SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mateo Tomašević

O EPIMORFNOJ SLICI CENTRA C^*-ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ilja Gogić

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Začeci teorije C^*-algebri sežu još od von Neumanna, Schrödingera i Heisenberga u kvantnoj mehanici još u 1920-ima. Poznato je da opservable korespondiraju hermitskim operatorima na Hilbertovom prostoru stanja. Apstraktno okruženje za proučavanje hermitskih operatora su upravo C^*-algebre.

Pojam C^*-algebre uveden je 1943. u radovima sovjetskih matematičara Israela Geljfanda i Marka Naimarka. Riječ je o Banachovoj algebri A nad $\mathbb{C}$ na kojoj je uvedena izometrična involutorna operacija $*$ koja zadovoljava tzv. C^*-svojstvo: $\|a^*a\| = \|a\|^2$ za sve elemente $a \in A$. Ova jednostavna relacija daje snažnu dodatnu strukturu u odnosu na Banachove algebre. Primjerice, norma na C^*-algebri je jedinstveno određena njenom algebarskom strukturom. Osnovni primjeri C^*-algebri su funkcijske algebre $C(\Omega)$ i $C_0(\Omega)$ gdje je Ω kompaktan odnosno lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, s operacijama po točkama i sup-normom. Od nekomutativnih primjera valja spomenuti algebru ograničenih operatora $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Veliku ulogu u proučavanju C^*-algebri ima spektar elementa. Prisjetimo se, spektar elementa a u unitalnoj algebri A je skup svih skalara $\lambda \in \mathbb{C}$ takvih da $a - \lambda 1$ nije invertibilan element algebre A. Spektralna teorija dozvolit će nam konstrukciju neprekidnog funkcionalnog računa za normalne elemente na C^*-algebrama, koji direktno poopćava funkcionalni račun nad normalnim matricama u linearnoj algebri. Uvodi se i pojam pozitivnih elemenata koji poopćuju pozitivne operatore na Hilbertovim prostorima.

Fundamentalni strukturni teorem komutativnih C^*-algebri je Geljfand-Naimarkov teorem za komutativne C^*-algebre koji tvrdi da je svaka komutativna C^*-algebra A (izometrički) $*$-izomorfna algebri $C_0(\Omega)$ za neki lokalno kompaktan prostor Ω. Nadalje, prostor Ω se prirodno realizira kao prostor karaktera tj. nenul linearnih $*$-multiplikativnih funkcionala $\varphi : A \to \mathbb{C}$. Prostor karaktera se može opskrbiti Geljfandovom topologijom (relativnom slabom-$*$ topologijom s duala algebre A^*), i na taj način postaje topološka invarijanta komutativne C^*-algebre. Geljfand-Naimarkov teorem se može izreći i u terminima maksimalnih ideala, budući da postoji prirodna bijekcija karaktera i maksimalnih ideala $\varphi \mapsto \ker \varphi$.

Kao i u teoriji grupa, glavni alat za proučavanje C^*-algebri (posebno nekomutativnih) su reprezentacije. Elemente C^*-algebri želimo reprezentirati kao ograničene operatore na nekom Hilbertovom prostoru: formalno, promatramo $*$-homomorfizme s C^*-algebre u algebru $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Uz pojam reprezentacija je usko vezan pojam stanja: stanje na C^*-algebri je svaki pozitivan funkcional norme 1. Iz stanja se na prirodan način konstruiraju reprezentacije (riječ je o tzv. Geljfand-Naimark-Segal (GNS) konstrukciji). U ovoj konstrukciji *čista* stanja (ekstremne točke konveksnog skupa svih stanja) odgovaraju upravo ireducibilnim reprezentacijama C^*-algebre. Fundamentalni rezultat ove teorije je drugi Geljfand-Naimarkov teorem: svaka C^*-algebra je (izometrički) $*$-izomorfna nekoj zatvorenoj $*$-podalgebri od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.

Komutativni Geljfand-Naimarkov teorem se pokušao generalizirati i na nekomutativne C^*-algebre. Prvo pitanje koje se postavilo je što bi igralo ulogu baznog prostora, kao što karakteri (odnosno maksimalni ideali) čine u komutativnom slučaju, i kojom bi topologijom bio opremljen. Nameću se dva kandidata: prostor primitivnih ideala i spektar algebre. Primitivni ideali su jezgre ireducibilnih reprezentacija C^*-algebre. Pokazat ćemo da su u komutativnom slučaju sve ireducibilne reprezentacije unitarno ekvivalentne karakterima algebre pa se primitivni ideali podudaraju s maksimalnima. Skup primitivih ideala C^*-algebre A, u oznaci $\operatorname{Prim} A$, se oprema tzv. Jacobsonovom topologijom. Spektar C^*- algebre (ne valja ga miješati sa spektrom elementa) je prostor svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija. U komutativnom slučaju ovo upravo odgovara prostoru karaktera, koji se u tom kontekstu često naziva i Geljfandov spektar. Topologiju na spektru C^*-algebre možemo konstruirati na više načina. Jedan od njih je da povučemo Jacobsonovu topologiju s prostora primitivnih ideala, jer su spektar i prostor primitivih ideala povezani prirodnom bijekcijom $[\pi] \mapsto \ker \pi$. Drugi način je da prenesemo relativnu slabu-$*$ topologiju sa skupa čistih stanja na spektar preko GNS-konstrukcije koja nam daje preslikavanje $\rho \mapsto [\pi_\rho]$ sa skupa čistih stanja na spektar. Te dvije topologije na spektru se podudaraju.

Ova teorija nije u potpunosti uspjela generalizirati komutativni Geljfand-Naimarkov teorem. Uspjela jest u nekim slučajevima, npr. kada je prostor primitivih ideala Hausdorffov. Ti rezultati koriste teoriju svežnjeva.

Osnovni problem kojim se bavimo u ovom diplomskom radu je problem $*$-epimorfne slike centra za unitalne C^*-algebre. Prisjetimo se, centar $Z(A)$ algebre A je skup svih elemenata koji komutiraju sa svim elementima algebre.

Neka su A i B C^*-algebre i $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Tada uvijek vrijedi

$$\phi(Z(A)) \subseteq Z(B).$$

Zaista, neka je $z \in Z(A)$. Tvrdimo da je $\phi(z) \in Z(B)$. Za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$

takav da je $\phi(a) = b$. Imamo

$$\phi(z)b = \phi(z)\phi(a) = \phi(za) = \phi(az) = \phi(a)\phi(z) = b\phi(z).$$

U primjerima ćemo vidjeti da je općenito $\phi(Z(A)) \neq Z(B)$. Htjeli bismo naći nužan i dovoljan uvjet na C^*-algebru A takvu da za svaku C^*-algebru B i $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$ vrijedi jednakost $\phi(Z(A)) = Z(B)$ (u tom slučaju kažemo da A ima CQ-svojstvo). U ovom diplomskom radu ćemo se baviti ovim problemom kad je A unitalna algebra.

Misonou 1952. uvodi pojam *slabo centralne* C^*-algebre kao unitalne C^*-algebre takve da je preslikavanje

$$\eta_A : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} Z(A), \quad \eta_A(M) = M \cap Z(A), \text{ za } M \in \operatorname{Max} A$$

injektivno, gdje su $\operatorname{Max} A$ i $\operatorname{Max} Z(A)$ redom prostori maksimalnih ideala algebre A odnosno $Z(A)$.

Glavni rezultat koji ovdje prezentiramo je teorem danskog matematičara Jørgena Vesterstrøma iz 1971.:

Teorem (Vesterstrøm)**.** *Za unitalnu C^*-algebru A ekvivalentno je:*

(i) Za svaku C^*-algebru B i $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$ vrijedi $\phi(Z(A)) = Z(B)$.

(ii) A je slabo centralna.

Istaknuti primjeri slabo centralnih (unitalnih) C^*-algebri su:

- tzv. *centralne* C^*-algebre, koje se mogu okarakterizirati kao one čiji je prostor primitivnih ideala Hausdorffov,
- unitalne C^*-algebre koje imaju jedinstven maksimalan ideal (uključujući proste unitalne C^*-algebre), npr. $\mathbb{B}(\ell^2)$,
- Von Neumannove algebre.

Robert Archbold i Ilja Gogić su 2019. poopćili Vesterstrømov teorem za općenite (ne nužno unitalne) C^*-algebre.

Poglavlje 1

Elementarna spektralna teorija

1.1 Algebre, $*$-algebre, Banachove $*$-algebre, C^*-algebre

Neka je A algebra nad poljem $\mathbb{C}$. Za vektorski potprostor I od A kažemo da je **lijevi (desni) ideal** u A ako je $ax \in I$ za sve $x \in I, a \in A$ ($xa \in I$ za sve $x \in I, a \in A$).

Za $I \subseteq A$ kažemo da je **obostrani ideal** u A ako je i lijevi i desni ideal u A. Ako drugačije nije naglašeno, idealom uvijek smatramo obostrani ideal.

Ako je I ideal u A, tada znamo da A/I ima strukturu kvocijentnog vektorskog prostora. Lako se pokaže da na A/I prirodno možemo definirati i množenje

$$(a+I)(b+I) := ab + I, \qquad \text{za sve } a, b \in A$$

s kojim A/I postaje algebra, koju nazivamo kvocijentna algebra. Kanonski epimorfizam $q : A \to A/I$, $a \mapsto a + I$ je epimorfizam algebri. Ako je A unitalna, tada je i A/I unitalna s jedinicom $1 + I$.

Za pravi ideal M u A kažemo da je **maksimalan** ako nije sadržan ni u jednom drugom pravom idealu M u A.

Za algebru A kažemo da je **prosta** ako nema ideala različitih od $\{0\}$ i A.

Za lijevi (desni) ideal I kažemo da je **modularan** ako postoji $e \in A$ takav da je $ae - a \in I$ ($ea - a \in I$) za sve $a \in A$. U tom slučaju se e zove desna (lijeva) jedinica modulo I. Za obostrani ideal I u A kažemo da je modularan ako je istovremeno modularan i kao lijevi i kao desni ideal. U tom slučaju postoji **jedinica modulo** I, tj. $e \in A$ takav da je $ae - a, ea - a \in I$ za sve $a \in A$. Ako je A unitalna tada je svaki ideal modularan, naime stavimo $e = 1$. Primijetimo da je I modularan ako i samo ako je kvocijentna algebra A/I unitalna, s jedinicom $e + I$ gdje je e jedinica modulo I.

Skup svih maksimalnih modularnih ideala za A označavamo s $\operatorname{Max} A$.

Propozicija 1.1.1. *Svaki pravi modularni ideal u A je sadržan u nekom modularnom maksimalnom idealu u A.*

Dokaz. Neka je I pravi modularni ideal s jedinicom e modulo I. Za ideal $J \supseteq I$ u A vrijedi $J = A$ ako i samo ako $e \in J$. Promotrimo familiju

$$\mathcal{F} = \{J \text{ ideal u } A : J \supseteq I, e \notin J\}.$$

Imamo $I \in \mathcal{F}$ pa je $\mathcal{F}$ neprazna. Uredimo $\mathcal{F}$ inkluzijom i promotrimo lanac $\mathcal{L}$ u $\mathcal{F}$. Očito je $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$ i gornja međa za $\mathcal{L}$ pa prema Zornovoj lemi postoji maksimalni element M za $\mathcal{F}$. Slijedi da je M modularni maksimalni ideal u A. □

Odavde posebno slijedi da unitalna algebra A ima maksimalni ideal. Naime, u tom slučaju je svaki ideal modularan pa primijenimo tvrdnju na pravi ideal $\{0\}$.

Propozicija 1.1.2. *Neka je A komutativna unitalna algebra. Tada je $a \in A$ invertibilan ako i samo ako $a \notin M$ za sve $M \in \operatorname{Max} A$.*

Dokaz. Vrijedi $a \notin A^\times$ ako i samo ako je aA pravi ideal u A, što je ekvivalentno s $aA \subseteq M$ za neki $M \in \operatorname{Max} A$. □

Propozicija 1.1.3. *Neka je A komutativna algebra i $M \in \operatorname{Max} A$. Tada je A/M polje.*

Dokaz. Primijetimo da je A/M prosta algebra. Zaista, pretpostavimo da je I ideal u A/M. Ako je $\pi_M : A \to A/M$ kvocijentno preslikavanje, tada je $\pi_M^{-1}(I)$ ideal u A koji sadrži M. Slijedi $\pi_M^{-1}(I) \in \{M, A\}$ pa $I \in \{A/M, \{0\}\}$. Dakle, A/M je unitalna komutativna prosta algebra. Stoga $\operatorname{Max}(A/M) = \{M\}$ pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije. □

U unitalnoj algebri A znamo da je **spektar** elementa $a \in A$ definiran kao

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin A^\times\}.$$

Rezolventni skup definiramo kao $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.

Za algebru A definiramo njenu **unitizaciju** A^1 kao vektorski prostor $A \oplus \mathbb{C}$ s operacijom množenja

$$(a, \alpha)(b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta), \qquad \text{za sve } a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

A^1 je unitalna algebra s jedinicom $(0, 1)$ i ulaganjem $A \hookrightarrow A^1, a \mapsto (0, 1)$, A postaje ideal u A^1. Elemente od A^1 najčešće pišemo kao $a + \lambda 1$ za neki $a \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ako je A neunitalna algebra, spektar elementa $a \in A$ definiramo kao njegov spektar u unitalnoj algebri A^1:

$$\sigma_A(a) := \sigma_{A^1}(a)$$

Napomenimo da A^1 nije jedina unitalna algebra koja sadrži A kao podalgebru i da spektar elementa $a \in A$ u drugačijim unitalnim nadalgebrama općenito nije jednak $\sigma_{A^1}(a)$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $\phi : A \to B$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri A i B. Tada za svaki $a \in A$ vrijedi*

$$\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a).$$

Dokaz. Slijedi direktno iz $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$. □

Involucija na algebri A je funkcija $* : A \to A$ sa svojstvima

(i) $(a^*)^* = a$ (involutivnost),

(ii) $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$ (antilinearnost),

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$ (antimultiplikativnost),

za sve $a, b \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Algebru A sa zadanom involucijom $*$ nazivamo **$*$-algebra**. Za homomorfizam $*$-algebri $\phi : A \to B$ kažemo da je **$*$-homomorfizam** ako vrijedi $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ za sve $a \in A$.

Za element a $*$-algebre A definiramo da je:

- **hermitski** ako je $a^* = a$,
- **antihermitski** ako je $a^* = -a$,
- **normalan** ako je $a^* a = a a^*$,
- **projekcija** ako je $a^* = a^2 = a$,
- **unitaran** ako je A unitalna i $a^* a = a a^* = 1$.

