SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Jelena Anić

# ALGEBRE $L_\infty$ U TEORIJI POLJA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Jelena Anić**

Diplomski rad

# Algebre $L_\infty$ u teoriji polja

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Larisa Jonke

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ________________
Zagreb, 2019.

Zahvaljujem se dr. Larisi Jonke na vodstvu i pomoći pri izradi diplomskog rada te cijelom Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta na pruženom obrazovanju.

# Sažetak

Algebra $L_\infty$ je poopćenje pojma Liejeve algebre. Najprije uvodimo $L_\infty$ formalizam, koji zatim primjenjujemo na standardnu baždarnu Yang-Millsovu i Chern-Simonsovu teoriju. Upotrebom viših zagrada potvrđujemo da su svi poopćeni Jacobijevi identiteti zadovoljeni. Algebra $L_\infty$ daje sistematičnu metodu za nalaženje deformacija neke postojeće teorije, što pokazujemo na primjeru Chern-Simonsove teorije koju vežemo sa BF teorijom, odnosno uvodimo skalarnu 0-formu i 2-formu. Nakon konstrukcije najopćenitijih jednadžbi gibanja i baždarnih transformacija sastavljenih od skalara, 1-forme i 2-forme, algebru tenzorskog produkta i $L_\infty$ identitete koristimo kako bismo našli relacije koje povezuju strukturne funkcije. Rezultat teorije konstuirane na taj način je poznat pod nazivom Courantov sigma model.

Ključne riječi: algebra $L_\infty$, poopćeni Jacobijevi identiteti, Yang-Millsova teorija, Chern-Simonsova teorija

# $L_\infty$ algebras in field theory

## Abstract

$L_\infty$ algebra is a generalisation of the notion of a Lie algebra. We shall first introduce $L_\infty$ formalism and then apply it on standard Yang-Mills and Chern-Simons gauge theories. Using the higher brackets, we show that all strong homotopy Jacobi identities are satisfied. Furthermore, $L_\infty$ algebra provides a systematic way of searching for deformations of some existing theories, which we shall demonstrate on the Chern-Simons theory by coupling it to a BF theory, i.e., scalar 0-form and 2-form. Having constructed the most general equations of motion and gauge transformations composed of a scalar, 1-form and 2-form fields, we use the tensor product algebra and $L_\infty$ identities to find restrictions on structure functions. The theory we obtain in this way is known as Courant sigma model.
Keywords: $L_\infty$ algebra, strong homotopy identities, Yang-Mills theory, Chern-Simons theory

# Sadržaj

# 1 Uvod

Liejeva algebra je značajan pojam u teorijskoj fizici. Ona je infinitezimalna aproksimacija kontinuirane Liejeve grupe, simetrijske grupe koja opisuje baždarne teorije. To su teorije koje su invarijantne na neki oblik transformacije, odnosno one posjeduju određenu simetriju. Takve transformacije nazivamo simetrijskim transformacijama, a one se matematički opisuju grupama. Postoje globalne i lokalne simetrijske transformacije. Globalne transformacije su one kod kojih je parametar transformacije identičan u svakoj točki prostora, dok se u lokalnim transformacijama parametar razlikuje u svakoj točki, stoga je on funkcija koordinata. Lokalna baždarna invarijantnost je osnova baždarnih teorija. Na primjer, u klasičnoj elektrodinamici, čije je poopćenje Yang-Millsova teorija, iz zahtjeva za lokalnom baždarnom invarijantnošću polja slijedi minimalna supstitucija koja implicira vezanje tog polja s fotonskim poljem. Vrsta baždarne simetrije je određena generatorima Liejeve algebre i strukturnim konstantama, preko kojih generatori grupe zatvaraju Liejevu zagradu. Algebra $L_\infty$ je generalizacija pojma Liejeve algebre, a definirana je pomoću gradiranih vektorskih prostora i viših zagrada. Ona sadrži baždarna polja, baždarne strukture i jednadžbe gibanja, što se može prikazati preko sljedećeg kompleksa

$$... \rightarrow \underbrace{\text{baždarne simetrije}}_{\mathrm{L}_0} \rightarrow \underbrace{\text{klasična polja}}_{\mathrm{L}_1} \rightarrow \underbrace{\text{jednadžbe gibanja}}_{\mathrm{L}_2} \rightarrow ...$$

Prvo poglavlje je posvećeno uvođenju formalizma algebre $L_\infty$, koji se sastoji od definiranja algebre $L_\infty$, uvođenja polja stupnja 1 i njegove baždarne transformacije te definiranja skalarnog produkta i akcije iz koje slijede jednadžba gibanja i njezina transformacija. Zatim, na temelju [3] uvodimo $L_\infty$ algebru tenzorskog produkta te poglavlje završavamo analizom algebre baždarnih transformacija. Poglavlje je bazirano na člancima [1], [2] i [3].

U drugom poglavlju razmatramo ne-Abelovu Yang-Millsovu teoriju, na čijem primjeru pokazujemo kako se klasična teorija može formulirati kao algebra $L_\infty$. Usporedbom izraza za baždarnu transformaciju polja, jednadžbu gibanja i transformaciju jednadžbe gibanja u klasičnom smislu s definicijama istih u algebri $L_\infty$, nalazimo neiščezavajuće više zagrade. Njih potom uvrštavamo u sve netrivijalne poopćene Jacobijeve identitete i dokazujemo da su oni zadovoljeni. Slična stvar je napravljena u [1], ali s drugačijim definicijama pojmova algebre $L_\infty$. Pri uvođenju Yang-Millsove teorije koristili smo [5].

Chern-Simonsova teorija se također pojavljuje u mnogim poljima matematike i fizike, a glavna njezina primjena je u teoriji čvorova. Hilbert-Einsteinova jednadžba u trodimenzionalnoj gravitacijskoj teoriji se isto može prikazati kao Chern-Simonsova teorija. Druge primjene se mogu naći u [9]. U trećem poglavlju pokazujemo da se ona može formulirati kao algebra $L_\infty$ koja nastaje tenzoriranjem Liejeve algebre diferencijalnim formama $\Omega^\bullet(M)$ na trodimenzionalnoj mnogostrukosti $M$. Zatim trodimenzionalnu ne-Abelovu Chern-Simonsovu teoriju vežemo s BF teorijom i proučavamo deformacije teorije. Deformacijom baždarne teorije možemo konstruirati nove teorije s poopćenim baždarnim algebrama, što znači da se baždarna algebra nove teorije više ne bazira samo na Liejevim grupama već imamo neku proširenu algebru. Točnije, strukturne konstante postaju ovisne o poljima te se zapravo radi o strukturnim funkcijama. U potpoglavlju 4.2 analiziramo sve moguće konzistentne članove u baždarnim transfromacijama i jednadžbama polja te koristimo algebru tenzorskog produkta i cikličnost teorije kako bismo našli veze među strukturnim funkcijama. Zatim primjenom $L_\infty$ identiteta dobivamo tri vrste uvjeta koje prepoznajemo kao članove Taylorovog razvoja aksioma Courantovog algebroida [7], [10]. Eksplicitno smo izračunali akciju nove teorije. Rezultat je Courantov sigma model, koji je na drugačiji način izveden u [8].

Na kraju je nekoliko matematičkih dodataka s definicijama matematičkih struktura korištenih u ovom radu. U dodatku A, baziranom na [4], [6], [12] i [13] definiramo osnovne pojmove vezane za Liejevu algebru. Mnogostrukost, diferencijalne forme i njihova algebra, vanjska derivacija i Levi-Civita tenzor su definirani u dodatku B, temeljenom na [11], [12], [13], [14] i djelomično [3]. Dodatak C sadrži izvod baždarne transformacije polja, preuzet iz [3], kako bi pridonio potpunosti poglavlja 2. Na kraju, u dodatku D, nalaze se duži izračuni poopćenih Jacobijevih identiteta vezani za potpoglavlje 4.2. Dodacima smo pokušali zaokružiti rad kako ne bi bilo potrebno previše dopunske literature za shvaćanje metode i rezultata te kako bismo omogućili bolju preglednost samog rada.

# 2 Algebra $L_\infty$

Ovo poglavlje je posvećeno uvođenju formalizma algebri $L_\infty$ koje su više generalizacije Liejevih algebri s poopćenim Jacobijevim identitetom. Najprije ćemo definirati algebru $L_\infty$, uvesti jednadžbe gibanja i baždarne transformacije, a zatim ćemo analizirati algebru baždarnih transformacija.

## *2.1 Definicija algebre $L_\infty$ preko viših zagrada*

Uvedimo najprije pojam gradiranog prostora.

**Definicija 1. *P*-gradirani vektorski prostor** L je vektorski prostor L razložen na sumu potprostora s indeksima $p \in P$:

$$\mathrm{L} = \bigoplus_{p \in P} \mathrm{L}_p.$$

U algebrama $L_\infty$ imamo $\mathbb{Z}$-gradirani vektorski prostor. Za vektorski potprostor $\mathrm{L}_p$ kažemo da je stupnja $p$, odnosno za svaki $l_j \in \mathrm{L}_k$ vrijedi

$$|l_j| \equiv \deg l_j = k$$

te pišemo $l_j \in \mathrm{L}_{|l_j|}$. Algebra $L_\infty$ se definira preko viših zagrada, odnosno multilinearnih produkata $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$... Multilinearni produkt $\mu_n$ ima $n$ varijabli $\mu_n(l_1, ..., l_n)$ te je stupnja

$$\deg \mu_n = 2 - n,$$

što, ako uzmemo u obzir varijable, postaje

$$\deg \mu_n(l_1, ..., l_n) = 2 - n + \sum_{i=1}^{n} |l_i|.$$

Produkti su gradirano komutativni, odnosno vrijedi

$$\mu_n(l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma \epsilon(\sigma; l) \mu_n(l_1, ..., l_n). \tag{2.1}$$

Prvi faktor s desne strane jednadžbe $(-1)^\sigma$ je predznak permutacije $\sigma$ $n$ elemenata.

On je jednak $(-1)^k$ ako je permutacija $\sigma$ sastavljena od $k \in \mathbb{N}$ permutacija od kojih svaka zamjenjuje jedan par susjednih elemenata. Tj. predznak permutacije je pozitivan za parne permutacije, a negativan za neparne permutacije. Drugi faktor s desne strane jednadžbe zove se Koszulov znak $\epsilon(\sigma; l)$. Ako imamo komutativnu gradiranu algebru $\Lambda(x_1, x_2, ...)$ sa svojstvom

$$x_i \wedge x_j = (-1)^{|x_i||x_j|} x_j \wedge x_i, \qquad \forall i, j,$$

onda vrijednost Koszulovog znaka dobivamo iz sljedeće relacije

$$x_1 \wedge ... \wedge x_n = \epsilon(\sigma; x) x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}.$$

Sada možemo napisati potpunu definiciju $L_\infty$ algebre.

**Definicija 2.** $L_\infty$ **algebra** $(\mathrm{L}, \mu_n)$ je
1. $\mathbb{Z}$-gradirani vektorski prostor $L$;
2. multilinearno preslikavanje stupnja $2 - n$ oblika

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mu_n(l_1, ..., l_n) : \underbrace{\mathrm{L} \times ... \times \mathrm{L}}_{\text{n puta}} \to \mathrm{L}$$

takvo da vrijedi
1. *gradirana komutativnost*,
2. *poopćeni Jacobijev identitet*, odnosno za sve $n \in \mathbb{N}$ i za svaku $n$-torku $(l_1, ..., l_n)$, gdje su $l_i$ elementi gradiranog potprostora $\mathrm{L}_{|l_i|}$, vrijedi jednadžba

$$\sum_{k+j=n} (-1)^k \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \epsilon(\sigma; l) \mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(j)}), l_{\sigma(j+1)}, ..., l_{\sigma(n)}) = 0 \qquad (2.2)$$

s poretkom $\sigma(1) < ... < \sigma(j)$ i $\sigma(j+1) < ... < \sigma(n)$.

U poopćenom Jacobijevom identitetu broj varijabli je $n$ te su one podjeljene u dva skupa $\{l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(j)}\}$ i $\{l_{\sigma(j+1)}, ..., l_{\sigma(n)}\}$ gdje su $n \geq 1$, $j \geq 1$. Identitet nije simetričan s obzirom na njih već se treba posumirati po svim mogućim vrijednostima $k$ i $j$. Ako dvije podjele po skupovima imaju iste vrijednosti $k$ i $j$, onda su one identične samo ako prvi, odnosno drugi, skupovi u tim podjelama sadrže iste elemente, bez obzira na poredak, što je posljedica svojstva (2.1).

Iz relacije (2.2) možemo izvrijedniti $L_\infty$ identitete. Za $n = 1$ imamo

$$\mu_1(\mu_1(l_1)) = 0. \tag{2.3}$$

Za $n = 2$ dobivamo

$$\mu_1(\mu_2(l_1, l_2)) = \mu_2(\mu_1(l_1), l_2) + (-1)^{|l_1|}\mu_2(l_1, \mu_1(l_2)), \tag{2.4}$$

Na sličan način možemo izračunati identitet za $n = 3$:

$$\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(l_1, l_2), l_3) + (-1)^{1+|l_2||l_3|}\mu_2(\mu_2(l_1, l_3), l_2) + (-1)^{|l_1|(|l_2|+|l_3|)}\mu_2(\mu_2(l_2, l_3), l_1) \\
&= \mu_3(\mu_1(l_1), l_2, l_3) + (-1)^{1+|l_1||l_2|}\mu_3(\mu_1(l_2), l_1, l_3) + (-1)^{(|l_1|+|l_2|)|l_3|}\mu_3(\mu_1(l_3), l_1, l_2) \\
&\quad + \mu_1(\mu_3(l_1, l_2, l_3)).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Zbog toga što dvostruko djelovanje produkta $\mu_1$ daje nulu, taj produkt možemo shvatiti kao vanjsku derivaciju, definiranu u dodatku B. Ako $\mu_2$ shvatimo kao Liejevu zagradu, onda se izraz (2.4) može protumačiti kao djelovanje vanjske derivacije na Liejevu zagradu, dok izraz (2.5) prikazuje kako se narušenje Jacobijevog identiteta, koje dolazi od poopćenja Liejeve algebre, može sistematički prikazati pomoću $\mu_1$ i $\mu_3$ produkata.

## 2.2 *Baždarne transformacije i akcija*

Sada želimo definirati jednadžbe gibanja i akciju. Neka je algebra $L_\infty$ dana s (L, $\mu_n$). Uvodimo polje $a$ koje je stupnja

$$\text{deg } a = 1,$$

odnosno $a \in$ L$_1$. Nadalje ćemo za produkte s jednakim uzastopnim varijablama koristiti notaciju s potencijom, primjerice:

$$\mu_3(a^2, l) \equiv \mu_3(a, a, l).$$

Uočimo da ako bismo $a$ definirali kao polje parnog stupnja, gornji identitet bi iščezavao zbog gradirane komutativnosti. Štoviše, svaki identitet oblika $\mu_n(a^n)$ bi također bio jednak nuli. Stoga, zbog izbora $a \in \mathrm{L}_1$ možemo definirati zakrivljenost polja $a$ kao

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu_n(a^n) \\ &= \mu_1(a) + \frac{1}{2}\mu_2(a^2) + \frac{1}{3!}\mu_3(a^3) + ... \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vidimo da je zakrivljenost element prostora $\mathrm{L}_2$.
U dodatku C se nalazi izvod standardne baždarne transformacije polja $a$ s obzirom na baždarni parametar $c$ stupnja

$$\text{deg } c = 0.$$

Transformacija poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} \delta_c a &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu_{n+1}(a^n, c) \\ &= \mu_1(c) + \mu_2(a, c) + \frac{1}{2}\mu_3(a^2, c) + \frac{1}{3!}\mu_4(a^3, c) + ... \end{aligned} \tag{2.7}$$

Izvedimo sada baždarnu transformaciju zakrivljenosti $f$ s obzirom na paramatar $c$:

$$\begin{aligned} \delta_c f(a) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\mu_k(\delta_c a, a^{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k!j!}\mu_{k+1}(\mu_{j+1}(a^j, c), a^k). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Koristili smo formulu (2.7) i svojstvo

$$\mu_n(..., a, \delta_c a, ...) = \mu_n(..., \delta_c a, a, ...).$$

Kako bismo sredili izraz (2.8) koristit ćemo poseban slučaj identiteta (2.2) u kojem varijable biramo na sljedeći način: $l_1 = ... = l_{n-1} = a$, $l_n = c$. Te varijable se u izrazu (2.2) javljaju na samo dva načina; prvi je kad se parametar $c$ nalazi u unutarnjem produktu, a drugi je kad se $c$ nalazi u vanjskom produktu:

$$\mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-1}, c), a^k) \qquad \text{i} \qquad \mu_{k+1}(\mu_j(a^j), a^{k-1}, c).$$

Prvi produkt se pojavljuje $\binom{n-1}{k}$ puta, a drugi $\binom{n-1}{k-1}$ puta. Time dobivamo sljedeću jednakost

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{k+j+1=n} \frac{(-1)^{k+k}}{k!j!} \mu_{k+1}(\mu_{j+1}(a^j, c), a^k) \\ &+ \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!j!} \mu_{k+1}(\mu_j(a^j), a^{k-1}, c), \end{aligned}$$

pri čemu smo cijelu jednadžbu podijelili s $(n-1)!$, koji je neovisan o sumi, te smo u prvoj sumi napravili zamjenu $(j-1) \to j$. Sumiranje po indeksu $n$ i preslagivanje suma daje

$$\begin{aligned} &\sum_{k\geq 0} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{k!j!} \mu_{k+1}(\mu_{j+1}(a^j, c), a^k) \\ &= \sum_{k\geq 1} \sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!j!} \mu_{k+1}(\mu_j(a^j), a^{k-1}, c). \end{aligned}$$

Lijevu stranu jednadžbe prepoznajemo kao transformaciju (2.8), dok u desnoj strani u sumi po indeksu $j$ nalazimo izraz za zakrivljenost (2.6). Sređivanjem izraza dobivamo konačnu baždarnu transformaciju

$$\delta_c f(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \mu_{n+2}(f(a), a^n, c). \tag{2.9}$$

Vidimo da su zakrivljenosti baždarno kovarijantne jer njihove baždarne transformacije iščezavaju za $f(a) = 0$.

