SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Sikirić

FREDHOLMOVA ALTERNATIVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Eduard Marušić - Paloka

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svim onim ljudima koje sam tokom studija sreo i koji su mi bili podrška u mojem naumu. Veliko hvala mojoj obitelji koja mi je pružila sve uvjete nužne za uspješno studiranje i stjecanje znanja. Zahvaljujem svome mentoru , prof. dr. sc. Eduardu Marušiću - Paloki na pomoći i savjetima tokom pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

U ovome radu bavio sam se Fredholmovom alternativom, teoremom koji govori o nužnim i dovoljnim uvjetima postojanja rješenja Fredholmove integralne jednadžbe. Integralne jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznata funkcija koju moramo odrediti nalazi pod znakom integrala. Velika je teoretska i praktična korist od proučavanja integralnih jednadžbi jer se mnoge pojave u fizici, inžinjerstvu i ekonomiji mogu modelirati pomoću integralnih jednadžbi. Velika je važnost integralnih jednadžbi i u tome što se mnoge diferencijalne jednadžbe mogu prebaciti u integralne jednadžbe koje je onda moguće riješiti nekom od metoda koje su danas vrlo aktualne. Također, moguće je i obratno, tj. danu integralnu jednadžbu prebaciti u diferencijalnu jednadžbu. Fredholmove integralne jednadžbe moguće je promatrati sa dva stajališta. Jedno je stajalište koje koristi alate matematičke analize kako bi se pokazalo posjeduje li uopće jednadžba rješenja te kakva svojstva ta rješenja imaju. Drugo stajalište tretira Fredholmove integralne jednadžbe pomoću moderne funkcionalne analize te se prirodno javlja integralni operator konačnog ranga.
U prvome poglavlju dana je klasifikacija integralnih jednadžbi te opisana veza između diferencijalnih i integralnih jednadžbi. Drugo poglavlje bavi se dokazom egzistencije i jedinstvenosti rješenja Fredholmove integralne jednadžbe. Općenito teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja imaju ogromnu teoretsku važnost te nam često puta i pokazuju put prema traženju rješenja. U ovisnosti o obliku jezgre integralne jednadžbe pokazat će se da u slučaju s degeneriranom jezgrom problem nalaženja rješenja integralne jednadžbe vodi na sustav linearnih jednadžbi kojim se bavim u trećem poglavlju. U četvrtom poglavlju bavim se općenitim jezgrama, dakle ne nužno degeneriranim te se uvodim potpun sustav funkcija kako bi se općenita jezgra aproksimirala degeneriranom jezgrom. Također, navedene su i neke zanimljive činjenice koje posjeduju svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije integralnih jednadžbi. Peto poglavlje rezervirano je za integralne operatore konačnog ranga pomoću kojih sa stajališta moderne funkcionalne analize proučavam Fredholmove integralne jednadžbe te postepeno uvodim pojam jako neprekidnog operatora i dokazujem neke teoreme vezane uz operatore konačnog ranga.

Poglavlje 1

Integralne jednadžbe - klasifikacija

1.1 Vrste integralnih jednadžbi

Integralnom jednadžbom nazivamo jednadžbu u kojoj se nepoznata funkcija pojavljuje ispod znaka integrala. Postupak i metode rješavanja ovise o obliku integralne jednadžbe koja se promatra. Ako je tražena funkcija sadržana u svim članovima samo linarno , tada govorimo o linearnoj integralnoj jednadžbi. Opći oblik linearne integralne jednadžbe glasi

$$g(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)y(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

Tražimo funkciju $y(x)$ koja zadovoljava gornju jednadžbu. Funkcija $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ je tzv. jezgra integralne jednadžbe, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija smetnje. Funkcije K i f mogu poprimiti i kompleksne vrijednosti.
Ako vrijedi $f(x) \equiv 0$, tada govorimo o homogenoj integralnoj jednadžbi. Ukoliko funkcija f na $[a,b]$ nije identički jednaka nuli govorimo o nehomogenoj jednadžbi. Konstanta λ je općenito kompleksni broj. Ako su granice integracije konstantne ($a(x) = a, b(x) = b$), tada govorimo o Fredholmovoj (Erik Ivar Fredholm, 1866. - 1927. , švedski matematičar) integralnoj jednadžbi, a ako je $a(x) = a$, $b(x) = x$, govorimo o Volterrinoj (Vito Volterra, 1860. - 1940. , talijanski matematičar i fizičar) integralnoj jednadžbi. Ako se nepoznata funkcija javlja samo pod znakom integrala, dakle ako je $g(x) = 0$, tada govorimo o integralnoj jednadžbi 1. vrste. Integralna jednadžba 2. vrste je ona kod koje je $g(x) = 1$. Na temelju gornjih razmatranja može se napraviti sljedeća klasifikacija:

$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$	nehomogena Fredholmova jednadžba 2. vrste
$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$	nehomogena Fredholmova jednadžba 1. vrste
$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$	homogena Fredholmova jednadžba
$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$	nehomogena Volterrina integralna jednadžba 2. vrste
$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$	nehomogena Volterrina integralna jednadžba 1. vrste
$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$	homogena Volterrina integralna jednadžba

Primjetimo da se Volterrina jednadžba može promatrati kao specijalan slučaj Fredholmove jednadžbe uz $K(x,t) = 0$ za $t > x$, za $t, x \in [a,b]$.

1.2 Veza diferencijalnih i integralnih jednadžbi

Fizikalni zakoni i problemi najčešće se opisuju diferencijalnim jednadžbama. Velika je važnost integralnih jednadžbi što se neke diferencijalne jednadžbe, s rubnim ili početnim uvjetima mogu prevesti na integralne jednadžbe. Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \quad x \geq x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

može se integriranjem od x_0 do x prevesti u oblik

$$\int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \tag{1.2}$$

S druge strane, ako vrijedi (1.2), onda mora vrijediti i $y(x_0) = y_0$ te $y'(x) = f(x, y(x))$, što znači da vrijedi (1.1). Dakle, problemi (1.1) i (1.2) su ekvivalentni.

Može se pokazati da diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetima vode na Volterrine integralne jednadžbe, a diferencijalne jednadžbe s rubnim uvjetima na Fredholmove integralne jednadžbe. Kako bi se na primjeru pokazala veza između integralnih i diferencijalnih jednadžbi, potrebna je lema koja dopušta da se dvostruki integral zamjeni jednostrukim.

Lema : (Zamjena dvostrukog integrala jednostrukim)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$. Tada vrijedi

$$\int_a^x \int_a^{x'} f(t)dtdx = \int_a^x (x-t)f(t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{1.3}$$

Dokaz. Definira se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Kako su $(x-t)f(t)$ i $\frac{\partial}{\partial x}[(x-t)f(t)]$ neprekidne za sve x i t iz $[a, b]$ (produkt neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija), možemo primjeniti teorem **[F]** i derivirati funkciju F

$$F'(x) = \frac{dx}{dx}[(x-t)f(t)]_{t=x} + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt.$$

Kako su $F'(x)$ i $\int_a^x f(t)dt$ neprekidne funkcije od x na $[a, b]$, možemo primjeniti teorem **[C]** te slijedi

$$F(x') = F(x') - F(a) = \int_a^{x'} F'(x)dx = \int_a^{x'} \int_a^x f(t)dtdx.$$

Zamjenom x i x' dobiva se

$$F(x) = \int_a^x \int_a^{x'} f(t)dtdx'.$$

□

Promotrimo sad diferencijalnu jednadžbu

$$y''(x) + \lambda y(x) = g(x), \quad x \in [0, L] \tag{1.4}$$

gdje je $\lambda > 0$ te g neprekidna na $[0, L]$. Želimo problem nalaženja rješenja funkcije y koja zadovoljava (1.4) prevesti na ekvivalentan problem traženja rješenja integralne jednadžbe. Integrirajem od 0 do x izraza (1.4) dobiva se

$$y'(x) - y'(0) + \lambda \int_0^x y(t)dt = \int_0^x g(t)dt. \tag{1.5}$$

Kako se traži rješenje u obliku neprekidne funkcije, vrijedi da je i $y''(x) = g(x) - \lambda y(x)$ neprekidna funkcija kao razlika neprekidnih funkcija, te se može primijeniti teorem **[C]**. Ponovna integracija od 0 do x vodi na

$$\int_0^x y'(t)dt - y'(0) \int_0^x dt + \lambda \int_0^x \int_0^x y(t)dtdx = \int_0^x \int_0^x g(t)dtdx. \tag{1.6}$$

Primjenom leme zamjene dobivamo

$$y(x) - y(0) - y'(0)x + \lambda \int_0^x (x-t)y(t)dt = \int_0^x (x-t)g(t)dt. \tag{1.7}$$

Na ovome mjestu može se krenuti u dva smjera ovisno o tome jesu li zadani početni ili rubni uvjeti. U slučaju početnih uvjeta zadana je vrijednost funkcije i njene derivacije u jednoj točki, npr. $y(0) = 0$, $y'(0) = A$, dok je u slučaju rubnih uvjeta zadana vrijednost funkcije ili njene derivacije u dvije različite točke, tj. na rubovima intervala $[0, L]$ na kojem tražimo nepoznatu funkciju, npr. $y(0) = 0$ i $y(L) = B$. Ići ćemo u smjeru rubnih uvjeta. Uvrštavajući $x = L$ u (1.7) dobivamo

$$y'(0) = \frac{1}{L}\left(\lambda \int_0^L (L-t)y(t)dt - \int_0^L (L-t)g(t)dt + B\right). \tag{1.8}$$

Uvrstimo li sada (1.8) natrag u (1.7) te rastavljanjem područja integracije $[0, L]$ na dva dijela $[0, x]$ i $[x, L]$ konačno dobivamo oblik Fredholmove integralne jednadžbe

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^L K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [O, L]$$

gdje je jezgra dana s

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{L}(L-x), & 0 \le t \le x \le L \\ \frac{x}{L}(L-t), & 0 \le x \le t \le L \end{cases}$$

te

$$f(x) = \frac{Bx}{L} - \int_0^L K(x,t)g(t)dt.$$

Pokazat će se sada kako možemo danu homogenu Fredholmovu integralnu jednadžbu prevesti u diferencijalnu jednadžbu s rubnim uvjetima, tzv. rubni problem. Promotrimo jednadžbu

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [0,1] \tag{1.9}$$

s jezgrom oblika

$$K(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x), & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

Imamo redom

$$y(x) = \lambda\left(\int_0^x t(1-x)y(t)dt + \int_x^1 x(1-t)y(t)dt\right).$$

Iz gornjeg izraza možemo primjetiti da vrijedi $y(0) = 0$ te $y(1) = 0$. Derivirajući izraz koristeći teorem **[F]** dobivamo

$$y'(x) = \lambda\left(-\int_0^x ty(t)dt + \int_x^1 (1-t)y(t)dt\right).$$

Još jednim deriviranjem dobivamo

$$y''(x) = \lambda\left(-xy(x) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}[ty(t)]dt - (1-x)y(x) + \int_x^1 \frac{\partial}{\partial x}[(1-t)y(t)]dt\right).$$

Odatle konačno dolazimo do rubnog problema

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Iz Fredholmove integralne jednadžbe došli smo do poznatog Sturm - Liouvilleovog problema u kojem tražimo vrijednost parametra λ za koje postoje netrivijalna rješenja problema (1.10). Jednadžba koja se pojavila je homogena diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima. Opće rješenje jednadžbe glasi

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Može se pokazati da za $\lambda < 0$ i $\lambda = 0$ dobivamo trivijalno rješenje $y(x) = 0$. Za $\lambda > 0$ opće rješenje dobivamo koristeći poznatu relaciju

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm \sin x$$

odakle izlazi

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Rubni uvjeti nam daju $y(0) = A = 0$ te $y(1) = B\sin\sqrt{\lambda} = 0$. Odavde je $B = 0$ ili $\sin\sqrt{\lambda} = 0$. Ako je $B = 0$ onda opet dobivamo $y(x) = 0$. Dakle mora biti $B \neq 0$ i $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, a odatle zaključujemo da vrijedi $\lambda = n^2\pi^2$, $(n = 1, 2, ...)$. Dakle, postoji beskonačan niz funkcija koje rješavaju Sturm-Liouvilleov problem. Tražene funkcije imaju oblik $y_n(x) = B_n \sin n\pi x$, $(n = 1, 2, ...)$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu (1.9) možemo se uvjeriti da je dobivene funkcije zaista zadovoljavaju. Brojeve $\lambda_n = n^2\pi^2$ nazivamo svojstvenim vrijednostima, a funkcije $y_n(x) = B_n \sin n\pi x$ pripadnim svojstvenim funkcijama Sturm - Liouvilleovog problema (1.10).