Skup svih hermitskih elemenata označavamo s A_h. Svaki element $a \in A$ se na jedinstven način zapisuje kao suma hermitskog i antihermitskog elementa, tj.

$$a = (\operatorname{Re} a) + i(\operatorname{Im} a)$$

gdje su $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + a^*)$ i $\operatorname{Im} a = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. Također imamo

$$\begin{aligned} a^*a &= (\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 - i(\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a), \\ aa^* &= (\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 + i(\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a). \end{aligned}$$

Ako je $\varphi : A \to \mathbb{C}$ linearan funkcional, tada je s

$$\varphi^*(a) := \overline{\varphi(a^*)}, \quad a \in A$$

također zadan linearan funkcional na A. Vrijedi

$$\varphi^{**} = \varphi, \quad (\lambda\varphi + \mu\psi)^* = \overline{\lambda}\varphi^* + \overline{\mu}\psi^*$$

Za φ kažemo da je **hermitski** ako je $\varphi^* = \varphi$ (tj. ako je φ $*$-linearno preslikavanje $A \to \mathbb{C}$).

Propozicija 1.1.5. *Neka je A $*$-algebra. Linearan funkcional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ je hermitski ako i samo ako je $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$. U tom slučaju je $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re} \varphi(a)$ za sve $a \in A$.*

Dokaz. Ako je φ hermitski, tada za $a \in A_h$ imamo $\varphi(a) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ tj. $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.
Obratno, ako je $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$ tada je očito $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re} \varphi(a)$ i vrijedi

$$\varphi(a^*) = \varphi(\operatorname{Re} a - i \operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \overline{\varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)} = \overline{\varphi(a)}$$

pa je φ hermitski. □

Propozicija 1.1.6. *Neka je A unitalna $*$-algebra. Tada vrijedi*

(i) $1^* = 1$,

(ii) $a \in A^\times \iff a^* \in A^\times$ *i tada* $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$,

(iii) $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$.

Dokaz. (i) Adjungiranjem[1] jednakosti $a1 = 1a = a$ za sve $a \in A$ slijedi da je 1^* također jedinica u A pa je $1^* = 1$ jer je jedinica u algebri jedinstvena.

(ii) Tvrdnja slijedi adjungiranjem jednakosti $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

(iii) Imamo

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma(a) &\iff a - \lambda 1 \in A^\times \iff (a - \lambda 1)^* \in A^\times \\ &\iff a^* + \overline{\lambda} 1 \in A^\times \iff \overline{\lambda} \in \sigma(a^*). \end{aligned}$$

□

[1] Primjenu operatora $*$ još zovemo i **adjungiranje**, po analogiji sa $*$-algebrom ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru.

Propozicija 1.1.7. *Neka je A $*$-algebra. Tada vrijedi*

(i) Svaka lijeva/desna jedinica u A je jedinica u A.

(ii) Ako je A unitalna i $a \in A_h$ lijevo/desno invertibilan u A, tada je a invertibilan u A.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da A ima lijevu jedinicu e. Adjungiranjem jednakosti $ea = a$ za sve $a \in A$ dobivamo $a^*e = a^*$ za sve $a \in A$, odnosno e^* je desna jedinica u A. Sada slijedi $e^* = ee^* = e$ pa je $e = e^*$ jedinica u A.

(ii) Pretpostavimo da je $a \in A_h$ lijevo invertibilan. Tada postoji $b \in A$ takav da je $ba = 1$. Adjungiranjem te jednakosti slijedi $ab^* = (ba)^* = 1^* = 1$ pa je $b = b^*$ inverz od a u A.

□

Za ideal I u $*$-algebri A kažemo da je $*$-ideal ili samoadjungiran ako je $I^* = I$. U tom slučaju kvocijentnu algebru A/I prirodno snabdijevamo involucijom definiranom kao

$$(a+I)^* := a^* + I, \qquad \text{za sve } a \in A$$

s kojom A/I dobiva strukturu $*$-algebre, koju nazivamo **kvocijentna $*$-algebra**.

Nadalje, unitizacija A^1 $*$-algebre A je također $*$-algebra s involucijom $(a+\lambda 1)^* := a^* + \overline{\lambda} 1$, u koju se A ulaže kao $*$-ideal.

Propozicija 1.1.8. *Neka su A i B neunitalne $*$-algebre i neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam. Tada postoji jedinstveni unitalni $*$-homomorfizam $\widetilde{\phi} : A^1 \to B^1$ koji proširuje ϕ, i dan je s*

$$\widetilde{\phi}(a + \lambda 1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B, \qquad \textit{za sve } a \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. $\widetilde{\phi}$ je očito linearno i proširuje ϕ. Imamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}\big[(a+\lambda 1_A)(b+\mu 1_A)\big] &= \widetilde{\phi}(ab + \lambda b + \mu a + \lambda\mu 1_A) \\
&= \phi(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu 1_B \\
&= \phi(a)\phi(b) + \lambda\phi(b) + \mu\phi(a) + \lambda\mu 1_B \\
&= (\phi(a) + \lambda 1_B)(\phi(b) + \mu 1_A B) \\
&= \widetilde{\phi}(a + \lambda 1_A)\widetilde{\phi}(b + \mu 1_A)
\end{aligned}$$

i

$$\widetilde{\phi}\big[(a+\lambda 1_A)^*\big] = \widetilde{\phi}(a^* + \overline{\lambda} 1_A) = \phi(a^*) + \overline{\lambda} 1_B = (\phi(a) + \lambda 1_B)^* = \big[\widetilde{\phi}(a + \lambda 1_A)\big]^*.$$

Ako je $\psi : A^1 \to B^1$ neko drugo unitalno $*$-homomorfno proširenje od ϕ, tada imamo

$$\psi(a + \lambda 1_A) = \psi(a) + \lambda\psi(1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B = \widetilde{\phi}(a + \lambda 1_A).$$

$\square$

Neka je A normirana algebra. Ako je I ideal u A, tada znamo da se na kvocijentnoj algebri A/I može zadati norma

$$\|a + I\| := \inf_{x \in I} \|a + x\|, \qquad \text{za sve } a \in A$$

koja je submultiplikativna, stoga je A/I normirana algebra.

Zaista, za $a, b \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\|(a + I)(b + I)\| &= \|ab + I\| \\
&= \inf_{x \in I} \|ab + x\| \\
&\leq \inf_{x,y \in I} \|ab + xb + ya + xy\| \\
&= \inf_{x,y \in I} \|(a + x)(b + y)\| \\
&\leq \inf_{x,y \in I} \|a + x\|\|b + y\| \\
&= \inf_{x \in I} \|a + x\| \cdot \inf_{y \in I} \|b + y\| \\
&= \|a + I\|\|b + I\|.
\end{aligned}$$

Ako je A potpuna, tada je i A/I.

Unitizacija A^1 normirane (Banachove) algebre je i sama unitalna normirana (Banachova algebra) s normom

$$\|a + \lambda 1\| := \|a\| + |\lambda|, \qquad \text{za sve } a \in A, \lambda \in$$

u koju se A ulaže kao zatvoren ideal.

Ako je na normiranoj (Banachovoj) algebri A zadana involucija $*$ sa svojstvom

$$\|a^*\| = \|a\|, \qquad \text{za sve } a \in A$$

tada A ima strukturu **normirane (Banachove) $*$-algebre**.

Za Banachovu $*$-algebru A koja zadovoljava sljedeće C^***-svojstvo**

$$\|a^* a\| = \|a\|^2, \qquad \text{za sve } a \in A$$

kažemo da je C^***-algebra**.

Za normu na $*$-algebri A koju A čini C^*-algebrom kažemo da je C^***-norma**.

Propozicija 1.1.9. *Neka je A Banachova algebra snabdjevena involucijom $* : A \to A$. Ako za sve $a \in A$ vrijedi $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$, tada je involucija na A izometrična i A je C^*-algebra.*

Dokaz. Za $a \in A$ imamo

$$\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$$

pa je $\|a\| \leq \|a^*\|$. Zamjenom a s a^* dobivamo $\|a^*\| = \|a\|$. Sada slijedi $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. □

Za zatvorenu $*$-podalgebru B C^*-algebre A kažemo da je **C^*-podalgebra** od A. Ako je dodatno A unitalna i B sadrži njenu jedincu, za B kažemo da je **unitalna C^*-podalgebra** od A.

Unitizacija A^1 C^*-algebre A kao Banachove $*$-algebre općenito nije C^*-algebra s normom $\|a + \lambda 1\| = \|a\| + |\lambda|$. Međutim A^1 možemo opskrbiti C^*-normom koja proširuje normu od A:

Teorem 1.1.10. *Neka je A neunitalna C^*-algebra. Na njenoj unitizaciji A^1 kao $*$-algebri definiramo normu*

$$\|a + \lambda 1\|_{A^1} := \sup_{x \in \mathrm{Ball}(A)} \|ax + \lambda x\|$$

Tada je $\|\cdot\|_{A^1}$ C^*-norma na A^1 koja proširuje normu $\|\cdot\|$ od A.

Dokaz. Definiramo unitalni $*$-homomorfizam algebri $\phi : A^1 \to \mathbb{B}(A)$ formulom $\phi(a + \lambda 1) := L_{a+\lambda 1}$ gdje je $L_{a+\lambda 1}$ lijevi multiplikator elementa $a + \lambda 1$ zadan formulom $x \mapsto (a + \lambda 1)x = ax + \lambda x$.

Uočimo da je $\|a + \lambda 1\|_{A^1} = \|L_{a+\lambda 1}\| = \|\phi(a + \lambda 1)\|$.

Tvrdimo da je ϕ injektivan. Zaista, neka je $a+\lambda 1 \in A^1$ takav da je $ax+\lambda x = 0$ za sve $x \in A$. Kad bi bilo $\lambda \neq 0$, za element $e = -\frac{1}{\lambda}a$ vrijedilo bi $ex = x, \forall x \in A$, tj. e bi bila lijeva jedinica u A. Stoga je e jedinica u A, što je u kontradikciji s pretpostavkom da A nije unitalna. Dakle, $\lambda = 0$ pa imamo $ax = 0, \forall x \in A$. Specijalno, za $x = a^*$ dobivamo

$$0 = \|aa^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2$$

pa je $a = 0$. Slijedi da je ϕ injektivan.

Odavde slijedi da je $\|\cdot\|_{A^1}$ submultiplikativna norma na A^1, tj. A^1 je normirana algebra.

Za $a \in A, a \neq 0$ imamo

$$\|a\| = \left\| a\left(\frac{a^*}{\|a\|}\right) \right\| = \|a\|_{A^1} = \sup_{x \in \mathrm{Ball}(A)} \|ax\| \leq \|a\|$$

pa $\|\cdot\|_{A^1}$ proširuje normu od A.

Pokažimo da $\|\cdot\|_{A^1}$ zadovoljava C^*-svojstvo: za $a+\lambda 1 \in A^1$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a+\lambda 1\|_{A^1}^2 &= \sup_{x\in \mathrm{Ball}(A)} \|ax+\lambda x\|^2 \\
&= \sup_{x\in \mathrm{Ball}(A)} \|(ax+\lambda x)^*(ax+\lambda x)\| \\
&= \sup_{x\in \mathrm{Ball}(A)} \|x^*(a+\lambda)^*(a+\lambda)x\| \\
&\leq \sup_{x\in \mathrm{Ball}(A)} \|(a+\lambda)^*(a+\lambda)x\| \\
&= \sup_{x\in \mathrm{Ball}(A)} \|(a+\lambda)^*(a+\lambda)\|.
\end{aligned}$$

Iz Propozicije 1.1.9 slijedi $\|a+\lambda 1\|_{A^1}^2 = \|(a+\lambda 1)^*(a+\lambda 1)\|_{A^1}$.

Preostaje dokazati da je A^1 potpuna s obzirom na normu $\|\cdot\|_{A^1}$. Monomorfizam $\phi : A^1 \to \mathbb{B}(A)$ je izometričan i $\mathbb{B}(A)$ je potpuna pa je dovoljno pokazati da je $\phi(A^1) = A^1 + \mathbb{C}1_{\mathbb{B}(\mathbb{A})}$ zatvorena u $\mathbb{B}(A)$. To slijedi iz činjenice da je $\phi(A)$ zatvorena kao izometrična slika potpune algebre i iz toga što je suma zatvorenog i konačnodimenzionalnog potprostora zatvoren potprostor. $\square$

Neka je K kompaktan Hausdorffov (kraće CH) prostor. Tada promatramo skup

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ neprekidna}\}$$

na kojem definiramo operacije po točkama:

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t), \quad (f+g)(t) := f(t)+g(t), \quad (fg)(t) := f(t)g(t), \quad f^*(t) := \overline{f(t)}$$

za $t \in K$ i uniformnu ili sup-normu $\|f\|_\infty := \sup_{t\in K} |f(t)|$. Tada se lako provjeri da je $C(K)$ komutativna unitalna C^*-algebra.

CH prostori su posebno normalni pa za njih vrijede klasična Urysohnova lema i Tietzeov teorem o proširenju.

Općenitije, za topološki prostor Ω kažemo da je lokalno kompaktan ako svaka točka iz Ω ima kompaktnu okolinu. Appendix 4.1 sadrži neke osnovne činjenice o lokalno kompaktnim Hausdorffovim (kraće LCH) prostorima.

Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da **trne u** ∞ ako je $\{|f| \geq \varepsilon\} = \{t \in \Omega : |f(t)| \geq \varepsilon\}$ kompaktan skup u Ω za sve $\varepsilon > 0$. Skup svih neprekidnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ koje trnu u ∞ označavamo s $C_0(\Omega)$. Propozicija 4.1.4 pokazuje da je $C_0(\Omega)$ uz operacije kao gore također primjer komutativne C^*-algebre. $C_0(\Omega)$ je neunitalna ako Ω nije kompaktan jer konstantna funkcija 1 ne trne u ∞.

Također su od interesa Banachova algebra $C_b(\Omega)$ svih neprekidnih ograničenih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ s istim operacijama i normom kao gore, te njena $*$-podalgebra $C_c(\Omega)$ neprekidnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ s kompaktnim nosačem. Propozicija 4.1.5 pokazuje da $C_0(\Omega) = \overline{C_c(\Omega)}$ unutar $C_b(\Omega)$.

