pomoću simulacije raspršenja alfa čestica na Thomsonovom i Rutherfordovom modelu atoma te uz kratki video o pokusu Geigera i Marsdena.

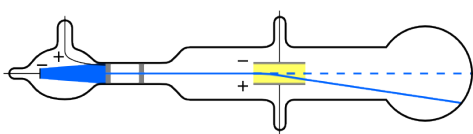
### 6.2 *Atom i modeli atoma*

Ideja da je materija građena od atoma (grč. atomos, nedjeljiv) potječe od filozofa Leukipa i Demokrita koji su živjeli u 5. i 4. stoljeću prije Krista, njihove ideje su preuzeli i rafinirali grčki filozof Epikur i rimski pjesnik Lukrecije. Nakon njih atomi-

zam nestaje sa znanstvene scene (a djelomično i znanost uopće), a interes za njega se obnavlja u 12. st. otkrićem Aristotelovih spisa u kojima se atomizam spominje. Budući da je atomizam bio asociran s filozofijom epikurejaca, za većinu kršćanskih filozofa 14. stoljeća nije bio prihvatljiv. U periodu prelaska 16. na 17. stoljeće francuski svećenik Pierre Gassendi oživljava atomizam, no dodaje dvije modifikacije: da su atomi stvoreni od Boga te da ih, iako su brojni, nema beskonačno mnogo. Krajem 17. stoljeća takav modificirani atomizam se proširio i bio prihvaćen od mnogih znanstvenika.

Iako je ideja o atomu prisutna još od 5. stoljeća prije Krista, konkretan model atoma predložio je Dalton tek početkom 19. stoljeća. On je atome opisao kao nedjeljive male, tvrde kugle te je predložio da su atomi istog kemijskog elementa identični.

### 6.3 Thomsonov model

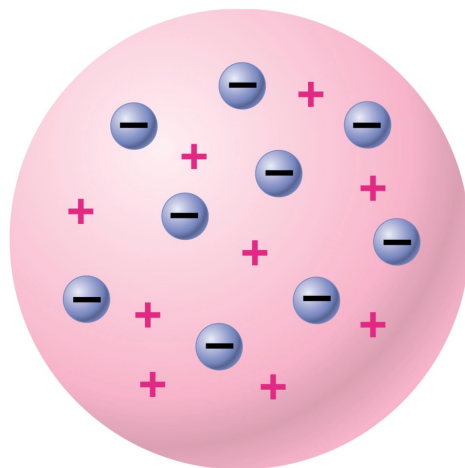


Slika 6.1: Otklanjanje katodne zrake u električnom polju.<sup>13</sup>

Atom je, kao što mu samo ime govori, smatran nedjeljivim sve dok 1897. Joseph John Thomson, britanski znanstvenik, nije otkrio postojanje elektrona. Izvodio je pokuse s katodnim zrakama te je primijetio da se one otklanjaju pod utjecajem električnog polja (slika 6.1). Zaključci

toga pokusa i računa su bili da su katodne zrake načinjene od negativno nabijenih čestica koje su manje od atoma i imaju veliki omjer naboja i mase (sam naboj elektrona izračunao je Robert Andrews Millikan tek 12 godina kasnije).

Nakon ovog otkrića poznate su dvije činjenice o atomu: da ga sačinjavaju negativno nabijene čestice (elektroni) i da je kao cjelina električki neutralan. Da bi zadovoljio obje, Thomson predlaže model atoma u kojem je atom kugla načinjena od jednoliko razmazanog pozitivnog naboja u kojem su razbacani elektroni (slika 6.2). Budući da ta slika odgovara kolaču s grožđicama, taj model je nazvan "plum pudding" modelom atoma s time da u originalnom Thomsonov modelu elektroni

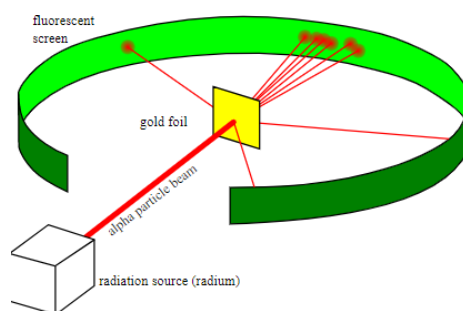


Slika 6.2: Plum pudding model atoma.<sup>14</sup>

ne miruju kao što grožđice miruju u kolaču, već se gibaju.