Poglavlje 2

Dokaz egzistencije i jedinstvenosti rješenja Fredholmove jednadžbe

2.1 Picardova metoda

Često se postavlja pitanje imaju li zadane diferencijalne i integralne jednadžbe uopće rješenja. Dokaz egzistencije rješenja uvjerava nas da traženje rješenja neke jednadžbe nije uzaludno. Jednom kada je rješenje nađeno, dokaz jedinstvenosti uvjerava nas da daljnje traženje nije potrebno. Koristit će se Picardova metoda kako bi se dokazala egzistencija jedinstvenog rješenja Fredholmove integralne jednadžbe

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{2.1}$$

Ideja je sljedeća: formirat će se niz funkcija (y_n) te red $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, gdje je svaki član reda definiran kao $u_k = y_k - y_{k-1}$,$(n = 1, 2, ...)$. Koristeći Weierstrassov kriterij **[H]** pokazat će se da navedeni red uniformno konvergira, npr. funkciji u, tj. da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) = u.$$

Formirajmo niz funkcija (y_n) sljedećom iteracijom

$$\begin{cases} y_0(x) = f(x) \\ y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y_{n-1}(t)dt, \quad (n \geq 1). \end{cases} \tag{2.2}$$

Promotrimo Fredholmovu jednadžbu (2.1) u kojoj je f neprekidna na $[a,b]$, te K i $\frac{\partial K}{\partial x}$ neprekidne funkcije na $[a,b]^2$. Indukcijom će se pokazati da je niz (y_n) niz neprekidnih funkcija. Tako imamo da je $y_0(x) = f(x)$ neprekidna na $[a,b]$. Pretpostavimo da je y_k za $1 \leq k \leq n-1$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ definirana gornjom iteracijom (2.2). U koraku indukcije pokažimo da je i (y_n) neprekidna funkcija na $[a,b]$. Za svaki x, $t \in [a,b]$, $K(x,t)y_{n-1}(t)$ je neprekidna funkcija kao produkt neprekidnih funkcija, te stoga i integrabilna funkcija od t na $[a,b]$. Prema tome možemo definirati

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y_{n-1}(t)dt. \tag{2.3}$$

Integral kao funkcija od x koji se javlja u (2.3) zadovoljava uvjete teorema **[F]** iz dodatka te znamo da je ta funkcija diferencijabilna. Kako diferencijabilnost povlači neprekidnost, zaključujemo da je navedeni integral i neprekidna funkcija za svaki $x \in [a,b]$. Odatle slijedi da je y_n neprekidna funkcija kao zbroj dvije neprekidne funkcije. Ovime smo induktivno dokazali da je svaki član (y_n) iterativnog niza (2.2) neprekidna funkcija. Kako su f i K neprekidne funkcije na segemntu $[a,b]$ odnosno $[a,b]^2$ po teoremu **[A]** iz dodatka slijedi da su omeđene, tj. postoje nenegativne konstante L i M takve da vrijedi

$$|K(x,t)| \leq L \quad , \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x,t \in [a,b].$$

Promotrimo razliku prvih nekoliko članova niza (y_n)

$$\begin{aligned}
|y_1(x) - y_0(x)| &= \left|\lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt\right| \\
&\leq |\lambda| \int_a^b |K(x,t)|\,|f(t)|\,dt \\
&\leq |\lambda|\,LM(b-a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|y_2(x) - y_1(x)| &= \left|\lambda \int_a^b K(x,t)(y_1(t) - y_0(t))dt\right| \\
&\leq |\lambda| \int_a^b |K(x,t)|\,|\lambda|\,LM(b-a)dt \\
&\leq |\lambda|^2\,L^2M(b-a)^2.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da za $1 \leq k \leq n-1$ vrijedi

$$|y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x)| \leq |\lambda|^{k-1} L^{k-1} M(b-a)^{k-1}, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Slijedi korak indukcije

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &= \left|\lambda \int_a^b K(x,t)(y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t))dt\right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x,t)| \, |\lambda|^{n-1} L^{n-1} M(b-a)^{n-1} dt \\ &\leq |\lambda|^n L^n M(b-a)^n. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da za svaki $k \geq 1$ i za sve $x \in [a,b]$ vrijedi

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq |\lambda|^k L^k M(b-a)^k \equiv M_k. \tag{2.4}$$

Red $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = M \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^k L^k (b-a)^k$ je geometrijski red u kojemu je $q = |\lambda| L(b-a)$. Znamo da geometrijski red konvergira za $|q| < 1$, dakle navedeni red konvergira za

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}. \tag{2.5}$$

Za takav λ ispunjeni su svi uvjeti za korištenje Weierstrassovog kriterija te zaključujemo da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}), \tag{2.6}$$

uniformno konvergira na $[a,b]$ npr. funkciji $u(x)$, $x \in [a,b]$. Promotrimo n-tu parcijalnu sumu navedenog reda

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + ... + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}).$$

Odtale dobivamo $S_n = y_n - y_0$. Navedeni red je uniformno konvergentan, ako je niz (S_n) parcijalnih suma reda uniformno konvergentan. Dalje imamo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) = u.$$

Odakle zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - y_0) = \lim_{n\to\infty} y_n - y_0 = u,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = u + y_0 = y.$$

Prema teoremu **[I a)]** funkcija y i sama je neprekidna na $[a, b]$. No međutim, još nismo pokazali da limes y niza funkcija (y_n) predstavlja rješenje Fredholmove jednadžbe (2.1). Da bi se to pokazalo, iskoristit će se uniformna konvergencija niza funkcija (y_n). Slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $N > 0$ takav da

$$|y(x) - y_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{za sve } n \geq N, \quad \forall x \in [a, b].$$

Odatle slijedi da za svaki $n \geq N$ i za svaki $x, t \in [a, b]$

$$|K(x, t)y(t) - K(x, t)y_n(t)| < L\varepsilon. \tag{2.7}$$

Iz (2.7) zaključujemo da niz $(K(x, t)y_n(t))_n$ konvergira uniformno kao funkcija od t k funkciji $K(x, t)y(t)$. Po teoremu **[I b)]** slijedi da

$$\int_a^b K(x, t)y_n(t)dt \quad \text{konvergira k} \quad \int_a^b K(x, t)y(t)dt.$$

Ako sada u izrazu za n-tu iteraciju u (2.2) pustimo da $n \to \infty$ konačno dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt,$$

čime smo pokazali egzistenciju rješenja dane Fredholmove jednadžbe (2.1). Može se pokazati da osim funkcije $y(x)$ koju smo konstruirali jednadžba (2.1) za λ koji zadovoljava

(2.5) nema drugih rješenja. Pretpostavimo, da nije samo funkcija $y(x)$ rješenje jednadžbe (2.1) nego da jednadžbu zadovoljava i neprekidna funkcija $g(x)$. Tada razlika rješenja $\Theta(x) = y(x) - g(x)$ zadovoljava homogenu jednadžbu

$$\Theta(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\Theta(t)dt. \tag{2.8}$$

Uz oznaku $\Theta_0 = \max_{a\leq x\leq b} |\Theta(x)|$ (maksimum postoji i dostiže se jer je Θ neprekidna na $[a,b]$) imamo

$$\begin{aligned}
\Theta_0 = \max_{a\leq x\leq b} |\Theta(x)| = \max_{a\leq x\leq b} \left|\lambda \int_a^b K(x,t)\Theta(t)dt\right| && (2.9)\\
\leq |\lambda| \max_{a\leq x\leq b} \int_a^b |K(x,t)|\,|\Theta(t)|\,dt && (2.10)\\
\leq |\lambda|\, L\Theta_0(b-a). && (2.11)
\end{aligned}$$

Iz (2.11) za $\Theta_0 \neq 0$ slijedi $1 \leq |\lambda|\, L(b-a)$ što je u suprotnosti s izrazom (2.5) za $|\lambda|$ koji smo dobili kao uvjet konvergencije reda kojim smo majorizirali red $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - y_{k-1})$. Stoga za

$$|\lambda| \geq \frac{1}{L(b-a)}$$

mora vrijediti $\Theta_0 = 0$, tj.

$$0 = \max_{a\leq x\leq b} |\Theta(x)|\,. \tag{2.12}$$

Iz (2.12) zaključujemo da vrijedi $\Theta(x) = 0$, tj. $y(x) = g(x)$. Ovime je pokazana jedinstvenost rješenja jednadžbe (2.1) za λ koji zadovoljava (2.5).