Da bismo mogli definirati akciju, najprije moramo uvesti odgovarajući skalarni produkt. U algebri $L_\infty(\mathrm{L}, \mu_n)$ nad $\mathbb{R}$ skalarni produkt je bilinearno pridruživanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}} : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathbb{R}$$

koje je gradirano simetrično

$$\langle l_1, l_2 \rangle_{\mathrm{L}} = (-1)^{|l_1||l_2|} \langle l_2, l_1 \rangle_{\mathrm{L}} \tag{2.10}$$

i zadovoljava uvjet cikličnosti

$$\langle l_1, \mu_n(l_2, ..., l_{n+1})\rangle_{\mathrm{L}} = (-1)^{n+n(|l_1|+|l_{n+1}|)+|l_{n+1}|\sum_{i=1}^{n}|l_i|}\langle l_{n+1}, \mu_n(l_1, ..., l_n)\rangle_{\mathrm{L}}. \tag{2.11}$$

Algebre $L_\infty$ koje su opremljene skalarnim produktom nazivamo cikličke algebre $L_\infty$. Akciju sada uvodimo kao

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\langle a, \mu_n(a^n)\rangle_{\mathrm{L}} \\ &= \frac{1}{2}\langle a, \mu_1(a)\rangle_{\mathrm{L}} + \frac{1}{3!}\langle a, \mu_2(a^2)\rangle_{\mathrm{L}} + \frac{1}{4!}\langle a, \mu_3(a^3)\rangle_{\mathrm{L}} + ... \end{aligned} \tag{2.12}$$

Varijacija akcije s obzirom na $\delta_c a$ daje

$$\begin{aligned} \delta_c S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\langle \delta_c a, \mu_n(a^n)\rangle_{\mathrm{L}} + n\langle a, \mu_n(a^{n-1}, \delta_c a)\rangle_{\mathrm{L}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \delta_c a, \mu_n(a^n)\rangle_{\mathrm{L}} \\ &= \langle \delta_c a, f(a)\rangle_{\mathrm{L}}, \end{aligned}$$

što potvrđuje da je $f(a) = 0$ jednadžba polja akcije (2.12).

## 2.3 Algebra $L_\infty$ tenzorskog produkta

Autori članka [3] su pokazali da se tenzorskim produktom neke algebre $L_\infty$, $(\mathrm{L}, \mu_n)$, i diferencijalne gradirano komutativne algebre (A,d), definirane u Dodatku B, dobiva algebra $L_\infty$ $(\hat{\mathrm{L}}, \hat{\mu}_n)$, koja se sastoji od gradiranog vektorskog prostora

$$\hat{\mathrm{L}} \equiv \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\mathrm{A}\otimes\mathrm{L})_k, \qquad (\mathrm{A}\otimes\mathrm{L})_k \equiv \bigoplus_{i+j=k} \mathrm{A}_i \otimes \mathrm{L}_j,$$

i viših produkata

$$\hat{\mu}_1(a_1 \otimes l_1) \equiv \mathrm{d}a_1 \otimes l_1 + (-1)^{|a_1|} a_1 \otimes \mu_1(l_1), \tag{2.13}$$

$$\hat{\mu}_n(a_1 \otimes l_1, ..., a_n \otimes l_n) \equiv (-1)^{n\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \sum_{i=2}^{n}|a_i|\sum_{j=1}^{i-1}|l_j|}(a_1, ..., a_n) \otimes \mu_n(l_1, ..., l_n), \tag{2.14}$$

gdje drugi identitet vrijedi za sve $n > 1$. Ako su algebre $(\mathrm{A}, \mathrm{d})$ i $(\mathrm{L}, \mu_n)$ opremljene skalarnim produktima, tada je ciklički skalarni produkt algebre $(\hat{\mathrm{L}}, \hat{\mu}_n)$ dan izrazom

$$\langle a_1 \otimes l_1, a_2 \otimes l_2 \rangle_{\hat{\mathrm{L}}} \equiv (-1)^{|a_2||l_1|} \langle a_1, a_2 \rangle_{\mathrm{A}} \langle l_1, l_2 \rangle_{\mathrm{L}}.$$

Posebni slučaj algebre $L_\infty$ tenzorskog produkta koju ćemo mi koristiti je ona u kojoj je diferencijalna gradirano komutativna algebra de Rhamov kompleks na mnogostrukosti $M$, $(\Omega^\bullet(M), \mathrm{d})$. Tenzorski produkt de Rhamovog kompleksa i algebre $L_\infty$, $(\mathrm{L}, \mu_n)$, daje novu algebru $L_\infty$, $(\Omega^\bullet(M, \mathrm{L}), \mu_n^{'})$,

$$\Omega^\bullet(M, \mathrm{L}) \equiv \mathrm{L}^{'} \equiv \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k^\bullet(M, \mathrm{L}), \qquad \Omega_k^\bullet(M, \mathrm{L}) \equiv \bigoplus_{i+j=k} \Omega^i \otimes \mathrm{L}_j,$$

s višim produktima

$$\mu_1^{'}(\alpha_1 \otimes l_1) \equiv \mathrm{d}\alpha_1 \otimes l_1 + (-1)^{|\alpha_1|} \alpha_1 \otimes \mu_1(l_1), \tag{2.15}$$

$$\mu_n^{'}(\alpha_1 \otimes l_1, ..., \alpha_n \otimes l_n) \equiv (-1)^{n \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + \sum_{i=0}^{n-2} |\alpha_{n-i}| \sum_{j=1}^{n-i-1} |l_j|} (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \otimes \mu_n(l_1, ..., l_n), \tag{2.16}$$

pri čemu druga relacija vrijedi za $n > 1$ te su $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Omega^\bullet(M)$ i $l_1, ..., l_n \in \mathrm{L}$. Ciklični produkt je dan s

$$\langle \alpha_1 \otimes l_1, \alpha_2 \otimes l_2 \rangle_{\mathrm{L}'} \equiv (-1)^{|\alpha_2||l_1|} \int_M \alpha_1 \wedge \alpha_2 \langle l_1, l_2 \rangle_{\mathrm{L}}. \tag{2.17}$$

## 2.4 *Baždarna algebra*

Tvrdimo da baždarne transformacije tvore otvorenu algebru sljedećeg tipa

$$[\delta_{c_1}, \delta_{c_2}] = \delta_{c_{12}} + \delta^f_{c_1, c_2} \tag{2.18}$$

s parametrom

$$c_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_{n+2}(a^n, c_1, c_2). \tag{2.19}$$

Tu smo koristili pojam $\delta^f_{c_1,c_2}$ koji predstavlja simetrije jednadžbi polja definirane pomoću baždarnih parametara $c_1$ i $c_2$

$$\delta^f_{c_1,c_2} a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mu_{n+3}(f(a), a^n, c_1, c_2). \tag{2.20}$$

Simetrije jednadžbi polja su transformacije koje iščezavaju pri primjeni jednadžbi polja $f(a) = 0$, što je očito iz izraza (2.20). Također, one su invarijante akcije:

$$\begin{aligned}
\delta^f_{c_1,c_2} S &= \langle \delta^f_{c_1,c_2} a, f(a) \rangle \\
&= \langle f(a), \delta^f_{c_1,c_2} a \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \langle f(a), \mu_{k+3}(f(a), a^k, c_1, c_2) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+(k+2)+2k}}{k!} \langle f(a), \mu_{k+3}(a^k, c_1, c_2, f(a)) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+3)+4(k+3)+2(k+2)}}{k!} \langle f(a), \mu_{k+3}(f(a), a^k, c_1, c_2) \rangle \\
&= -\delta^f_{c_1,c_2} S \\
\Rightarrow \qquad \delta^f_{c_1,c_2} S &= 0.
\end{aligned}$$

U četvrtoj jednakosti smo koristili svojstvo gradirane komutativnosti (2.1), a u petoj izraz za cikličnost skalarnog produkta (2.11). Dokažimo sada tvrdnju (2.18). Za uzastopne transformacije polja $a$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\delta_{c_1} \delta_{c_2} a &= \delta_{c_1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_{k+1}(a^k, c_2) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \mu_{k+1}(\delta_{c_1} a, a^{k-1}, c_2) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! j!} \mu_{k+1}(\mu_{j+1}(a^j, c_1), a^{k-1}, c_2).
\end{aligned}$$

Nadalje, koristimo poopćeni Jacobijev identitet (2.2) s varijablama: $l_1 = ... = l_{n-2} = a$, $l_{n-1} = c_1$, $l_n = c_2$. Postoje četiri načina na koja se te varijable javljaju u identitetu

(2.2):

$$\mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-2}, c_1, c_2), a^k), \qquad \mu_{k+1}(\mu_j(a^j), a^{k-2}, c_1, c_2),$$
$$\mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-1}, c_1), a^{k-1}, c_2) \qquad \text{i} \qquad \mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-1}, c_2), a^{k-1}, c_1).$$

Oni se pojavljuju redom $\binom{n-2}{k}$, $\binom{n-2}{k-2}$, $\binom{n-2}{k-1}$ i $\binom{n-2}{k-1}$ puta. Uvrštavanjem tih udjela u identitet (2.2) i dijeljenjem cijelog izraza s $(n-2)!$ dobivamo

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{k+j=n} \Bigg\{ & \frac{(-1)^{k+k-1}}{(k-1)!(j-1)!} \Big[ \mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-1}, c_1), a^{k-1}, c_2) - \mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-1}, c_2), a^{k-1}, c_1) \Big] \\
& + \frac{(-1)^{k+2k}}{k!(j-2)!} \mu_{k+1}(\mu_j(a^{j-2}, c_1, c_2), a^k) + \frac{(-1)^k}{(k-2)!j!} \mu_{k+1}(\mu_j(a^j), a^{k-2}, c_1, c_2) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Zatim, sumacija po indeksu $n$ i preslagivanje suma daje

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!j!} \Big[ \mu_{k+1}(\mu_{j+1}(a^j, c_1), a^{k-1}, c_2) - \mu_{k+1}(\mu_{j+1}(a^j, c_2), a^{k-1}, c_1) \Big] \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!j!} \mu_{k+1}(\mu_{j+2}(a^j, c_1, c_2), a^k) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!j!} \mu_{k+3}(\mu_j(a^j), a^k, c_1, c_2).
\end{aligned}$$

Izraz u prvom redu prepoznajemo kao $[\delta_{c_1}, \delta_{c_2}]a$. Nakon korištenja relacija (2.6), (2.7), (2.19) i (2.20) imamo

$$\begin{aligned}
[\delta_{c_1}, \delta_{c_2}]a &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_{k+1}(a^k, c_{12}) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mu_{k+3}(f(a), a^k, c_1, c_2) \\
&= \delta_{c_{12}} a + \delta^f_{c_1, c_2} a.
\end{aligned}$$

# 3 Yang-Millsova teorija u $L_\infty$ formulaciji

U ovom poglavlju želimo pokazati da se više Liejeve algebre pojavljuju i u standardnim baždarnim teorijama poput Yang-Millsove. U prvom potpoglavlju razmatramo baždarnu strukturu Yang-Millsove teorije, a u drugom formuliramo Yang-Millsovu teoriju kao algebru $L_\infty$.

## *3.1 Baždarna struktura Yang-Millsove teorije*

U klasičnoj elektrodinamici lagranžijan vektorskog polja $A_\mu$ je dan s

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

gdje je $F_{\mu\nu}$ jakost vektorskog polja opisana izrazom

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.2}$$

Lagranžijan je invarijantan na sljedeću transformaciju polja

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu c(x). \tag{3.3}$$

Ako definiramo kovarijantnu derivaciju kao

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \tag{3.4}$$

s transformacijom

$$D'_\mu = e^{-c(x)}D_\mu e^{c(x)}, \tag{3.5}$$

jakost polja $F_{\mu\nu}$ možemo prikazati kao

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu], \tag{3.6}$$

iz čega odmah slijedi

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

Baždarni parametar $c(x)$ je kompleksan broj jer su lokalne simetrije u elektrodinamici opisane Abelovom U(1) grupom. Međutim, teorija ne mora biti Abelova. U tom je slučaju simetrija teorije opisana U(N) Liejevom grupom čiji su elementi $N \times N$ unitarne matrice $g(x) \in U(N) : g^\dagger(x) = g^{-1}(x)$. Kovarijanta derivacija se sada transformira na sljedeći način

$$D'_\mu = g D_\mu g^{-1}. \tag{3.8}$$

Taj izraz, zajedno s definicijom (3.4), implicira da se vektorsko polje transformira kao

$$A'_\mu = g A_\mu g^{-1} + g(\partial_\mu g^{-1}). \tag{3.9}$$

Grupni element $g(x) \in G$ se može prikazati na sljedeći način

$$g(x) = e^{-c(x)}, \tag{3.10}$$

što infinitezimalno iznosi

$$g(x) \cong 1 - c(x), \tag{3.11}$$

gdje $c(x)$ mora biti antihermitski operator $c^\dagger(x) = -c(x)$ zbog unitarnosti elementa $g(x)$. Iz toga slijede sljedeće infinitezimalne transformacije

$$\delta_c A_\mu = \partial_\mu c + [A_\mu, c], \tag{3.12}$$

$$\delta_c D_\mu = [D_\mu, c]. \tag{3.13}$$

Lako se pokaže da je baždarna algebra zatvorena

$$\begin{aligned}
[\delta_{c_1}, \delta_{c_2}] A_\mu &= \delta_{c_1} \left(\partial_\mu c_2 + [A_\mu, c_2]\right) - \delta_{c_2} \left(\partial_\mu c_1 + [A_\mu, c_1]\right) \\
&= [\partial_\mu c_1 + [A_\mu, c_1], c_2] - [\partial_\mu c_2 + [A_\mu, c_2], c_1] \\
&= \partial_\mu [c_1, c_2] + [A_\mu, [c_1, c_2]] \\
&= \delta_{[c_1, c_2]} A_\mu.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Baždarni parametar $c(x)$ je oblika $c(x) = c^A(x) T_A$, gdje su $T_A$ generatori Liejeve grupe, odnosno oni su elementi pripadne Liejeve algebre, stoga zadovoljavaju

$$[T_A, T_B] = f_{AB}{}^C T_C \tag{3.15}$$

gdje koeficijente $f_{AB}{}^C$ zovemo strukturne konstante te se iz izraza (3.15) lako vidi da su one antisimetrične na zamjenu dva susjedna indeksa. Generatori su antihermitski

$$T_A^\dagger = -T_A \tag{3.16}$$

i zadovoljavaju

$$\mathrm{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2} k_{AB}, \tag{3.17}$$

gdje je $k_{AB}$ Cartan-Killingova forma (A.1). Iz Jacobijevog identiteta

$$[T_A, [T_B, T_C]] + [T_C, [T_A, T_B]] + [T_B, [T_C, T_A]] = 0 \tag{3.18}$$

slijedi izraz za strukturne konstante

$$f_{AB}{}^D f_{CD}{}^E + f_{CA}{}^D f_{BD}{}^E + f_{BC}{}^D f_{AD}{}^E = 0. \tag{3.19}$$

Sada želimo napisati lagranžijan za vektorsko polje $A_\mu = A_\mu^A T_A$. Uvažavajući nekomutativnost vektorskog polja, tenzor jakosti polja možemo izračunati iz izraza (3.6)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{3.20}$$

što se korištenjem $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^A T_A$ i (3.15) može zapisati kao

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f_{BC}{}^A A_\mu^B A_\nu^C. \tag{3.21}$$