Prisjetimo se: neka je (Ω, τ) LCH prostor koji nije kompaktan i neka je $\infty \notin \Omega$. Stavimo $\widetilde{\Omega} := \Omega \cup \{\infty\}$ i definirajmo topologiju $\widetilde{\tau}$ na $\widetilde{\Omega}$ na sljedeći način:

$$\widetilde{\tau} := \tau \cup \{(\Omega \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subseteq \Omega \text{ kompaktan}\}.$$

Tada je $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\tau})$ CH prostor koji sadrži Ω kao gust otvoren podskup. Prostor $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\tau})$ nazivamo **Aleksandrovljeva (jednotočkovna) kompaktifikacija** od Ω. Prelaskom na Aleksandrovljevu kompaktifikaciju možemo identificirati $C(\widetilde{\Omega})$ s unitizacijom $C_0(\Omega)^1$, te $C_0(\Omega)$ s $\{f \in C(\widetilde{\Omega}) : f(\infty) = 0\}$.

Primjer 1.1.11. Neka je X normiran prostor. Tada je $\mathbb{B}(X)$ unitalna normirana algebra. Za $\dim X > 1$ algebra $\mathbb{B}(X)$ je nekomutativna. Nadalje, $\mathbb{B}(X)$ je Banachova algebra ako i samo ako je X Banachov prostor. Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, tada je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ C^*-algebra. Specijalno, sve matrične algebre $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ su C^*-algebre.

Podsjetimo se nekih činjenica o Banachovim algebrama (vidi [5, Potpoglavlje 2.2]):

Propozicija 1.1.12. *Neka je A unitalna Banachova algebra.*

(i) Ako je $a \in A$, $\|a\| < 1$, tada je $1 - a \in A^\times$ s inverzom

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Posebno, $\|(1-a)^{-1}\| \le (1 - \|a\|)^{-1}$.

(ii) $A^\times$ je otvoren skup u A i $a \mapsto a^{-1}$ je diferencijabilna bijekcija $A^\times \to A^\times$.

Podsjetimo se nekih svojstava spektra i spektralnog radijusa $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$.

Teorem 1.1.13. *Neka je A Banachova algebra. Za svaki $a \in A$ imamo*

(i) $\sigma(a)$ je neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$ sadržan u $K(0, r(a))$.

(ii) Vrijedi $0 \le r(a) \le \|a\|$, i te ocjene su najbolje moguće.

(iii) $r(\lambda a) = |\lambda| r(a)$, za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iv) $r(a^n) = r(a)^n$.

(v) $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

(vi) *Za svaki polinom* $p \in \mathbb{C}$ *imamo* $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

(vii) *Ako je* a *invertibilan tada* $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.

(viii) $r(ab) = r(ba)$.

(ix) *(Geljfandova formula)* $r(a) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Teorem 1.1.14 (Geljfand-Mazur)**.** *Neka je* A *unitalna Banachova algebra u kojoj je svaki nenul element invertibilan. Tada je* A *izometrički izomorfna Banachovoj algebri* $\mathbb{C}$.

Propozicija 1.1.15. *Neka je* B *unitalna Banachova podalgebra Banachove algebre* A.

(i) $B^\times$ *je otvoren i zatvoren podskup od* $B \cap A^\times$.

(ii) *Za sve* $b \in B$ *vrijedi* $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ *i* $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.

(iii) *Ako je* $b \in B$ *takav da* $\sigma_A(b)$ *nema rupa (tj.* $\rho_A(a)$ *je povezan podskup of* $\mathbb{C}$*), tada je* $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Dokaz. (i) Znamo da je $B^\times$ otvoren u B i $B^\times \subseteq B \cap A^\times$ pa je otvoren u $B \cap A^\times$. Pokažimo zatvorenost. Neka je $(b_n)_n$ niz u $B^\times$ koji konvergira prema $b \in B \cap A^\times$. Invertiranje je neprekidno pa $b_n^{-1} \to b^{-1}$ u A, a budući da je B zatvorena, dobivamo $b^{-1} \in B$.

(ii) Zbog $B^\times \subseteq A^\times$ za $b \in B$ imamo $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$ odnosno $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$. Ako je $\lambda \in \partial\sigma_B(b) \subseteq \sigma_B(b)$, postoji niz $(\lambda_n)_n$ u $\rho_B(b)$ takav da $\lambda_n \to \lambda$. Imamo $\lambda_n 1 - b \in B^\times$, ali $\lambda 1 - b \notin B^\times$ pa iz (i) slijedi $\lambda 1 - b \notin A^\times$, tj. $\lambda \in \sigma_A(b)$. S druge strane imamo $\lambda_n 1 - b \in A^\times$, tj. $\lambda_n \in \rho_A(b)$ i $\lambda_n \to \lambda$. Slijedi $\lambda \in \sigma_A(b)$.

(iii) Ako je $b \in B$ takav da $\sigma_A(b)$ nema rupa, onda je $\rho_A(b)$ povezan podskup od $\mathbb{C}$. Prema (i) i (ii) dobivamo da je $\rho_B(b)$ otvoren i zatvoren podskup od $\rho_A(b)$ pa zbog povezanosti od $\rho_A(b)$ slijedi $\rho_B(b) = \rho_A(b)$, odnosno $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

□

Napomena 1.1.16. Neka je $\phi : A \to B$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri A i B. Tada za svaki $a \in A$ imamo $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$. Naime, to direktno slijedi iz $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$.

Primjer 1.1.17. Neka je Ω CH prostor. Tada se lako pokaže da je spektar funkcije $f \in C(\Omega)$ upravo njena slika: $\sigma(f) = f(\Omega)$. Zaista, za $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo

$$\begin{aligned} \lambda 1 - f \notin C(\Omega)^{\times} &\iff \exists t \in \Omega \text{ takav da } (\lambda 1 - f)(t) = 0 \\ &\iff \exists t \in \Omega \text{ takav da } f(t) = \lambda \\ &\iff \lambda \in f(\Omega) \end{aligned}$$

Primjer 1.1.18. Neka je Ω LCH prostor koji nije kompaktan. Znamo da unitizaciju $C_0(\Omega)^1$ možemo identificirati s algebrom neprekidnih funkcija $C(\widetilde{\Omega})$ na Aleksandrovljevoj kompaktifikaciji $\widetilde{\Omega}$ od Ω. Pri toj identifikaciji svaku funkciju $f \in C_0(\Omega)$ identificiramo s $\widetilde{f} \in C(\widetilde{\Omega})$ takvom da se $\widetilde{f}$ poklapa s f na Ω te $\widetilde{f}(\infty) = 0$. Stoga je spektar funkcije f dan s

$$\sigma_{C_0(\Omega)}(f) = \sigma_{C(\widetilde{\Omega})}(\widetilde{f}) = \widetilde{f}(\widetilde{\Omega}) = f(\Omega) \cup \{0\}.$$

Za dokaze nekih rezultata trebat će nam verzije klasičnog Stone-Weierstrassovog teorema. Dokazi se mogu naći u [5, Teorem 1.4.7, Korolar 1.4.8.].

Teorem 1.1.19 (Stone-Weierstrass, CH verzija)**.** *Neka je K CH prostor i neka je A zatvorena $*$-podalgebra od $C(K)$ koja razdvaja točke od K i koja sadrži konstantne funkcije. Tada je $A = C(K)$.*

Iz ovog teorema se može pokazati i lokalno kompaktna verzija:

Teorem 1.1.20 (Stone-Weierstrass, LCH verzija)**.** *Neka je Ω LCH prostor i neka je A zatvorena $*$-podalgebra od $C_0(\Omega)$ koja razdvaja točke od Ω te za svaku točku $t \in \Omega$ postoji funkcija $f \in A$ takva da je $f(t) \neq 0$. Tada je $A = C_0(\Omega)$.*

1.2 Karakteri Banachovih algebri i Geljfandova teorija

Definicija 1.2.1. Karakter algebre A je svaki nenul homomorfizam $\varphi : A \to \mathbb{C}$. S $\Omega(A)$ označavamo skup svih karaktera algebre A.

Uočimo da ako je A unitalna, svaki karakter $\phi \in \Omega(A)$ je unitalan. Zaista, imamo $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2$ pa je $\varphi(1) \in \{0, 1\}$. Kad bi bilo $\varphi(1) = 0$, slijedilo bi $\phi = 0$, što ne vrijedi.

Lema 1.2.2. *Neka je A unitalna algebra i φ linearan funkcional na A. Tada je*

$$\varphi \in \Omega(A) \iff \phi(1) = 1 \ i \ \varphi(a^2) = \varphi(a)^2, \forall a \in A.$$

Dokaz. Ako je φ karakter, onda očito zadovoljava tražene uvjete. Obratno, neka φ zadovoljava uvjete. Tada za sve $a, b \in A$ imamo

$$\begin{aligned} \varphi(a)^2 + \varphi(ab + ba) + \varphi(b^2) &= \varphi(a^2 + ab + ba + b^2) \\ &= \varphi((a + b)^2) \\ &= (\varphi(a) + \varphi(b))^2 \\ &= \varphi(a)^2 + 2\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b^2) \end{aligned}$$

odakle slijedi $\varphi(ab+ba) = 2\varphi(a)\varphi(b)$. Stoga je za multiplikativnost dovoljno pokazati da vrijedi $\varphi(ab) = \varphi(ba)$. Uočimo da za proizvoljne $x, y \in A$ vrijedi

$$(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x]$$

pa je

$$\begin{aligned} \varphi(ab - ba) + 4\varphi(x)^2\varphi(y)^2 &= \varphi((xy - yx)^2 + (xy + yx)^2) \\ &= 2\varphi(x(yxy) + (yxy)x) \\ &= 4\varphi(x)\varphi(yxy). \end{aligned}$$

Sada za $x := a - \varphi(a)1$ i $y := b$ imamo $\varphi(x) = 0$ pa slijedi $\varphi(xb - bx)^2 = 0$, a odatle $\varphi(ab) = \varphi(ba)$. □

Teorem 1.2.3 (Gleason-Kahane-Żelazko)**.** *Neka je A unitalna Banachova algebra. Ako je φ linearan funkcional na A, tada je ekvivalentno:*

(i) $\varphi \in \Omega(A)$.

(ii) $\varphi(1) = 1$ *i* $\varphi(a) \neq 0$ *za sve* $a \in A^\times$.

(iii) $\varphi(a) \in \sigma(a)$ *za sve* $a \in A$.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Iz $\varphi \in \Omega(A)$ odmah slijedi $\varphi(1) = 1$ pa za sve $a \in A^\times$ imamo

$$1 = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}\varphi(a)$$

pa posebno $\varphi(a) \neq 0$.

(ii) $\implies$ (iii). Za $\lambda \in \rho(a)$ imamo $a - \lambda 1 \in A^\times$ pa je $0 \neq \varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda$.

(iii) $\implies$ (i). Imamo $\varphi(1) \in \sigma(1) = \{1\}$ pa je $\varphi(1) = 1$. Prema Lemi 1.2.2 dovoljno je pokazati $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ za sve $a \in A$. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ i definirajmo polinom

$$p(\lambda) = \varphi((\lambda 1 - a)^n).$$

Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ korijeni od p s kratnostima. Tada imamo

$$0 = p(\lambda_i) = \varphi((\lambda_i 1 - a)^n) \in \sigma((\lambda_i 1 - a)^n) = (\lambda_i - \sigma(a))^n, \qquad \text{za sve } i = 1, \ldots, n$$

pa je $\lambda_i \in \sigma(a)$, odakle slijedi $|\lambda_i| \leq r(a)$. Imamo

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = p(\lambda) = \lambda^n - n\varphi(a)\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\varphi(a^2)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \varphi(a^n)$$

pa Viѐteove formule daju

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\varphi(a), \qquad \sum_{1 \leq 1 < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \binom{n}{2}\varphi(a^2),$$

što povlači

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq 1 < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n(n-1)\varphi(a^2).$$

Sada slijedi

$$\begin{aligned} n^2 |\varphi(a)^2 - \varphi(a^2)| &= n^2 \left| \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - n\varphi(a^2) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 \right| \\ &= \left| -n\varphi(a^2) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right| \\ &\leq n|\varphi(a^2)| + nr(a)^2 \end{aligned}$$

pa dijeljenjem s n^2 i puštanjem $n \to \infty$ slijedi $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. $\square$

Primjer 1.2.4. Neka je K CH prostor. Tada su svi karakteri na $C(K)$ oblika evaluacija $\varepsilon_t : f \mapsto f(t)$ za neki $t \in K$.

Zaista, pokazat ćemo da su svi maksimalni ideali u $C(K)$ oblika

$$M_t := \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$$

za neki $t \in K$. Ideali M_t su maksimalni jer je algebra $C(K)/M_t$ izomorfna polju $\mathbb{C}$. Neka je M maksimalan ideal u $C(K)$. Tvrdimo da sve funkcije iz M imaju zajedničku nultočku; u suprotnom za svaki $t \in K$ postoji funkcija $f_t \in M$ takva da je $|f_t| > 0$ na nekoj otvorenoj okolini $U(t)$ od t. Zbog kompaktnosti od K postoji konačno mnogo točaka $t_1, \ldots, t_n \in K$ takvih da je $K = U(t_1) \cup \cdots \cup U(t_n)$ pa je

$$f = |f_{t_1}|^2 + \cdots + |f_{t_n}|^2 = f_{t_1}\overline{f_{t_1}} + f_{t_n}\overline{f_{t_n}} \in M$$

i invertibilna je jer nema nultočaka, što je kontradikcija s činjenicom da je M pravi ideal. Dakle postoji $t \in K$ takav da je $f(t) = 0$ za sve $f \in M$. Tada imamo inkluziju $M_t \subseteq M$ pa vrijedi i jednakost.

Neka je φ karakter na $C(K)$. Znamo da je $\ker\varphi$ maksimalni ideal jer je po Prvom teoremu o izomorfizmu za algebre $C(K)/\ker\varphi$ izomorfno polju $\mathbb{C}$. Dakle, postoji $t \in K$ takav da je $\ker\varphi = M_t$. Neka je $f \in C(K)$ proizvoljna. Tada je $f - f(t)1 \in M_t$ pa slijedi

$$\varphi(f) = \varphi(f(t)1) = f(t)\varphi(1) = f(t).$$

Zaključujemo $\varphi = \varepsilon_t$.

Primjer 1.2.5. Matrična algebra $M_n(\mathbb{C})$ je prosta za $n \in \mathbb{N}$. Zaista, neka je $J \neq \{0\}$ ideal u $M_n(\mathbb{C})$. Tada postoji $A \in J$ s $A_{ij} \neq 0$. Označimo s E_{rs} matricu s 1 na mjestu (r, s), ostalo su 0. Tada je $A_{ij}E_{ij} = E_{ij}AE_{ji} \in J$ pa množenjem s $\frac{1}{A_{ij}}$ dobivamo $E_{ij} \in J$. Sada je $E_{jj} = E_{ji}E_{ii}E_{ij} \in J$ za sve $1 \leq j \leq n$ pa je $I = E_{11} + \cdots + E_{nn} \in J$.