Poglavlje 3

Fredholmova alternativa

3.1 Degenerirana jezgra

Fredholmova alternativa analizira rješenje jednadžbe

$$(N) \qquad y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

u terminima rješenja odgovarajućih jednadžbi

$$
\begin{aligned}
&(N^T) && y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(t,x)y(t)dt, \\
&(H) && y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \\
&(H^T) && y(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)y(t)dt.
\end{aligned}
$$

Jednadžbe (N^T), (H) i (H^T) su redom pridružena nehomogena transponirana jednadžba, homogena jednadžba te pridružena transponirana homogena jednadžba. U ovisnosti od oblika jezgre razlikujemo slučajeve s degeneriranom i općenitom jezgrom. Za jezgru integralne jednadžbe kažemo da je degenerirana ako ima sljedeći oblik

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)h_j(t), \qquad x,t \in [a,b], \tag{3.1}$$

gdje su $g_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije ($j = 1,2,..$). Za početak kao motivaciju za dokaz Fredholmove alternative promotrimo slučaj s najjednostavnijom degeneriranom jezgrom $K(x,t) = g(x)h(t)$. Uz takvu jezgru jednadžbe (N), (N^T), (H) i (H^T) redom imaju oblik

$$
\begin{aligned}
&(N) && y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b g(x)h(t)y(t)dt = f(x) + \lambda X g(x),\\
&(N^T) && y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b g(t)h(x)y(t)dt = f(x) + \lambda Y h(x),\\
&(H) && y(x) = \lambda \int_a^b g(x)h(t)y(t)dt = \lambda X g(x),\\
&(H^T) && y(x) = \lambda \int_a^b g(t)h(x)y(t)dt = \lambda Y h(x).
\end{aligned}
$$

gdje je $X = \int_a^b h(t)y(t)dt$ i $Y = \int_a^b g(t)y(t)dt$. X i Y kao određeni integrali su konstante, međutim za sada još nepoznate jer nismo odredili traženu funkciju $y(x)$. Pomnožimo li (N) sa $h(x)$ i integriramo po x dobivamo

$$\int_a^b y(x)h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx + \lambda X \int_a^b g(x)h(x)dx. \tag{3.2}$$

Na lijevoj strani izraza (3.2) također se pojavljuje nepoznanica X te nakon sređivanja dobivamo

$$\left(1 - \lambda \int_a^b g(x)h(x)dx\right) X = \int_a^b f(x)h(x)dx. \tag{3.3}$$

Slično, pomnožimo li (N^T) sa $g(x)$ i integriramo po x dobivamo

$$\int_a^b y(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda Y \int_a^b h(x)g(x)dx, \tag{3.4}$$

$$\left(1 - \lambda \int_a^b g(x)h(x)dx\right) Y = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{3.5}$$

Želimo odrediti X i Y. Ako je $\lambda \int_a^b g(x)h(x)dx \neq 1$ jednadžbe (3.3) i (3.5) omogućuju nam da odredimo jedinstvene X i Y pa prema tome i jedinstvena rješenja jednadžbi (N) i (N^T). Za (N) imamo

$$y(x) = f(x) + \lambda \frac{\int_a^b f(x)h(x)dx}{1 - \lambda \int_a^b g(x)h(x)dx} g(x), \qquad x \in [a,b], \tag{3.6}$$

te za (N^T)

$$y(x) = f(x) + \lambda \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{1 - \lambda \int_a^b g(x)h(x)dx} h(x), \qquad x \in [a, b]. \tag{3.7}$$

Ako je $\lambda \int_a^b g(x)h(x)dx = 1$ onda ni X ni Y nisu jedinstveni pa zbog toga ni (N) i (N^T) nemaju jedinstveno rješenje. Izrazi (3.3) i (3.5) su tada oblika

$$0 \cdot X = \int_a^b f(x)h(x)dx, \qquad 0 \cdot Y = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

te (N) i (N^T) mogu imati rješenje samo ako vrijedi $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$ te $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Iz $0 \cdot X = 0$ i $0 \cdot Y = 0$ zaključujemo da X i Y nisu jedinstveni.

Promotrimo sada rješenja jednadžbi (H) i (H^T). Iz same jednadžbe (H) vidimo da rješenje mora biti oblika (X je konstanta)

$$y(x) = cg(x), \qquad x \in [a, b], \tag{3.8}$$

gdje je c konstanta. Zaista ako je rješenje od (H) oblika (3.8) te $\lambda \int_a^b g(x)h(x)dx = 1$ imamo

$$\begin{aligned} y(x) = cg(x) &= c\lambda g(x) \int_a^b g(t)h(t)dt \\ &= \lambda g(x) \int_a^b cg(t)h(t)dt \\ &= \lambda g(x) \int_a^b y(t)h(t)dt \\ &= \lambda X g(x) \end{aligned}$$

za svaki $x \in [a, b]$. Slično, iz oblika jednadžbe (H^T) vidimo da rješenje mora biti oblika (Y je konstanta)

$$y(x) = dh(x), \qquad x \in [a, b], \tag{3.9}$$

gdje je d konstanta. Zaista ako je je rješenje od (H^T) oblika (3.9) te $\lambda \int_a^b g(x)h(x)dx = 1$ imamo

$$\begin{aligned}y(x) = dh(x) = d\lambda h(x)\int_a^b g(t)h(t)dt \\ = \lambda h(x)\int_a^b g(t)dh(t)dt \\ = \lambda Y h(x)\end{aligned}$$

za svaki $x \in [a, b]$. U slučaju da je $\lambda\int_a^b g(x)h(x)dx = 1$, $\int_a^b f(x)h(x)dx \neq 0$ i $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq 0$, (3.3) i (3.5) se svode na $0 \cdot X = l$ i $0 \cdot Y = k$, gdje su l i k konstante različite od nule. Zaključujemo da takvi X i Y uopće ne postoje. Prema tome, možemo zaključiti sljedeće: Ako ne postoji jedinstveno rješenje od (N), onda postoje netrivijalna rješenja od (H) i (H^T). Da bi za $\lambda\int_a^b g(x)h(x)dx = 1$ jednadžba (N) ipak imala rješenje, potrebno je da integral umnoška funkcije f i rješenja jednadžbe (H^T) iščezava, tj. da vrijedi

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0. \tag{3.10}$$

U slučaju da vrijedi (3.10) uvrštavanjem u (3.6) vidimo da je $y(x) = f(x)$ partikularno rješenje jednadžbe (N). Ako je $y(x) = u(x)$ bilo koje rješenje od (N), onda je $y(x) = u(x) - f(x)$ rješenje homogene jednadžbe (H). Dakle, ako vrijedi $\lambda\int_a^b g(x)h(x)dx = 1$ i prema tome nema jedinstvenog rješenja od (N), opće rješenje od (N) je dano s

$$y(x) = f(x) + cg(x), \qquad \forall x \in [a, b], \tag{3.11}$$

tj. kao zbroj partikularnog rješenja i općeg rješenja homogene jednadžbe (H).

3.2 Dokaz Fredholmove alternative za degenerirane jezgre

Pokazat će se da rješavanje Fredholmovih jednadžbi 2. vrste s degeneriranim jezgrama vodi do konačnodimenzionalnih sustava linearnih jednadžbi.

Teorem 3.2.1. *Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ točno jedna od sljedećih tvrdnji je ispravna:*

F1: *Jednadžba (N) ima jedinstveno neprekidno rješenje. Posebno, $f = 0$ na $[a, b]$ povlači $y = 0$ na $[a, b]$. U tom slučaju, (N^T) također ima jedinstveno neprekidno rješenje.*

F2: *Jednadžba* (H) *ima konačni linearno nezavisni skup od r neprekidnih rješenja* $y_1, ..., y_r$, $(r > 0)$*. Jednadžba* (H^T) *također ima linearno nezavisni skup od r neprekidnih rješenja* $z_1, ..., z_r$*. Nadalje,* (N) *ima rješenje ako i samo su ispunjeni uvjeti*

$$\int_a^b f(x) z_k(x) dx = 0, \qquad k = 1, ..., r.$$

Tada rješenje od (N) *glasi*

$$y(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{r} c_i y_i(x), \qquad x \in [a, b],$$

gdje su $c_1, ..., c_r$ *konstante, te* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neko neprekidno rješenje od* (N)*. Kada je jezgra oblika*

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) h_j(t), \qquad x, t \in [a, b],$$

tada postoji najviše n vrijednosti od λ *za koje je ispunjeno* ***F2****.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da su skupovi funkcija $\{g_1, ..., g_n\}$ i $\{h_1, ..., h_n\}$ linearno nezavisni na $[a, b]$. Zaista, ako je neki od skupova linearno zavisan onda možemo neki njegov član izraziti kao linearnu kombinaciju članova podskupa koji je linearno nezavisan. Pretpostavimo da je $\{g_1, ..., g_n\}$ linearno nezavisan te da se h_n može izraziti preko linearne kombinacije članova nezavisnog podskupa $\{h_1, ..., h_{n-1}\}$, tj imamo $h_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} d_j h_j(t)$ za $t \in [a, b]$, gdje su d_j konstante $(j = 1, ..., n - 1)$. Možemo pisati

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^{n-1} g_j(x) h_j(t) + g_n(x) \sum_{j=1}^{n-1} d_j h_j(t) = \sum_{j=1}^{n-1} (g_j(x) + d_j g_n(x)) h_j(t)$$

za svaki $x, t \in [a, b]$.

Sada možemo pokazati da je skup $\{g_1 + d_1 g_n, ..., g_{n-1} + d_{n-1} g_n\}$ linearno nezavisan na $[a, b]$. Promotrimo linearnu kombinaciju

$$\alpha_1(g_1 + d_1 g_n) + \alpha_2(g_2 + d_2 g_n) + ... + \alpha_{n-1}(g_{n-1} + d_{n-1} g_n) = 0. \tag{3.12}$$

Moramo pokazati da vrijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0$.

Iz (3.12) imamo

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_{n-1} g_{n-1} + (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + ... + \alpha_{n-1} d_{n-1}) g_n = 0.$$

Jer je $\{g_1, ..., g_n\}$ linearno nezavisan skup prema pretpostavci vrijedi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0 \quad \text{i} \quad \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + ... + \alpha_{n-1} d_{n-1} = 0.$$

Pogledajmo sada kakve oblike primaju jednadžbe (N),(N^T), (H) i (H^T) za oblik jezgre iz iskaza teorema (3.2.1). Imamo redom za (N)

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \int_a^b h_j(t) y(t) dt,$$

$$(N_1) \qquad y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j g_j(x), \qquad x \in [a, b],$$

gdje je $X_j = \int_a^b h_j(t) y(t) dt$, za $j = 1, ..., n$.

Za (N^T) slijedi

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} h_j(x) \int_a^b g_j(t) y(t) dt,$$

$$(N_1^T) \qquad y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} Y_j h_j(x), \qquad x \in [a, b],$$

gdje je $Y_j = \int_a^b g_j(t) y(t) dt$, za $j = 1, ..., n$.

Dalje imamo za (H) i (H^T)

$$(H_1) \qquad y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j g_j(x), \qquad x \in [a, b],$$

$$(H_1^T) \qquad y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} Y_j h_j(x), \qquad x \in [a, b].$$

Rješenje od (N) dobivamo kada odredimo konstante X_j, $j = 1, ..., n$.

Za $\lambda = 0$ iz gornjih izraza vidimo da je $y(x) = f(x)$ jedinstveno neprekidno rješenje od (N) i (N^T), dakle vrijedi tvrdnja **F1**. Nadalje pretpostavljamo da je $\lambda \neq 0$. Problem nalaženja rješenja jednadžbi (N_1), (N_1^T), (H_1) i (H_1^T) možemo prevesti na problem nalaženja rješenja sustava linearnih jednadžbi. Da bi došli do sustava, pomnožimo (N_1) s $h_i(x)$ i integrirajmo po x, dobivamo

$$\int_a^b y(x)h_i(x)dx = \int_a^b f(x)h_i(x)dx + \lambda \sum_{j=1}^n X_j \int_a^b g_j(x)h_i(x)dx, \quad i = 1, ..., n. \tag{3.13}$$

Ako uvedemo sljedeće oznake

$$a_{ij} = \int_a^b h_i(x)g_j(x)dx, \qquad b_i = \int_a^b f(x)h_i(x)dx, \text{ za } \quad (i = 1, ..., n), (j = 1, ..., n),$$

dobivamo sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama X_j, $(j = 1, ..., n)$

$$X_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j = b_i, \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.14}$$

U matričnom obliku sustav (3.14) glasi $(I - \lambda A)X = B$ gdje je $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$, te $X = (X_i)$ i $B = (b_i)$ vektor stupci, tj. elementi prostora $M_{n1}(F)$. Množenjem (N_1^T) s $g_i(x)$ i integriranjem po x dobivamo

$$\int_a^b y(x)g_i(x)dx = \int_a^b f(x)g_i(x)dx + \lambda \sum_{j=1}^n Y_j \int_a^b h_j(x)g_i(x)dx, \quad i = 1, ..., n. \tag{3.15}$$

Ako uvedemo oznaku $c_i = \int_a^b f(x)g_i(x)dx$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama Y_j, $(j = 1, ..., n)$,

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ji}Y_j = c_i, \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.16}$$

U matričnom obliku sustav (3.16) glasi $(I - \lambda A)^T Y = (I - \lambda A^T)Y = C$ gdje su vektor stupci $Y = (Y_i)$ i $C = (c_i)$ elementi prostora $M_{n1}(F)$ te $A^T = (a_{ji})$ transponirana matrica matrice A. Slično, možemo dobiti da je matrična jednadžba za (H_1) oblika $(I - \lambda A)X = 0$, te za (H_1^T) oblika $(I - \lambda A^T)Y = 0$.