On je baždarno kovarijantan

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] \\ &= g\partial_\mu A_\nu g^{-1} - g\partial_\nu A_\mu g^{-1} + g[A_\mu, A_\nu]g^{-1} \\ &= gF_{\mu\nu}g^{-1} \end{aligned}$$

te infinitezimalna transformacija iznosi

$$\delta_c F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, c]. \tag{3.22}$$

Kinetički dio lagranžijana u Yang-Millsovoj teoriji je sljedećeg oblika

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} k_{AB} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^B = -\frac{1}{2} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^B \mathrm{Tr} T_A T_B = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{3.23}$$

Iz cikličnosti traga slijedi da je lagranžijan baždarno invarijantan

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(gF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}g^{-1}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Jacobijev identitet za kovarijantne derivacije, uz korištenje $[D_\mu, F^A_{\nu\kappa}] = D_\mu F^A_{\nu\kappa}$, daje Bianchijev identitet, koji je analogan homogenoj Maxwellovoj jednadžbi u Abelovoj teoriji:

$$(D_\mu F_{\nu\kappa})^A + (D_\nu F_{\kappa\mu})^A + (D_\kappa F_{\mu\nu})^A = 0. \tag{3.24}$$

Iz lagranžijana (3.23) možemo izvesti jednadžbu polja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^{\nu A})} &= -F^A_{\mu\nu}, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\nu A}} &= f_{BC}{}^A A^{\mu B} F^C_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

što ukupno daje

$$\partial^\mu F^A_{\mu\nu} + f_{BC}{}^A A^{\mu B} F^C_{\mu\nu} = 0. \tag{3.25}$$

Djelujući generatorom $T_A$, uz primjenu izraza (3.15), dobivamo

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \tag{3.26}$$

što se može raspisati kao

$$\partial^2 A_\nu - \partial_\nu\partial^\mu A_\mu + \partial^\mu[A_\mu, A_\nu] + [A^\mu, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] + [A^\mu, [A_\mu, A_\nu]] = 0. \tag{3.27}$$

## 3.2 *YM teorija formulirana kao algebra* $L_\infty$

Kako bismo Yang-Millsovu teoriju formulirali kao algebru $L_\infty$, koristit ćemo sljedeći kompleks s vektorskim prostorom L

$$\mathrm{L}_0 \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{L}_1 \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{L}_2$$

gdje je prostor L gradiran na tri potprostora za koja vrijedi

$$
\begin{aligned}
c = c \qquad &\Rightarrow \qquad c \in \mathrm{L}_0, \\
a = A_\mu \qquad &\Rightarrow \qquad A_\mu \in \mathrm{L}_1, \\
f(a) = E_\mu \qquad &\Rightarrow \qquad E_\mu \in \mathrm{L}_2.
\end{aligned}
$$

Prvi potprostor je prostor parametara, drugi je prostor polja, a treći je prostor jednadžbi polja. Algebra $L_\infty$ obuhvaća beskonačno identiteta, koji su definirani izrazom (2.2). No, za opisivanje Yang-Millsove teorije bit će nam potrebno samo konačno mnogo identiteta, ovisno o potenciji polja u izrazima za jednadžbu polja, baždarnu transformaciju polja i transformaciju jednadžbe polja. Sada usporedimo izraze (3.12), (3.27) te transformaciju jednadžbe polja

$$
\begin{aligned}
\delta_c A_\mu &= \partial_\mu c + [A_\mu, c], \\
f(A)_\nu &= \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu [A_\mu, A_\nu] + [A^\mu, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] + [A^\mu, [A_\mu, A_\nu]], \\
\delta_c f(A) &= [\partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu [A_\mu, A_\nu] + [A^\mu, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] + [A^\mu, [A_\mu, A_\nu]], c],
\end{aligned}
$$

s izrazima (2.7), (2.6) i (2.9)

$$
\begin{aligned}
\delta_c A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_{n+1}(A^n, c), \\
f(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_n(A^n), \\
\delta_c f(A) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \mu_{n+2}(f(A), A^n, c).
\end{aligned}
$$

Iz izraza za transformaciju polja možemo očitati sljedeće jednakosti

$$\mu_1(c)_\mu = \partial_\mu c, \tag{3.28}$$

$$\mu_2(A, c)_\mu = [A_\mu, c], \tag{3.29}$$

$$\mu_n(A^{n-1}, c)_\mu = 0, \qquad n \geq 3. \tag{3.30}$$

Gledajući stupnjeve produkata (3.28) i (3.29), nalazimo da su oni elementi prostora $L_1$. Nadalje, iz jednadžbi polja proizlazi

$$\begin{aligned}
\mu_1(A)_\mu &= \partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu, \\
\mu_2(A,A)_\mu &= 2\left(\partial^\nu [A_\nu, A_\mu] + [A^\nu, \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu]\right), \\
\mu_3(A,A,A)_\mu &= 3![A^\nu, [A_\nu, A_\mu]], \\
\mu_n(A^n)_\mu &= 0, \qquad n \geq 4.
\end{aligned}$$

Međutim, želimo naći i produkte u kojima polja nisu identična. Kako bismo to postigli, koristit ćemo činjenicu da polja $a_i$ stupnja $1$ međusobno komutiraju unutar produkta $\mu_n(a_1, ..., a_n)$, što zajedno s multilinearnošću tog produkta daje

$$2\mu_2(a_1, a_2) = \mu_2(a_1 + a_2, a_1 + a_2) - \mu_2(a_1, a_1) - \mu_2(a_2, a_2), \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
3!\mu_3(a_1, a_2, a_3) &= \mu_3((a_1 + a_2 + a_3)^3) - \mu_3((a_1 + a_2)^3) - \mu_3((a_2 + a_3)^3) \\
&\quad - \mu_3((a_1 + a_3)^3) + \mu_3(a_1^3) + \mu_3(a_2^3) + \mu_3(a_3^3).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Pomoću tih relacija dobivamo općenite izraze za više produkte polja

$$\mu_1(A)_\mu = \partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(A_1, A_2)_\mu &= \partial^\nu [A_{1\nu}, A_{2\mu}] + \partial^\nu [A_{2\nu}, A_{1\mu}] + [A_1^\nu, \partial_\nu A_{2\mu} - \partial_\mu A_{2\nu}] \\
&\quad + [A_2^\nu, \partial_\nu A_{1\mu} - \partial_\mu A_{1\nu}],
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3(A_1, A_2, A_3)_\mu &= [A_1^\nu, [A_{2\nu}, A_{3\mu}]] + [A_2^\nu, [A_{3\nu}, A_{1\mu}]] + [A_3^\nu, [A_{1\nu}, A_{2\mu}]] \\
&\quad + [A_2^\nu, [A_{1\nu}, A_{3\mu}]] + [A_3^\nu, [A_{2\nu}, A_{1\mu}]] + [A_1^\nu, [A_{3\nu}, A_{2\mu}]],
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\mu_n(A_1, ..., A_n)_\mu = 0, \qquad n \geq 4. \tag{3.36}$$

Konačno, usporedbom transformacija jednadžbi polja nalazimo da vrijedi

$$\mu_2(E, c)_\mu = [E_\mu, c], \tag{3.37}$$

$$\mu_n(E, A_1, ..., A_{n-2}, c) = 0, \qquad n \geq 3, \tag{3.38}$$

pri čemu je $E_\mu$ bilo koji element prostora $L_2$.

Produkti (3.33) - (3.36) nam omogućuju da napišemo akciju koristeći izraz (2.12).

No, najprije moramo definirati skalarni produkt kao

$$\langle A_1, A_2 \rangle_{\mathrm{L}} \equiv \int \mathrm{d}^4 x k_{AB} A_1^A A_2^B.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\langle A, \mu_1(A)\rangle_{\mathrm{L}} + \frac{1}{3!}\langle A, \mu_2(A, A)\rangle_{\mathrm{L}} + \frac{1}{4!}\langle A, \mu_3(A, A, A)\rangle_{\mathrm{L}} \\
&= \frac{1}{2}\langle A^\mu, \partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu \rangle_{\mathrm{L}} + \frac{2}{3!}\langle A^\mu, \partial^\nu [A_\nu, A_\mu] + [A^\nu, \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu]\rangle_{\mathrm{L}} + \frac{3!}{4!}\langle A^\mu, [A^\nu, [A_\nu, A_\mu]]\rangle_{\mathrm{L}} \\
&= -\frac{1}{2}\langle \partial^\nu A^\mu, \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \rangle_{\mathrm{L}} - \frac{1}{3}\langle \partial^\nu A^\mu, [A_\nu, A_\mu]\rangle_{\mathrm{L}} - \frac{1}{3}\langle A^\mu, [A^\nu, \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu]\rangle_{\mathrm{L}} \\
&\quad - \frac{1}{4}\langle [A^\nu, A^\mu], [A_\nu, A_\mu]\rangle_{\mathrm{L}} \\
&= -\frac{1}{2}\langle \partial^\nu A^\mu, \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \rangle_{\mathrm{L}} - \langle \partial^\nu A^\mu, [A_\nu, A_\mu]\rangle_{\mathrm{L}} - \frac{1}{4}\langle [A^\nu, A^\mu], [A_\nu, A_\mu]\rangle_{\mathrm{L}} \\
&= -\frac{1}{4}\langle F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{L}}.
\end{aligned}$$

Dobili smo ispravan rezultat, Yang-Millsovu akciju (3.23). U računu smo koristili simetričnost Cartan-Killingove forme $k_{AB}$ i parcijalnu integraciju. Sličnim postupcima se može pokazati cikličnost produkata akcije za međusobno različita polja $A_i \in \mathrm{L}_1$. Produkt dvaju baždarnih parametara možemo izvrijedniti korištenjem baždarne algebre (3.14)

$$\delta_{[c_1, c_2]} A_\mu = [\delta_{c_1}, \delta_{c_2}] A_\mu.$$

Izjednačimo s obje strane izraze koji su neovisni o polju $A_\mu$. S lijeve strane je to član $\mu_1([c_1, c_2])$, dok se s desne strane on nalazi unutar članova

$$\begin{aligned}
[\delta_{c_1}, \delta_{c_2}] A_\mu &= \delta_{c_1}(\mu_2(A, c_2)) - \delta_{c_2}(\mu_2(A, c_1)) + ... \\
&= \mu_2(\delta_{c_1} A, c_2) - \mu_2(\delta_{c_2} A, c_1) + ... \\
&= \mu_2(\mu_1(c_1), c_2) - \mu_2(\mu_1(c_2), c_1) + \mathcal{O}(A) \\
&= \mu_1(\mu_2(c_1, c_2)) + \mathcal{O}(A),
\end{aligned}$$

gdje je u zadnjoj jednakosti korištena relacija (2.4), a $\mathcal{O}(A)$ predstavlja dio ovisan o polju $A$. Dakle, konačno imamo

$$\mu_2(c_1, c_2) = [c_1, c_2]. \tag{3.39}$$

Sada možemo uočiti sljedeću stvar, u Yang-Millsovoj teoriji se javljaju produkti oblika $\mu_n(l_1, ..., l_n)$ samo za $n \leq 3$. Stoga, moramo potvrditi jedino one identitete algebre $L_\infty$ koji sadrže kombinaciju produkata s $n = 1, 2, 3$. To su prvih pet poopćenih Jacobijevih identiteta (2.2) jer za $n \geq 6$ svi članovi identiteta sadrže produkt $\mu_k(l_1, ..., l_k)$ sa $k > 3$ koji trivijalno iščezava. Proučimo redom prvih pet identiteta.

**1.** Prvi identitet je dan izrazom

$$\mu_1(\mu_1(l_1)) = 0 \tag{3.40}$$

te je stupnja

$$\deg\left(\mu_1(\mu_1(l_1))\right) = 2 + |l_1|.$$

Kako nam se algebra sastoji samo od potprostora stupnjeva $0$, $1$ i $2$, slijedi da $l_1$ mora biti varijabla stupnja nula, odnosno navedeni identitet moramo provjeriti samo za $l_1 = c$:

$$\begin{aligned}
\mu_1(\mu_1(c))_\mu &= \partial^2 \mu_1(c)_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \mu_1(c)_\nu \\
&= \partial^2 \partial_\mu c - \partial_\mu \partial^2 c \\
&= 0.
\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti smo koristili činjenicu da $\mu_1(c)$ pripada prostoru $L_1$ i formulu (3.33), a u drugoj jednakosti smo upotrijebili izraz (3.28).

**2.** Sljedeći izraz je oblika

$$\mu_1(\mu_2(l_1, l_2)) = \mu_2(\mu_1(l_1), l_2) + (-1)^{|l_1|} \mu_2(l_1, \mu_1(l_2)), \tag{3.41}$$

i stupnja

$$\deg\left(\mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)},...,l_{\sigma(j)}),l_{\sigma(j+1)},...,l_{\sigma(2)})\right) = 1 + |l_1| + |l_2|.$$

Stoga, zbroj stupnjeva varijabli mora biti jednak $0$ ili $1$. To znači da identitet moramo provjeriti za dva slučaja; prvi u kojem su obje varijable parametri $(l_1, l_2) = (c_1, c_2)$ te drugi u kojem je jedna varijabla parametar, a druga polje $(l_1, l_2) = (A, c)$.
U prvom slučaju, uz primjenu (3.28), (3.29) i (3.39), dobivamo

$$\begin{aligned}
\mu_2(\mu_1(c_1), c_2)_\mu + \mu_2(c_1, \mu_1(c_2))_\mu &= \mu_2(\partial_\mu c_1, c_2) + \mu_2(c_1, \partial_\mu c_2) \\
&= [\partial_\mu c_1, c_2] - [\partial_\mu c_2, c_1] \\
&= \partial_\mu [c_1, c_2] \\
&= \mu_1(\mu_2(c_1, c_2))_\mu.
\end{aligned}$$

U drugom slučaju imamo

$$\begin{aligned}
\mu_1(\mu_2(A, c))_\mu + \mu_2(A, \mu_1(c))_\mu &= \mu_1([A, c])_\mu + \mu_2(A, \partial c)_\mu \\
&= [\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu, c] \\
&= \mu_2(\mu_1(A), c)_\mu.
\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti smo koristili izraze (3.28) i (3.29), u drugoj (3.33) i (3.34), a u zadnjoj (3.37).
**3.** Treći identitet je dan s

$$\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(l_1, l_2), l_3) + (-1)^{1+|l_2||l_3|}\mu_2(\mu_2(l_1, l_3), l_2) + (-1)^{|l_1|(|l_2|+|l_3|)}\mu_2(\mu_2(l_2, l_3), l_1) \\
&= \mu_3(\mu_1(l_1), l_2, l_3) + (-1)^{|l_1|}\mu_3(l_1, \mu_1(l_2), l_3) + (-1)^{|l_1|+|l_2|}\mu_3(l_1, l_2, \mu_1(l_3)) \\
&\quad + \mu_1(\mu_3(l_1, l_2, l_3)),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

te je njegov stupanj jednak

$$\deg\left(\mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)},...,l_{\sigma(j)}),l_{\sigma(j+1)},...,l_{\sigma(3)})\right) = \sum_{i=1}^{3} |l_i|.$$

Zbroj stupnjeva varijabli može biti $0$, $1$ ili $2$, a to nam daje četiri mogućnosti.
*Prvi slučaj:*

Prvu mogućnost imamo za varijable $(l_1, l_2, l_3) = (c_1, c_2, c_3)$. Uvrštavajući ih, vidimo da se u identitetu javljaju samo produkti sljedećih oblika

$$\mu_3(c,c,c), \qquad \mu_2(\mu_2(c,c),c), \qquad \mu_3(\mu_1(c),c,c) \equiv \mu_3(A,c,c).$$

Sada stavljamo da vrijedi

$$\mu_3(c,c,c) = 0 \qquad \text{i} \qquad \mu_3(A,c,c) = 0 \tag{3.43}$$

jer Jacobijev identitet u Liejevoj algebri iščezava te zato što strukturne konstante Liejeve algebre nisu ovisne o poljima. Stoga, preostaje

$$\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(c_1,c_2),c_3) - \mu_2(\mu_2(c_1,c_3),c_2) + \mu_2(\mu_2(c_2,c_3),c_1) \\
&= [[c_1,c_2],c_3] + [[c_3,c_1],c_2] + [[c_2,c_3],c_1] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

U drugoj jednakosti smo upotrijebili formulu (3.39), a u posljednjoj jednakosti smo koristili činjenicu da su $c_1$, $c_2$ i $c_3$ elementi Liejeve algebre za koje vrijedi Jacobijev identitet.

*Drugi slučaj:*

Kada u identitet uvrstimo varijable $(l_1, l_2, l_3) = (A, c_1, c_2)$, čiji je ukupni stupanj jednak jedan, većina članova je oblika

$$\mu_3(A,c,c), \qquad \mu_3(A,\mu_1(c),c) \equiv \mu_3(A,A,c), \qquad \mu_3(\mu_1(A),c,c) \equiv \mu_3(E,c,c),$$

od kojih prva dva iščezavaju. Treći je također jednak nuli jer je baždarna algebra zatvorena na ljusci. Preostaje nam sljedeće

$$\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(A,c_1),c_2) + \mu_2(\mu_2(c_2,A),c_1) + \mu_2(\mu_2(c_1,c_2),A) \\
&= [[A,c_1],c_2] + [[c_2,A],c_1] + [[c_1,c_2],A] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Koristili smo izraz (3.29) i Jacobijev identitet.