Posebno, $\operatorname{Max} M_n(\mathbb{C}) = \emptyset$ pa $M_n(\mathbb{C})$ nema karaktera.

Napomena 1.2.6. Neka je A neunitalna algebra i A^1 njena unitizacija. Za svaki karakter $\psi \in \Omega(A^1)$ mora vrijediti $\psi(1) = 1$ pa karakter $\varphi \in \Omega(A)$ možemo na jedinstven način proširiti do karaktera $\tilde{\varphi} \in \Omega(A^1)$ koji je zadan formulom $\tilde{\varphi}(a+\lambda 1) = \varphi(a) + \lambda$ za $a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$.

Neka je $\varphi_\infty \in \Omega(A^1)$ karakter s jezgrom A, tj. $\varphi_\infty(a + \lambda 1) = \lambda$. Tada ako $\varphi \in \Omega(A)$ poistovjetimo s $\tilde{\varphi} \in \Omega(A^1)$ vrijedi

$$\Omega(A^1) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$$

Korolar 1.2.7. *Neka je A Banachova algebra i $\varphi \in \Omega(A)$. Tada je φ ograničen linearan funkcional na A za kojeg vrijedi $|\varphi(a)| \leq r(a)$ za sve $a \in A$. Specijalno $\|\varphi\| \leq 1$ i $\|\varphi\| = 1$ ako je A unitalna.*

Dokaz. Uzevši u obzir prethodnu napomenu smijemo pretpostaviti da je A unitalna. Tvrdnja sada slijedi iz relacije $\varphi(a) \in \sigma(a)$ za sve $a \in A$, i $\varphi(1) = 1$. □

Lema 1.2.8. *Neka je A Banachova algebra i I pravi modularni ideal u A. Ako je $e \in A$ jedinica modulo I, tada je I ne siječe otvorenu kuglu oko e radijusa 1, tj. $I \cap B_A(e, 1) = \emptyset$. Posebno*

(i) $\overline{I}$ je također pravi ideal u A.

(ii) Svaki modularni maksimalni ideal M u A je zatvoren.

Dokaz. Neka je A' algebra A ako je A unitalna, odnosno A^1 ako je A neunitalna. Neka je $a \in B_A(e, 1)$. Tada je $\|a - e\| \leq 1$ pa je prema Propoziciji 1.1.12 $1 - (e - a)$ invertibilan u A'. Stavimo $(1 - (e - a))^{-1} = b + \lambda 1$ za neke $b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ pa vrijedi

$$1 = (b + \lambda 1)(1 - (e - a)) = \lambda 1 + b - \lambda e - be + \lambda a + ba.$$

Pretpostavimo $a \in I$. Ako je $1 \in A$, imamo

$$1 = \overbrace{\lambda 1 - (\lambda 1)e}^{\in I} + \overbrace{b - be}^{\in I} + (\lambda 1 + b)a \in I$$

što je kontradikcija. Ako je $1 \notin A$, imamo

$$(1 - \lambda)1 = b - \lambda e - be + \lambda a + ba \in A$$

pa je $\lambda = 1$ i $e = \overbrace{b - be}^{\in I} + a + ba \in I$, što je kontradikcija. Slijedi $a \notin I$. $\square$

Teorem 1.2.9. *Neka je A komutativna Banachova algebra. Tada je preslikavanje*

$$\Theta : \Omega(A) \to \operatorname{Max} A, \quad \Theta(\varphi) := \ker \varphi$$

bijekcija sa skupa svih karaktera od A na skup svih maksimalnih modularnih ideala u A.

Dokaz. Ako je $\varphi \in \Omega(A)$, tada je $\ker \varphi$ zatvoreni ideal u A kodimenzije 1 pa je maksimalan.

Odaberimo $e \in A$ takav da je $\varphi(e) = 1$. Tada za sve $a \in A$ imamo

$$\varphi(ea - a) = \varphi(e)\varphi(a) - \varphi(a) = 0$$

pa je $ea - a \in \ker \varphi$. Dakle, e je jedinica modulo $\ker \varphi$ pa je $\ker \varphi$ modularni maksimalni ideal.

Pokažimo injektivnost od Θ. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$ takvi da je $\ker \theta_1 = \ker \theta_2 =: I$. Neka je e jedinica modulo I. Slijedi da je $\varphi(e) = 1$ za svaki $\varphi \in \Omega(A)$ takav da je $\ker \varphi = I$. Budući da je I kodimenzije 1, svaki element $a \in A$ se na jedinstven način prikazuje kao $a = \lambda e + b$ za neke $\lambda \in \mathbb{C}, b \in I$. Imamo

$$\varphi_1(a) = \lambda\varphi_1(e) + \varphi_1(b) = \lambda = \lambda\varphi_2(e) + \varphi_2(b) = \varphi_2(a)$$

pa slijedi $\varphi_1 = \varphi_2$. Pokažimo surjektivnost od Θ. Neka je $M \in \operatorname{Max} A$. Prema prethodnoj lemi, M je zatvoren ideal u A. Nadalje, prema Propoziciji 1.1.3 slijedi da je A/M polje. Prema Geljfand-Mazurovom teoremu imamo da je A/M izometrički izomorfna Banachovoj algebri $\mathbb{C}$. Neka je $\varphi : A/M \to \mathbb{C}$ izometrički izomorfizam i $q : A \to A/M$ kvocijentno preslikavanje. Tada je $\varphi := \phi \circ q \in \Omega(A)$ i $\Theta(\varphi) = \ker \varphi = M$. □

Korolar 1.2.10. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je $\Omega(A)$ neprazan.*

Dokaz. Prema Propoziciji 1.1.1, ideal $\{0\}$ je sadržan u nekom maksimalnom idealu koji je prema prethodnom teoremu jezgra nekog karaktera iz $\Omega(A)$. Posebno $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

Uvedimo sada osnove Geljfandove teorije.

Definicija 1.2.11. Neka je A komutativna Banachova algebra. Prema Korolaru 1.2.7 slijedi da je $\Omega(A) \subseteq \mathrm{Ball}(A^*)$ gdje je A^* dual od A. Relativna w^*-topologija na $\Omega(A)$ zove se Geljfandova topologija. Eksplicitno, bazu okolina karaktera $\varphi_0 \in \Omega(A)$ čine skupovi oblika

$$U_{\Omega(A)}(\varphi_0, a_1, \ldots, a_n, \varepsilon) := \{\varphi \in \Omega(A) : |\varphi(a_1) - \varphi_0(a_1)| < \varepsilon, \ldots, |\varphi(a_n) - \varphi_0(a_n)| < \varepsilon\}$$

za neke $n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A$ i $\varepsilon > 0$.

Skup $\Omega(A)$ snabdjeven Geljfandovom topologijom nazivamo **Geljfandov spektar** od A.

Teorem 1.2.12 (Banach-Alaoglu)**.** *Neka je X normiran prostor. Tada je* $\mathrm{Ball}(X^*)$ *w^*-kompaktna.*

Dokaz. Definiramo topološki prostor

$$D = \prod_{x \in X} \overline{B}(0, \|x\|),$$

gdje je $\overline{B}(0, \|x\|)$ zatvorena kugla u $\mathbb{C}$. D je kompaktan po Tihonovljevom teoremu.

Definiramo $\Psi : \mathrm{Ball}(X^*) \to D$ formulom $\Psi(f) = (f(x))_{x \in X}$. Na domeni promatramo w^*-topologiju.

Ψ je neprekidan:

$$f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \implies f_\lambda(x) \to f(x), \forall x \in X \implies (f_\lambda(x))_{x \in X} \to (f(x))_{x \in X}.$$

Uočimo da je Ψ i injekcija.

Pokažimo da je $\Psi(\mathrm{Ball}(X^*))$ zatvoren podskup u D. Neka je $(f_\lambda(x))_{x\in X}$ mreža u $\Psi(\mathrm{Ball}(X^*))$ koja konvergira prema $(\gamma_x)_{x\in X} \in D$. Definiramo funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ sa $f(x) = \gamma_x$. f je linearna:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \gamma_{\alpha x+\beta y} = \lim_\lambda f_\lambda(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_\lambda \alpha f_\lambda(x) + \beta f_\lambda(y) \\ &= \alpha \lim_\lambda f_\lambda(x) + \beta \lim_\lambda f_\lambda(y) \\ &= \alpha\gamma_x + \beta\gamma_y \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Također je $f(x) \in \overline{B}(0, \|x\|)$ pa je $|f(x)| \le \|x\|$ za sve $x \in X$. Dakle $f \in \mathrm{Ball}(X^*)$ i očito $(f_\lambda(x))_{x\in X} \to (f(x))_{x\in X}$ pa je $(\gamma_x)_{x\in X} = (f(x))_{x\in X} \in \Psi(\mathrm{Ball}(X^*))$.

Dakle, $\Psi(\mathrm{Ball}(X^*))$ je zatvoren podskup u D. Posebno je i kompaktan u D.

Lako vidimo da je i inverz na slici Ψ^{-1} neprekidan pa zaključujemo da je Ψ homeomorfizam na svoju sliku. Dakle, $\mathrm{Ball}(X^*)$ je homeomorfan kompaktnom potprostoru od D pa je i sam kompaktan. □

Propozicija 1.2.13. *Neka je A komutativna Banachova algebra.*

(i) Ako je A unitalna, tada je $\Omega(A)$ kompaktan Hausdorffov prostor.

(ii) Ako A nije unitalna, tada je $\Omega(A)$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Štoviše, ako $\Omega(A)$ nije kompaktan, tada je $\Omega(A^1) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od $\Omega(A)$.

Dokaz. (i) Prema Banach-Alaogluovom teoremu vrijedi da je $\mathrm{Ball}(A^*)$ w^*-kompaktna pa je dovoljno pokazati da je $\Omega(A)$ zatvoren podskup od $\mathrm{Ball}(A^*)$. Neka je $\varphi_0 \in \overline{\Omega(A)}^{w^*}$. Tvrdimo da je $\varphi_0 \in \Omega(A)$, tj. $\varphi_0(ab) = \varphi_0(a)\varphi_0(b)$ za sve $a, b \in A$ i $\varphi(1) = 1$.

Neka su $a, b \in A$ i $\varepsilon > 0$. Stavimo $\delta = (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)^{-1}\varepsilon$ i odaberimo $\varphi \in \Omega(A) \cap U_{A^*}(\varphi, 1, \varepsilon) \cap U_{A^*}(\varphi_0, a, b, ab, \delta)$. Imamo $\varphi(1) = 1$ pa je

$$|1 - \varphi_0(1)| = |\varphi(1) - \varphi_0(1)| < \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ slijedi $\varphi_0(1) = 1$. Nadalje, zbog $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ imamo

$$\begin{aligned} |\varphi_0(ab) - \varphi_0(a)\varphi_0(b)| &= |(\varphi_0(ab) - \varphi(ab)) + \varphi(a)(\varphi(b) - \varphi_0(b)) + \varphi_0(b)(\varphi(a) - \varphi_0(a))| \\ &\le |\varphi_0(ab) - \varphi(ab)| + |\varphi(a)(\varphi(b) - \varphi_0(b)| + |\varphi_0(b)(\varphi(a) - \varphi_0(a))| \\ &< (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $a, b \in A$ i $\varepsilon > 0$ slijedi da je φ_0 multiplikativan, dakle $\varphi_0 \in \Omega(A)$.

(ii) Neka A nije unitalna algebra. Koristeći identifikaciju $\Omega(A^1) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$, za $\varphi \in \Omega(A), \varepsilon > 0$ i konačan $F \subseteq A$ imamo

$$U_{\Omega(A^1)}(\varphi, F, \varepsilon) = \begin{cases} U_{\Omega(A)}(\varphi, F, \varepsilon) \cup \{\varphi_\infty\}, & \text{ako je } |\varphi(a)| < \varepsilon \text{ za sve } a \in F \\ U_{\Omega(A)}(\varphi, F, \varepsilon), & \text{inače.} \end{cases}$$

pa se Geljfandova topologija na $\Omega(A)$ podudara s relativnom Geljfandovom topologijom od $\Omega(A^1)$. Prema (i) znamo da je $\Omega(A^1)$ kompaktan, a $\{\varphi_\infty\}$ je zatvoren u $\Omega(\tilde{A})$ pa je $\Omega(A) = \Omega(A^1) \setminus \{\varphi_\infty\}$ lokalno kompaktan kao otvoren podskup kompaktnog prostora.

□

Definicija 1.2.14. Neka je A komutativna Banachova algebra. Za $a \in A$ definiramo funkciju

$$\hat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\varphi) := \varphi(a), \text{ za sve } \varphi \in \Omega(A).$$

Prema definiciji Geljfandove topologije na $\Omega(A)$, funkcija $\hat{a}$ je očito neprekidna.

Preslikavanje $\Gamma_A : A \to C(\Omega(A))$ definirano s $\Gamma_A : a \mapsto \hat{a}$ zove se **Geljfandova transformacija** od A.

Teorem 1.2.15. *Neka je A komutativna Banachova algebra takva da je $\Omega(A) \neq \emptyset$ i neka je $\Gamma = \Gamma_A$ Geljfandova transformacija od A.*

(i) *Γ je homomorfizam algebri. Ako je A unitalna, Γ je unitalan.*

(ii) *Γ separira točke od $\Omega(A)$ i vrijedi $\Gamma(A)(\varphi) \neq \{0\}$ za sve $\varphi \in \Omega(A)$.*

(iii) *Ako je A unitalna algebra, tada je*

$$\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(A)\}.$$

Ako A nije unitalna algebra, tada je $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$.

(iv) *$\Gamma(A) \subseteq C_0(\Omega(A))$ i za sve $a \in A$ vrijedi $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Specijalno, Γ je kontraktivni homomorfizam $A \to C_0(\Omega(A))$.*

(v) $\ker \Gamma = \bigcap_{\varphi \in \Omega(A)} \ker \varphi$.

(vi) *Γ je izometrija ako i samo ako vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in A$.*

Dokaz. (i) Neka su $a, b \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Za svaki $\varphi \in \Omega(A)$ imamo

$$(\widehat{\alpha a + \beta b})(\varphi) = \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\hat{a}(\varphi) + \beta\hat{a}(\varphi) = (\alpha\hat{a} + \beta\hat{b})(\varphi),$$

$$\widehat{ab}(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi) = (\hat{a}\hat{b})(\varphi).$$

(ii) Trivijalno.