Ako vrijedi $\text{rang}(I - \lambda A) = \text{rang}(I - \lambda A^T) = n$ tada $(I - \lambda A)X = B$ i $(I - \lambda A^T)Y = C$ (matrice sustava su punog ranga) imaju jedinstvena rješenja $X = (X_i)$ i $Y = (Y_i)$. Ako $X = (X_i)$ uvrstimo u (N_1), $Y = (Y_i)$ u (N_1^T) dobivamo jedinstvena rješenja jednadžbi (N) i (N^T) i prema tome vrijedi tvrdnja **F1**.

Pokažimo sada da ako je 1 $\leq$rang$(I - \lambda A) = n - r \leq n - 1$ tvrdnja **F2** mora vrijediti. U tom slučaju skup rješenja jednadžbi $(I - \lambda A)X = 0$ i $(I - \lambda A^T)Y = 0$ je prema korolaru **[L]** dimenzije r, tj. sastoji se najviše od r linearno nezavisnih rješenja $X^k = (X_i^k)$ te $Y^k = (Y_i^k)$ za $k = 1, ..., r$. Napomenimo da je skup rješenja r-dimenzionalni prostor, a sami elementi prostora su uređene n-torke $(X_1^1, X_2^1, ..., X_n^1), ..., (X_1^r, X_2^r, ..., X_n^r)$ za $(I - \lambda A)X = 0$, te $(Y_1^1, Y_2^1, ..., Y_n^1), ..., (Y_1^r, Y_2^r, ..., Y_n^r)$ za $(I - \lambda A^T)Y = 0$. Očito je rješenje od (H_1) oblika

$$y_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j^k g_j(x), \tag{3.17}$$

te rješenje od (H_1^T) oblika

$$z_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} Y_j^k h_j(x). \tag{3.18}$$

Dokažimo sada da je skup $\{y_1, ..., y_r\}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{r} c_k y_k(x) = 0. \tag{3.19}$$

Tada je

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r} c_k X_j^k \right) g_j(x) = 0. \tag{3.20}$$

No kako je $\{g_1, ..., g_n\}$ linearno nezavisan skup, slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{r} c_k X_j^k = 0, \qquad j = 1, ..., n \tag{3.21}$$

što se svodi na

$$\sum_{k=1}^{r} c_k X^k = 0. \tag{3.22}$$

Kako je skup $\left\{X^1, ..., X^r\right\}$ linearno nezavisan slijedi da je $c_k = 0$ za svaki $k = 1, ..., r$. Na sličan način može se pokazati da je i skup $\{z_1, ..., z_r\}$ linearno nezavisan. Dakle kada **F1** ne vrijedi, skupovi rješenja od (H) i (H^T) sadrže jednak broj linearno nezavisnih elemenata. Preostaje razmotriti jednadžbu (N) u slučaju da vrijedi tvrdnja **F2**. Sustav $(I - \lambda A)X = B$ ima rješenje ako i samo ako je

$$B^T \cdot Y^k = 0, \qquad k = 1, ..., r \tag{3.23}$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j^k = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f(x) h_j(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g_j(t) z_k(t) dt \right) = 0.$$

Prethodni izraz ekvivalentan je s

$$\int_a^b \left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} h_j(x) g_j(t) \right) z_k(t) dt \right) f(x) dx = 0, \quad k = 1, ..., r. \tag{3.24}$$

Uzimajući sada u obzir da je $z_k(x)$ rješenje od (H^T), tj da vrijedi

$$z_k(x) = \lambda \int_a^b K(t, x) z_k(t) dt,$$

nužan i dovoljan uvjet da bi jednadžba (N) imala rješenje sveo se na

$$\int_a^b z_k(x) f(x) dx = 0, \quad k = 1, ..., r. \tag{3.25}$$

Pretpostavimo konačno da je $g(x)$ neko partikularno rješenje od (N). Tada, ako je $y(x)$ neko drugo rješenje od (N) , $y(x) - g(x)$ je rješenje od (H) te ga onda možemo prikazati kao linearnu kombinaciju skupa rješenja $\{y_1, ..., y_r\}$

$$y(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i y_i(x)$$

za konstante $c_1, ..., c_r$. □

Dakle, Fredholmova alternativa nam zapravo kaže: ili je nehomogena integralna jednadžba rješiva za bilo koju funkciju smetnje $f(x)$ ili pripadna homogena jednadžba ima netrivijalna rješenja. Rješavajući razne integralne jednadžbe s degeneriranim jezgrama susrećemo se s determinantom sustava $D(\lambda)$ oblika

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda)$ je polinom n-tog stupnja u varijabli λ, te kao takav može imati najviše n različitih korijena. Fredholmova alternativa tvrdi da postoji najviše n vrijednosti od λ za koje je ispunjeno **[F2]**. To je posljedica činjenice da se determinanta sustava $D(\lambda)$ može poništiti za najviše n različitih vrijednosti λ. Dakle, za najviše n tih vrijednosti matrica sustava $(I-\lambda A)$ nije punog ranga te promatramo slučaj $1 \leq \text{rang}(I-\lambda A) = n-r \leq n-1$. Korijene polinoma $D(\lambda)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima integralne jednadžbe, a pripadna rješenja, koja nisu trivijalna, nazivamo svojstvenim funkcijama za svojstvenu vrijednost λ. U narednim poglavljima pokazat ćemo neke vrlo zanimljive činjenice vezane uz svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije za simetrične jezgre.

3.3 Rezolventa integralne jednadžbe

Pokažimo kako se rješenje Fredholmove jednadžbe 2. vrste (N) može prikazati u obliku u kojem se pod integralom pojavljuje poznata funkcija smetnje $f(x)$. U slučaju degenerirane jezgre vidjeli smo u prošlom poglavlju da rješavajući integralnu jednadžbu dolazimo do sustava

$$X_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i, \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.26}$$

Determinanta ovog sustava glasi

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako je determinanta sustava $D(\lambda) \neq 0$ jedinstveno rješenje sustava $(X_1, X_2, ..., X_n)$ možemo odrediti koristeći Cramerovo pravilo

$$X_j = \frac{D_j(\lambda)}{D(\lambda)}, \qquad j = 1, ..., n \tag{3.27}$$

gdje je $D_j(\lambda)$ determinanta koja se dobije iz $D(\lambda)$ ako se j-ti stupac zamjeni stupcem slobodnih koeficijenata sustava b_i, $(i = 1, ..., n)$

$$D_j(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & 1-\lambda a_{1,j-1} & b_1 & 1-\lambda a_{1,j+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & 1-\lambda a_{2,j-1} & b_2 & 1-\lambda a_{2,j+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & 1-\lambda a_{n,j-1} & b_n & 1-\lambda a_{n,j+1} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Razvijajući determinantu po j-tom stupcu dobivamo

$$D_j(\lambda) = D_{1j}b_1 + D_{2j}b_2 + ... + D_{nj}b_n, \tag{3.28}$$

gdje je D_{ij} $(i = 1, ..., n)$ predstavlja kofaktor (ij)-tog elementa determinante. Dakle jednadžba (N_1), odnosno (N) ima jedinstveno rješenje koje možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j(\lambda)}{D(\lambda)} g_j(x) \\ &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{D_{1j}b_1 + D_{2j}b_2 + ... + D_{nj}b_n}{D(\lambda)} g_j(x). \end{aligned}$$

Ako uvrstimo u gornji izraz $b_i = \int_a^b f(x)h_i(x)dx$ dobivamo

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[D_{1j}h_1(x) + D_{2j}h_2(x) + ... + D_{nj}h_n(x) \right] g_j(x) \right\} f(t)dt. \tag{3.29}$$

Promotrimo determinantu $(n+1)$-og reda oblika

$$D(x, t, \lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_n(x) \\ h_1(t) & 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ h_2(t) & -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ h_n(t) & -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Razvijajući determinantu po elementima prvog reda, te zatim odgovarajuće minore po elementima prvog stupca, možemo uočiti da je izraz pod integralom u izrazu (3.29) zapravo jednak $D(x, t; \lambda)$. Ako definiramo

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.30}$$

jednadžba (3.29) ima jednostavniji oblik

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda) f(t)dt. \tag{3.31}$$

Funkciju $\Gamma(x, t; \lambda)$ nazivamo rezolventa integralne jednadžbe. Kako su i $\Gamma(x, t; \lambda)$ i $f(x)$ poznate funkcije u (3.31) taj izraz zapravo predstavlja i oblik rješenja tražene funkcije $y(x)$. Jedine moguće singularne točke rezolvente su nultočke polinoma $D(\lambda) = 0$, tj. svojstvene vrijednosti integralne jednadžbe.

3.4 Metoda sukcesivnih aproksimacija i iterirane jezgre

U ovome poglavlju pokazat ćemo kako se rezolventa $\Gamma(x, t; \lambda)$ može prikazati u obliku reda s članovima koji predstavljaju iterirane jezgre integralne jednadžbe. Iako smo već Picardovom metodom pokazali da niz funkcija (y_n) definiran kao

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t) dt, \qquad n \geq 1, \tag{3.32}$$

konvergira rješenju integralne jednadžbe, pokazat ćemo sada kako pomoću iteriranih jezgri možemo doći do istog rezultata. Pritom pretpostavljamo da su $K(x,t)$ i $f(x)$ kvadratno integrabilne funkcije, tj. funkcije iz Hilbertovih prostora $L^2([a,b]^2)$ odnosno $L^2([a,b])$. Promotrimo sada detaljno iterativni niz

$$\begin{cases} y_0(x) = f(x) \\ y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t) dt, \quad (n \geq 1). \end{cases} \tag{3.33}$$

Prva iteracija glasi

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt. \tag{3.34}$$

Druga iteracija je

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y_1(t) dt. \tag{3.35}$$

Uvrštavajući $y_1(x)$ pod integral u izrazu (3.35) dobivamo

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 \right] dt,$$

odnosno

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,t) K(t,t_1) f(t_1) dt_1 dt. \tag{3.36}$$

Ako u trećem članu izraza (3.36) zamjenimo varijable t i t_1 te uvedemo oznaku

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,t_1) K(t_1,t) dt_1 \tag{3.37}$$

dobivamo

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt. \tag{3.38}$$

Za $y_3(x)$ imamo

$$y_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1 + \lambda^2 \int_a^b K_2(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt,$$

odnosno

$$y_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt + \lambda^3 \int_a^b K_3(x,t)f(t)dt \tag{3.39}$$

gdje smo uveli izraz

$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_2(t_1,t)dt_1. \tag{3.40}$$