*Treći slučaj:*

Treći slučaj imamo za varijable $(l_1, l_2, l_3) = (A_1, A_2, c)$ ukupnog stupnja $2$. Njihovim uvrštavanjem u identitet dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(A_1, A_2), c)_\mu + \mu_2(\mu_2(c, A_1), A_2)_\mu - \mu_2(\mu_2(A_2, c), A_1)_\mu \\
&- \mu_3(\mu_1(A_1), A_2, c)_\mu + \mu_3(A_1, \mu_1(A_2), c)_\mu - \mu_3(A_1, A_2, \mu_1(c))_\mu - \mu_1(\mu_3(A_1, A_2, c))_\mu \\
&= -[A_1^\nu, [A_{2\nu}, \partial_\mu c]] - [A_2^\nu, [\partial_\nu c, A_{1\mu}]] - [\partial^\nu c, [A_{1\nu}, A_{2\mu}]] - [A_2^\nu, [A_{1\nu}, \partial_\mu c]] \\
&\quad - [\partial^\nu c, [A_{2\nu}, A_{1\mu}]] - [A_1^\nu, [\partial_\nu c, A_{2\mu}]] + (-2A_{1\nu}A_{2\mu} + A_{2\mu}A_{1\nu} - 2A_{2\nu}A_{1\mu} + A_{1\mu}A_{2\nu})\partial^\nu c \\
&\quad + \partial^\nu c(A_{1\nu}A_{2\mu} - 2A_{2\mu}A_{1\nu} + A_{2\nu}A_{1\mu} - 2A_{1\mu}A_{2\nu}) + \partial_\mu c(A_{1\nu}A_2^\nu + A_{2\nu}A_1^\nu) \\
&\quad + (A_{1\nu}A_2^\nu + A_{2\nu}A_1^\nu)\partial_\mu c - 2A_{1\nu}(\partial_\mu c)A_2^\nu - 2A_{2\nu}(\partial_\mu c)A_1^\nu + A_{1\mu}(\partial_\nu c)A_2^\nu \\
&\quad + A_{2\mu}(\partial_\nu c)A_1^\nu + A_{1\nu}(\partial^\nu c)A_{2\mu} + A_{2\nu}(\partial^\nu c)A_{1\mu} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Koristili smo relaciju 3.38 koja implicira da su $\mu_3(\mu_1(A_1), A_2, c)_\mu$ i $\mu_3(A_1, \mu_1(A_2), c)_\mu$ jednaki nuli te izraze (3.29), (3.34), (3.35) i (3.37).

*Četvrti slučaj:*

Posljednja mogućnost je $(l_1, l_2, l_3) = (c_1, c_2, E)$ s kojom identitet (3.42) poprima sljedeći oblik:

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(c_1, c_2), E) + \mu_2(\mu_2(E, c_1), c_2) + \mu_2(\mu_2(c_2, E), c_1) \\
&= \mu_3(\mu_1(c_1), c_2, E) + \mu_3(c_1, \mu_1(c_2), E) + \mu_1(\mu_3(c_1, c_2, E)) \\
&\quad + \mu_3(c_1, c_2, \mu_1(E)).
\end{aligned}
$$

Drugi red iščezava jer se u njemu javljaju produkti oblika $\mu_3(A, E, c) = 0$ i $\mu_3(E, c, c) = 0$. Produkt u trećem redu je stupnja $3$, što znači da je i on jednak nuli. Ostaje nam prvi red koji, primjenom (3.39) i (3.37), postaje

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_2(c_1, c_2), E) + \mu_2(\mu_2(E, c_1), c_2) + \mu_2(\mu_2(c_2, E), c_1) \\
&= [[c_1, c_2], E] + [[E, c_1], c_2]] + [[c_2, E], c_1] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

gdje zadnja jednakost vrijedi zbog Jacobijevog identiteta.

**4.** Četvrti identitet je dan izrazom

$$\begin{aligned}
0 = &\mu_1(\mu_4(l_1,l_2,l_3,l_4)) - (-1)^{|l_1|}\mu_2(l_1,\mu_3(l_2,l_3,l_4)) - (-1)^{|l_2|(|l_3|+|l_4|)}\mu_2(\mu_3(l_1,l_3,l_4),l_2) \\
&- (-1)^{1+|l_3||l_4|}\mu_2(\mu_3(l_1,l_2,l_4),l_3) - \mu_2(\mu_3(l_1,l_2,l_3),l_4) + \mu_3(l_1,l_2,\mu_2(l_3,l_4)) \\
&+ (-1)^{|l_3||l_4|}\mu_3(l_1,\mu_2(l_2,l_4),l_3) + (-1)^{|l_4|(|l_2|+|l_3|)}\mu_3(\mu_2(l_1,l_4),l_2,l_3) \\
&- \mu_3(l_1,\mu_2(l_2,l_3),l_4) + (-1)^{1+|l_2||l_3|}\mu_3(\mu_2(l_1,l_3),l_2,l_4) + \mu_3(\mu_2(l_1,l_2),l_3,l_4) \\
&- (-1)^{|l_1|+|l_2|+|l_3|}\mu_4(l_1,l_2,l_3,\mu_1(l_4)) - (-1)^{|l_1|+|l_2|}\mu_4(l_1,l_2,\mu_1(l_3),l_4)) \\
&- (-1)^{|l_1|}\mu_4(l_1,\mu_1(l_2),l_3,l_4) - \mu_4(\mu_1(l_1),l_2,l_3,l_4)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\deg\left(\mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)},...,l_{\sigma(j)}),l_{\sigma(j+1)},...,l_{\sigma(4)})\right) = -1 + \sum_{i=1}^{4}|l_i|.$$

Zadnja relacija implicira da netrivijalni rezultat imamo za $\sum_{i=1}^4 |l_i| = 1$, $\sum_{i=1}^4 |l_i| = 2$ ili $\sum_{i=1}^4 |l_i| = 3$, a to se ostvaruje pomoću pet kombinacija varijabli. Stavljamo da su svi produkti oblika $\mu_4(l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)},l_{\sigma(3)},l_{\sigma(4)}) = 0$ za sve $l_i \in \mathrm{L}$, čime u identitetu preostaju samo članovi oblika $\mu_2(\mu_3(l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)},l_{\sigma(3)}),l_{\sigma(4)})$ i $\mu_3(\mu_2(l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)}),l_{\sigma(3)},l_{\sigma(4)})$. Pogledajmo pojedinačne slučajeve:

Prva mogućnost je kad su varijable dane s $(l_1,l_2,l_3,l_4) = (A,c_1,c_2,c_3)$ čiji je ukupan stupanj jednak jedinici. Kako je $\mu_2(A,c) \in \mathrm{L}_1$, skup $(A,c_1,c_2,c_3)$ se u navedenim produktima pojavljuje isključivo u oblicima $\mu_3(c,c,c)$ i $\mu_3(A,c,c)$, a iz (3.43) se vidi da su oni jednaki nuli.

Uvrštavanjem varijabli $(l_1,l_2,l_3,l_4) = (A_1,A_2,c_1,c_2)$ ukupnog stupnja dva u identitet (3.44), dobivamo produkte oblika $\mu_3(A,c,c)$, $\mu_3(A,A,c)$ i $\mu_3(E,c,c)$ jer je $\mu_2(A,A) \in \mathrm{L}_2$, a oni svi iščezavaju.

Skup $(l_1,l_2,l_3,l_4) = (E,c_1,c_2,c_3)$ stupnja dva je sljedeća netrivijalna mogućnost. Dane varijable se u produktima javljaju jedino kao $\mu_3(c,c,c)$ i $\mu_3(E,c,c)$, što je uvijek jednako nuli.

Četvrta mogućnost je izbor $(l_1,l_2,l_3,l_4) = (A_1,A_2,A_3,c)$ stupnja $3$. Kada se te varijable uvrste u identitet (3.44), dobivamo kombinacije $\mu_3(A,A,c)$ i $\mu_3(c,\mu_2(A,A),A)$, što je ekvivalentno $\mu_3(c,E,A)$, koje su jednake nuli. Jedini dio izraza koji trivijalno ne iščezava je

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(\mu_3(A_1, A_2, A_3), c) + \mu_3(A_1, A_2, \mu_2(A_3, c)) + \mu_3(\mu_2(A_1, c), A_2, A_3) + \mu_3(A_1, \mu_2(A_2, c), A_3)\\
&= [\mu_3(A_1, A_2, A_3), c] + \mu_3(A_1, A_2, [A_3, c]) + \mu_3([A_1, c], A_2, A_3) + \mu_3(A_1, [A_2, c], A_3).
\end{aligned}
$$

Korištenjem produkta (3.35) i Jacobijevog identiteta pokazuje se da je to jednako nuli.

Posljednji slučaj imamo za varijable $(l_1, l_2, l_3, l_4) = (E, A, c_1, c_2)$ čiji je ukupan stupanj 3. Uvrštavanjem skupa $(E, A, c_1, c_2)$ u izraz (3.44) dobivamo produkte oblika $\mu_3(A, c, c)$, $\mu_3(E, c, c)$ i $\mu_3(c, E, A)$ koji su jednaki nuli te produkte $\mu_3(E, A, \mu_2(c, c))$, $\mu_3(A, c, \mu_2(E, c))$ i $\mu_3(E, c, \mu_2(A, c))$ koji su oblika $\mu_3(c, E, A) = 0$. Preostaje nam jedino produkt $\mu_3(c, c, \mu_2(E, A))$ koji sadrži element $\mu_2(E, A)$ stupnja $3$ te je stoga jednak nuli.

**5.** Budući da stavljamo da vrijedi $\mu_4(l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(4)}) = 0$ i $\mu_5(l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(5)}) = 0$ za sve $l_i \in$ L, u petom identitetu važni su jedino članovi oblika $\mu_3(\mu_3(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}), l_{\sigma(4)}, l_{\sigma(5)}, l_{\sigma(6)})$, a oni su dani izrazom

$$
\begin{aligned}
0 = {}&\mu_5(\mu_1(l_1), l_2, l_3, l_4, l_5) + ... + \mu_3(\mu_3(l_1, l_2, l_3), l_4, l_5) - (-1)^{|l_3||l_4|}\mu_3(\mu_3(l_1, l_2, l_4), l_3, l_5)\\
&+ (-1)^{(|l_3|+|l_4|)|l_5|}\mu_3(\mu_3(l_1, l_2, l_5), l_3, l_4) + (-1)^{|l_2|(|l_3|+|l_4|)}\mu_3(\mu_3(l_1, l_3, l_4), l_2, l_5)\\
&- (-1)^{|l_2|(|l_3|+|l_5|)+|l_4||l_5|}\mu_3(\mu_3(l_1, l_3, l_5), l_2, l_4) + (-1)^{(|l_2|+|l_3|)(|l_4|+|l_5|)}\mu_3(\mu_3(l_1, l_4, l_5), l_2, l_3)\\
&+ (-1)^{|l_1|}\mu_3(l_1, \mu_3(l_2, l_3, l_4), l_5) - (-1)^{|l_1|+|l_4||l_5|}\mu_3(l_1, \mu_3(l_2, l_3, l_5), l_4)\\
&+ (-1)^{|l_1|+|l_3|(|l_4|+|l_5|)}\mu_3(l_1, \mu_3(l_2, l_4, l_5), l_3) + (-1)^{|l_1|+|l_2|}\mu_3(l_1, l_2, \mu_3(l_3, l_4, l_5)) + ...\\
&+ \mu_1(\mu_5(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)),
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

koji je stupnja

$$
\deg\left(\mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(j)}), l_{\sigma(j+1)}, ..., l_{\sigma(5)})\right) = -2 + \sum_{i=1}^{5} |l_i|.
$$

Ukupan stupanj izraza nas ograničuje na sedam različitih izbora varijabli.

Prva mogućnost je izbor $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (E, c_1, c_2, c_3, c_4)$ koji se u izrazu javlja kao $\mu_3(c, c, c)$ i $\mu_3(E, c, c)$, a oni su jednaki nuli.

Drugi mogući odabir je $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (A_1, A_2, c_1, c_2, c_3)$ koji daje sljedeće produkte

$\mu_3(A, A, c) = 0$, $\mu_3(A, c, c) = 0$ i $\mu_3(c, c, c) = 0$.

Sljedeći slučaj imamo za $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (E, A, c_1, c_2, c_3)$, a te varijable daju sljedeće kombinacije $\mu_3(c, c, c) = 0$, $\mu_3(A, c, c) = 0$, $\mu_3(E, c, c) = 0$ i $\mu_3(c, E, A) = 0$.

Četvrta mogućnost je $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (A_1, A_2, A_3, c_1, c_2)$ koja se u identitetu (3.45) javlja u oblicima $\mu_3(A, A, c)$, $\mu_3(A, c, c)$ te $\mu_3(\mu_3(A, A, A), c, c)$, koji je ekvivalentan produktu $\mu_3(E, c, c)$, a svi oni iščezavaju.

Odabir varijabli $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (E_1, E_2, c_1, c_2, c_3)$ daje produkte $\mu_3(c, c, c) = 0$, $\mu_3(E, c, c) = 0$ te $\mu_3(E, E, c)$ koji je također jednak nuli zato što je stupnja $3$.

Sljedeća mogućnost je $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (E, A_1, A_2, c_1, c_2)$ koja daje iščezavajuće produkte $\mu_3(A, c, c) = 0$, $\mu_3(E, c, c) = 0$, $\mu_3(A, A, c) = 0$ i $\mu_3(E, A, c) = 0$ te produkt $\mu_3(E, A, A)$ stupnja $3$ pa je i on jednak nuli.

Posljednji slučaj je odabir $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (A_1, A_2, A_3, A_4, c)$ s produktima $\mu_3(A, A, c) = 0$ i $\mu_3(\mu_3(A, A, A), A, c)$ oblika $\mu_3(E, A, c) = 0$.

Ovime smo pokazali da su sve pretpostavke algebre $L_\infty$ zadovoljene. Yang-Millsova teorija je stoga opisana sljedećim produktima:

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(c_1, c_2) = [c_1, c_2],\\
&\mu_1(c)_\mu = \partial_\mu c,\\
&\mu_2(A, c)_\mu = [A_\mu, c],\\
&\mu_1(A)_\mu = \partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu,\\
&\mu_2(A_1, A_2)_\mu = \partial^\nu [A_{1\nu}, A_{2\mu}] + \partial^\nu [A_{2\nu}, A_{1\mu}] + [A_1^\nu, \partial_\nu A_{2\mu} - \partial_\mu A_{2\nu}]\\
&\qquad\qquad\qquad + [A_2^\nu, \partial_\nu A_{1\mu} - \partial_\mu A_{1\nu}],\\
&\mu_3(A_1, A_2, A_3)_\mu = [A_1^\nu, [A_{2\nu}, A_{3\mu}]] + [A_2^\nu, [A_{3\nu}, A_{1\mu}]] + [A_3^\nu, [A_{1\nu}, A_{2\mu}]]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + [A_2^\nu, [A_{1\nu}, A_{3\mu}]] + [A_3^\nu, [A_{2\nu}, A_{1\mu}]] + [A_1^\nu, [A_{3\nu}, A_{2\mu}]],\\
&\mu_2(E, c)_\mu = [E_\mu, c].
\end{aligned}
$$

# 4 Chern-Simonsova teorija

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se standardna Chern-Simonsova teorija formulira kao algebra $L_\infty$. Zatim ćemo uvesti 2-formu te ćemo primjeniti poopćene Jacobijeve identitete kako bismo našli uvjete na strukturne funkcije. Koristit ćemo algebru tenzorskog produkta $(\Omega^\bullet(M,\mathrm{L}), \mu_n^{'})$, definiranu u potpoglavlju 2.3, sa sljedećim kompleksom

$$\Omega_0^\bullet(M,\mathrm{L}) \xrightarrow{\mu_n^{'}} \Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L}) \xrightarrow{\mu_n^{'}} \Omega_2^\bullet(M,\mathrm{L}).$$

## *4.1 Standardna Chern-Simonsova teorija*

Chern-Simonsova teorija je opisana akcijom

$$S = \frac{1}{2}\int_M \langle A, \mathrm{d}A\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})} + \frac{1}{3}\int_M \langle A, A\wedge A\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})},$$

gdje je polje $A$ element prostora $\Omega^1(M,\mathrm{L}) = \Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L})$, pri čemu je L standardna Liejeva algebra. Baždarna transformacija je opisana parametrom $c \in \Omega^0(M,\mathrm{L}) = \Omega_0^\bullet(M,\mathrm{L})$ te je oblika

$$\delta_c A = \mathrm{d}c + [A, c]. \tag{4.1}$$

Kako bismo našli jednadžbu polja, zapisat ćemo akciju pomoću (2.17) na sljedeći način

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\langle A_\mu, \partial_\nu A_\rho\rangle_\mathrm{L} + \frac{1}{3!}\int_M \mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\langle A_\mu, [A_\nu, A_\rho]\rangle_\mathrm{L} \\ =& \frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}\langle A_\mu, \partial_\nu A_\rho\rangle_\mathrm{L} + \frac{1}{3!}\int_M \mathrm{d}^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}\langle A_\mu, [A_\nu, A_\rho]\rangle_\mathrm{L} \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili izraz koji povezuje skalarne produkte tenzorske i baždarne algabre $L_\infty$ (2.17) i jednakost (B.4)

$$\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho = \varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3.$$

Skalarni produkt dvaju polja u algebri $(\mathrm{L}, \mu_n)$ je definiran kao

$$\langle A_1, A_2 \rangle_{\mathrm{L}} \equiv k_{AB} A_1^A A_2^B,$$

što nam omogućuje da izračunamo jednadžbu polja

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho} k_{AB} \partial_\nu A_\rho^B + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} f_{ABC} A_\nu^B A_\rho^C,$$

a to je u prostoru $\Omega_2^\bullet(M, \mathrm{L})$ jednako

$$f(A) = \mathrm{d}A + A \wedge A. \tag{4.2}$$

Usporedbom relacija (4.1) i (4.2) s izrazima (2.6) i (2.7) te korištenjem (3.31) i (3.32) nalazimo algebru $L_\infty$:

$$\mu_1^{'}(c) = \mathrm{d}c, \tag{4.3}$$

$$\mu_2^{'}(A, c) = [A, c], \tag{4.4}$$

$$\mu_2^{'}(c_1, c_2) = [c_1, c_2], \tag{4.5}$$

$$\mu_1^{'}(A) = \mathrm{d}A, \tag{4.6}$$

$$\mu_2^{'}(A_1, A_2) = A_1 \wedge A_2 + A_2 \wedge A_1. \tag{4.7}$$

Sada moramo provjeriti jesu li svi poopćeni Jacobijevi identiteti zadovoljeni. Budući da imamo neiščezavajuće produkte $\mu_n^{'}$ jedino za $n \leq 2$, moramo provjeriti samo identitete za $n = 1, 2, 3$. Argumentacija je identična kao u slučaju Yang-Millsove teorije.