(iii) Neka je A unitalna algebra. Znamo da je $\varphi(a) \in \sigma(a)$ za sve $\varphi \in \Omega(A)$ pa je $\hat{a}(\Omega(A)) \subseteq \sigma(a)$. Obratno, neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Tada je $a - \lambda 1 \notin A^\times$ pa prema Korolaru 1.1.2 postoji $M \in \operatorname{Max} A$ takav da je $a - \lambda 1 \in M$. Znamo da je M jezgra nekog karaktera $\varphi \in \Omega(A)$ pa je $\lambda - \varphi(a) = \varphi(a - \lambda 1) = 0$, odnosno $\lambda = \varphi(a) = \hat{a}(\varphi)$. Ako A nije unitalna, tada imamo

$$\sigma_A(a) = \sigma_{A^1}(a) = \hat{a}(\Omega(A^1)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(A)\} \cup \{\varphi_\infty(a)\} = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}.$$

(iv) Prema (iii) imamo

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(a)$$

pa je $\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) \le \|a\|$. Preostaje dokazati da je $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Omega(A))$. To je jasno ako je $\Omega(A)$ kompaktan. U suprotnom znamo da je $\Omega(A^1)$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od $\Omega(A)$ i za sve $a \in A$ je $\hat{a}(\varphi_\infty) = 0$, odnosno $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$.

(v) Slijedi direktno iz definicije od Γ.

(vi) Pretpostavimo da za sve $a \in A$ vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$. Tada indukcijom slijedi $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|, \forall n \in \mathbb{N}$ pa iz (iv) i Geljfandove formule slijedi

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_{n \to \infty} \left\|a^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|$$

pa je Γ izometrija. Obratno, ako je Γ izometrija onda

$$\|a^2\| = \|\widehat{a^2}\|_\infty = \|\hat{a}^2\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2 = \|a\|^2.$$

$\square$

Neka je A unitalna normirana algebra i $S \subseteq A$. Postoji najmanja zatvorena unitalna podalgebra B od A koja sadrži S. Ona je realizirana kao presjek svih zatvorenih podalgebri od A koje sadrže skup $S \cup \{1\}$. Vrijedi da je S zatvarač linearne ljuske svih konačnih produkata elemenata od $S \cup \{1\}$.

Sljedeća propozicija pokazuje da je spektralni radijus submultiplikativna polunorma na komutativnim Banachovim algebrama:

Propozicija 1.2.16. *Neka je A Banachova algebra i $a, b \in A$ komutirajući elementi. Tada vrijedi*

$$r(a+b) \leq r(a) + r(b), \quad r(ab) \leq r(a)r(b).$$

Dokaz. Spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj algebri pa možemo prijeći na unitizaciju A^1 i potom na unitalnu Banachovu podalgebru generiranu skupom $\{a, b\}$. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A unitalna i komutativna. Tada Geljfandova transformacija daje

$$r(a+b) = \|\hat{a} + \hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty + \|\hat{b}\|_\infty = r(a) + r(b).$$

$$r(ab) = \|\hat{a}\hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty \|\hat{b}\|_\infty = r(a)r(b).$$

□

Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra i $a_1, \ldots, a_n \in A$. **Grupni spektar** od $a_1, \ldots, a_n$ definiramo kao

$$\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \{(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) : \varphi \in \Omega(A)\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Preslikavanje $T : \Omega(A) \to \sigma(a_1, \ldots, a_n)$, $T : \varphi \mapsto (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ je neprekidna surjekcija, a $\Omega(A)$ je kompaktan skup pa je $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ kompaktan podskup od $\mathbb{C}^n$.

Propozicija 1.2.17. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra generirana konačnim skupom $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Tada je preslikavanje $T : \Omega(A) \to \sigma(a_1, \ldots, a_n)$ homeomorfizam.*

Dokaz. Ako se $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$ podudaraju na generatorima $a_1, \ldots, a_n$ (i na jedinici 1) tada se po linearnosti i neprekidnosti podudaraju na A. Dakle, T je neprekidna bijekcija s CH prostora $\Omega(A)$ na CH prostor $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ pa je homeomorfizam. □

Neka je $\phi : A \to B$ algebarski izomorfizam komutativnih Banachovih algebri A i B. Definiramo **transponat** $\phi^t : \Omega(B) \to \Omega(A)$ od ϕ formulom

$$\phi^t(\psi) := \psi \circ \phi, \quad \psi \in \Omega(B).$$

ϕ^t je bijekcija s inverzom $\varphi \mapsto \varphi \circ \phi^{-1}$ za $\varphi \in \Omega(A)$. Štoviše, ϕ^t je homeomorfizam s $\Omega(B)$ na $\Omega(A)$. Zaista, za mrežu $(\psi_i)_i$ i karakter ψ_0 u $\Omega(B)$ imamo

$$\begin{aligned} \psi_i \to \psi_0 \text{ u } \Omega(B) &\iff \psi_i(b) \to \psi_0(b), \forall b \in B \\ &\iff \psi_i(\phi(a)) \to \psi_0(\phi(a)), \forall a \in A \\ &\iff \phi^t(\psi_i) \to \phi^t(\psi_0) \text{ u } \Omega(A). \end{aligned}$$

Možemo ići i u obratnom smjeru. Neka je $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ homeomorfizam LCH prostora Ω_1 i Ω_2. Definiramo transponat $F^t : C_0(\Omega_2) \to C_0(\Omega_1)$ od F formulom

$$F^t(g) := g \circ F, \quad g \in C_0(\Omega_2).$$

Tada je F^t algebarski izomorfizam s inverzom $f \circ F^{-1}$ za $f \in C_0(\Omega_1)$ te za sve $g \in C_0(\Omega_2)$ vrijedi

$$\|F^t(g)\|_\infty = \sup_{t \in \Omega_1} |g(F(t))| = \sup_{s \in \Omega_2} |g(s)| = \|g\|_\infty.$$

Zaključujemo da je F^t izometrički izomorfizam Banachovih algebri $C_0(\Omega_2)$ i $C_0(\Omega_1)$.

Dakle, vrijedi sljedeći rezultat (vidjeti Primjer 1.2.4):

Korolar 1.2.18. *Za CH prostore Ω_1 i Ω_2 ekvivalentno je:*

(i) Banachove algebre $C(\Omega_1)$ i $C(\Omega_2)$ su izometrički izomorfne.

(ii) Banachove algebre $C(\Omega_1)$ i $C(\Omega_2)$ su algebarski izomorfne.

(iii) Prostori Ω_1 i Ω_2 su homeomorfni.

Poglavlje 2

C^*-algebre

2.1 Komutativne C^*-algebre i neprekidni funkcionalni račun

Sada ćemo Geljfandovu transformaciju primijeniti na C^*-algebre.

Propozicija 2.1.1. *Neka je A C^*-algebra i $a \in A$ normalni element. Tada je $\|a\| = r(a)$.*

Dokaz. Za svaki hermitski element $b \in B$ vrijedi $\|b^2\| = \|b^*b\| = \|b\|^2$ pa indukcijom slijedi $\|b\|^{2^n} = \|b^{2^n}\|, \forall n \in \mathbb{N}$. Sada prema Geljfandovoj formuli vrijedi

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} \left\|b^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|b\|.$$

Primjenom ovog rezultata (koristeći Propoziciju 1.2.16 i normalnost od a) na hermitski element a^*a slijedi

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) \leq r(a^*)r(a) = r(a)^2 \leq \|a\|^2$$

pa je $r(a) = \|a\|$. □

Propozicija 2.1.2. *Na $*$-algebri A postoji najviše jedna C^*-norma.*

Dokaz. Ako je $\|\cdot\|$ C^*-norma na A tada slijedi

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a^*a)} |\lambda|$$

pa je $\|\cdot\|$ u potpunosti određena $*$-algebarskom strukturom od A. □

Teorem 2.1.3. *Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam C^*-algebri. Tada je ϕ kontraktivan.*

Dokaz. Pretpostavimo da su A i B unitalne i da je ϕ unitalan. Tada prema Napomeni 1.1.16 imamo $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ pa slijedi

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\|^2 = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Pretpostavimo da je samo A unitalna. Tada je $\phi(1_A)$ jedinica u algebri $\phi(A)$ pa po neprekidnosti množenja slijedi da je C^*-algebra $\overline{\phi(A)}$ unitalna s jedinicom $\phi(1_A)$. Spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj C^*-algebri (dan je Geljfandovom formulom, Propozicija 1.1.13 (vii)) pa jednaki račun kao gore pokazuje da je ϕ kontrakcija.

Pretpostavimo sada da ni A nije unitalna i neka je A^1 njena unitizacija. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je B unitalna, u suprotnom ju zamijenimo unitizacijom B^1. $*$-homomorfizam ϕ tada možemo proširiti do $*$-homomorfizma $\tilde{\phi} : A^1 \to B$

$$\tilde{\phi}(a + \lambda 1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B, \quad a \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Iz gore dokazanih tvrdnji slijedi da je $\tilde{\phi}$ kontrakcija pa je i restrikcija $\phi = \tilde{\phi}|_A$ kontrakcija. □

Korolar 2.1.4. *Ako je $\phi : A \to B$ $*$-izomorfizam C^*-algebri, tada je ϕ izometrija.*

Dokaz. Znamo da je ϕ kontrakcija. ϕ^{-1} je također $*$-homomorfizam pa je i on kontrakcija. □

U stvari vrijedi (Teorem 2.1.15) da je svaki injektivni $*$-homomorfizam C^*-algebri izometrija.

Propozicija 2.1.5. *Neka je A C^*-algebra i $a \in A$.*

(i) Ako je a hermitski element, tada je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Ako je a projektor, tada je $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$.

(iii) Ako je A unitalna i a unitaran, tada je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$.

Dokaz. (i) Prelaskom na A^1 možemo pretpostaviti da je A unitalna. Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Promotrimo niz $(a_n)_n$ u A zadan s

$$a_n = a - (\operatorname{Re} \lambda)1 + in(\operatorname{Im} \lambda)1.$$

Tada je $i(n+1)(\operatorname{Im}\lambda) \in \sigma(a_n)$ pa je

$$\begin{aligned}(n^2+2n+1)(\operatorname{Im}\lambda)^2 &= |i(n+1)(\operatorname{Im}\lambda)|^2 \\ &\le r(a_n)^2 \\ &\le \|a_n\|^2 \\ &= \|a_n^* a_n\| \\ &= \|(a-(\operatorname{Re}\lambda)1)^2 + n^2(\operatorname{Im}\lambda)^2 1\| \\ &\le \|a-(\operatorname{Re}\lambda)1\|^2 + n^2(\operatorname{Im}\lambda)^2\end{aligned}$$

pa je $(2n+1)(\operatorname{Im}\lambda)^2 \le \|a-(\operatorname{Re}\lambda)1\|^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$ odakle slijedi $\operatorname{Im}\lambda = 0$ pa je $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Za polinom $p(x) = x^2 - x$ imamo $p(a) = 0$ pa prema Teoremu 1.1.13 (vi) vrijedi

$$p(\sigma(a)) = \sigma(p(a)) = \sigma(0) = \{0\},$$

odnosno $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$.

(iii) a je unitaran pa je $\|a\| = 1$ odakle slijedi $\sigma(a) \subseteq \overline{K}(0,1)$. Također zbog $a^{-1} = a^*$ imamo (Teorem 1.1.13 (vii) i Propozicija 1.1.6 (iii))

$$\sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1}) = \sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)} \subseteq \overline{\overline{K}(0,1)} = \overline{K}(0,1)$$

pa je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$.

□

Napomena 2.1.6. Uočimo da je svaki karakter φ C^*-algebre A hermitski funkcional. To slijedi iz $\varphi(a) \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ za sve $a \in A_h$.

Teorem 2.1.7 (Komutativni Geljfand-Naimark)**.** *Ako je A komutativna C^*-algebra, tada je njena Geljfandova transformacija $\Gamma : A \to C_0(\Omega(A))$, $\Gamma : a \mapsto \hat{a}$ (izometrički) $*$-izomorfizam. Ako je A unitalna, tada je Γ unitalni (izometrički) $*$-izomorfizam $A \to C(\Omega(A))$.*

Dokaz. Znamo da je Γ homomorfizam. Za sve $\varphi \in \Omega(A)$ i $a \in A$ imamo

$$\Gamma(a^*)(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\varphi)} = \Gamma(a)^*(\varphi)$$

pa je Γ $*$-homomorfizam. Nadalje, imamo

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\Gamma(a^*a)\|_\infty = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\| = \|\Gamma(a)\|_\infty^2$$

pa je Γ izometrija, specijalno i injekcija.

Za surjektivnost primijetimo da Γ zadovoljava uvjete Teorema 1.1.20. Zaista, iz dokazanog slijedi da je $\Gamma(A)$ zatvorena $*$-podalgebra od $C_0(\Omega(A))$, a iz Teorema 1.2.15 (ii) znamo da $\Gamma(A)$ razdvaja točke od $\Omega(A)$ i da za svaki karakter $\varphi \in \Omega(A)$ postoji element $a \in A$ takav da je $\Gamma(a)(\varphi) \neq 0$.

Ako je A unitalna, tada je prema Propoziciji 1.2.13 (i) $\Omega(A)$ kompaktan prostor i $\Gamma : A \to C(\Omega(A))$ je unitalni $*$-homomorfizam (Teorem 1.2.15 (i)). $\square$

Korolar 2.1.8. *Za komutativne C^*-algebre A i B su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) A i B su $*$-izomorfne.

(ii) A i B su algebarski izomorfne.

(iii) $\Omega(A)$ i $\Omega(B)$ su homeomorfni.

Dokaz. Neka je F homeomorfizam LCH prostora Ω_1 i Ω_2. Tada znamo da je njegov transponat $F^t : C_0(\Omega_2) \to C_0(\Omega_1)$, $F^t(g) = g \circ F$ izometrički izomorfizam. Primijetimo da je F^t štoviše i $*$-izomorfizam jer

$$F^t(g^*)(t) = (g^* \circ F)(t) = g^*(F(t)) = \overline{g(F(t))} = (g \circ F)^*(t) = (F^t(g))^*(t).$$

Sada iz Teorema 2.1.7 i Korolara 1.2.18 direktno slijedi tražena ekvivalencija. $\square$

Ako je B unitalna podalgebra unitalne Banachove algebre A, tada znamo (Propozicija 1.1.15) da za svaki element $b \in B$ vrijedi $\sigma_B(b) \subseteq \sigma_A(b)$. Ta inkluzija općenito može biti striktna. Međutim, ako su A i B C^*-algebre, vrijedi jednakost:

Teorem 2.1.9 (Spektralna permanencija)**.** *Neka je B unitalna C^*-podalgebra unitalne C^*-algebre A. Tada je $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ za sve $b \in B$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $B^\times = B \cap A^\times$. Neka je $b \in B$ hermitski element koji je invertibilan u A. Tada je $\sigma_A(b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pa specijalno $\sigma_A(b)$ nema rupa kao podskup od $\mathbb{C}$. Prema Propoziciji 1.1.15 (iii) slijedi $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. Posebno $0 \notin \sigma_B(b)$ pa je $b \in B^\times$.