Nastavljajući gornji proces uz oznaku

$$K_m(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_{m-1}(t_1,t)dt_1 \tag{3.41}$$

dobivamo $(n+1)$-vu aproksimaciju rješenja integralne jednadžbe

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b K_m(x,t)f(t)dt. \tag{3.42}$$

Izraz $K_m(x,t)$ zovemo m-ta iterirana jezgra uz $K_1(x,t) = K(x,t)$. Puštajući da $n \to \infty$ u izrazu (3.42) dobivamo tzv. Neumannov red

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x,t)f(t)dt. \tag{3.43}$$

Preostaje odrediti uvjete pod kojima navedeni red u (3.43) konvergira. Kao i kod Picardove metode red se majorizira konvergentnim geometrijskim redom s općim članom $q = |\lambda| B$ gdje je B dano sa

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dxdt}. \tag{3.44}$$

Prema Wierestrassovom kriteriju zaključuje se da red u (3.43) uniformno konvergira, pa prema tome niz funkcija (y_n) zaista konvergira nekom rješenju $y(x)$ integralne jednadžbe (N) i to rješenje je jedinstveno. Restrikcija

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt}} \tag{3.45}$$

ne znači da za veće vrijednosti od $|\lambda|$ općenito ne postoji rješenje, već da rješenje u tom slučaju ne može biti prikazano Neumannovim redom (Fredholmova alternativa nam govori koji su to λ za koje rješenja integralne jednadžbe postoje). Konačno, pokažimo kako možemo rezolventu izraziti preko iteriranih jezgri $K_m(x,t)$. Ako zamjenimo poredak integrala i sume u (3.43) što možemo zbog uniformne konvergencije reda dobivamo

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,t) \right] f(t) dt. \tag{3.46}$$

Uspoređujući (3.46) sa

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda) f(t) dt$$

možemo rezolventu pisati kao

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,t). \tag{3.47}$$

Iz jedinstvenosti rješenja jednadžbe

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt \tag{3.48}$$

može se pokazati jedinstvenost rezolvente. Pretpostavimo da (3.48) za $\lambda = \lambda_0$ ima dvije rezolvente, $\Gamma_1(x,t;\lambda_0)$ i $\Gamma_2(x,t;\lambda_0)$. Tada imamo

$$f(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma_1(x,t;\lambda_0) f(t) dt = f(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma_2(x,t;\lambda_0) f(t) dt. \tag{3.49}$$

Uvedimo $\psi(x,t,\lambda_0) = \Gamma_1(x,t;\lambda_0) - \Gamma_2(x,t;\lambda_0)$. Sada slijedi

$$\int_a^b \psi(x,t,\lambda_0) f(t) dt = 0. \tag{3.50}$$

Za proizvoljnu funkciju $f(t)$ uzmimo $f(t) = \psi^*(x,t,\lambda_0)$, te konačno slijedi

$$\int_a^b |\psi(x,t,\lambda_0)|^2\, dt = 0, \tag{3.51}$$

što povlači da je $\psi(x,t,\lambda_0) = 0$, te stoga i jedinstvenost rezolvente. Zanimljivo je primjetiti da rezolventa zadovoljava integralnu jednadžbu oblika

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,t_1)\Gamma(t_1,t;\lambda)dt_1. \tag{3.52}$$

To ćemo sada i dokazati. Redom imamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(x,t;\lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,t) \\
&= K(x,t) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} \int_a^b K(x,t_1)K_{m-1}(t_1,t)dt_1 \\
&= K(x,t) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b K(x,t_1)K_m(t_1,t)dt_1 \\
&= K(x,t) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(t_1,t)\right] K(x,t_1)dt_1 \\
&= K(x,t) + \lambda \int_a^b \Gamma(t_1,t,\lambda)K(x,t_1)dt_1.
\end{aligned}$$

Poglavlje 4

Generalizacija na opći slučaj

4.1 Potpun sustav funkcija i aproksimacija općenite jezgre

Može se pokazati da se općenita jezgra $K(x,t) \in L^2([a,b]^2)$ može aproksimirat degeneriranom jezgrom. Zbog toga, prisjetimo se ortonormiranog sistema funkcija koji igra važnu ulogu teoriji integralnih jednadžbi i njihovim primjenama. Kažemo da je konačni ili beskonačni skup funkcija $\{\varphi_k\}$ ortogonalan ako vrijedi $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ za $i \neq j$. Skup je ortonormiran ako vrijedi

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ako krenemo od proizvoljnog ortonormiranog sistema, moguće je konstruirati teoriju Fourierovih redova. U stvari, želimo naći najbolju aproksimaciju proizvoljne funkcije $\psi(x)$ linearnom kombinacijom elemenata ortonormiranog skupa $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Pod najboljom aproksimacijom smatramo da možemo odabrati koeficijente $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tako da minimiziramo izraz

$$\left\| \psi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\|^2. \tag{4.2}$$

Izraz (4.2) možemo raspisati i dobivamo

$$\begin{aligned}\left\|\psi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right\|^2 &= \langle\, \psi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i, \psi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\rangle \\ &= \|\psi\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle\, \psi, \varphi_i\rangle - \alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle\, \psi, \varphi_i\rangle|^2 \,.\end{aligned}$$

Očito je izraz (4.2) minimiziran ako odaberemo $\alpha_i = \langle\, \psi, \varphi_i\rangle = a_i$. Brojevi a_i se nazivaju Fourierovi koeficijenti funkcije $\psi(x)$ u odnosu na ortonormirani sustav $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Za takve a_i (4.2) se svodi na

$$\left\|\psi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right\|^2 = \|\psi\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \,. \tag{4.3}$$

Kako je lijeva strana od (4.3) nenegativna imamo

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq \|\psi\|^2 \,, \tag{4.4}$$

dok za beskonačni ortonormirani skup $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ dobivamo poznatu Besselovu nejednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \|\psi\|^2 \,. \tag{4.5}$$

Navodimo sada Riesz - Fischerov teorem koji ćemo koristiti u daljnjem radu.

Teorem 4.1.1. *Neka je $\{\varphi_i(x)\}$ dani ortonormirani sistem u $L^2([a, b])$ i $\{\alpha_i\}$ dani niz kompleksnih brojeva za koje red $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ konvergira. Tada postoji jedinstvena funkcija $y(x)$ za koju su α_i Fourierovi koeficijenti s obzirom na $\{\varphi_i(x)\}$ i vrijedi*

$$\left\|y(x) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i\right\| \longrightarrow 0 \quad za \quad n \to \infty.$$

Ako postoji ortonormirani sistem funkcija $\{\varphi_i(x)\}$ u prostoru $L^2([a, b])$ takav da bilo koji element tog prostora dopušta prikaz oblika $y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\varphi_i(x)$ (red konvergira u normi prostora $L^2([a, b])$), tada taj sistem čini ortonormiranu bazu prostora . Pojmovi ortonormirane baze i potpunog sistema ortonormiranih funkcija su ekvivalentni. Navodimo sljedeće uvjete, koji ako su zadovoljeni čine ortonormirani sistem $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ potpunim:

a) za svaku funkciju $\psi \in L^2([a, b])$ vrijedi

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i. \tag{4.6}$$

b) za svaku $\psi \in L^2([a,b])$ vrijedi Parsevalova jednakost

$$||\psi||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \psi, \varphi_i \rangle|^2 . \tag{4.7}$$

c) jedina funkcija $\psi \in L^2([a,b])$ za koju su svi Fourierovi koeficijenti jednaki nuli je nul-funkcija.

d) ne postoji funkcija $\psi \in L^2([a,b])$ takva da je $\{\psi, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ ortonormiran skup.

Da bismo dokazali da se proizvoljna jezgra integralne jednadžbe može aproksimirati degeneriranom jezgrom potreban nam je potpuni ortonormirani skup nad $[a,b]$x$[c,d]$. Neka su $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ i $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...\}$ potpuno ortonormirani skupovi nad $[a,b]$, te $[c,d]$ respektivno. Tada možemo tvrditi da je skup

$$\{\varphi_1(x)\psi_1(t), \varphi_1(x)\psi_2(t), ..., \varphi_2(x)\psi_1(t), ...\}$$

potpuni skup nad $[a,b]$x$[c,d]$.

Neka je $K(x,t) \in L^2([a,b]^2)$ proizvoljna jezgra, te neka je $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ potpun ortonormiran skup nad $[a,b]$. Tada je $\left\{\varphi_1(x)\varphi_1^*(t), \varphi_1(x)\varphi_2^*(t), ..., \varphi_2(x)\varphi_1^*(t), ...\right\}$ potpun ortonormiran skup nad $[a,b]^2$. Fourierov razvoj jezgre $K(x,t)$ je oblika

$$K(x,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} K_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j^*(t) \tag{4.8}$$

gdje su Fourierovi koeficijenti K_{ij} dani sa

$$K_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x,t) \varphi_i^*(x) \varphi_j(t) dx dt. \tag{4.9}$$

Pasrevalova jednakost (4.7) nam daje

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx dt = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left|K_{ij}\right|^2 . \tag{4.10}$$

Ako sada definiramo degeneriranu jezgru kao

$$k(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j^*(t) \tag{4.11}$$

možemo se uvjeriti da vrijedi

$$\int_a^b\int_a^b|K(x,t)-k(x,t)|^2\,dxdt=\sum_{i,j=n+1}^{\infty}\left|K_{ij}\right|^2. \tag{4.12}$$

No suma (ostatak reda) u izrazu (4.12) se može učiniti po volji malom za dovoljno veliki n jer je red u (4.10) konvergentan ($K(x,t)\in L^2([a,b]^2)$ pa mu ostatak reda teži k nuli kada $n\to\infty$. Zaključujemo dakle da općenitu nedegeneriranu jezgru možemo po volji dobro aproksimirat degeneriranom jezgrom.