**1.** Kako je prva relacija stupnja 2, jedina dozvoljena varijabla u identitetu (3.40) je $c \in \Omega_0^\bullet(M, \mathrm{L})$:

$$\mu_1^{'}(\mu_1^{'}(c)) = \mu_1^{'}(\mathrm{d}c) = \mathrm{d}^2 c = 0.$$

**2.** U identitetu (3.41) imamo dva moguća slučaja:

*Prvi slučaj* $(c_1, c_2)$*:*

$$
\begin{aligned}
\mu_2^{'}(\mu_1^{'}(c_1), c_2) - \mu_2^{'}(\mu_1^{'}(c_2), c_1) &= \mu_2^{'}(\mathrm{d}c_1, c_2) - \mu_2^{'}(\mathrm{d}c_2, c_1) \\
&= [\mathrm{d}c_1, c_2] - [\mathrm{d}c_2, c_1] \\
&= \mathrm{d}(c_1 c_2) - \mathrm{d}(c_2 c_1) \\
&= \mathrm{d}[c_1, c_2] \\
&= \mu_1^{'}(\mu_2^{'}(c_1, c_2)).
\end{aligned}
$$

*Drugi slučaj* $(A, c)$*:*

$$
\begin{aligned}
\mu_1^{'}(\mu_2^{'}(A, c)) &= \mu_2^{'}(\mu_1^{'}(A), c) - \mu_2^{'}(\mu_1^{'}(c), A) \\
\mu_1^{'}([A, c]) &= \mu_2^{'}(\mathrm{d}A, c) - \mu_2^{'}(\mathrm{d}c, A) \\
\mathrm{d}[A, c] &= \mu_2^{'}(\mathrm{d}A, c) - \mathrm{d}c \wedge A - A \wedge \mathrm{d}c.
\end{aligned}
$$

Vidimo da $\mu_2^{'}(\mathrm{d}A, c)$ mora biti jednak

$$
\begin{aligned}
\mu_2^{'}(\mathrm{d}A, c) &= \mathrm{d}[A, c] + \mathrm{d}c \wedge A + A \wedge \mathrm{d}c \\
&= [\mathrm{d}A, c]
\end{aligned}
$$

kako bi identitet bio zadovoljen. Time smo dobili novi $L_\infty$ produkt

$$
\mu_2^{'}(E, c) = [E, c]. \tag{4.8}
$$

On je u skladu s izrazom za transformaciju (2.9) jednadžbe $f(A)$ jer se ona može prikazati pomoću (B.3) kao

$$
f(A) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu,
$$

što zajedno s (3.22) daje

$$
\delta_c f(A) = [f(A), c].
$$

**3.** Posljednji identitet koji moramo potvrditi je (3.42), a on je netrivijalan za četiri različita izbora varijabli.

*Prvi slučaj* $(c_1, c_2, c_3)$*:* Moramo pokazati da vrijedi

$$\mu_2'(\mu_2'(c_1, c_2), c_3) - \mu_2'(\mu_2'(c_1, c_3), c_2) + \mu_2'(\mu_2'(c_2, c_3), c_1) = 0.$$

Uvrštavanjem dobivamo izraz

$$[[c_1, c_2], c_3] + [[c_3, c_1], c_2] + [[c_2, c_3], c_1]$$

koji je zapravo Jacobijev identitet te je stoga jednak nuli.

*Drugi slučaj* $(A, c_1, c_2)$*:* U ovom slučaju moramo dokazati relaciju

$$\mu_2'(\mu_2'(A, c_1), c_2) - \mu_2'(\mu_2'(A, c_2), c_1) + \mu_2'(\mu_2'(c_1, c_2), A) = 0$$

koja iščezava zbog Jacobijevog identiteta

$$[[A, c_1], c_2] + [[c_2, A], c_1] + [[c_1, c_2], A] = 0.$$

*Treći slučaj* $(A_1, A_2, c)$*:* Moramo pokazati da vrijedi

$$\mu_2'(\mu_2'(A_1, A_2), c) - \mu_2'(\mu_2'(A_1, c), A_2) - \mu_2'(\mu_2'(A_2, c), A_1) = 0.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
&\mu_2'(\mu_2'(A_1, A_2), c) - \mu_2'(\mu_2'(A_1, c), A_2) - \mu_2'(\mu_2'(A_2, c), A_1) \\
&= ([[A_{1\mu}, A_{2\nu}], c] - [[A_{1\mu}, c], A_{2\nu}] - [[A_{2\mu}, c], A_{1\nu}])\, \mathrm{dx}^\mu \wedge \mathrm{dx}^\nu \\
&= ([[A_{1\mu}, A_{2\nu}], c] + [[c, A_{1\mu}], A_{2\nu}] + [[A_{2\nu}, c], A_{1\mu}])\, \mathrm{dx}^\mu \wedge \mathrm{dx}^\nu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

U izvodu smo koristili svojstvo antisimetričnosti 1-formi i Jacobijev identitet.

*Četvrti slučaj* $(E, c_1, c_2)$*:* U ovom slučaju moramo dokazati relaciju

$$\mu_2'(\mu_2'(E, c_1), c_2) - \mu_2'(\mu_2'(E, c_2), c_1) + \mu_2'(\mu_2'(c_1, c_2), E) = 0$$

koja se također svodi na Jacobijev identitet

$$[[E,c_1],c_2]+[[c_2,E],c_1]+[[c_1,c_2],E]=0.$$

## 4.2 Vezanje Chern-Simonsove teorije na BF teoriju

Standardnu Chern-Simonsovu teoriju opisanu 1-formom $A\in\Omega^1(M,\mathrm{L}_0)$ i baždarnim parametrom $c\in\Omega^0(M,\mathrm{L}_0)$ proširujemo 2-formom $B\in\Omega^2(M,\mathrm{L}_{-1})\in\Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L})$, skalarom $\phi\in\Omega^0(M,\mathrm{L}_1)\in\Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L})$ i baždarnim parametrom $\Lambda\in\Omega^1(M,\mathrm{L}_{-1})\in\Omega_0^\bullet(M,\mathrm{L})$. Polja $\phi$ su funkcije $\phi:M\to X$, gdje je $X$ bazna mnogostrukost u $n$ dimenzija s lokalnim koordinatama $\{\phi^i\}$. Imamo sljedeću gradaciju prostora L algebre $(\mathrm{L},\mu_n)$

$$\mathrm{L}_{-1}\oplus\mathrm{L}_0\oplus\mathrm{L}_1$$

te gradaciju prostora $\mathrm{L}^{'}=\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})$ algebre $(\Omega^\bullet(M,\mathrm{L}),\mu_n^{'})$

$$\Omega_0^\bullet(M,\mathrm{L})\oplus\Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L})\oplus\Omega_2^\bullet(M,\mathrm{L}),$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\Omega_0^\bullet(M,\mathrm{L})&=\Omega^0(M,\mathrm{L}_0)\oplus\Omega^1(M,\mathrm{L}_{-1}),\\
\Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L})&=\Omega^0(M,\mathrm{L}_1)\oplus\Omega^1(M,\mathrm{L}_0)\oplus\Omega^2(M,\mathrm{L}_{-1}),\\
\Omega_2^\bullet(M,\mathrm{L})&=\Omega^1(M,\mathrm{L}_1)\oplus\Omega^2(M,\mathrm{L}_0)\oplus\Omega^3(M,\mathrm{L}_{-1}).
\end{aligned}$$

$\Omega_0^\bullet(M,\mathrm{L})$ je potprostor parametara, $\Omega_1^\bullet(M,\mathrm{L})$ je potprostor polja, a $\Omega_2^\bullet(M,\mathrm{L})$ je potprostor zakrivljenosti. Kako bismo našli sve moguće transformacije polja, usredotočit ćemo se na stupanj forme polja. To jest, transformacija polja stupnja forme $p$ će biti suma svih mogućih kombinacija polja s baždarnim parametrom čiji je ukupan stupanj forme jednak $p$. Time dobivamo sljedeće transformacije polja

$$\delta\phi^i=h^i_A(\phi)c^A, \tag{4.9}$$

$$\delta A^A=\mathrm{d}c^A+k^{AB}f_{BCD}(\phi)A^Cc^D+f^{Ai}(\phi)\Lambda_i, \tag{4.10}$$

$$\delta B_i=\mathrm{d}\Lambda_i+T_{ABCi}(\phi)A^AA^Bc^C+g^j_{Ai}(\phi)B_jc^A+\tilde{g}^j_{Ai}(\phi)A^A\Lambda_j, \tag{4.11}$$

gdje su $h^i_A(\phi)$, $f_{BCD}(\phi)$, $f^{Ai}(\phi)$, $T_{ABCi}(\phi)$, $g^j_{Ai}(\phi)$ i $\tilde{g}^j_{Ai}(\phi)$ nepoznate funkcije polja $\phi$. Nadalje, nalaženje jednadžbi polja također baziramo na stupnju forme polja. Odnosno, jednadžba proizvoljne p-forme će se sastojati od svih mogućih kombinacija polja ukupnog stupnja forme $p+1$. Dakle, imamo

$$0 = \mathrm{d}\phi^i - \tilde{h}^i_A(\phi)A^A, \tag{4.12}$$

$$0 = \mathrm{d}A^A + k^{AB}\tilde{f}_{BCD}(\phi)A^C A^D - \tilde{f}^{Ai}(\phi)B_i, \tag{4.13}$$

$$0 = \mathrm{d}B_i + \tilde{T}_{ABCi}(\phi)A^A A^B A^C + G^j_{Ai}(\phi)A^A B_j, \tag{4.14}$$

pri čemu su $\tilde{h}^i_A(\phi)$, $\tilde{f}_{BCD}(\phi)$, $\tilde{f}^{Ai}(\phi)$, $\tilde{T}_{ABCi}(\phi)$ i $G^j_{Ai}(\phi)$ funkcije polja $\phi$ koje treba odrediti. Dakle, imamo polje i baždarni parametar oblika

$$\begin{aligned} a &= \phi + A + B, \\ c^{'} &= c + \Lambda \end{aligned}$$

s transformacijom

$$\begin{aligned}
\delta_{c'} a = {} & h^i_A(\phi)c^A + \mathrm{d}c^A + k^{AB} f_{BCD}(\phi)A^C c^D + f^{Ai}(\phi)\Lambda_i \\
& + \mathrm{d}\Lambda_i + T_{ABCi}(\phi)A^A A^B c^C + g^j_{Ai}(\phi)B_j c^A + \tilde{g}^j_{Ai}(\phi)A^A\Lambda_j \\
= {} & \mathrm{d}c^A + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n} h^i_A(\phi)\big|_0 \phi^{l_1}...\phi^{l_n} c^A + k^{AB}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n} f_{BCD}(\phi)\big|_0 \phi^{l_1}...\phi^{l_n} A^C c^D \\
& + \mathrm{d}\Lambda_i + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n} f^{Ai}(\phi)\big|_0 \phi^{l_1}...\phi^{l_n}\Lambda_i + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n} T_{ABCi}(\phi)\big|_0 \phi^{l_1}...\phi^{l_n} A^A A^B c^C \\
& + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n} g^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi^{l_1}...\phi^{l_n} B_j c^A + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n}\tilde{g}^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi^{l_1}...\phi^{l_n} A^A\Lambda_j
\end{aligned}$$

i jednadžbom polja

$$
\begin{aligned}
f(a) = \mathrm{d}\phi^i - \tilde{h}^i_A(\phi)A^A + \mathrm{d}A^A + k^{AB}\tilde{f}_{BCD}(\phi)A^C A^D - \tilde{f}^{Ai}(\phi)B_i \\
+ \mathrm{d}B_i + \tilde{T}_{ABCi}(\phi)A^A A^B A^C + G^j_{Ai}(\phi)A^A B_j \\
= \mathrm{d}\phi^i - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n}\tilde{h}^i_A(\phi)\big|_0\phi^{l_1}...\phi^{l_n}A^A + \mathrm{d}A^A \\
+ k^{AB}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n}\tilde{f}_{BCD}(\phi)\big|_0\phi^{l_1}...\phi^{l_n}A^C A^D \\
- \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n}\tilde{f}^{Ai}(\phi)\big|_0\phi^{l_1}...\phi^{l_n}B_i + \mathrm{d}B_i \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n}G^j_{Ai}(\phi)\big|_0\phi^{l_1}...\phi^{l_n}A^A B_j \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{l_1}...\partial_{l_n}\tilde{T}_{ABCi}(\phi)\big|_0\phi^{l_1}...\phi^{l_n}A^A A^B A^C.
\end{aligned}
$$

Taylorovim razvojem funkcija oko $\phi = 0$ dobili smo beskonačno članova u baždarnoj transformaciji i jednadžbi gibanja. To implicira da će algebra $L_\infty$ također imati beskonačno članova jer svakom članu sume pridjeljujemo jedan viši produkt. Usporedbom zadnjih dvaju izraza s općenitim formulama za baždarnu transformaciju i jednadžbu polja

$$
\begin{aligned}
\delta_{c'}a &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mu'_{n+1}(a^n, c') \\
f(a) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mu'_n(a^n)
\end{aligned}
$$

dobivamo sljedeću algebru $(\Omega^\bullet(M, \mathrm{L}), \mu'_n)$:

$$\mu'_1(c) = \mathrm{d}c^A + h^i_B(0)c^B, \tag{4.15}$$

$$\mu'_1(\Lambda) = \mathrm{d}\Lambda_j + f^{Ai}(0)\Lambda_i, \tag{4.16}$$

$$\mu'_1(\phi) = \mathrm{d}\phi^i, \tag{4.17}$$

$$\mu'_1(A) = \mathrm{d}A^A - \tilde{h}^i_B(0)A^B, \tag{4.18}$$

$$\mu'_1(B) = \mathrm{d}B_i - \tilde{f}^{Aj}(0)B_j, \tag{4.19}$$

te za $n > 0$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_n, c) = \partial_{l_1}...\partial_{l_n} h^i_A(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_n^{l_n} c^A, \tag{4.20}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_n, \Lambda) = \partial_{l_1}...\partial_{l_n} f^{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_n^{l_n} \Lambda_i, \tag{4.21}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, c) = k^{AB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} f_{BCD}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A^C c^D, \tag{4.22}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, \Lambda) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} \tilde{g}^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A^A \Lambda_j, \tag{4.23}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, B, c) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} g^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} B_j c^A, \tag{4.24}$$

$$\mu'_{n+2}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A_1, A_2, c) = 2\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} T_{ABCi}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A_1^A A_2^B c^C, \tag{4.25}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_n, A) = -\partial_{l_1}...\partial_{l_n} \tilde{h}^i_A(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_n^{l_n} A^A, \tag{4.26}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_n, B) = -\partial_{l_1}...\partial_{l_n} \tilde{f}^{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_n^{l_n} B_i, \tag{4.27}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A_1, A_2) = 2k^{AB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} \tilde{f}_{BCD}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A_1^C A_2^D, \tag{4.28}$$

$$\mu'_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, B) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} G^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A^A B_j, \tag{4.29}$$

$$\mu'_{n+2}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A_1, A_2, A_3) = 3!\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} \tilde{T}_{ABCi}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A_1^A A_2^B A_3^C. \tag{4.30}$$