Neka je sada $b \in B$ proizvoljan element koji je invertibilan u A. Tada vrijedi $bb^*(b^{-1})^*b^{-1} = 1$ pa je hermitski element bb^* invertibilan u A. Odozgo slijedi $(bb^*)^{-1} \in B$ pa slijedi $b^{-1} = b^*(bb^*)^{-1} \in B$. $\square$

Uočimo da ovo implicira da spektar elementa neunitalne C^*-algebre ne ovisi o ambijentalnoj unitalnoj C^*-algebri.

Slična tvrdnja vrijedi i u neunitalnom slučaju:

Korolar 2.1.10. *Ako je B C^*-podalgebra C^*-algebre A, tada je $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$ za sve $b \in B$.*

Dokaz. Pokažimo prvo sljedeću pomoćnu algebarsku tvrdnju: ako je B podalgebra unitalne algebre A takva da je $B+\mathbb{C}1_A = A$, tada je $\sigma_B(b)\cup\{0\} = \sigma_A(b)\cup\{0\}$ za sve $b\in B$. Zaista, ako B nije unitalna, tada je preslikavanje $B^1 \to A$, $(b,\lambda)\mapsto b+\lambda 1_A$ unitalni izomorfizam algebri pa je $\sigma_B(b) = \sigma_{B^1}(b) = \sigma_A(b)$. Ako je B unitalna s jedinicom $e\neq 1_A$, tada tvrdimo da je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)\cup\{0\}$. Zaista, očito je $0\in\sigma_A(b)$. Ako je $\lambda\in\mathbb{C}$ takav da je $\lambda 1_A - b\in A^\times$, tada je $\lambda e - b\in B^\times$, što slijedi po djelovanju homomorfizma algebri $A\to B, b+\lambda 1_A\mapsto b+\lambda e$. Odavde slijedi inkluzija $\sigma_B(b)\subseteq\sigma_A(b)$. Obratno, ako je $\lambda\neq 0$ takav da je $\lambda e - b\in B^\times$ s inverzom b' u B, tada je $b' + \lambda^{-1}(1_A - e)$ inverz od $\lambda 1_A - b$ u A. Odavde slijedi $\sigma_A(b)\setminus\{0\}\subseteq\sigma_B(b)$.

Sada dokažimo tvrdnju korolara. Ako je A neunitalna zamijenimo ju unitizacijom A^1 pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je A unitalna. Tada je $B+\mathbb{C}1_A$ unitalna C^*-podalgebra od unitalne C^*-algebre A pa Teorem 2.1.9 daje

$$\sigma_B(b)\cup\{0\} = \sigma_{B+\mathbb{C}1_A}(b)\cup\{0\} = \sigma_A(b)\cup\{0\}.$$

□

Neka je A unitalna C^*-algebra i $S\subseteq A$. Sa $C^*(S)$ označavamo najmanju unitalnu C^*-podalgebru od A koja sadrži S, tj

$$C^*(S) := \bigcap\{S\subseteq B : B \text{ unitalna } C^*\text{-podalgebra od } A\}$$

i za nju kažemo da je **generirana** sa S. Vidimo da se $C^*(S)$ podudara s unitalnom Banachovom algebrom generiranom skupom $S\cup S^*$, tj. zatvarač je linearne ljuske svih produkata elemenata iz $S\cup S^*\cup\{1\}$. U slučaju konačnog skupa pišemo još $C^*(a_1,\dots,a_n) := C^*(\{a_1,\dots,a_n\})$. Element $a\in A$ je normalan ako i samo ako je

$$C^*(a) = \overline{\{p(a,a^*) : p\in\mathbb{C}[z,w]\}}.$$

Propozicija 2.1.11. *Neka je A unitalna C^*-algebra i $a\in A$ normalan element. Geljfandova transformacija $\hat{a}$ od a je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na $\sigma(a)$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 1.2.17, preslikavanje $T:\varphi\mapsto(\varphi(a),\varphi(a^*))$ je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na grupni spektar $\sigma(a,a^*)$ elemenata a i a^*. Karakteri su hermitski funkcionali pa imamo $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, odakle slijedi $T(\varphi) = (\varphi(a),\overline{\varphi(a)})$ pa je projekcija na prvu koordinatu π_1 homeomorfizam s $\sigma(a,a^*)$ na $\sigma(a)$. Konačno, $\hat{a} = \pi_1\circ T$ je homeomorfizam. □

Teorem 2.1.12. *Neka je a normalan element unitalne C^*-algebre A. Postoji jedinstven unitalni $*$-izomorfizam $\phi_a : C(\sigma(a))\to C^*(a)$ takav da vrijedi $\phi_a(\mathrm{id}) = a$, gdje je $\mathrm{id}(\lambda) = \lambda, \forall\lambda\in\sigma(a)$ identiteta.*

Dokaz. Prema Komutativnom Geljfand-Naimarkovom teoremu, Geljfandova transformacija $\Gamma = \Gamma_{C^*(a)}$ uspostavlja unitalni $*$-izomorfizam s $C^*(a)$ na $C(\Omega(C^*(a)))$. S druge strane, $\hat{a} : \Omega(C^*(a)) \to \sigma(a)$ je homeomorfizam (Propozicija 2.1.11) pa je njegov transponat $a^t : C(\sigma(a)) \to C(\Omega(C^*(a)))$ unitalni $*$-izomorfizam. Tada je $\phi_a : C(\sigma(a)) \to C^*(a)$, $\phi_a := \Gamma^{-1} \circ \hat{a}^t$ unitalni $*$-izomorfizam. Nadalje, vrijedi

$$\phi(\mathrm{id}) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(\mathrm{id})) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Svaki unitalni $*$-izomorfizam $C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ s gornjim svojstvom se podudara s ϕ_a na $C^*(\mathrm{id}) \subseteq C(\sigma(a))$. Uočimo da je $C^*(\mathrm{id})$ zatvorena $*$-podalgebra od $C(\sigma(a))$ koja sadrži konstantne funkcije i separira točke od $\sigma(a)$ pa je prema Stone-Weierstrassovom teoremu $C^*(\mathrm{id}) = C(\sigma(a))$. Slijedi da je ϕ_a jedinstven. □

Za funkciju $f \in C(\sigma(a))$ element $\phi_a(f)$ označavamo s $f(a)$. Oznaka ima smisla jer za svaki polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ vrijedi $\phi_a(p|_{\sigma(a)}(\cdot, \overline{\cdot})) = p(a, a^*)$. U tom smislu, preslikavanje $f \mapsto f(a)$ nazivamo **neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa a.

Korolar 2.1.13. *Neka je A unitalna C^*-algebra i neka je $a \in A$ normalan element. Neprekidni funkcionalni račun od a ima sljedeća svojstva:*

(i) Ako je $f(\lambda) = p(\lambda, \overline{\lambda})$ gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$, tada je $f(a) = p(a, a^*)$.

(ii) Ako je $(f_n)_n$ niz u $C(\sigma(a))$ i $f \in C(\sigma(a))$ takva da $f_n \to f$ uniformno na $\sigma(a)$, tada $f_n(a) \to f(a)$ u A.

(iii) (Teorem o preslikavanju spektra) $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ za sve $f \in C(\sigma(a))$.

(iv) Ako su $f \in C(\sigma(a))$ i $g \in C(f(\sigma(a)))$ takve da $g \circ f \in C(\sigma(a))$, tada je $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(v) Ako je $(a_n)_n$ niz normalnih elemenata takav da $a_n \to a$, K kompaktna okolina od $\sigma(a)$ i $f \in C(K)$, tada je $\sigma(a_n) \subseteq K$ za gotovo sve n i $f(a_n) \to f(a)$.

(vi) Ako je ϕ unitalni $*$-homomorfizam s A u unitalnu C^*-algebru B, tada je $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$ za sve $f \in C(\sigma(a))$.

Dokaz. (i) Već diskutirano nakon dokaza Teorema 2.1.12.

(ii) Direktno slijedi iz izometričnosti od ϕ_a.

(iii) $\phi_a : C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ je unitalni $*$-izomorfizam pa imamo

$$\sigma_A(f(a)) = \sigma_{C^*(a)}(f(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a)).$$

(iv) Prema (i) znamo da jednakost $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ vrijedi za sve funkcije g oblika $g(\lambda) = p(\lambda, \overline{\lambda})$ gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$. Takve funkcije su guste u $C(\sigma(f(a)))$ i $\phi_{f(a)}$ je neprekidan pa zaključujemo $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za sve $g \in C(\sigma(f(a)))$.

(v) Pokažimo prvo svojevrsnu neprekidnost spektra: za svaki otvoren podskup $O \subseteq \mathbb{C}$ koji sadrži $\sigma(a)$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\sigma(b) \subseteq O$ za sve $b \in A$, $\|b - a\| < \delta$. Zaista, promotrimo zatvoreni disk $D := \overline{B}(0, 1 + \|a\|) \subseteq \mathbb{C}$. Budući da je $A^\times$ otvoren skup u A, za svaki $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ postoji $r_\lambda > 0$ takav da je otvorena kugla $U_\lambda = B_A(\lambda 1 - a, 2r_\lambda)$ u A sadržana u $A^\times$. Neka je $O_\lambda = B(\lambda, r_\lambda) \subseteq \mathbb{C}$ otvoreni disk. Zbog $\sigma(a) \subseteq D$ slijedi da je $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)}$ otvoreni pokrivač od $D \setminus O$ pa zbog kompaktnosti postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ takvi da $\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ pokriva $D \setminus O$. Stavivši $\delta := \min\{r_{\lambda_1}, \ldots, r_{\lambda_n}, 1\}$, za $\|a - b\| < \delta$ i $\lambda \in D \setminus O$ imamo $\lambda \in O_{\lambda_j}$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$ i imamo

$$\|(\lambda_j 1 - a) - (\lambda 1 - b)\| \leq |\lambda_j - \lambda| + \|a - b\| < \delta + r_{\lambda_j} < 2r_{\lambda_j}.$$

Dakle, $\lambda 1 - b \in U_{\lambda_j}$ pa je $\lambda 1 - b \in A^\times$. Stoga $D \setminus O \subseteq D \setminus \sigma(b)$. Također imamo $\|a - b\| < 1$ pa je $\|b\| < 1 + \|a\|$ odakle slijedi $\sigma(b) \subseteq D$. Ako je $\lambda' \in \sigma(b)$, tada $\lambda' \notin D \setminus \sigma(b)$ pa $\lambda' \notin D \setminus O$. No, $\lambda' \in D$ pa slijedi $\lambda' \in O$. Zaključujemo $\sigma(b) \subseteq O$.

Neka je sada $O = K$ kao u iskazu. Prema dokazanom zaključujemo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\sigma(a_n) \subseteq K$. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| < \varepsilon$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to \infty} \|f(a_n) - f(a)\| &\leq 2 \sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| + \limsup_{n \to \infty} \|p(a_n, a_n^*) - p(a, a^*)\| \\
&\leq 2\varepsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|.
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ imamo $f(a_n) \to f(a)$.

(vi) Imamo $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ (Propozicija 1.1.16) pa je $f(\phi(a))$ dobro definiran za svaku funkciju $f \in C(\sigma_A(a))$. Fiksirajmo $f \in C(\sigma_A(a))$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $\sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} \|f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada posebno $\|f(\phi(a)) - p(\phi(a), \phi(a)^*)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zbog kontraktivnosti od ϕ imamo

$$\begin{aligned}
\|\phi(f(a)) - f(\phi(a))\| &\leq \|\phi(f(a)) - \phi(p(a, a^*))\| + \|\phi(p(a, a^*)) - f(\phi(a))\| \\
&\leq \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| + \|p(\phi(a), \phi(a)^*) - f(\phi(a))\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ slijedi $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$.

$\square$

Ako je A neunitalna C^*-algebra i $a \in A$ normalan element, tada neprekidni funkcionalni račun možemo provesti u unitizaciji A^1. Dobivamo $*$-izomorfizam $\phi_a : C(\sigma(a)) \to C^*_{A^1}(a)$. Zbog $0 \in \sigma(0)$ stavimo

$$C(\sigma(a))_0 := \{f \in C(\sigma(a)) : f(0) = 0\}$$

i neka je $C^*_0(a)$ najmanja C^*-podalgebra od A koja sadrži a. Lako se pokaže da je

$$C^*_0(a) = \overline{\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, w], p(0, 0) = 0\}}.$$

Lako vidimo da je svaka funkcija $f \in C(\sigma(a))_0$ uniformni limes funkcija oblika $\lambda \mapsto p(\lambda, \overline{\lambda}), \lambda \in \sigma(a)$ gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $p(0, 0) = 0$. Odavde slijedi da je $f(a) \in C^*_0(a) \subseteq A$. Dakle, ako se ograničimo na funkcije iz $C(\sigma(a))_0$, neprekidni funkcionalni račun možemo u potpunosti provesti unutar algebre A, bez ikakvog pozivanja na jedinicu 1 od A^1. Ovo nazivamo **neunitalni neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa a.

Uočimo da ovo ima smisla i za unitalne C^*-algebre: tada je $0 \notin \sigma(a)$ pa je naprosto $C(\sigma(a))_0 = C(\sigma(a))$ i $C^*_0(a) = C^*(a)$, odnosno dobivamo standardni unitalni neprekidni funkcionalni račun.