4.2 Fredholmova alternativa - generalizacija na opći slučaj

Prikažimo sada općenitu jezgru $K(x,t)$ u obliku

$$K(x,t)=\sum_{j=1}^{n}g_j(x)h_j(t)+K_\varepsilon(x,t), \tag{4.13}$$

dakle kao zbroj degenerirane jezgre gdje su $\{g_1(x),...,g_n(x)\}$ te $\{h_1(t),...,h_n(t)\}$ linearno nezavisni potpuni sistemi neprekidnih funkcija nad $[a,b]$, te neprekidne funkcije $K_\varepsilon(x,t)$ koja zadovoljava

$$(b-a)\max_{a\leq x,t\leq b}|K_\varepsilon(x,t)|<\varepsilon,\qquad\forall x,t\in[a,b]. \tag{4.14}$$

Uvedimo $L=\max_{a\leq x,t\leq b}|K_\varepsilon(x,t)|$ (maksimum postoji i dostiže se jer je K_ε neprekidna na $[a,b]^2$). Kao funkcije $g_j(x)$ i $h_j(t)$ mogu se uzeti polinomi. Promotrimo Fredholmovu jednadžbu 2. vrste

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt \tag{4.15}$$

i uvrstimo u nju izraz (4.13) za $K(x,t)$. Dobivamo

$$y(x)-\lambda\int_a^b K_\varepsilon(x,t)y(t)dt=F(x) \tag{4.16}$$

gdje je

$$F(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b g_j(x) h_j(t) y(t) dt. \tag{4.17}$$

Neka je λ proizvoljna konstanta. Tada možemo izabrati $\varepsilon > 0$ tako mali da vrijedi

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.18}$$

Iz (4.14) i (4.18) zadovoljen je uvjet $\lambda < \frac{1}{L(b-a)}$. Tada po Picardovoj metodi znamo da postoji jedinstveno rješenje od (4.16). Neka je $\Gamma_\varepsilon(x, t; \lambda)$ rezolventa jezgre $K_\varepsilon(x, t)$. Pomoću rezolvente rješenje od (4.16) možemo napisati u obliku

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_\varepsilon(x, t; \lambda) F(t) dt. \tag{4.19}$$

Nakon što uvrstimo (4.17) u (4.19) dobivamo

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{N} r_j(x) h_j(t) y(t) dt \tag{4.20}$$

gdje su $r_j(x)$ i $g(x)$ jednaki

$$r_j(x) = g_j(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_\varepsilon(x, t; \lambda) g_j(t) dt,$$
$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_\varepsilon(x, t; \lambda) f(t) dt.$$

Prema tome, za bilo koju vrijednost konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ integralna jednadžba (4.15) ekvivalentna je Fredholmovoj jednadžbi druge vrste (4.20) sa degeneriranom jezgrom. Zbog ekvivalentnosti od (4.15) i (4.20) možemo primjeniti Fredholmovu alternativu za jednadžbu (4.15):

Teorem 4.2.1. *Za svaku vrijednost od $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi: ili (H) ima samo trivijalno rješenje $y(x) = 0$ (tada (N) ima jedinstveno rješenje za svaku funkciju smetnje $f(x)$), ili (H) posjeduje netrivijalna rješenja ((H) i (H^T) tada imaju prostor rješenja jednake dimenzije). U slučaju kada (H) i (H^T) posjeduju netrivijalna rješenja, jednadžba (N) možda nema rješenja za neke funkcije smetnje $f(x)$. Da bi ipak i u tom slučaju jednadžba (N) imala rješenje nužno je i dovoljno da je funkcija $f(x)$ ortogonalna na sva rješenja jednadžbe (H^T) , tj. da vrijedi*

$$\int_a^b f(x)z(x)dx = 0$$

za svako $z(x)$ rješenje jednadžbe (H^T).

4.3 Karakteristike svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija za simetrične jezgre

Jezgra $K(x,t)$ je simetrična ako vrijedi $K(x,t) = \overline{K(t,x)}$. U slučaju da je $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi $K(x,t) = K(t,x)$. Može se pokazati da vrijedi sljedeće: ako je jezgra simetrična, tada su i sve njene iterirane jezgre simetrične. Kako je $K_1(x,t) = K(x,t)$ krećemo od $n = 2$.

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)dt_1 = \int_a^b \overline{K(t,t_1)} \cdot \overline{K(t_1,x)}dt_1 = \overline{K_2(t,x)}. \tag{4.21}$$

Pretpostavimo da za $1 \leq m \leq n$ vrijedi

$$K_m(x,t) = \overline{K_m(t,x)}. \tag{4.22}$$

Korak indukcije $m = n + 1$, dobivamo

$$K_{n+1}(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_n(t_1,t)dt_1 = \int_a^b \overline{K_n(t,t_1)} \cdot \overline{K(t_1,x)}dt_1 = \overline{K_{n+1}(t,x)}. \tag{4.23}$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi da za svaki $n \geq 1$ vrijedi $K_n(x,t) = \overline{K_n(t,x)}$.

Slijede neke činjenice vezane uz svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije simetrične jezgre $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$:

Teorem 4.3.1. ***Svojstvene vrijednosti simetrične jezgre su realni brojevi.***

Dokaz. Pretpostavimo da su $y(x)$ i $z(x)$ svojstvene funkcije homogene jendadžbe (H) sa svojstvenim vrijednostima λ i μ. Vrijedi dakle

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad x \in [a,b],\\
z(x) &= \mu \int_a^b K(x,t)z(t)dt, \qquad x \in [a,b].
\end{aligned}
$$

Kako je $K(x,t)$ relana funkcija nakon kompleksnog konjugiranja imamo

$$\overline{z(x)} = \overline{\mu} \int_a^b K(x,t)\overline{z(t)}dt$$

odakle zaključujemo da je $\overline{z(x)}$ svojstvena funkcija od (H) sa svojstvenom vrijednosti $\overline{\mu}$. Kako je $K(x,t)$ simetrična, koristeći Fubinijev teorem slijedi

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu} \int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx &= \overline{\mu} \int_a^b \left(\lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt\right)\overline{z(x)}dx\\
&= \lambda \int_a^b \left(\overline{\mu} \int_a^b K(t,x)\overline{z(x)}dx\right)y(t)dt\\
&= \lambda \int_a^b \overline{z(t)}y(t)dt.
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo

$$(\lambda - \overline{\mu}) \int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx = 0. \tag{4.24}$$

Za $z = y$ (4.24) se svodi na

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |y(x)|^2 \, dx = 0.$$

y je neprekidna funkcija, te kako tražimo netrivijalna rješenja jednadžbe (H), za y kao svojstvenu funkciju ne vrijedi $y(x) = 0$, $\forall \in [a,b]$. To povlači da je $\lambda = \overline{\lambda}$. Dakle $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Teorem 4.3.2. ***Svojstvene funkcije koje pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima su ortogonalne.***

Dokaz. Imamo redom

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\int_a^b y(x)z(x)dx &= \lambda\mu\int_a^b y(x)\int_a^b K(x,t)z(t)dtdx-\mu\lambda\int_a^b z(x)\int_a^b K(x,t)y(t)dtdx\\ &= \lambda\mu\int_a^b y(x)\int_a^b K(x,t)z(t)dtdx-\mu\lambda\int_a^b y(x)\int_a^b K(t,x)z(t)dtdx\\ &= \lambda\mu\int_a^b y(x)\int_a^b \left(K(x,t)-K(t,x)\right)z(t)dtdx=0\end{aligned}$$

jer je $K(x,t)=K(t,x)$. Kako je $\lambda\neq\mu$ slijedi $\int_a^b y(x)z(x)dx=0$.

□

Teorem 4.3.3. ***Svaka svojstvena vrijednost λ od (H) ima konačnu kratnost, tj. ne postoji beskonačni skup svojstvnih funkcija za svojstvenu vrijednost λ, takav da je svaki konačni podskup tog skupa linearno nezavisan.***

Dokaz. Neka je $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ skup svojstvenih vrijednosti s pripadajućim skupom svojstvenih funkcija $\{y_1,...,y_N\}$ koji je ortonormiran. Neka je $f:[a,b]\to R$ te $y_n:[a,b]\to R$ za $n=1,...,N$. Prema Besselovoj nejednakosti imamo

$$\|f\|^2=\int_a^b |f(t)|^2\,dt\geq\sum_{n=1}^N|a_n|^2 \tag{4.25}$$

gdje je $a_n=\int_a^b f(t)y_n(t)dt$. Fiksirajmo $x\in[a,b]$ i uvrstimo $f(t)=K(x,t)$ u Besselovu nejednakost, te za $\lambda_n\neq 0$ imamo redom

$$a_n=\int_a^b K(x,t)y_n(t)dt=\frac{1}{\lambda_n}y_n(x),\qquad n=1,...,N$$

$$\int_a^b |K(x,t)|^2\,dt\geq\sum_{n=1}^N|a_n|^2=\sum_{n=1}^N\frac{|y_n(x)|^2}{|\lambda_n|^2}. \tag{4.26}$$

Integrirajmo (4.26) po x

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dtdx \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \int_a^b |y_n(x)|^2 \, dx. \tag{4.27}$$

Jer je $K(x,t)$ kvadratno integrabilna funkcija imamo

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dtdx < \infty.$$

Označimo lijevu stranu nejednakosti (4.27) sa M. Kako je $\{y_1, ..., y_N\}$ ortonormiran skup nejednakost (4.27) prelazi u

$$M \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|\lambda_n|^2}. \tag{4.28}$$

Pretpostavimo sada da postoji beskonačan skup svojstvenih funkcija koje odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ. Tada od tog beskonačnog skupa možemo napraviti beskonačni ortonormirani skup svojstvenih funkcija (Gram - Schmidtov postupak). Koristeći nejednakost (4.28) za svaki prirodni broj N (N je kratnost od λ) imamo

$$M \geq \frac{N}{|\lambda|^2}. \tag{4.29}$$

Međutim, kako je M konačno, zaključujemo da nejednakost (4.29) ne vrijedi za svaki prirodni broj N. Dakle, λ ima konačnu kratnost.

□

Teorem 4.3.4. ***Neka je*** L ***limes skupa*** $\left\{\frac{1}{\lambda_n} : n \in N\right\}$ ***gdje je*** λ_n ***svojstvena vrijednost od*** (H)***. Tada je*** $L = 0$***.***

Dokaz. Postoji dakle, beskonačni niz (λ_n) različitih svojstvenih vrijednosti za koji vrijedi $\frac{1}{\lambda_n} \to L$ kada $n \to \infty$. Nizu (λ_n) odgovara ortonormirani niz (y_n) svojstvenih funkcija. Možemo koristiti (4.28) kako bismo zaključili da je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \tag{4.30}$$

konvergentan. Izraz (4.28) nam kaže da je niz parcijalnih suma reda (4.30) ograničen, a kako je i rastući slijedi da je konvergentan. Prema tome, za opći član reda (4.30) vrijedi $\frac{1}{|\lambda_n|^2} \to 0$ te onda i $\frac{1}{\lambda_n^2} \to 0$ i konačno $\frac{1}{\lambda_n} \to 0$ za $n \to \infty$ te je $L = 0$. Zaključujemo također da skup svojstvenih vrijednosti nema konačni limes.

□

Teorem 4.3.5. ***Neka je*** p ***pozitivna konstanta. Tada se u*** $[-p, p]$ ***nalazi samo konačan broj različitih svojstvenih vrijednosti jednadžbe*** (H)***.***

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da se u $[-p, p]$ nalazi beskonačni niz (λ_n) svojstvenih vrijednosti kojemu odgovara ortonormirani niz svojstvenih funkcija (y_n). Kako vrijedi $\lambda_n \leq p$, primjenom nejednakosti (4.28) imamo da za svaki prirodni broj N vrijedi

$$M \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n^2} \geq \frac{N}{p^2}.$$

Međutim, kako je M konačno gornja nejednakost ne vrijedi te se u $[-p, p]$ nalazi samo konačno mnogo različitih svojstvenih vrijednosti.