U algebru također spada i izraz iz standardne Chern-Simonsove teorije

$$\mu'_2(c_1, c_2) = [c_1, c_2]. \tag{4.31}$$

Sada ćemo iskoristiti izraze (2.15) i (2.16) kako bismo prešli iz algebre $(\Omega^\bullet(M, \mathrm{L}), \mu'(n))$ u algebru $(\mathrm{L}, \mu_n)$. Time iz izraza (4.15), (4.16) i (4.20) - (4.25) dobivamo sljedeće produkte u prostoru L za $n > 0$:

$$\mu_n(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, c) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} h^i_A(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} c^A, \tag{4.32}$$

$$\mu_n(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, \Lambda) = -\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} f^{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} \Lambda_i, \tag{4.33}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, c) = k^{AB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} f_{BCD}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A^C c^D, \tag{4.34}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, \Lambda) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} \tilde{g}^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A^A \Lambda_j, \tag{4.35}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, B, c) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} g^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} B_j c^A, \tag{4.36}$$

$$\mu_{n+2}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A_1, A_2, c) = 2\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} T_{ABCi}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} A_1^A A_2^B c^C, \tag{4.37}$$

a iz (4.17), (4.18), (4.19) i (4.26) - (4.30) proizlaze sljedeći neiščezavajući produkti za $n > 0$:

$$\mu_n(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}}\tilde{h}^i_A(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}}A^A, \tag{4.38}$$

$$\mu_n(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, B) = -\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}}\tilde{f}^{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}}B_i, \tag{4.39}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A_1, A_2) = 2k^{AB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}}\tilde{f}_{BCD}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}}A_1^C A_2^D, \tag{4.40}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, B) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}}G^j_{Ai}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}}A^A B_j, \tag{4.41}$$

$$\mu_{n+2}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A_1, A_2, A_3) = -3!\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}}\tilde{T}_{ABCi}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}}A_1^A A_2^B A_3^C. \tag{4.42}$$

U algebri $(\mathrm{L}, \mu_n)$ vrijedi da su $A, c \in \mathrm{L}_0$, što implicira da bi identiteti (4.32) i (4.38) trebali biti ekvivalentni. Njihovim izjednačavanjem dobivamo

$$\tilde{h}^i_A(\phi) = h^i_A(\phi). \tag{4.43}$$

Polje $B$ i parametar $\Lambda$ su također elementi istog prostora, $\mathrm{L}_{-1}$, što nam dopušta izjednačavanje identiteta (4.33) i (4.39), iz čega slijedi

$$\tilde{f}^{Ai}(\phi) = f^{Ai}(\phi). \tag{4.44}$$

Nadalje, možemo izjednačiti produkte (4.34) i (4.40), što vodi na sljedeću relaciju

$$\tilde{f}_{ABC}(\phi) = \frac{1}{2}f_{ABC}(\phi), \tag{4.45}$$

te produkte (4.37) i (4.42), čime dobivamo

$$\tilde{T}_{ABCi}(\phi) = -\frac{1}{3}T_{ABCi}(\phi). \tag{4.46}$$

Promotrimo sada identitete (4.35) i (4.36). Oni su, zbog gradirane komutativnosti, povezani na sljedeći način

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, A, \Lambda) = -\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, B, c)$$

iz čega slijedi

$$\tilde{g}^j_{Ai}(\phi) = -g^j_{Ai}(\phi). \tag{4.47}$$

Na analogan način, iz relacija (4.36) i (4.41) slijedi

$$G^j_{Ai}(\phi) = -g^j_{Ai}(\phi). \tag{4.48}$$

Sljedeće što želimo učiniti je definirati akciju na algebri $(\Omega^{\bullet}(M, \mathrm{L}), \mu_n^{'})$. Akcija je oblika

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle a, \mu_n^{'}(a^n) \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})}$$

te u Chern-Simonsovu modelu ona mora biti 3-forma, što znači da je viši produkt oblika

$$\begin{aligned}\mu_n^{'}(a^n) = \mu_n^{'}(\phi^n) + \binom{n}{1}\mu_n^{'}(\phi^{n-1}, A) + \binom{n}{1}\mu_n^{'}(\phi^{n-1}, B) + \binom{n}{2}\mu_n^{'}(\phi^{n-2}, A, A) \\ + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\mu_n^{'}(\phi^{n-2}B, A) + \binom{n}{3}\mu_n^{'}(\phi^{n-3}, A, A, A).\end{aligned}$$

Time dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}S = &\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle \phi, \frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)\mu_n^{'}(\phi^{n-3}, A, A, A) \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle \phi, n(n-1)\mu_n^{'}(\phi^{n-2}, B, A) \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})} \\ &+ \frac{1}{2}\langle A, \mathrm{d}A \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle A, n\mu_n^{'}(\phi^{n-1}, B) \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle A, \frac{1}{2} n(n-1)\mu_n^{'}(\phi^{n-2}, A, A) \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})} \\ &+ \langle B, \mathrm{d}\phi \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle B, n\mu_n^{'}(\phi^{n-1}, A) \rangle_{\Omega^{\bullet}(M,\mathrm{L})}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Međutim, moramo još osigurati cikličnost skalarnih produkata. Za to nam trebaju sljedeće definicije

$$\langle A_1, A_2 \rangle_{\mathrm{L}} \equiv k_{AB} A_1^A A_2^B, \qquad A_1, A_2 \in \mathrm{L}_0, \tag{4.50}$$

$$\langle \phi, B \rangle_{\mathrm{L}} \equiv \phi^i B_i, \qquad B \in \mathrm{L}_{-1}, \phi \in \mathrm{L}_1. \tag{4.51}$$

Iz (4.51), primjenom svojstva gradirane simetričnosti skalarnog produkta (2.10), slijedi

$$\langle B, \phi \rangle_{\mathrm{L}} = -B_i \phi^i, \qquad B \in \mathrm{L}_{-1}, \phi \in \mathrm{L}_1. \tag{4.52}$$

Razmotrimo sljedeća dva skalarna produkta iz akcije (4.49) koja su jednaka zbog svojstva cikličnosti (2.11) i činjenice da su stupnjevi polja $\phi$, $A$ i $B$ jednaki jedinici u prostoru $\Omega^\bullet(M, \mathrm{L})$

$$\langle A, \mu_n^{'}(\phi^{n-1}, B) \rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})} = \langle B, \mu_n^{'}(\phi^{n-1}, A) \rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})}$$

Primjenom izraza za skalarni produkt (2.17), definicija (4.50) i (4.52) te identiteta (4.26) i (4.27) za svaki $n > 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} &\int_M k_{AB} \left( -\partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-1}} \tilde{f}^{Bi}(\phi) \right) \Big|_0 A^A \wedge B_i \phi^{l_1} ... \phi^{l_{n-1}} \\ &= (-)(-) \int_M \left( -\partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-1}} \tilde{h}^i_A(\phi) \right) \Big|_0 A^A \wedge B_i \phi^{l_1} ... \phi^{l_{n-1}}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$k_{AB} \tilde{f}^{Bi}(\phi) = \tilde{h}^i_A(\phi). \tag{4.53}$$

Pogledajmo sljedeća dva člana koja se javljaju u akciji (4.49) te su jednaki zbog svojstva cikličnosti (2.11)

$$\langle A, \mu_n^{'}(\phi^{n-1}, B) \rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})} = \langle \phi, \mu_n^{'}(\phi^{n-2}, A, B) \rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})}.$$

Korištenjem izraza (2.17), definicija (4.50) i (4.51) te produkata (4.27) i (4.29) za svaki $n > 0$ dobivamo

$$\begin{aligned}&\int_M k_{AB}\left(-\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-2}}\partial_i\tilde{f}^{Bj}(\phi)\right)\Big|_0 A^A \wedge B_j\phi^{l_1}...\phi^{l_{n-2}}\phi^i\\ &= -\int_M \left(\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-2}}G^j_{Ai}(\phi)\right)\Big|_0 A^A \wedge B_j\phi^{l_1}...\phi^{l_{n-2}}\phi^i,\end{aligned}$$

što implicira jednakost

$$G^j_{Ai} = k_{AB}\partial_i\tilde{f}^{Bj}(\phi). \tag{4.54}$$

Naposlijetku, promotrimo sljedeće produkte akcije (4.49)

$$\langle A, \mu_n'(\phi^{n-2}, A, A)\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})} = \langle \phi, \mu_n'(\phi^{n-3}, A, A, A)\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})},$$

gdje jednakost slijedi iz svojstva cikličnosti. Uvrštavanjem izraza (2.17), definicija (4.50) i (4.51) te produkata (4.28) i (4.30) za svaki $n > 0$ slijedi

$$\begin{aligned}&\int_M 2\left(\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i\tilde{f}_{ABC}(\phi)\right)\Big|_0 A^A \wedge A^B \wedge A^C\phi^{l_1}...\phi^{l_{n-3}}\phi^i\\ &= -\int_M 3!\left(\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-3}}\tilde{T}_{ABCi}(\phi)\right)\Big|_0 A^A \wedge A^B \wedge A^C\phi^{l_1}...\phi^{l_{n-3}}\phi^i,\end{aligned}$$

što vodi na relaciju

$$\tilde{T}_{ABCi} = -\frac{1}{3}\partial_i\tilde{f}_{ABC}. \tag{4.55}$$

Izrazima (4.43) - (4.48) i (4.53) - (4.55) smo početnih jedanaest nepoznatih funkcija polja $\phi$ sveli na dvije funkcije. Kako bismo našli relacije koje zadovoljavaju preostale dvije strukturne funkcije, koristit ćemo $L_\infty$ identitete. Najprije zapišimo identitete (4.32) - (4.42) preko tih dviju funkcija. Neka je $\phi_i \in \mathrm{L}_1$, $c_i \in \mathrm{L}_0$, a $\Lambda_i \in \mathrm{L}_{-1}$, tada u algebri $(\mathrm{L}, \mu_n)$ za $n > 0$ imamo sljedeće produkte

$$\mu_n(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, c) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} h^i_A(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} c^A, \tag{4.56}$$

$$\mu_n(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, \Lambda) = -k^{AB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} h^i_B(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} \Lambda_i, \tag{4.57}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, c_1, c_2) = k^{AB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} f_{BCD}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} c_1^C c_2^D, \tag{4.58}$$

$$\mu_{n+1}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, c, \Lambda) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} \partial_i h^j_A(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} c^A \Lambda_j, \tag{4.59}$$

$$\mu_{n+2}(\phi_1, ..., \phi_{n-1}, c_1, c_2, c_3) = \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-1}} \partial_i f_{ABC}(\phi)\big|_0 \phi_1^{l_1}...\phi_{n-1}^{l_{n-1}} c_1^A c_2^B c_3^C. \tag{4.60}$$

Izvrijednimo sada poopćene Jacobijeve identitete (2.2).

**1.** Identitet (2.3) moramo provjeriti samo za $l_1 = \Lambda$ jer je u ostalim slučajevima rezultat trivijalan.

$$\mu_1(\mu_1(\Lambda)) = -k^{AB} h^i_B(0)\mu_1(-k^{AB} h^i_B(0)\Lambda_i) = -k^{AB} h^j_A(0) h^i_B(0)\Lambda_i,$$

dakle imamo

$$k^{AB} h^j_A(0) h^i_B(0) = 0. \tag{4.61}$$

**2.** Identitet (2.4) je netrivijalan samo ako je ukupan stupanj ulaznih varijabli $(|l_1| + |l_2|)$ jednak $0$, $-1$ ili $-2$. To nam ostavlja četiri mogućnosti:
Prvi slučaj je kada su varijable dane s $(l_1, l_2) = (c_1, c_2)$, te kad ih uvrstimo u identitet (2.4) dobijemo sljedeću relaciju:

$$h^j_A(0)\partial_j h^i_B\big|_0 - h^j_B(0)\partial_j h^i_A\big|_0 - f_{ABC}(0)k^{CD} h^i_D(0) = 0. \tag{4.62}$$

Drugi slučaj je kada imamo varijable $(l_1, l_2) = (\phi, \Lambda)$ s kojima identitet (2.4) daje sljedeći rezultat:

$$\partial_l \left(k^{AB} h^j_A(\phi) h^i_B(\phi)\right)\big|_0 = 0. \tag{4.63}$$

Treća mogućnost je da stavimo $(l_1, l_2) = (c, \Lambda)$ čime identitet (2.4) vodi na sljedeći uvjet

$$h^i_A(0)\partial_i h^j_B\big|_0 - h^i_B(0)\partial_i h^j_A\big|_0 - f_{ABC}(0)k^{CD} h^j_D(0) = 0. \tag{4.64}$$

Zadnji slučaj za koji izraz (2.4) daje netrivijalni rezultat je $(l_1, l_2) = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ te za njega dobijemo

$$\partial_l \left( k^{AB} h^j_A(\phi) h^i_B(\phi) \right) \Big|_0 = 0. \tag{4.65}$$

Vidimo da smo koristeći $L_\infty$ identitet za $n = 2$, odnosno izraz (2.4), našli dvije vrste uvjeta na funkcije $h^i_A(\phi)$ i $f^{ABC}(\phi)$. Osim toga, uvjeti (4.63) i (4.65) su derivacija funkcije koju smo dobili iz $n = 1$ identiteta, (4.61), izvrijednjena u nuli. Stoga, uvjet (4.61) je iste vrste kao uvjeti (4.63) i (4.65). Sada ćemo pokazati da u svim $L_\infty$ identitetima postoje samo tri vrste uvjeta. Općenito, za neki $n > 0$ svaki član u identitetu (2.2) je stupnja

$$\text{deg}\left( \mu_{k+1}(\mu_j(l_{\sigma(1)}, ..., l_{\sigma(j)}), l_{\sigma(j+1)}, ..., l_{\sigma(n)}) \right) = 3 - n + \sum_{i=1}^{n} |l_i|$$

Svi neiščezavajući članovi moraju biti stupnja $-1$, $0$ ili $1$, što znači da ukupan stupanj ulaznih varijabli mora biti jednak $\sum_{i=1}^n |l_i| = n-4$, $n-3$ ili $n-2$. To nam daje sedam mogućih kombinacija ulaznih varijabli. Za svaku kombinaciju ćemo izvrijedniti poopćeni Jacobijev identitet (2.2). Detaljni račun se nalazi u dodatku D, a ovdje, radi bolje preglednosti, iznosimo samo krajnje rezultate.