Korolar 2.1.14. *Neka je A C^*-algebra. Neunitalni neprekidni funkcionalni račun $\phi_a : f \mapsto f(a)$ normalnog elementa $a \in A$ je $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))_0$ na $C^*_0(a)$.*

Teorem 2.1.15. *Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam C^*-algebri A i B. Ako je ϕ injektivan, tada je ϕ izometrija.*

Dokaz. Slično kao u dokazu Teorema 2.1.3 pretpostavimo da su A i B unitalne te da je ϕ unitalan. Tada tvrdimo da za proizvoljan $a \in A_h$ vrijedi $\sigma_B(\phi(a)) = \sigma_A(a)$. Zaista, prema Napomeni 1.1.16, uvijek vrijedi $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$. Pretpostavimo da ti spektri nisu jednaki. Tada postoji $f \in C(\sigma_A(a))$ takva da je $f \neq 0$, ali $f|_{\sigma_B(\phi(a))} = 0$. Budući da $*$-homomorfizmi komutiraju s neprekidnim funkcionalnim računom, slijedi $\phi(f(a)) = f(\phi(a)) = 0$. ϕ je injektivan pa slijedi $f(a) = 0$, no to je u kontradikciji s činjenicom da je $f \neq 0$ na $\sigma_A(a)$. Dakle, vrijedi jednakost $\sigma_B(\phi(a)) = \sigma_A(a)$.

Sada za proizvoljan $a \in A$ imamo

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

pa je ϕ izometrija. $\square$

Propozicija 2.1.16. *Neka je A C^*-algebra i neka je $a \in A$ normalan element.*

(i) *a je hermitski ako i samo ako je* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) *a je projektor ako i samo ako je* $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$.

(iii) *Ako je A unitalna, tada je a unitaran ako i samo ako je* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$.

Dokaz. Jedan smjer svake tvrdnje slijedi iz Propozicije 2.1.5.

(i) Ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, tada su funkcije $\lambda \mapsto \lambda$ i $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ jednake na $\sigma(a)$ pa je $a^* = a$.

(ii) Ako je $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$, tada su funkcije $\lambda \mapsto \lambda$ i $\lambda \mapsto \lambda^2$ jednake na $\sigma(a)$ pa je $a^2 = a$.

(iii) Ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$, tada su funkcije $\lambda \mapsto \overline{\lambda}\lambda$, $\lambda \mapsto \lambda\overline{\lambda}$ i $\lambda \mapsto 1$ jednake na $\sigma(a)$ pa je $a^*a = aa^* = a$.

□

2.2 Uređaj u C^*-algebrama

Neka je A C^*-algebra. Za $a \in A_h$ kažemo da je **pozitivan** i pišemo $a \geq 0$ ako je $\sigma(a) \subseteq [0, \infty\rangle$. Skup svih pozitivnih elemenata označavamo s A_+.

Uočimo da je $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ jer za element $a \in A_+ \cap (-A_+)$ vrijedi $\sigma(a) = 0$ pa iz hermitičnosti slijedi $a = 0$. Nadalje, Korolar 2.1.10 implicira da za svaku C^*-podalgebru vrijedi $B_+ = B \cap A_+$.

Propozicija 2.2.1. *Neka je A C^*-algebra i $n \in \mathbb{N}$. Za svaki pozitivni element $a \in A_+$ postoji jedinstveni element $b \in A_+$ takav da je $b^n = a$. Element b označavamo s $a^{1/n}$ i zovemo ga* ***pozitivni n-ti korijen*** *od a.*

Dokaz. Imamo $\sigma(a) \subseteq [0, \infty\rangle$ pa je funkcija $f : \sigma(a) \to [0, \infty\rangle$, $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ dobro definirana i neprekidna. Nadalje, vrijedi $f(0) = 0$ pa je $b := f(a) \in C_0^*(a) \subseteq A$. Znamo da je b normalan element i vrijedi $\sigma(b) = f(\sigma(a)) \subseteq [0, \infty\rangle$ pa je $b \in A_+$. Zbog $f(t)^n = t, \forall t \in [0, \infty\rangle$, slijedi $b^n = a$.

Pretpostavimo da je $c \in A_+$ neki drugi element takav da je $c^n = a$. Vrijedi $ac = c^n c = cc^n = ca$ pa a i c komutiraju. Zbog $b \in C_0^*(a)$ slijedi da a i c također komutiraju. Promotrimo komutativnu C^*-podalgebru $C^*(b, c)$ od A i uočimo da ona sadrži a. Geljfandovi transformati od a, b i c zadovoljavaju $\hat{b}^n = \hat{a} = \hat{c}^n$ pa iz pozitivnosti funkcija $\hat{b}, \hat{c}$ slijedi $\hat{b} = \hat{c}$, odnosno $b = c$. □

Propozicija 2.2.2. *Neka je A C^*-algebra. Za svaki $a \in A_h$ postoje jedinstveni $a_+, a_- \in A_+$ takvi da vrijedi $a = a_+ - a_-$ i $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Pri tome vrijedi $\|a\| = \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}$.*

Dokaz. Definiramo funkcije $f_+, f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f_+(t) = \begin{cases} t, & \text{ako } t \geq 0 \\ 0, & \text{ako } t \leq 0 \end{cases}, \qquad f_-(t) = \begin{cases} 0, & \text{ako } t \geq 0 \\ -t, & \text{ako } t \leq 0 \end{cases}$$

i elemente $a_+ = f_+(a)$, $a_- = f_-(a)$. Zbog $f_+(0) = f_-(0) = 0$ slijedi $a_+, a_- \in C_0^*(a) \subseteq A$. Također slijedi $a_+, a_- \subseteq A_+$ jer su f_+, f_- nenegativne funkcije. Iz $\mathrm{id}_\mathbb{R} = f_+ - f_-$ i $f_+f_- = f_-f_+ = 0$ slijede tražene jednakosti. Nadalje

$$\|a\| = \sup_{t \in \sigma(a)} |t| = \max\left\{ \sup_{t\in\sigma(a)} f_+(t), \sup_{t\in\sigma(a)} f_-(t) \right\} = \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}.$$

Pokažimo jedinstvenost od a_+, a_-. Pretpostavimo da su $a_1, a_2 \in A_+$ neki drugi elementi takvi da je $a = a_1 + a_2$ i $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$. Tada je $a^n = a_1^n + (-a_2)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ odakle slijedi $p(a) = p(a_1) + p(a_2)$ za sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $p(0) = 0$. Zbog $f_+(0) = 0$ iz Stone-Weierstrassovog teorema slijedi da postoji niz takvih polinoma $(p_n)_n$ koji konvergira prema f_+ uniformno na $\sigma(a) \cup \sigma(a_1) \cup \sigma(-a_2)$. Tada je

$$f_+(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a_1) + \lim_{n\to\infty} p_n(-a_2) = f_+(a_1) + f_+(-a_2).$$

Imamo da je $f_+(t) = t$ za sve $t \in \sigma(a_1)$ i $f_+ \equiv 0$ na $\sigma(-a_2)$ pa je $f_+(a_1) = a_1$ i $f_+(-a_2) = 0$. Dakle, $a_1 = f_+(a) = a_+$ pa je i $a_2 = a_-$. □

Korolar 2.2.3. *Neka je A C^*-algebra. Svaki element $a \in A$ se može prikazati kao linearna kombinacija četiri pozitivna elementa.*

Dokaz. Za $a \in A$ imamo

$$a = \operatorname{Re} a + i(\operatorname{Im} a) = (\operatorname{Re} a)_+ - (\operatorname{Re} a)_- + i[(\operatorname{Im} a)_+ - (\operatorname{Im} a)_-].$$

□

Lema 2.2.4. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Za hermitski element $a \in A_h$ ekvivalentno je:*

(i) $a \in A_+$.

(ii) Za neki $t \geq \|a\|$ *vrijedi* $\|t1 - a\| \leq t$.

(iii) Za svaki $t \geq \|a\|$ *vrijedi* $\|t1 - a\| \leq t$.

Dokaz. Uočimo da je za realnu funkciju $f \in C(\Omega)$ na nekom CH prostoru Ω ekvivalentno

(i) $f \geq 0$.

(ii) Za neki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$.

(iii) Za svaki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$.

Možemo pretpostaviti da je $A = C^*(a)$, pa je (izometrički) $*$-izomorfna C^*-algebri $C(\sigma(a))$. □

Propozicija 2.2.5. *Neka je A C^*-algebra. Skup A_+ je zatvoren u A i vrijedi:*

(i) Za $a \in A_+$ i $t \in [0, \infty\rangle$ vrijedi $ta \in A_+$.

(ii) Za $a, b \in A_+$ vrijedi $a + b \in A_+$.

Dokaz. Za neunitalnu algebru A imamo $A_+ = A \cap (A^1)_+$ pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je A unitalna.

Iz neprekidnosti odnosno izometričnosti involucije slijedi da je A_h zatvoren podskup od A. Prethodna lema povlači

$$A_+ = A_h \cap \{a \in A : \|\|a\|1 - a\| \leq \|a\|\}$$

pa je A_+ zatvoren kao presjek dva zatvorena skupa.

(i) Vrijedi $ta \in A_h$ i $\sigma(ta) = t\sigma(a) \subseteq [0, \infty\rangle$ pa je $ta \in A_+$.

(ii) Prema prethodnoj lemi imamo $\|\|a\|1 - a\| \leq \|a\|$ i $\|\|b\|1 - a\| \leq \|b\|$ pa je

$$\|(\|a\| + \|b\|)1 - (a + b)\| \leq \|\|a\|1 - a\| + \|\|b\|1 - b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Dakle, $a + b \in A_+$.

□

Propozicija 2.2.6. *Neka je A C^*-algebra. Svaki element oblika a^*a za neki $a \in A$ je pozitivan.*

Dokaz. Pokažimo prvo da iz $-a^*a \in A_h$ slijedi $a = 0$. Zaista, imamo $\sigma(-aa^*) \setminus \{0\} = \sigma(-a^*a) \setminus \{0\}$ (Teorem 1.1.13 (v)) pa je i $-aa^* \in A_h$. Sada je

$$a^*a = \underbrace{2(\operatorname{Re} a)^2 + 2(\operatorname{Im} a)^2}_{\in A_+} - aa^* \in A_+$$

pa je $\sigma(a^*a) = \{0\}$, odnosno $a^*a = 0$. Slijedi $a = 0$.

Neka je sada $a \in A$ proizvoljan i $b := a^*a$. Vrijedi $b \in A_h$ pa imamo $b = b_+ - b_-$ gdje su b_+, b_- kao u Propoziciji 2.2.2. Imamo

$$-(ab_-)^*(ab_-) = -b_-a^*ab_- = -b_-(b_+ - b_-)b_- = b_-^3 \in A_h$$

pa slijedi $ab_- = 0$. Dakle, $b_- = 0$ odakle slijedi $a^*a = b_+ \in A_+$. □

Definirajmo sada uređaj na realnom vektorskom prostoru A_h: za $a, b \in A_h$ stavljamo $a \leq b$ ako je $b - a \in A_+$. Vrijedi da je $\leq$ parcijalni uređaj na A_h:

- Refleksivnost: očito je $a \leq a$ za sve $a \in A_h$.
- Antisimetričnost: Ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ i $b \leq a$, tada je $b - a \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ pa je $a = b$.
- Tranzitivnost: Ako su $a, b, c \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ i $b \leq c$ tada je $c - a = \underbrace{(c-b)}_{\in A_+} + \underbrace{(b-a)}_{\in A_+} \in A_h$ pa je $a \leq c$.

Također se lako uvjeravamo da za sve $a, b, c \in A_h$ vrijedi

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

te da za $t \geq 0$ i $a, b \in A_h$ imamo $a \leq b \implies ta \leq tb$. Nadalje vrijedi i $a \leq b \iff -b \leq -a$.

Za $a \in A$ definiramo njegovu **apsolutnu vrijednost** kao $|a| := (a^*a)^{1/2} \in A_+$. Tada vrijedi $\||a|\| = \|a\|$ i $a_\pm = \frac{1}{2}(|a| \pm a)$, i $a \in A_+ \iff a = |a|$.

Teorem 2.2.7. *Neka je A C^*-algebra. Tada je*

(i) $A_+ = \{a^2 : a \in A_h\} = \{a^*a : a \in A\}$.

(ii) Ako za $a, b \in A_h$ vrijedi $a \leq b$, tada je $c^*ac \leq c^*bc$ za sve $c \in A$.

(iii) Ako su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$, tada je $\|a\| \leq \|b\|$.

(iv) Ako je A unitalna i $a, b \in A_+ \cap A^\times$ takvi da je $a \leq b$, onda vrijedi i $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Dokaz. (i) Tvrdnja slijedi direktno iz pozitivnosti elementa a^*a i egzistencije pozitivnog drugog korijena.

(ii) Zbog $b - a \geq 0$ imamo

$$\begin{aligned} cb^*c - c^*ac &= c^*(b-a)c \\ &= c^*(b-a)^{1/2}(b-a)^{1/2}c \\ &= \left((b-a)^{1/2}c\right)^* \left((b-a)^{1/2}c\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(iii) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A unitalna (inače dokaz provodimo u A^1). Vrijedi $a \leq b \leq \|b\|1$. Zbog $a \in A_+$ vrijedi $\|a\| \in \sigma(a)$ pa je

$$\|b\| - \|a\| \in \sigma(\|b\|1 - a) \subseteq [0, \infty\rangle.$$

(iv) Uočimo da iz $c \geq 1, c \in A_h$ slijedi $c^{-1} \leq 1$ jer je ista tvrdnja točna u funkcijskim C^*-algebrama, kojoj je $C^*(c)$ izomorfna. Ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ tada imamo

$$1 = a^{-1/2}aa^{-1/2} \leq a^{-1/2}ba^{-1/2}$$

pa je $a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} = (a^{-1/2}ba^{-1/2})^{-1} \leq 1$. Sada slijedi

$$b^{-1} = a^{-1/2}(a^{1/2}b^{-1}a^{1/2})a^{-1/2} \leq a^{-1/2}a^{-1/2} = a^{-1}.$$

□

Propozicija 2.2.8. *Neka je A C^*-algebra i $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$. Tada je i $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.*

Dokaz. Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: za $a, b \in A_+$ vrijedi $a^2 \leq b^2 \implies a \leq b$. Možemo pretpostaviti da je A unitalna. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka su c i d realni i imaginarni dio elementa $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a)$. Tada je

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}[(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) + (\varepsilon 1 + b - a)(\varepsilon 1 + b + a)] \\ &= \varepsilon^2 1 + 2\varepsilon b + b^2 - a^2 \\ &\geq \varepsilon^2 1 \end{aligned}$$

pa je $c \in A_+ \cap A^\times$. Također imamo

$$c^{-\frac{1}{2}}(c + id)c^{-\frac{1}{2}} = 1 + ic^{-\frac{1}{2}}dc^{-\frac{1}{2}} \in A^\times$$

pa je $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) = c + id \in A^\times$. Specijalno, element $\varepsilon 1 + b - a$ je invertibilan slijeva pa iz hermitičnosti slijedi $\varepsilon 1 + b - a \in A^\times$. Slijedi $-\varepsilon \notin \sigma(b - a)$ za sve $\varepsilon > 0$, pa je $\sigma(b - a) \subseteq [0, \infty\rangle$ odnosno $a \leq b$. □

2.3 Aproksimativne jedinice, zatvoreni ideali i kvocijenti

Definicija 2.3.1. Neka je A C^*-algebra. **Aproksimativna jedinica** u A je svaka rastuća mreža $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ u $\mathrm{Ball}(A_+)$ takva da za sve $a \in A$ imamo $ae_i \to a$ i $e_i a \to a$.