## 6.4 Rutherfordov model

Thomsonov učenik Ernest Rutherford 1911. godine zaključuje da Thomsonov model atoma nije točan promatrajući rezultate pokusa svojih asistenata Geigera i Marsdena. Naime, oni su pod vodstvom Rutherforda alfa česticama gađali zlatnu foliju debelu svega nekoliko atoma zlata (slika 6.3) te su na fluorescentnom zastoru mogli vidjeti jesu li se nakon prolaska kroz listić zlata te alfa čestice raspršile. Prema Thomsonovu modelu atoma, sve alfa čestice bi trebale bez smetnje proći kroz listić zlata jer nema nikakve pozitivno nabijene čestice o koju bi se alfa čestica raspršila. Rezultati pokusa su bili drugačiji: dok je veliki broj alfa čestica prošao bez smetnje, neke alfa čestice su se ipak raspršile unatrag. Iz toga je Rutherford zaključio da je većina atoma prazni prostor, a da je pozitivni naboj, za razliku od Thomsonovog modela, koncentriran u malenom volumenu. Taj mali volumen će se kasnije nazvati jezgrom atoma.



Slika 6.3: Geiger-Marsdenov pokus.<sup>15</sup>

## 6.5 Istraživački usmjerena nastava

Do sada je u školama uglavnom prevladavao predavački tip nastave gdje je nastavnik u središtu pažnje te izlaže učenicima gradivo. Njega danas sve više zamjenjuje interaktivna istraživački usmjerena nastava gdje, u usporedbi s predavačkim tipom nastave, učenik zauzima znatno aktivniju ulogu.

Interaktivnost podrazumijeva poticanje aktivnosti i učenja učenika na nastavi, a neke od metoda kojima se to postiže su usmjerena rasprava, konceptualna pitanja s karticama, rješavanje zadataka u malim skupinama te interaktivno izvođenje pokusa.<sup>12</sup> Istraživački vid očituje se u tome da su učenici kreatori istraživačkog procesa u nastavi. Oni stvaraju pretpostavke, predlažu i izvode pokuse (po mogućnosti), pišu opažanja i donose zaključke, a uloga nastavnika je pripremiti i strukturirati taj proces. Dva oblika istraživanja koja se mogu provoditi su otvoreno i vođeno istraživanje. Od tih

dvaju vođeno je prikladnije za razred jer otvoreno, gdje učenici potpuno samostalno istražuju, nije prikladno za heterogenu (u vidu interesa, volje i sposobnosti) skupinu učenika.

Uvodni dio sata fizike namijenjen je demonstraciji pojave (pokusom) koja će se proučavati te otvaranju problema. Ako je moguće, poželjno je da pokusu prethodi poveznica učeničke svakodnevice i pojave koja će se demonstrirati što učenicima daje motivaciju i budi interes. Potrebno je zatražiti pretpostavke prije i opažanja poslije demonstracijskog pokusa te imenovati novu pojavu. Središnji dio sata posvećen je istraživanju novoimenovane pojave (o čemu i kako ovisi, kako ju opisati i sl.), a nakon toga slijedi konstrukcija modela i matematički opis proučavane pojave. Plod ovakve učeničke aktivnosti nije samo upoznavanje novog gradiva, već i razvijanje logičkog i kritičkog razmišljanja, upoznavanje sa znanstvenom metodom i znanstvenim zaključivanjem, argumentiranje vlastitih ideja i rezultata, itd. Završni dio sata služi za (samo)evaluaciju i primjenu naučenog. Učenici kroz konceptualna pitanja, zadatke i aplikacijske pokuse primjenjuju i evaluiraju konstruirani model (Mogu li pomoću tog modela odgovoriti na pitanja? Riješiti zadatak pomoću njega? Kakva mu je moć predviđanja?), ali i evaluiraju svoje razumijevanje tog modela. Nastavnik time dobiva povratnu informaciju o savladanosti obrađenog gradiva pa se kroz sljedeće sate može po potrebi vratiti i ponoviti ono što je ostalo nejasno.

## **6.6 Nastavna priprema**

Obrazovni ishodi (očekivana učenička postignuća):

- opisati i objasniti Thomsonov model atoma
- opisati i objasniti Rutherfordov model atoma
- opisati Rutherfordov eksperiment
- objasniti izraz za energiju atoma vodika
- razvijati logičko razmišljanje
- razvijati znanstveno zaključivanje

Odgojni ishodi:

- razvijati i poticati diskusiju
- izražavati vlastito mišljenje

## TIJEK NASTAVNOG SATA

### 1) Uvodni dio:

Na satu prije ovoga obrađuje se razvoj ideje atoma te se staje na Daltonovom modelu atoma kao biljarske kugle te otkriću elektrona. Na početku ovoga sata nadovezao bih se na to pitanjem: Kako bi izgledao model atoma koji ima oblik kugle, sadrži elektrone te je električki neutralan? Ostavio bih učenike par minuta da razmisle i osmisle model. Nakon toga bih prikupio ideje i nakon kratke diskusije predstavio model kojega je Thomson odabrao: pozitivno nabijena kugla u koju su uronjeni elektroni koji titraju oko ravnotežnog položaja. Taj model je postao poznat pod nazivom "plum pudding" model (u našem jeziku to bi odgovaralo kolaču s grožđicama ili s komadićima čokolade).