**1.** Prvi slučaj imamo za izbor varijabli $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-1}, \Lambda)$ koje su stupnja $n-2$. Identitet (2.2) vodi na jednakost

$$\partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-1}} \left( k^{AB} h^j_A(\phi) h^i_B(\phi) \right) \Big|_0 = 0. \tag{4.66}$$

**2.** Varijable $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-2}, c_1, c_2)$ su stupnja $n-2$ te uvrštene u identitet (2.2) daju sljedeći izraz

$$\partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-2}} \left( h^i_A(\phi) \partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi) \partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi) k^{CD} h^j_D(\phi) \right) \Big|_0 = 0. \tag{4.67}$$

**3.** Identitet (2.2) za varijable $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-2}, c, \Lambda)$ stupnja $n-3$ postaje

$$\partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-2}} \left( h^i_A(\phi) \partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi) \partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi) k^{CD} h^j_D(\phi) \right) \Big|_0 = 0. \tag{4.68}$$

**4.** Uvrštavanjem varijabli $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-2}, \Lambda_1, \Lambda_2)$ stupnja $n-4$ u izraz (2.2) dobivamo uvjet

$$\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-2}}\partial_l \left(k^{AB}h^j_A(\phi)h^i_B(\phi)\right)\Big|_0 = 0. \tag{4.69}$$

**5.** Sljedeća mogućnost je odabir $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-3}, c_1, c_2, c_3)$ stupnja $n-3$ koji pomoću identiteta (2.2) daje sljedeću jednakost

$$\begin{aligned}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-3}}\big(&h^i_A(\phi)\partial_i f_{BCD}(\phi) - h^i_B(\phi)\partial_i f_{ACD}(\phi) + h^i_C(\phi)\partial_i f_{ABD}(\phi) - h^i_D(\phi)\partial_i f_{ABC}(\phi)\\ &-f_{ADE}(\phi)k^{EF}f_{FBC}(\phi) - f_{CDE}(\phi)k^{EF}f_{FAB}(\phi) - f_{BDE}(\phi)k^{EF}f_{FCA}(\phi)\big)\big|_0 = 0.\end{aligned} \tag{4.70}$$

**6.** Izbor varijabli $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-3}, c_1, c_2, \Lambda)$ s identitetom (2.2) vodi na relaciju

$$\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-3}}\partial_l \left(h^i_A(\phi)\partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi)\partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi)k^{CD}h^j_D(\phi)\right)\Big|_0 = 0. \tag{4.71}$$

**7.** Posljednji slučaj je odabir $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-4}, c_1, c_2, c_3, c_4)$ koji, uvršten u izraz (2.2), daje

$$\begin{aligned}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-4}}\partial_l\big(&h^i_A(\phi)\partial_i f_{BCD}(\phi) - h^i_B(\phi)\partial_i f_{ACD}(\phi) + h^i_C(\phi)\partial_i f_{ABD}(\phi) - h^i_D(\phi)\partial_i f_{ABC}(\phi)\\ &-f_{ADE}(\phi)k^{EF}f_{FBC}(\phi) - f_{CDE}(\phi)k^{EF}f_{FAB}(\phi) - f_{BDE}(\phi)k^{EF}f_{FCA}(\phi)\big)\big|_0 = 0.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Uvjeti (4.66) i (4.69) su međusobno identični te smo ih imali i u slučajevima $n = 1$ i $n = 2$. Isto tako smo već vidjeli najniži član uvjeta (4.67), koji je ekvivalentan uvjetima (4.68) i (4.71). Uvjeti (4.70) i (4.72) su jednaki, a javljaju se tek za $n \geq 3$. Teorija koju smo izgradili se sastoji od akcije

$$\begin{aligned}S = &\frac{1}{2}\langle A, \mathrm{d}A\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})} + \langle B, \mathrm{d}\phi\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle A, \mu'_{n+1}(\phi^n, B)\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})}\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!n!}\langle A, \mu'_{n+2}(\phi^n, A, A)\rangle_{\Omega^\bullet(M,\mathrm{L})}\end{aligned} \tag{4.73}$$

koju smo dobili iz (4.49) korištenjem svojstva cikličnosti. Upotrebom formule (2.17), definicija (4.50) - (4.52), izraza (4.27) i (4.28) i jednakosti (4.43), (4.45) i (4.53), akcija (4.73) postaje

$$
\begin{aligned}
S = \int_M \frac{1}{2} k_{AB} A^A \wedge \mathrm{d}A^B + \int_M \mathrm{d}\phi^i \wedge B_i + \int_M \frac{1}{6} f_{ABC}(\phi) A^A \wedge A^B \wedge A^C \\
- \int_M h^i_A(\phi) A^A \wedge B_i.
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

Transformacije polja su dane formulama

$$
\delta\phi^i = h^i_A(\phi) c^A, \tag{4.75}
$$

$$
\delta A^A = \mathrm{d}c^A + k^{AB} f_{BCD}(\phi) A^C c^D + k^{AB} h^i_B(\phi) \Lambda_i, \tag{4.76}
$$

$$
\delta B_i = \mathrm{d}\Lambda_i + \frac{1}{2} \partial_i f_{ABC}(\phi) A^A A^B c^C - \partial_i h^j_A(\phi) \left( B_j c^A - A^A \Lambda_j \right), \tag{4.77}
$$

a jednadžbe gibanja su oblika

$$
0 = \mathrm{d}\phi^i - h^i_A(\phi) A^A, \tag{4.78}
$$

$$
0 = \mathrm{d}A^A + \frac{1}{2} k^{AB} f_{BCD}(\phi) A^C A^D - k^{AB} h^i_B(\phi) B_i, \tag{4.79}
$$

$$
0 = \mathrm{d}B_i - \frac{1}{6} \partial_i f_{ABC}(\phi) A^A A^B A^C + \partial_i h^j_A(\phi) A^A B_j, \tag{4.80}
$$

pri čemu za strukturne funkcije vrijede sljedeći uvjeti

$$
k^{AB} h^j_A(\phi) h^i_B(\phi) = 0, \tag{4.81}
$$

$$
h^i_A(\phi) \partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi) \partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi) k^{CD} h^j_D(\phi) = 0, \tag{4.82}
$$

$$
\begin{aligned}
h^i_A(\phi) \partial_i f_{BCD}(\phi) - h^i_B(\phi) \partial_i f_{ACD}(\phi) + h^i_C(\phi) \partial_i f_{ABD}(\phi) - h^i_D(\phi) \partial_i f_{ABC}(\phi) \\
- f_{ADE}(\phi) k^{EF} f_{FBC}(\phi) - f_{CDE}(\phi) k^{EF} f_{FAB}(\phi) - f_{BDE}(\phi) k^{EF} f_{FCA}(\phi) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

Relacije (4.81) - (4.83) smo dobili iz izraza (4.66) - (4.72) uz korištenje Taylorovog razvoja. One standardno proizlaze iz baždarne invarijantnosti akcije (4.74). Također, može se pokazati da one zadovoljavaju aksiome Courantovog algebroida [7] te je, stoga, teorija koju smo dobili poznata pod nazivom Courantov sigma model. Također, vidimo da se za $h^i_A(\phi) = 0$ i $\partial_1 ... \partial_n f_{ABC}(\phi)\big|_0 = 0$ gdje je $n > 0$ izrazi (4.81) - (4.83) svode na Jacobijev identitet strukturnih konstanti Liejeve algebre (3.19).

# 5 Zaključak

Na primjerima Yang-Millsove i Chern-Simonsove teorije pokazali smo kako se standardne baždarne teorije mogu prikazati kao algebre $L_\infty$. Pri proširenju Chern-Simonsove teorije vidjeli smo kako se korištenjem algebre tenzorskog produkta $(\Omega^\bullet(M,\mathrm{L}),\mu_n^{'})$ te prelaskom u njezine sastavne dijelove, de Rahmov kompleks $(\Omega^\bullet(M),\mathrm{d})$ i baždarnu algebru $(\mathrm{L},\mu_n)$, mogu naći uvjeti na strukturne konstante, koje čine koeficijente u Taylorovu razvoju strukturnih funkcija. Dodatni uvjeti su nađeni zahtjevom cikličnosti teorije, odnosno promatranjem svojstava skalarnih produkata. Konačno, pomoću poopćenih Jacobijevih identiteta izveli smo relacije između strukturnih funkcija koje se inače dobivaju iz baždarne invarijantnosti akcije. Time smo konstruirali teoriju poznatu kao Courantov sigma model.

Međutim, naše razmatranje je bilo isključivo vezano za klasičnu teoriju polja. Algebre $L_\infty$ imaju važnu ulogu u kvantizacijskom Batalin-Vilkoviskyjevom formalizmu, koji svakoj klasičnoj teoriji pridjeljuje algebru $L_\infty$, što znači da $L_\infty$ formalizam priprema teoriju za BV kvantizaciju. U [3] se također pokazuje da algebre $L_\infty$ dopuštaju supersimetrično proširenje teorije.

# Dodaci

## Dodatak A Liejeva algebra

**Definicija 1.** **Grupa** je uređeni par $(G, *)$ nepraznog skupa $G$ i operacije $* : G \times G$ koja zadovoljava sljedeća svojstva

1. asocijativnost, $(\forall x, y, z \in G) : (x * y) * z = x * (y * z)$,
2. postojanje neutralnog elementa, $(\exists e \in G)(\forall x \in G) : e * x = x * e = x$,
3. postojanje inverza, $(\forall x \in G)(\exists x^{-1} \in G) : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Grupu koja zadovoljava svojstvo komutativnosti, $(\forall x, y \in G) : x * y = y * x$, zovemo **Abelova grupa**.

**Definicija 2.** **Vektorski prostor** nad poljem $\mathbb{K}$ je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ skupa V i dvije operacije $+ : V \times V \to V$ i $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ koje zadovoljavaju sljedeća svojstva za sve $x, y \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $(V, +)$ je Abelova grupa,
2. kvaziasocijativnost, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,
3. postoji *jedinica* $1 \in \mathbb{K}$ takva da je $1 \cdot x = x$,
4. distributivnost s obzirom na zbrajanje skalara, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
5. distributivnost s obzirom na zbrajanje vektora, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

**Definicija 3.** **Liejeva algebra** je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ opremljen preslikavanjem $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ koji zadovoljava sljedeća svojstva

1. bilinearnost,
2. anti-simetričnost, $(\forall x, y \in \mathfrak{g}) : [x, y] = -[y, x]$,
3. Jacobijev identitet, $(\forall x, y, z \in \mathfrak{g}) : [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

**Definicija 4.** **Homomorfizam** Liejevih algebri je linearno preslikavanje $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ takvo da za sve $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\phi([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{h}}.$$

**Definicija 5.** **Killingova forma** je skalarni produkt elemenata $x, y \in \mathfrak{g}$ definiran kao

$$(x, y) = \text{Tr}\,(\text{ad}_x \text{ad}_y),$$

pri čemu za linearni operator $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ i $z \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\mathrm{ad}_x(z) = [x, z].$$

**Definicija 6.** Neka su $x, y \in \mathfrak{g}$ i $\{\tau_A\}$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, $x = x^A \tau_A$, $y = y^A \tau_A$. **Cartan-Killingova forma** $k_{AB}$ je tada definirana preko skalarnog produkta

$$(x, y) = k_{AB} x^A y^B. \tag{A.1}$$

# Dodatak B Diferencijalna geometrija

**Definicija 1.** Neka je $\mathscr{T}$ familija podskupova $X$, onda $\mathscr{T}$ nazivamo **topologijom** na $X$ ako vrijedi

1. $\emptyset \in \mathscr{T}$ i $X \in \mathscr{T}$,
2. za konačno ili beskonačno podskupova $\{O_{i_n}\}$ vrijedi $\bigcup\limits_n O_{i_n} \in \mathscr{T}$,
3. za konačno podskupova $\{O_{i_n}\}$ vrijedi $\bigcap\limits_n O_{i_n} \in \mathscr{T}$.

Za topologiju $\mathscr{T}$ skup $X$ ili par $(X, \mathscr{T})$ nazivamo **topološkim prostorom**, a $O_{i_n}$ nazivamo otvorenim podskupom.

**Definicija 2.** Neka je $X$ topološki prostor. **Okolina** točke $x \in X$ je podskup $U \subset X$ ako i samo ako je $x$ sadržan u otvorenom podskupu $U$.

**Definicija 3.** Topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ nazivamo **Hausdorffovim** prostorom ako i samo ako za sve $x \neq y \in X$ postoje $U, V \in \mathscr{T}$ takvi da vrijedi

$$(x \in U) \wedge (y \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset).$$

**Definicija 4.** Neka su $(X_1, \mathscr{T}_1)$ i $(X_2, \mathscr{T}_2)$ topološki prostori. Za bijekciju $\varphi : X_1 \to X_2$ kažemo da je **homeomorfizam** ako su $\varphi$ i pripadni inverz $\varphi^{-1}$ neprekidna preslikavanja.

**Definicija 5.** n-dimenzionalna **mnogostrukost** $M$ je Hausdorffov prostor takav da svaka točka ima otvorenu okolinu homeomorfnu otvorenom podskupu $\mathbb{R}^n$.

Otvoreni podskup $U$ mnogostrukosti $M$ zajedno s homeomorfizmom $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ nazivamo **karta**.

Za dvije karte $(U_1, \varphi_1)$ i $(U_2, \varphi_2)$ kažemo da su $\mathscr{C}^k$**-kompatibilne** ako je homeomorfizam $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ k-puta derivabilan.

$\mathscr{C}^k$**-atlas** na mnogostrukosti $M$ je skup $\mathscr{C}^k$-kompatibilnih karti takvih da im domene prekrivaju $M$.

$\mathscr{C}^k$**-mnogostrukost** je mnogostrukost s pridruženom klasom ekvivalencije $\mathscr{C}^k$-atlasa.

**Diferencijabilna mnogostrukost** je $\mathscr{C}^\infty$-mnogostrukost.

**Definicija 6.** Tangentni vektor u nekoj točki $p \in M$ je preslikavanje $v_p : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ takvo da za sve $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

1. linearnost, $v_p(\alpha f + \beta g) = \alpha v_p(f) + \beta v_p(g)$,

2. Leibnizovo pravilo, $v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f)$.

Vektorski prostor svih vektora točke $p$ označavamo s $T_pM$. **Vektorsko polje** $v$ definiramo tako da svakoj točki $p$ mnogostrukosti $M$ pridružimo vektor $v_p$. Skup svih vektorskih prostora $T_pM$ označavamo s $TM$.

**Definicija 7.** Kovektor, dualni vektor ili **1-forma** $\omega_p$ u točki $p$ je linearno preslikavanje $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$. Skup svih 1-formi točke $p$ označavamo s $T^*_pM$ i nazivamo kotangentni prostor. Analogno vektorskom polju definiramo i **polje 1-formi** čiji prostor označavamo s $T^*M$.

**Definicija 8.** **Vanjska** ili **Grassmannova algebra** $\Lambda(V)$ nad vektorskim prostorom $V$ je asocijativna algebra razapeta s $V$ s pridjeljenom operacijom **vanjskog produkta** definiranom s

$$v \wedge v = 0, \qquad v \in \Lambda(V). \tag{B.1}$$

**Definicija 9.** **Gradirana algebra** je algebra s dekompozicijom u direktnu sumu $\mathrm{A} = \bigoplus_{p\in P} \mathrm{A}_p$ za neku Abelovu grupu $P$ koja je kompatibilna s produktom, tj. $\mathrm{A}_p \cdot \mathrm{A}_q \subseteq \mathrm{A}_{p+q}$. Vanjska algebra $\Lambda(V)$ s dekompozicijom $\Lambda(V) = \bigoplus_{p\in P} \Lambda^p(V)$, $\Lambda^1 \cong V$ je stoga $\mathbb{Z}$-gradirana algebra s $\Lambda^i \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \leq i \leq \dim V$. Onda za elemente $v \in \Lambda^p(V)$ i $u \in \Lambda^q(V)$ vrijedi

$$v \wedge u = (-1)^{pq} u \wedge v. \tag{B.2}$$

**Definicija 10.** Elementi vanjske algebre nad kotangentnim prostorom točke $x \in M$, $\Lambda^p_x(M) \equiv \Lambda^p(T^*_xM)$ su potpuno antisimetrični kovarijantni tenzori i zovu se **diferencijalne forme** reda $p$ ili kraće $p$-forme. Polja diferencijalnih formi se definiraju analogno vektorskim poljima i pripadaju prostoru koji se označava $\Lambda^pM$. $p$-formu $\omega$ možemo zapisati po komponentama kao

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\dots i_p}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}. \tag{B.3}$$

Time vanjski produkt postaje

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!}\alpha_{i_1\dots i_p}\beta_{i_{p+1}\dots i_{p+q}}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+q}},$$

gdje su $\alpha \in \Lambda^p M$, $\beta \in \Lambda^q M$, a $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} M$.

**Definicija 11.** **Svežanj** je uređena petorka $(E, \pi, B, F, G)$ koju sačinjavaju:

1. topološki prostor $E$ - **totalni prostor**,

2. topološki prostor $X$ - **bazni prostor**,

3. neprekidna surjekcija **projekcija** $\pi : E \to X$,

4. topološki prostor $F$ - **standardno vlakno**, koje je homeomorfno svim inverznim slikama $\pi^{-1}(x) = F_x$, $x \in X$, gdje $F_x$ nazivamo vlakno u točki $x$,

5. grupu $G$ - **strukturnu grupu** homeomorfizma $F$,

6. otvoreni skup pokrivanja $\{O_\alpha\}$ baznog prostora $X$ s homeomorfizmima $\phi_\alpha$ takvim da

$$\forall O_\alpha \exists \phi_\alpha : \pi^{-1}(O_\alpha) \to O_\alpha \times F, \qquad \pi\phi_\alpha^{-1}(x, f) = x, \qquad x \in O_\alpha, f \in F,$$

pri čemu se $\phi_\alpha$ naziva **lokalna trivijalizacija**.

**Definicija 12.** **Prerez** svežnja $E$ je neprekidno preslikavanje $s : X \to E$ takvo da vrijedi

$$(\pi \circ s)(x) = \pi s(x) = \mathrm{id}_X x = x, \qquad \forall x \in X.$$

Skup svih prereza označavamo s $\Gamma(E)$. **Polje diferencijalnih formi** reda $p$ je prerez svežnja $\Lambda^p M$, dakle polje $p$-formi $\omega$ je $\Gamma(\Lambda^p M) \equiv \Omega^p(M)$.

**Definicija 13.** Operator **vanjske derivacije** je linearno preslikavanje $\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ sa svojstvima:

1. za sve $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ vrijedi $\mathrm{d}f(X) = X(f)$,

2. za svaki $\omega \in \Omega^p(M)$ i $\eta \in \Omega^q(M)$ vrijedi $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta$,

3. $\mathrm{d}^2 = 0$.

**Definicija 14.** **Diferencijalna gradirana algebra** (A,d) je $\mathbb{Z}$-gradirana komutativna algebra A opremljena vanjskom derivacijom d.