□

Teorem 4.3.6. ***Postoji najviše prebrojivo mnogo različitih svojstvenih vrijednosti.***

Dokaz. Za svaki prirodni broj n, prema prethodnom teoremu 4.3.5. može biti samo konačan broj različitih svojstvenih vrijednosti u $[-n, n]$. Kako su za simetrične jezgre sve svojstvene vrijednosti realne, slijedi da su sve svojstvene vrijednosti sadržane u skupu

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n].$$

No, unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

□

Teorem 4.3.7. ***Neka je*** λ ***svojstvena vrijednost te*** $y(x)$ ***pridružena svojstvena funkcija integralne jednadžbe*** (N)***. Tada je*** λ^2 ***svojstvena vrijednost iterirane jezgre*** $K_2(x, t)$ ***s pridruženom svojstvenom funkcijom*** $y(x)$***.***

Dokaz. Tvrdimo zapravo da se spektar od $K_2(x, t)$ sastoji od kvadrata svojstvenih vrijednosti λ jezgre $K(x, t)$. Promotrimo jednadžbu

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x).$$

Pomnožimo jednadžbu s $\lambda K(z,x)$ te integriramo po x

$$\lambda \int_a^b K(z,x)y(x)dx - \lambda^2 \int_a^b K(z,x) \int_a^b K(x,t)y(t)dtdx = \lambda \int_a^b K(z,x)f(x)dx,$$

$$y(z) - f(z) - \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(z,x)K(x,t)y(t)dxdt = \lambda \int_a^b K(z,x)f(x)dx.$$

U trećem članu lijeve strane prepoznajemo iteriranu jezgru

$$y(z) - \lambda^2 \int_a^b K_2(z,t)y(t)dt = f_2(z)$$

gdje je

$$f_2(z) = f(z) + \lambda \int_a^b K(z,x)f(x)dx.$$

Nastavljajući dalje na isti način, može se pokazati da vrijedi

$$y(x) - \lambda^m \int_a^b K_m(x,t)y(t)dt = f_m(x)$$

uz

$$f_m(x) = f_{m-1} + \lambda \int_a^b K(x,t)f_{m-1}(t)dt.$$

□

Poglavlje 5

Integralni operatori konačnog ranga

5.1 Svojstva integralnih operatora

U ovome poglavlju pokazat ćemo kako možemo promatrati Fredholmove integralne jednadžbe pomoću integralnih operatora konačnog ranga i dokazati neka svojstva takvih operatora. Na Hilbertovom prostoru $L^2([a,b])$ definiramo integralni operator $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ kao

$$Ty(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt \tag{5.1}$$

gdje je jezgra $K \in L^2([a,b]^2)$. Integralni operator je linearnan, tj. vrijedi

$$T(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T y_1 + \alpha_2 T y_2, \qquad \forall y_1, y_2 \in L^2([a,b]), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Hermitski adjungiran operator operatoru T je operator T^* definiran kao

$$T^* g = \int_a^b \overline{K(t,x)} g(t)dt. \tag{5.2}$$

Pokažimo da vrijedi $\langle Ty, g \rangle = \langle y, T^* g \rangle$. Imamo redom

$$
\begin{aligned}
\langle\, Ty, g\rangle &= \int_a^b \overline{g(x)}\left[\int_a^b K(x,t)y(t)dt\right]dx \\
&= \int_a^b y(t)\left[\int_a^b K(x,t)\overline{g(x)}dx\right]dt \\
&= \int_a^b y(x)\left[\int_a^b K(t,x)\overline{g(t)}dt\right]dx \\
&= \int_a^b y(x)\left[\int_a^b \overline{\overline{K(t,x)}g(t)}dt\right]dx \\
&= \langle\, y, T^* g\rangle.
\end{aligned}
$$

Za simetrične jezgre ($K(x,t) = \overline{K(t,x)}$) vrijedi $\langle\, Ty, g\rangle = \langle\, y, Tg\rangle$, tj. integralni operator T je hermitski operator. Neka su V i W normirani prostori. Kažemo da je linearni operator $T : V \to W$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$||Tx|| \leq M\,||x||\,, \qquad \forall x \in X. \tag{5.3}$$

Normu operatora T definiramo kao

$$||T|| = \sup_{||x||=1} \frac{||Tx||}{||x||}. \tag{5.4}$$

Operator T je neprekidan na normiranom prostoru X ko za svaki niz (x_n) u X vrijedi

$$x_n \to x \Longrightarrow Tx_n \to Tx. \tag{5.5}$$

Poznato je da ako je linearni operator T neprekidan na normiranom prostoru X da je onda i ograničen, i obrnuto. Pokazat ćemo da je integralni operator ograničen, te će onda slijediti da je i neprekidan. Krenimo od relacije

$$\psi(x) = Ty = \int_a^b K(x,t)y(t)dt. \tag{5.6}$$

Dalje imamo koristeći Cauchy - Schwarzovu nejednakost

$$|\psi(x)|^2 = \left|\int_a^b K(x,t)y(t)dt\right|^2 \leq \int_a^b |K(x,t)|^2\, dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2\, dt$$

odnosno

$$|\psi(x)|^2 \leq ||y||^2 \cdot \int_a^b |K(x,t)|^2\, dt.$$

Integriranjem po x slijedi redom

$$\int_a^b |\psi(x)|^2\, dx \leq ||y||^2 \cdot \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dtdx$$
$$||\psi||^2 = ||Ty||^2 \leq ||y||^2 \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dtdx$$
$$||\psi|| = ||Ty|| \leq ||y|| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dtdx\right)^{\frac{1}{2}}$$

što nam konačno daje

$$||T|| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dtdx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

jer je $||T||$ najmanja gornja međa. Jezgra je $K(x,t) \in L^2([a,b]^2)$, dakle T je ograničen operator, pa onda i neprekidan na $L^2([a,b])$. Prisjetimo se sada pojma kompaktnog operatora. Neka je X unitaran prostor. Linearni operator $T : X \to X$ je kompaktan ako za svaki ograničeni niz (x_n) sadržan u X, niz (Tx_n) ima konvergentan podniz. Pokazat ćemo sada da su svi operatori konačnog ranga kompaktni.

Teorem 5.1.1. *Neka je X unitarni prostor, te $T : X \to X$ linearni operator. Ako je rang operator T konačan, tada je T kompaktan operator.*

Dokaz. Neka je $\{u_1, ..., u_m\}$ ortonormirana baza za $\mathrm{Im}(T)$ (ovime smo zapravo odredili sliku operatora T kao m-dimenzionalni vektorski prostor). Neka je (x_n) ograničen niz u X. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $k \in \{1, ..., m\}$ imamo

$$|\langle Tx_n, u_k\rangle| \leq ||Tx_n||\, ||u_k|| \leq ||T||\, ||x_n|| \leq ||T|| \sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||. \tag{5.8}$$

Prema tome, $(\langle Tx_n, u_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz. Prema Bolzano - Weierstrassovom teoremu, taj niz ima konvergentan podniz $(\langle Tx_n^{(1)}, u_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Iz (5.8), $(\langle Tx_n^{(1)}, u_2\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz, te prema Bolzano - Weierstrassovom teoremu ima konvergentan podniz $(\langle Tx_n^{(2)}, u_2\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Nastavljajući dalje na isti način, slijedi da niz (x_n) ima konvergentan podniz $(x_n^{(m)})$ takav da su svi nizovi

$$(\langle Tx_n^{(m)}, u_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}, ..., (\langle Tx_n^{(m)}, u_m\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergentni, s limesima redom $\alpha_1, ..., \alpha_m$. Tada imamo

$$\left\|Tx_n^{(m)} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{m}\langle Tx_n^{(m)}, u_k\rangle u_k - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{m}\left|\langle Tx_n^{(m)}, u_k\rangle - \alpha_k\right|^2 \to 0$$

kada $n \to \infty$, te slijedi da je $(Tx_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan podniz (s limesom $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_k$) niza $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dakle T je kompaktan.

□

Pokažimo sada da je skup kompaktnih operatora sadržan u skupu svih ograničenih operatora.

Teorem 5.1.2. *Neka je X unitaran prostor. Ako je $T : X \to X$ kompaktan operator, tada je i ograničen.*

Dokaz. U dokazu koristimo da za tvrdnje A i B vrijedi $A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$, gdje je A : T je kompaktan operator, a B : T je ograničen. Pretpostavimo da ne postoji $M > 0$ takav da

$$\forall x \in X, \quad \|x\| < 1, \quad \|Tx\| \leq M.$$

Neka je $x_1 \in X$ takav da je $\|x_1\| < 1$ i $\|Tx_1\| > 1$. Ako je x_n konstruiran na isti način, neka je onda $x_{n+1} \in X$ takav da $\|x_{n+1}\| < 1$ i

$$\|Tx_{n+1}\| > 1 + \max\{\|Tx_1\|, ..., \|Tx_n\|\}.$$

Očito je niz (x_n) ograničen $(\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| < 1)$, dok niz (Tx_n) nema konvergentnih podnizova, jer za $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2$ imamo

$$\left\|Tx_{n_1} - Tx_{n_2}\right\| \geq \left\|Tx_{n_2}\right\| - \left\|Tx_{n_1}\right\| > 1 + \max\left\{\|Tx_1\|, ..., \left\|Tx_{n_2-1}\right\|\right\} - \left\|Tx_{n_1}\right\| \geq 1.$$

Zaključujemo da je T kompaktan operator. $\square$

Za linearni operator $T : X \to Y$ (X, Y normirani prostori) koji je kompaktan i neprekidan kažemo da je jako neprekidan. Kako je gore pokazano, svaki kompaktni linearni operator je ograničen pa onda jako neprekidan (ograničen operator je neprekidan). Jako neprekidan operator preslikava ograničen skup u kompaktan skup (za skup kažemo da je kompaktan, ako on ima svojstvo da svaki niz iz S sadrži konvergentan podniz i da taj podniz konvergira elementu skupa S). Dakle, možemo zaključiti, kako je integralni operator konačnog ranga ujedno i kompaktan pa stoga i jako neprekidan. Pokazat ćemo da je ograničen operator T konačnog ranga jako neprekidan jer preslikava ograničen skup u $L^2([a, b])$ u ograničen konačnodimenzionalan skup koji je nužno kompaktan. Na primjer, za degeneriranu jezgru

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)h_j(t)$$

gdje su $g_j(x), h_j(t) \in L^2([a, b])$ i $y \in L^2([a, b])$ vrijedi

$$Ty = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} g_j(x)h_j(t)y(t)dt = \sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x) \tag{5.9}$$

gdje je $c_j = \int_a^b h_j(t)y(t)dt, \ j = 1, ..., n$. Iz (5.9) zaključujemo da je rang operatora T konačnodimenzionalan potprostor od $L^2([a, b])$. Dalje imamo

$$\|Ty\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x) \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |c_j| \, \|g_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|g_j\| \int_a^b |h_j(t)| \, |y(t)| \, dt. \tag{5.10}$$

Ako primjenimo Cauchy - Schwarzovu nejednakost na (5.10) imamo

$$\|Ty\| \leq M \, \|y\|$$

gdje je

$$M = \sum_{j=1}^{n} \|g_j\| \, \|h_j\| . \tag{5.11}$$

Dakle, T je ograničen operator konačnog ranga, stoga i jako neprekidan.

5.2 Fredholmove alternative

Primjetimo da uvodeći integralni operator (5.1) Fredholmovu homogenu jednadžbu možemo pisati kao

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = \lambda T y(x). \tag{5.12}$$

Podijelimo li gornji izraz sa $\lambda \neq 0$ dobivamo

$$Ty = \frac{1}{\lambda} y. \tag{5.13}$$

Uz oznaku $\frac{1}{\lambda} = \mu$ imamo

$$Ty = \mu y. \tag{5.14}$$

Izraz (5.14) podsjeća nas na dobro poznati problem nalaženja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektoraoperatora T (svojstveni vektori su sada funkcije $y \in L^2([a,b])$). Prisjetimo se da je μ svojstvena vrijednost operatora T tek ako postoji netrivijalni vektor y sa svojstvom $Ty = \mu y$. Za svaki skalar μ vrijedi $T0 = \mu \cdot 0$, tj. za svaki skalar možemo riješiti jednadžbu $Ty = \mu y$. Svojstvenim vrijednostima nazivamo samo one skalare za koje jednadžba ima netrivijalno rješenje. Dakle tražimo netrivijalna rješenja Fredholmove homogene jednadžbe. Iz teorije linearnih operatora poznato je da linearni operator ne mora imati svojstvenih vrijednosti. Na primjer, operator rotacije $R_\varphi \in L(V^2(0))$ za kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle, \varphi \neq 0, \pi$. Pokažimo na jednom primjeru da integralna jednadžba ne mora imati svojstvenih vrijednosti.