### 2) Središnji dio:

#### **ISTRAŽIVAČKO PITANJE: Kakva je struktura atoma?**

**Kako uopće možemo "zaviriti" u strukturu onoga što ne vidimo?** Prikupljam učeničke ideje te razgovorom dolazimo do toga da do neke granice možemo promatrati strukturu neke tvari direktno (mikroskop, elektronski mikroskop...), ali i da možemo zaključivati indirektno: npr. da gađamo tu tvar nečime pa promatramo rezultate.

**Ako želimo saznati nešto o naboju i raspodjeli naboja u atomu, čime bih trebao gađati atom?** Ako želimo saznati nešto o raspodjeli naboja, vjerojatno bismo trebali gađati atom nečim nabijenim.

Za učenike bih pripremio simulaciju (na stranici [https://phet.colorado.edu/sims/html/rutherford-scattering/latest/rutherford-scattering\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/rutherford-scattering/latest/rutherford-scattering_en.html)) pokusa ispućavanja alfa čestica na atome zlata koji su modelirani "plum pudding" modelom.

**Alfa čestice su pozitivno nabijene čestice. Što mislite kako će se one ponašati prolaskom kroz Thomsonov atom?** Tu ću prikupiti pretpostavke pa ću uključiti simulaciju.

**Kako se ponašaju alfa čestice prolaskom kroz Thomsonov model atoma?** Učenici uočavaju da ne mijenjaju smjer gibanja.

Suradnici Ernesta Rutherforda, Geiger i Marsden, su radili takav pokus. Ovdje bih

pustio kratku simulaciju na <https://www.youtube.com/watch?v=fNWfYIv2PxA>.

**Kako su se ponašale alfa čestice u pokusu?** Vidljivo je da se većina ponaša onako kako smo predvidjeli Thomsonovim modelom, ali se neke raspršuju pod velikim kutevima.

**Koji bi mogao biti razlog tog odbijanja?** Vođenom raspravom dolazimo do toga da postoji neka prepreka koja je masivnija od alfa čestice na kojoj se alfa čestica rasprši.

**Koje još svojstvo mora imati ta prepreka da bi se pozitivna čestica od nje odbila?**

Ta prepreka također mora biti pozitivno nabijena.

**Koliko često smo vidjeli da se čestica odbila natrag?** Alfa čestice se rijetko rasprše pod velikim kutevima, a još rjeđe unatrag.

**Što nam to govori o veličini te pozitivno nabijene prepreke?** Učenici zaključuju da je malena u odnosu na ostatak atoma.

**Što bi onda sačinjavalo ostatak atoma ako smo rekli da je elektron isto puno manji od atoma?** Prazan prostor.

Ovdje bih zadao učenicima da nacrtaju kako misle da atom izgleda sa svim karakteristikama koje smo uspjeli izvesti iz pokusa uzimajući u obzir i postojanje elektrona i električku neutralnost atoma. Izgledom taj model podsjeća na Sunčev sustav pa se naziva planetarni ili Rutherfordov model atoma.

**Zašto onda Thomsonov model nije dobar?** Učenici zaključuju da Thomsonov model nije dobar jer je davao krivu pretpostavku o ponašanju alfa čestica koje se ispucaju na atom zlata.

**ISTRAŽIVAČKO PITANJE: Kolika je energija atoma vodika prema Rutherfordovom modelu?**

Sada kada znamo kako izgleda Rutherfordov model atoma, zamolio bih učenike da nacrtaju model atoma vodika koji ima jedan proton i jedan elektron. Nakon toga bih krenuo u interaktivni izvod energije vodikovog atoma:

**Kako bismo napisali energiju atoma koji se giba oko jezgre?** Učenici ovdje pišu zbroj kinetičke energije gibanja elektrona i potencijalne između protona i elektrona:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

**Kako općenito nazivamo silu koja djeluje na tijelo u kružnom gibanju i kako ju zapisujemo?**

Učenici ovdje zapisuju formulu centripetalne sile:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

**Koja sila igra ulogu centripetalne sile u primjeru gibanja elektrona oko jezgre?**

Učenici primjećuju da se radi o Coulombovoj sili te zapisuju:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

**Kako onda možemo zapisati kinetičku energiju preko električne potencijalne?**

Učenici koriste prethodno napisane jednačbe da bi dobili novu:

$$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

odnosno

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

**A kako onda izgleda ukupna energija atoma?** Učenici zapisuju:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

**Što znači da je energija negativna?** Vođenom raspravom dolazimo do toga da je elektron vezan za proton te da bi bilo potrebno obaviti rad na elektronu da bi ga oslobodili od privlačne sile jezgre.