Važan primjer diferencijalne gradirane algebre je de Rhamov kompleks $(\Omega^\bullet(M), \mathrm{d})$ na $d$-dimenzionalnoj mnogostrukosti $M$:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^d(M).$$

**Definicija 15.** **Kontrakcija** vektorom $X$ je preslikavanje $\imath_X : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ za koje vrijedi

$$(\imath_X\omega)(v_1,...,v_{p-1}) = \omega(X,(v_1,...,v_{p-1})),$$
$$(\imath_X\omega)_{i_1...i_{p-1}} = X^j\omega_{ji_1...i_{p-1}}.$$

**Definicija 16.** **Levi-Civita tenzor** definiramo kao

$$\varepsilon_{i_1...i_n} = \sqrt{\text{det } g}\epsilon_{i_1...i_n},$$
$$\varepsilon^{i_1...i_n} = \text{sgn } g\frac{1}{\sqrt{\text{det } g}}\epsilon_{i_1...i_n},$$

pri čemu je $\epsilon_{i_1...i_n}$ Levi-Civita simbol definiran kao

$$\epsilon_{i_1...i_n} = \begin{cases} +1, & \text{sgn } \sigma(i_1,...,i_n) = 1, \\ -1, & \text{sgn } \sigma(i_1,...,i_n) = -1, \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases}$$

**Definicija 17.** **Volumnu formu** definiramo kao

$$\varepsilon = \sqrt{\text{det } g}\text{d}^n x = \frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1...i_n}\text{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \text{d}x^{i_n}, \tag{B.4}$$

s normalizacijom

$$\varepsilon_{i_1...i_n}\varepsilon^{i_1...i_n} = (\text{sgn det } g)n!$$

i pokratom

$$\text{d}^n x = \text{d}x^1 \wedge ... \wedge \text{d}x^n.$$

# Dodatak C Transformacija baždarnog polja

Za algebru $L_\infty$ tenzorskog produkta danu s $\Omega^\bullet(I, \mathrm{L}) = \Omega^\bullet \otimes \mathrm{L}$, gdje je $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, a algebra tenzorskog produkta je definirana u poglavlju 2.3, imamo dekompoziciju $\Omega^\bullet(I, \mathrm{L}) \cong \mathscr{C}^\infty(I, \mathrm{L}_1) \oplus \Omega^1(I, \mathrm{L}_0)$ čime $\alpha(t) \in \Omega^\bullet(I, \mathrm{L})$ poprima oblik

$$\alpha(t) = a(t) + \mathrm{d}t \otimes c(t), \tag{C.1}$$

pri čemu je $t \in I$, $a(t) \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathrm{L}_1)$ i $c(t) \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathrm{L}_0)$. Zakrivljenost $\phi$ pripada prostoru $\Omega_2^\bullet(I, \mathrm{L})$ koji se može prikazati kao $\Omega^\bullet(I, \mathrm{L}) \cong \mathscr{C}^\infty(I, \mathrm{L}_2) \oplus \Omega^1(I, \mathrm{L}_1)$, stoga imamo

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_n'(\alpha^n(t)) \\ &= f(t) + \mathrm{d}t \oplus \left\{ \partial_t a(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_{n+1}(a(t)^n, c(t)) \right\}, \end{aligned} \tag{C.2}$$

pri čemu $\mu_n$ vidi samo L stupanj varijabli. Uvjet parcijalne ravnosti $\phi \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathrm{L}_2)$, koji odgovara baždarnim transformacijama dvaju baždarnih polja, vodi na sljedeću jednadžbu

$$\partial_t a(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_{n+1}(a(t)^n, c(t)). \tag{C.3}$$

U $t = 0$ možemo očitati baždarnu transformaciju $a \to a + \delta_{c_0} a$ polja $a = a(0)$ parametriziranog s $c_0 = c(0) \in \mathrm{L}_0$:

$$\delta_{c_0} a = \partial_t \big|_0 a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_{n+1}(a^n, c_0). \tag{C.4}$$

# Dodatak D Izračuni

**1.** $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-1}, \Lambda)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k-k} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, \Lambda), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-1)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} \mu_{k+1}(\phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-1)}, -k^{AB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-k-1}} h^i_B \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)}, ..., \phi^{l_{n-k-1}}_{\sigma(n-k-1)} \Lambda_i) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} k^{AB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-k-1}} h^i_B \big|_0 \partial_{l_{n-k}} ... \partial_{l_{n-1}} h^j_A \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-1}}_{\sigma(n-1)} \Lambda_i \\
\Rightarrow \qquad & \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-1}} \left( k^{AB} h^j_A(\phi) h^i_B(\phi) \right) \big|_0 = 0.
\end{aligned}
$$

**2.** $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-2}, c_1, c_2)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k-1} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, c_1), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}, c_2) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, c_2), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}, c_1) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+2k} \mu_{k}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-2)}, c_1, c_2), \phi_{\sigma(n-k-1)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-k-1}} h^i_A \big|_0 \partial_{l_{n-k}} ... \partial_{l_{n-2}} \partial_i h^j_B \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} c^A_1 c^B_2 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-k-1}} h^i_B \big|_0 \partial_{l_{n-k}} ... \partial_{l_{n-2}} \partial_i h^j_A \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} c^A_1 c^B_2 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-k-2}} f_{ABC} \big|_0 k^{CD} \partial_{l_{n-k-1}} ... \partial_{l_{n-2}} h^j_D \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} c^A_1 c^B_2 \\
\Rightarrow \qquad & \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-2}} \left( h^i_A(\phi) \partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi) \partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi) k^{CD} h^j_D(\phi) \right) \big|_0 = 0.
\end{aligned}
$$

**3.** $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-2}, c, \Lambda)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k-1} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, c), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}, \Lambda) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k+(-1)(k-1)} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, \Lambda), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}, c) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+2k-k} \mu_{k}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-2)}, c, \Lambda), \phi_{\sigma(n-k-1)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}) \\
=& - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} k^{EB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-k-1}} h^i_A \big|_0 \partial_{l_{n-k}} ... \partial_{l_{n-2}} \partial_i h^j_B \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} c^A \Lambda_j \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} k^{EB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{k-1}} f_{ABC} \big|_0 k^{CD} \partial_{l_k} ... \partial_{l_{n-2}} h^j_D \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} c^A \Lambda_j \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} k^{EB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_k} h^i_B \big|_0 \partial_{l_{k+1}} ... \partial_{l_{n-2}} \partial_i h^j_A \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} c^A \Lambda_j
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-2}} \left( h^i_A(\phi) \partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi) \partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi) k^{CD} h^j_D(\phi) \right) \big|_0 = 0.
$$

**4.** $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-2}, \Lambda_1, \Lambda_2)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k-1-k+1} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, \Lambda_1), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}, \Lambda_2) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} (-1)^{k+k+(-1)(k-1)+1} \mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, \Lambda_2), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-2)}, \Lambda_1) \\
=& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} k^{AB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{k-1}} \partial_l h^j_A \big|_0 \partial_{l_k} ... \partial_{l_{n-2}} h^i_B \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} \Lambda_{1i} \Lambda_{2j} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\sigma} k^{AB} \partial_{l_1} ... \partial_{l_{k-1}} \partial_l h^i_B \big|_0 \partial_{l_k} ... \partial_{l_{n-2}} \partial_l h^j_A \big|_0 \phi^{l_1}_{\sigma(1)} ... \phi^{l_{n-2}}_{\sigma(n-2)} \Lambda_{1i} \Lambda_{2j}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \partial_{l_1} ... \partial_{l_{n-2}} \partial_l \left( k^{AB} h^j_A(\phi) h^i_B(\phi) \right) \big|_0 = 0.
$$

**5.** $(l_1,...,l_n) = (\phi_1,...,\phi_{n-3},c_1,c_2,c_3)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k-2}\mu_{k+1}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-1)},c_1),\phi_{\sigma(n-k)},...,\phi_{\sigma(n-3)},c_2,c_3\big)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k-1}\mu_{k+1}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-1)},c_2),\phi_{\sigma(n-k)},...,\phi_{\sigma(n-3)},c_1,c_3\big)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k}\mu_{k+1}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-1)},c_3),\phi_{\sigma(n-k)},...,\phi_{\sigma(n-3)},c_1,c_2\big)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2(k-1)}\mu_{k+1}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-2)},c_1,c_2),\phi_{\sigma(n-k-1)},...,\phi_{\sigma(n-3)},c_3\big)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2(k-1)+1}\mu_{k+1}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-2)},c_1,c_3),\phi_{\sigma(n-k-1)},...,\phi_{\sigma(n-3)},c_2\big)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2k}\mu_{k+1}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-2)},c_2,c_3),\phi_{\sigma(n-k-1)},...,\phi_{\sigma(n-3)},c_1\big)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+3k}\mu_{k}\big(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-3)},c_1,c_2,c_3),\phi_{\sigma(n-k-2)},...,\phi_{\sigma(n-3)}\big)\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-k-1}}h^i_A\big|_0\partial_{l_{n-k}}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i f_{BCD}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-k-1}}h^i_D\big|_0\partial_{l_{n-k}}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i f_{ABC}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-k-1}}h^i_C\big|_0\partial_{l_{n-k}}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i f_{ABD}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-1}}f_{BDE}\big|_0k^{EF}\partial_{l_k}...\partial_{l_{n-3}}f_{FCA}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-1}}f_{CDE}\big|_0k^{EF}\partial_{l_k}...\partial_{l_{n-3}}f_{FAB}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-1}}f_{ADE}\big|_0k^{EF}\partial_{l_k}...\partial_{l_{n-3}}f_{FBC}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{n-k-1}}h^i_B\big|_0\partial_{l_{n-k}}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i f_{ACD}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c_1^A c_2^C c_3^D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\qquad & \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-3}}\big(h^i_A(\phi)\partial_i f_{BCD}(\phi)-h^i_B(\phi)\partial_i f_{ACD}(\phi)+h^i_C(\phi)\partial_i f_{ABD}(\phi)-h^i_D(\phi)\partial_i f_{ABC}(\phi)\\
&-f_{ADE}(\phi)k^{EF}f_{FBC}(\phi)-f_{CDE}(\phi)k^{EF}f_{FAB}(\phi)-f_{BDE}(\phi)k^{EF}f_{FCA}(\phi)\big)\big|_0=0.
\end{aligned}
$$

**6.** $(l_1, ..., l_n) = (\phi_1, ..., \phi_{n-3}, c_1, c_2, \Lambda)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 = &\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k-2}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, c_1), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-3)}, c_2, \Lambda)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k-1}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, c_2), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-3)}, c_1, \Lambda)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k-(k-2)}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-1)}, \Lambda), \phi_{\sigma(n-k)}, ..., \phi_{\sigma(n-3)}, c_1, c_2)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2(k-1)}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-2)}, c_1, c_2), \phi_{\sigma(n-k-1)}, ..., \phi_{\sigma(n-3)}, \Lambda)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2(k-1)+1-(k-1)}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-2)}, c_1, \Lambda), \phi_{\sigma(n-k-1)}, ..., \phi_{\sigma(n-3)}, c_2)\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2k-(k-1)}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)}, ..., \phi_{\sigma(n-k-2)}, c_2, \Lambda), \phi_{\sigma(n-k-1)}, ..., \phi_{\sigma(n-3)}, c_1)\\
= &\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-2}}\partial_l\partial_i h^j_B\big|_0\partial_{l_{k-1}}...\partial_{l_{n-3}}h^i_A\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c^A_1c^B_2\Lambda_j\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-2}}\partial_l\partial_i h^j_A\big|_0\partial_{l_{k-1}}...\partial_{l_{n-3}}h^i_B\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c^A_1c^B_2\Lambda_j\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-2}}\partial_l f_{ABC}\big|_0 k^{CD}\partial_{l_{k-1}}...\partial_{l_{n-3}}h^j_D\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c^A_1c^B_2\Lambda_j\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-1}}\partial_l h^j_D\big|_0 k^{CD}\partial_{l_k}...\partial_{l_{n-3}}f_{ABC}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c^A_1c^B_2\Lambda_j\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-1}}\partial_l h^i_B\big|_0\partial_{l_k}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i h^j_A\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c^A_1c^B_2\Lambda_j\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-1}}\partial_l h^i_A\big|_0\partial_{l_k}...\partial_{l_{n-3}}\partial_i h^j_B\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-3}}_{\sigma(n-3)}c^A_1c^B_2\Lambda_j
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-3}}\partial_l\left(h^i_A(\phi)\partial_i h^j_B(\phi) - h^i_B(\phi)\partial_i h^j_A(\phi) - f_{ABC}(\phi)k^{CD}h^j_D(\phi)\right)\big|_0 = 0.
$$

**7.** $(l_1,...,l_n)=(\phi_1,...,\phi_{n-4},c_1,c_2,c_3,c_4)$**:**

$$
\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+k-3}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-1)},c_1),\phi_{\sigma(n-k)},...,\phi_{\sigma(n-4)},c_2,c_3,c_4)\\
&+\text{permutacije } c_1,c_2,c_3,c_4\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+2(k-2)}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-2)},c_1,c_2),\phi_{\sigma(n-k-1)},...,\phi_{\sigma(n-4)},c_3,c_4)\\
&+\text{permutacije } c_1,c_2,c_3,c_4\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}(-1)^{k+3(k-1)}\mu_{k+1}(\mu_{n-k}(\phi_{\sigma(1)},...,\phi_{\sigma(n-k-3)},c_1,c_2,c_3),\phi_{\sigma(n-k-2)},...,\phi_{\sigma(n-4)},c_4)\\
&+\text{permutacije } c_1,c_2,c_3,c_4\\
=&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-3}}\partial_l\partial_i 4f_{[ABC}\big|_0\partial_{l_{k-2}}...\partial_{l_{n-4}}h^i_{D]}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-4}}_{\sigma(n-4)}c_2^A c_3^B c_4^C c_1^D\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma}k^{GB}\partial_{l_1}...\partial_{l_{k-2}}\partial_l(3f_{F[BC}\big|_0 k^{FE}\partial_{l_{k-1}}...\partial_{l_{n-4}}f_{A]DE}\big|_0\phi^{l_1}_{\sigma(1)}...\phi^{l_{n-4}}_{\sigma(n-4)}c_2^A c_3^B c_4^C c_1^D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\qquad & \partial_{l_1}...\partial_{l_{n-4}}\partial_l\big(h^i_A(\phi)\partial_i f_{BCD}(\phi)-h^i_B(\phi)\partial_i f_{ACD}(\phi)+h^i_C(\phi)\partial_i f_{ABD}(\phi)-h^i_D(\phi)\partial_i f_{ABC}(\phi)\\
&-f_{ADE}(\phi)k^{EF}f_{FBC}(\phi)-f_{CDE}(\phi)k^{EF}f_{FAB}(\phi)-f_{BDE}(\phi)k^{EF}f_{FCA}(\phi)\big)\big|_0=0.
\end{aligned}
$$

# Literatura

[1] Hohm, O., Zwiebach, B. $L_\infty$ algebras and field theory. Fortschritte der Physik 65.3-4 (2017): 1700014.

[2] Grützmann M., Strobl, T. General Yang–Mills type gauge theories for p-form gauge fields: From physics-based ideas to a mathematical framework OR from Bianchi identities to twisted Courant algebroids. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 12.01 (2015): 1550009.

[3] Jurčo, B., Raspollini, L., Sämann, C., Wolf, M. $L_\infty$ -Algebras of Classical Field Theories and the Batalin–Vilkovisky Formalism. Fortschritte der Physik 67.7 (2019): 1900025.

[4] Kumerički, K. Grupe, simetrije i tenzori u fizici. `http://www.phy.pmf.unizg.hr/~kkumer/simetrije/biljeske/handout.pdf`, 28.9.2019.

[5] Beisert, N. Quantum Field Theory II. `https://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/QFT2FS17-Notes.pdf`, 30.9.2019.

[6] Haber, E. H. The Cartan-Killing Form. `http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph251/KillingForm.pdf`, 8.10.2019.

[7] Roytenberg, D. AKSZ–BV formalism and Courant algebroid-induced topological field theories. Letters in Mathematical Physics 79.2 (2007): 143-159.

[8] Ikeda, N. Chern–Simons gauge theory coupled with BF theory. International Journal of Modern Physics A 18.15 (2003): 2689-2702.

[9] Dunne, G. V. Aspects of Chern-Simons theory. Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999. 177-263.

[10] Grewcoe, C. J. , Jonke, L. Courant sigma model and $L_\infty$-algebras, u pripremi.

[11] Grewcoe, C. J. Poopćene baždarne teorije. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2016.

[12] Smolić, I. Diferencijalna geometrija u fizici. `https://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/dgf.pdf`, 15.11.2019.

[13] Gallier, J., Quaintance, J. Notes on Differential Geometry and Lie Groups. https://www.cis.upenn.edu/~cis610/diffgeom-n.pdf, 16.11.2019.

[14] Nakahara, M. Geometry, Topology and Physics, Second Edition. Institute of Physics Publishing, 2003.