Integralnu jednadžbu

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \, y(t) \, dt$$

možemo pisati u obliku

$$y(x) = \lambda \sin x \int_0^{2\pi} y(t) \cos t \, dt.$$

Očito je da rješenje jednadžbe mora biti oblika $y(x) = A \sin x$. Ako to uvrstimo u početnu jednadžbu dobivamo

$$A\,\sin x = \lambda\,\sin x \int_0^{2\pi} A\,\sin t\,\cos t\,dt = 0.$$

Odavde slijedi $A = 0$. Jednadžba ima samo trivijalno rješenje te ne postoje svojstvene vrijednosti gornje integralne jednadžbe.

Pomoću integralnih operatora

$$Ty = \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad T^*y = \int_a^b K(t,x)y(t)dt \tag{5.15}$$

integralne jednadžbe (N), (N^T), (H) i (H^T) možemo promatrati u sljedećim oblicima:

$$(N) \qquad y - \lambda Ty = f$$

$$(N^T) \qquad y - \lambda T^*y = f$$

$$(H) \qquad y - \lambda Ty = 0$$

$$(H^T) \qquad y - \lambda T^*y = 0.$$

Za kompaktan linearan operator T na Banachovom prostoru X vrijedi sljedeće:

1) dim (Ker $(I - \lambda T)$**) = dim (Ker** $(I - \lambda T^*)$**)**, tj. homogene jednadžbe imaju isti konačni broj linearno nezavisnih rješenja.

2) Im $(\lambda I - T) =$ **Ker** $(\lambda I - T^*)^\perp$ i **Im** $(\lambda I - T^*) =$ **Ker** $(\lambda I - T)^\perp$.

3) Im $(\lambda I - T) = X$ ako i samo ako je **Ker** $(\lambda I - T) = \{0\}$.

Im $(\lambda I - T) =$ Ker $(\lambda I - T^*)^\perp$ znači da jednadžba $\lambda y - Ty = f$ ima rješenje ako i samo ako je $f \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T^*)^\perp$ tj. $\langle f, h\rangle = 0$, $\forall h \in X$ takav da je $\lambda h - T^*h = 0$.

Im $(\lambda I - T) = X$ ako i samo ako je Ker $(\lambda I - T) = \{0\}$ znači da je $y = 0$ jedino rješenje od jednadžbe $\lambda y - Ty = 0$ ako i samo ako $\lambda y - Ty = f$ ima rješenje $y \in X$ za svaki $f \in X$.

Poglavlje 6

Dodatak : Teoremi i propozicije korišteni u radu

Teorem [A]: Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, tada je f omeđena. Ako vrijedi

$$m = inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}, \quad M = sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

Tada postoje x_1 i x_2 takvi da vrijedi $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Teorem [B]: Ako je f integrabilna na segmentu $[a, b]$, onda je i $|f|$ integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Teorem [C]: Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija (klase C^1). Tada vrijedi

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Teorem [D](Fubinijev teorem): Neka je $f : [a, b]\text{x}[c, d] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Tada integrali

$$\int_c^d \int_a^b f(x, t)dxdt, \qquad \int_a^b \int_c^d f(x, t)dtdx$$

postoje i jednaki su.

Teorem [E]: Neka je $k : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na pravokutniku $I = [a, b]\text{x}[c, d]$. Za svaku neprekidnu funkciju $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ postoji

$$F(x) = \int_c^d k(x,y)f(y)dy$$

i tako definirana funkcija F je neprekidna na segmentu $[a,b]$.

Teorem [F] (Lančano pravilo): Ako funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x}$ na pravokutniku $I = [a,b]\text{x}[c,d]$ i ako su $x \mapsto a(x), b(x)$ funkcije klase C^1 na $[a,b]$ takve da je $a(x), b(x) \in [c,d]$, onda je funkcija

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy$$

klase C^1 na $[a,b]$ i vrijedi formula

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}dy.$$

Teorem [G] a): Za niz funkcija (f_n), $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$ kažemo da uniformno (jednoliko) konvergira funkciji $f : I \to \mathbb{R}$ na I, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da

$$(n > n_0) \Longrightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon), \quad \forall x \in I.$$

b) Red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $u_k : I \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno na I funkciji f, ako niz (S_n) parcijalnih suma $S_n : I \to \mathbb{R}$ definiran sa

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in I,$$

uniformno na I konvergira funkciji f, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da

$$(n > n_0) \Longrightarrow (|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon), \quad \forall x \in I.$$

U nekim slučajevima uniformnu konvergenciju reda $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ moguće je ustanoviti uspoređivanjem tog reda s konvergentnim redom brojeva.

Teorem [H] (Weierstrassov kriterij): Ako je svaki član u_k reda funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ po apsolutnoj vrijednosti manji od odgovarajućeg člana M_k konvergentnog reda $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ pozitivnih brojeva

$$|u_k(x)| \leq M_k, \quad x \in I = [a, b],$$

onda red $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ uniformno konvergira na I.

Teorem [I] Ako niz neprekidnih funkcija $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniformno konvergira funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na $[a, b]$, onda vrijedi

a) f je neprekidna na $[a, b]$

b) $\int_a^b f_n dx$ konvergira k $\int_a^b f dx$.

Teorem [J] Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ neprekidnih funkcija $u_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniformno konvergira funkciji $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ na $[a, b]$ onda vrijedi

a) u je neprekidna na $[a, b]$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k = \int_a^b u$.

(uniformno konvergentni red možemo integrirati član po član).

Propozicija [K]: Neka je dan proizvoljan sustav lineranih jednadžbi u matričnom obliku $\mathbf{AX = B}$. Neka je C_0 bilo koje njegovo rješenje, te neka je Ω prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $\mathbf{AX = 0}$. Tada je $C_0 + \Omega = \{C_0 + C : C \in \Omega\}$ skup svih rješenja sustava $\mathbf{AX = B}$.

Korolar [L]: Neka je Ω prostor rješenja homogenog sustava $\mathbf{AX = 0}$, $A \in M_{mn}(F)$, $\mathrm{r}(A) = r$. Tada je $\dim \Omega = n - r$. Posebno ukoliko je $\mathrm{r}(A) = n$ onda sustav $\mathbf{AX = 0}$ ima samo trivijalno rješenje.

Teorem [M]: Neka je $A : V \to W$ linearni operator, te neka je $\dim V < \infty$. Tada vrijedi $\mathrm{r}(A)+\mathrm{d}(A) = \dim V$ gdje je $\mathrm{r}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, A)$ te $\mathrm{d}(A) = \dim(\mathrm{Ker}\, A)$.

[N] Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je kvadratno integrabilna ($f(x) \in L^2([a, b])$) ako vrijedi

$$\int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Funkcija $K(x, t) : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ je kvadratno integrabilna ($K(x, t) \in L^2([a, b]^2)$) ako vrijedi

$$\text{a)} \qquad \forall x, t \in [a,b], \qquad \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx dt < \infty.$$

$$\text{b)} \qquad \forall x \in [a,b], \qquad \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dt < \infty.$$

$$\text{c)} \qquad \forall t \in [a,b], \qquad \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx < \infty.$$

[O] (Bolzano - Weierstrassov teorem) Svaki ograničeni niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentan podniz.

[P] (Definicija) Kažemo da je normirani prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor naziva se Hilbertov prostor.

[R] (Definicija) Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem F je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to F$ sa sljedećim svojstvima

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in F, \forall x, y \in X.$
4. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \quad \forall x_1, x_2, y \in X.$
5. $\langle x, x \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in X.$

Na $(C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt.$

Uređeni par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ naziva se unitaran prostor.

Bibliografija

[1] Damir Bakic, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb (2008).

[2] IN Bronštejn, KA Semendjajev, G Musiol i H Mühlig, *Matematički priručnik, Golden marketing–Tehnička knjiga*, 2004.

[3] Peter J Collins, *Differential and integral equations*, Oxford University Press, 2006.

[4] Ram P Kanwal, *Linear integral equations*, Springer Science & Business Media, 2013.

[5] S Kurepa, *Matematička analiza 1, 2, 3*, Tehnička knjiga, Zagreb **1979** (1981), 1975.

Sažetak

U ovome radu bavio sam se Fredholmovom alternativom i njezinim posljedicama. Fredholmova alternativa proučava Fredholmovu integralnu jednadžbu zajedno sa pridruženom transponiranom jednadžbom, te pridruženom homogenom i homogenom transponiranom jednadžbom. Uvjeti postojanja rješenja alternativom su podijeljeni u dva dijela ovisno o ispunjenju određenih uvjeta koje sama alternativa kao teorem nameće. Integralne jednadžbe s degeneriranim jezgrama, tj. jezgrama koje se mogu prikazati kao suma produkata funkcija samo varijable x i samo varijable t vode na sustav linearnih jednadžbi koji se onda proučavaju standardnim metodama, tj. koristi se teorem o rangu i defektu operatora. Slučaj sa općenitijim jezgrama, tj. ne nužno degeneriranim može se svesti na slučaj s degeneriranim jezgrama ako proizvoiljnu nedegeneriranu jezgru aproksimiramo degeneriranom. Metodama moderne funkcionalne analize Fredholmove integralne jednadžbe moguće je promatrati pomoću integralnih operatora te se navode svojstva takvih operatora. Uvođenjem integralnih operatora problem nalaženja rješenja integralne jednadžbe vodi na dobro poznati problem nalaženja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora nekog operatora.

Summary

In this paper I studied Fredholm alternative and its consequences. The Fredholm alternative studies the Fredholm integral equation together with the associated transposed equation, and the associated homogeneous and homogeneous transposed equation. The conditions for the existence of a solution by an alternative are divided into two parts, depending on the fulfilment of certain conditions imposed by the alternative itself as a theorem. Integral equations with degenerate kernels, i.e. kernels that can be represented as the sum products of functions of only x and only t variables lead to a system of linear equations, which are then studied by standard methods, i.e. the rank and defect theorem is used. A case with more general kernel, i.e. not necessarily degenerate, can be reduced to a case with degenerate kernel if we approximate the arbitrary non-degenerate kernel with a degenerate one. Using methods of modern functional analysis it is possible to study Fredholm integral equations with integral operators and we list some properties of these operators. With the introduction of integral operators, the problem of finding the solution of the integral equation leads to the well-known problem of finding the eigenvalues and eigenvectors of an operator.

Životopis

Rođen sam 31. siječnja 1990. godine u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu Frana Galovića u Novom Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole upisao sam srednju Geodetsku tehničku školu. Godine 2012. upisao sam integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij, smjer matematika i fizika, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. U slobodno vrijeme uglavnom čitam matematičke knjige te slušam i pokušavam producirati ambijentalnu muziku.