3) Završni dio:

U završnom dijelu bih provjerio razumijevanje gradiva konceptualnim pitanjima:

1. Kako se gibaju elektroni u Thomsonovom modelu atoma?:
  - a) Titraju oko ravnotežnog položaja
  - b) Gibaju se po kružnicama oko jezgre
  - c) Gibaju se po eliptičnim putanjama
  - d) Nepomični su.
2. Što vrijedi za raspršenje alfa-čestica na zlatnom listiću? (zaokruži sve točne tvrdnje):
  - a) Većina alfa-čestica prolazi kroz listić ne skrećući.

- b) Što je kut raspršenja veći, to je broj raspršenih čestica veći.
  - c) Vrlo mali broj alfa-čestica se raspršuje pod kutem  $180^\circ$ .
3. Otklon alfa-čestica koje upadaju na zlatni listić Rutherford je protumačio kao posljedicu:
- a) djelovanja negativnog naboja
  - b) djelovanja elektrona
  - c) djelovanja pozitivnog naboja
  - d) uzajamnog odbijanja alfa-čestica
4. Iz činjenice da se neke alfa-čestice raspršuju pod kutem od  $180^\circ$ , Rutherford je zaključio da su se odbile:
- a) od dijela atoma koji ima pozitivan naboj i malu masu
  - b) od dijela atoma koji ima pozitivan naboj i veliku masu
  - c) od dijela atoma koji ima negativan naboj i malu masu
  - d) od dijela atoma koji ima negativan naboj i veliku masu
5. Koje je značenje negativnog predznaka u izrazu za energiju atoma?
- Značenje je da su elektron i jezgra vezani, da se međusobno privlače. Potrebno je uložiti rad da bi ih se razdvojilo.

## Literatura

- [1] Ernest Rutherford, "The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom," *Philos. Mag.* **21**, 669-688 (1911).
- [2] Hans Geiger, "On the Scattering of  $\alpha$ -Particles by Matter," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **81**, 174-177 (1908)
- [3] Hans Geiger, Ernest Marsden, "On a Diffuse Reflection of the  $\alpha$ -Particles," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **82**, 495-500 (1909.)
- [4] Hans Geiger, "The Scattering of the  $\alpha$ -Particles by Matter," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **83**, 492-504 (1910)
- [5] Wei-Kan Chu, James W. Mayer, Marc-A. Nicolet, *Backscattering Spectrometry*, 1st edition (Academic Press, New York, 1978).
- [6] W. M. Arnold Bik, F. H. P. M. Habraken, "Elastic recoil detection", *Rep. Prog. Phys.* **56** 859-902 (1993).
- [7] Arnold Sommerfeld, *Mechanics (Lectures on Theoretical Physics, Vol. 1)*, 1st edition (Academic Press, New York, 1952) pp. 242, 258-259.
- [8] J. Burgdörfer "Atomic Collisions with Surfaces", in *Review of Fundamental Processes and Applications of Atoms and Ions*, edited by C.D. Lin (World scientific, Singapore, 1993), p. 544.
- [9] Masakazu Aono, Ryutaro Souda, "Quantitative Surface Atomic Structure Analysis by Low-Energy Ion Scattering Spectroscopy (ISS)", *Jpn. J. Appl. Phys.* **24**, 1249-1262 (1985).
- [10] H. H. Brongersma, M. Draxler, M. de Ridder, P. Bauer, "Surface composition analysis by low-energy ion scattering", *Surf. Sci. Rep.* **62**, 63-109 (2007).
- [11] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko, *Classical Mechanics* 3rd edition (Addison-Wesley, San Francisco, 2001).
- [12] [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_10\\_210.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_210.html)

- [13] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:JJ\\_Thomson\\_Cathode\\_Ray\\_2\\_explained.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:JJ_Thomson_Cathode_Ray_2_explained.svg)
- [14] <https://commons.wikimedia.org/wiki/>
- [15] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geiger-Marsden\\_experiment.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geiger-Marsden_experiment.svg)