Uočimo da vrijedi $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} ae_i$ za sve $a \in A$ ako i samo ako je $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i a$ za sve $a \in A$. U unitalnim C^*-algebrama uvijek možemo staviti $e_i = 1$ za sve $i \in \mathbb{I}$. Nadalje, u tom slučaju sve aproksimativne jedinice konvergiraju prema 1.

Označimo $\mathbb{J} = \{a \in A_+ : \|a\| < 1\}$.

Lema 2.3.2. *Neka je A C^*-algebra i $a, b \in \mathbb{J}$. Tada vrijedi*

$$0 \le a \le b \implies a(1+a)^{-1} \le b(1+b)^{-1}$$

u A^1.

Dokaz. Uočimo da za svaki $c \in \mathbb{J}$ vrijedi da je $1 + c$ invertibilan u A^1 i vrijedi $c(1+c)^{-1} = 1 - (1+c)^{-1}$.

Iz $0 \le a \le b$ slijedi $1+a \le 1+b$ pa iz Teorema 2.2.7 (iv) slijedi $(1+b)^{-1} \le (1+a)^{-1}$. Odavde slijedi $1-(1+a)^{-1} \le 1-(1+b)^{-1}$ što je prema gornjoj tvrdnji ekvivalentno s $a(1+a)^{-1} \le b(1+b)^{-1}$. □

Promotrimo $\mathbb{J}$ s uređajem naslijeđenim od A_h. Tada je $\mathbb{J}$ usmjeren skup. Naime, neka su $a, b \in \mathbb{J}$ proizvoljni. Primijetimo da za svaki $x \in A_+$ vrijedi $x(1+x)^{-1} \in \mathbb{J}$. To vrijedi ako je A funkcijska C^*-algebra, a $C^*(x)$ je izometrički $*$-izomorfna $C_0(\sigma(x))$. Sada stavimo $a' = a(1-a)^{-1}$, $b' = b(1-b)^{-1}$ i onda

$$c = (a'+b')(1+a'+b')^{-1} \in \mathbb{J}.$$

Sada iz $a' \le a'+b'$ slijedi $a = a'(1+a')^{-1} \le c$. Analogno dobijemo $b \le c$.

Teorem 2.3.3. *Svaka C^*-algebra A ima aproksimativnu jedinicu.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti neka A nije unitalna. Neka je $\mathbb{J}$ usmjeren skup definiran gore. Za $i \in \mathbb{J}$ definiramo $e_i := i$. Tada je $(e_i)_{i\in\mathbb{J}}$ strogo rastuća mreža u $\mathbb{J}$. Treba dokazati da za svaki $a \in A$ vrijedi $a = \lim_{i\in\mathbb{J}} e_i a$. Prema Korolaru 2.2.3 ovo je dovoljno pokazati za sve $a \in \mathbb{I}$.

Uzmimo stoga $a \in \mathbb{J}$ i neka je $0 < \varepsilon < 1$. Imamo $\sigma(a) \subseteq [0, 1\rangle$ pa stavimo $K := [\varepsilon, 1\rangle \cap \sigma(a)$. Neka je $g : \sigma(a) \to [0,1]$ neprekidna funkcija takva da je $g(0) = 0$ i $g|_K = 1$. Uzmimo $0 < \delta < 1$ takav da je $1 - \delta < \varepsilon$ i stavimo $i_0 = e_{i_0} := \delta g(a)$. Iz svojstava neunitalnog neprekidnog funkcionalnog računa slijedi da je $i_0 \in \mathbb{J}$ i $\|a - e_{i_0} a\| = \sup_{t\in\sigma(a)} |t - \delta g(t)t| < \varepsilon$.

Za svaki $i \in \mathbb{J}, i \geq i_0$ imamo $1 - e_i \leq 1 - e_{i_0}$ u A^1 pa iz Teorema 2.2.7 (ii) slijedi $a(1-e_i)a \leq a(1-e_{i_0})a$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\|a - e_i a\|^2 &= \|(1-e_i)^{\frac{1}{2}}(1-e_i)^{\frac{1}{2}}a\|^2 \leq \|(1-e_i)^{\frac{1}{2}}a\|^2 \leq \|a(1-e_i)a\| \\ &\leq \|a(1-e_{i_0})a\| \leq \|(1-e_{i_0})a\| < \varepsilon\end{aligned}$$

odakle slijedi $\lim_{i\in\mathbb{J}} e_i a = a$. $\square$

Napomena 2.3.4. Svaka separabilna C^*-algebra A ima aproksimativnu jedinicu koja je niz u A. Naime, neka je $F = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust skup u A i neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ proizvoljna aproksimativna jedinica u A. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i_\varepsilon \in \mathbb{I}$ takav da je $\|a_k - e_i a_k\| < \varepsilon, \forall k = 1, \ldots, n$ i $i \geq i_\varepsilon$. Posebno za $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ dobivamo $i_n \in \mathbb{I}$ takav da je $\|a_k - e_{i_n} a_k\| < \frac{1}{n}, \forall k = 1, \ldots, n$. Možemo postići da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $i_n \leq i_{n+1}$. Tada je $\lim_{n\to\infty} \|a_k - e_{i_n} a_k\| = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ pa po gustoći isto vrijedi i za sve $a \in A$. Slijedi da je $(e_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ aproksimativna jedinica u A.

Napomena 2.3.5. Sada možemo pokazati da svaki karakter φ C^*-algebre A ima normu 1. Ako je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica za A, tada je $(\varphi(e_i))_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimatvna jedinica za $\mathbb{C}$ pa imamo

$$1 \geq \|\varphi\| \geq \lim_{i\in\mathbb{I}} \varphi(e_i) = 1.$$

Teorem 2.3.6. *Neka je A C^*-algebra i neka je I zatvoren ideal u A. Tada je I samoadjungiran, dakle C^*-podalgebra od A. Nadalje, ako je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica u I tada za kvocijentnu normu na A/I vrijedi*

$$\|a + I\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - e_i a\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - a e_i\|, \quad \text{za sve } a \in A.$$

Dokaz. Stavimo $B = I \cap I^*$ i primijetimo da je B C^*-podalgebra od A pa ima aproksimativnu jedinicu $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Za $a \in I$ imamo $a^*a \in B$ pa je $\lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a - a^*a e_i\| = 0$. U A^1 imamo

$$\lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - a e_i\|^2 = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)a^*a(1-e_i)\| \leq \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a(1-e_i)\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^*a - a^*a e_i\| = 0$$

pa slijedi $a = \lim_{i\in\mathbb{I}} a e_i$. Iz izometričnosti involucije slijedi $a^* = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i a^* \in I$ pa je I samoadjungiran.

Neka je sada $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ proizvoljna aproksimativna jedinica u I. Iz definicije kvocijentne norme na A/I, za $a \in A$ i $\varepsilon > 0$ postoji $b \in I$ takav da je $\|a+b\| < \|a+I\| + \frac{\varepsilon}{2}$. Iz $e_i b \to b$ postoji $i_0 \in \mathbb{I}$ takav da je $\|b - e_i b\| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $i \geq i_0$. Sada za sve $i \geq i_0$ u A^1 imamo

$$\|a - e_i a\| \leq \|(1-e_i)(a+b)\| + \|b - e_i b\| \leq \|a+b\| + \|b - e_i b\| < \|a + I\| + \varepsilon$$

pa je $\|a+I\| = \lim_{i\in\mathbb{J}} \|a - e_i a\|$. Adjungiranjem dobivamo i

$$\|a+I\| = \|a^*+I\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a^* - e_i a^*\| = \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - a e_i\|.$$

□

Korolar 2.3.7 (Segal). *Neka je A C^*-algebra i I zatvoren ideal u A. Tada je A/I C^*-algebra.*

Dokaz. Neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica u I. Iz Teorema 2.3.6 slijedi da za $a \in A$ i $b \in I$ imamo u A^1:

$$\begin{aligned}
\|a+I\|^2 &= \lim_{i\in\mathbb{I}} \|a - a e_i\|^2 \\
&= \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)a^*a(1-e_i)\| \\
&\leq \sup_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)(a^*a+b)(1-e_i)\| + \lim_{i\in\mathbb{I}} \|(1-e_i)b(1-e_i)\| \\
&\leq \|a^*a+b\| + \lim_{i\in\mathbb{I}} \|b - b e_i\| \\
&= \|a^*a+b\|
\end{aligned}$$

pa uzimanjem infimuma po $b \in I$ slijedi $\|a+I\|^2 \leq \|a^*a+I\|$. Iz Propozicije 1.1.9 slijedi da je A/I C^*-algebra. □

Teorem 2.3.8. *Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam C^*-algebri A i B. Tada je $\phi(B)$ C^*-podalgebra od B.*

Dokaz. Inducirano preslikavanje $\dot{\phi} : A/\ker\phi \to B$ dano s $\dot{\phi}(a+\ker\phi) = \phi(a)$ je dobro definiran $*$-monomorfizam C^*-algebri $A/\ker\phi$ i B pa je $\dot{\phi}$ izometričan (usp. Prvi teorem o homomorfizmu za prstene). Stoga je $\dot{\phi}(A/\ker\phi) = \phi(A)$ potpuna pa je C^*-podalgebra od B. □

Istaknimo neke posljedice ovih rezultata:

Propozicija 2.3.9. *Neka je A C^*-algebra. Ako je I zatvoren ideal u A i J zatvoren ideal u I, tada je J ideal u A.*

Dokaz. J je samoadjungiran pa je dovoljno dokazati da za sve $a \in A$ i $b \in J$ vrijedi $ab \in J$. J je C^*-algebra pa je ovo prema Korolaru 2.2.3 dovoljno pokazati za sve $b \in J_+ = A_+ \cap J$. Neka je $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ aproksimativna jedinica u I. Tada za $b \in J_+$ imamo $e_i b^{\frac{1}{2}} \to b^{\frac{1}{2}}$ jer je $b^{\frac{1}{2}} \in J \subseteq I$. Odavde slijedi $a e_i b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \to ab$. Zbog $b^{\frac{1}{2}} \in J$ i $a e_i b^{\frac{1}{2}} \in I$ zaključujemo $ab \in J$. □

Propozicija 2.3.10. *Neka je A C^*-algebra te neka je B C^*-podalgebra od A i I zatvoren ideal u A. Tada je $B + I$ C^*-podalgebra od A.*

Dokaz. Treba dokazati da je $B + I$ zatvoren u A jer je ostalo jasno. Budući da je I zatvoren, on je Banachov prostor pa je ekvivalentno pokazati da je kvocijent $(B+I)/I$ Banachov prostor. $B \cap I$ je zatvoren ideal u B pa Korolar 2.3.7 povlači da je $B/(B \cap I)$ C^*-algebra. Preslikavanje

$$\phi : B/(B \cap I) \to A/I, \quad \phi(b + B \cap I) := b + I$$

je dobro definirani $*$-homomorfizam C^*-algebri $B/(B \cap I)$ i A/I. Njegova slika je $(B+I)/I$ pa je prema Teoremu 2.3.8 C^*-algebra. Posebno je i Banachov prostor, što dokazuje traženu tvrdnju. □

Uočimo da je ϕ $*$-izomorfizam C^*-algebri $B/(B \cap I)$ i $(B + I)/I$ (usp. Drugi teorem o homomorfizmu za prstene).

Tvrdnja ove propozicije specijalno povlači da je suma $I + J$ dva zatvorena ideala I, J u A opet zatvoren ideal u A.

Propozicija 2.3.11. *Ako je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam C^*-algebri A i B, tada je $\phi(A_+) = \phi(A)_+$.*

Dokaz. $\phi(A)$ je C^*-algebra pa vrijedi $\phi(A)_+ = \phi(A) \cap B_+$.

Neka je $a \in A_+$. Tada je $a = x^*x$ za neki $x \in A$ odakle slijedi $\phi(a) = \phi(x)^*\phi(x) \in \phi(A)_+$. Dakle, $\phi(A_+) \subseteq \phi(A)_+$.

Obratno, neka je $b \in \phi(A)_+$ i $a \in A$ takav da je $\phi(a) = b$. Tada je $\phi(a^*) = \phi(a)^* = b^* = b$ odakle slijedi $\phi(a^*a) = b^2$. Imamo

$$b^2 = \phi(a^*a) = \phi(|a|^2) = \phi(|a|)^2.$$

Iz jedinstvenosti drugog korijena na B_+ slijedi $b = \phi(|a|) \in \phi(A_+)$. □

2.4 Stanja i reprezentacije

Definicija 2.4.1. Reprezentacija C^*-algebre A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je svaki $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$. U ovoj situaciji najčešće označavamo $\mathcal{H}_\pi := \mathcal{H}$.

Za reprezentacije π i ρ algebre A kažemo da su **unitarno ekvivalentne** ako postoji unitaran operator $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\rho$ (tzv. **operator ispreplitanja**) takav da je $U\pi(a) = \rho(a)U$ (ekvivalentno $U\pi(a)U^* = \rho(a)$) za sve $a \in A$. U tom slučaju pišemo $\pi \sim \rho$ i lako vidimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na klasi svih reprezentacija C^*-algebre A.

Ako imamo familiju reprezentacija $(\pi_i)_{i\in I}$ C^*-algebre A, tada definiramo njihovu direktnu sumu $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$ formulom

$$\pi(a)(x_i)_{i\in I} = (\pi(a)x_i)_{i\in I}, \qquad \text{za sve } a \in A, (x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_{\pi_i}.$$

Tada je π reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_{\pi_i}$.

Za zatvoren potprostor $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}_\pi$ kažemo da je **π-invarijantan** ako je $\pi(a)$-invarijantan za sve $a \in A$. Uočimo da je restrikcija $\pi_\mathcal{K} : a \mapsto \pi(a)|_K$ reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$.

Ako je $\mathcal{K}$ π-invarijantan potprostor, tada je i $\mathcal{K}^\perp$ π-invarijantan. Zaista, za $a \in A$ i $\xi \in \mathcal{K}^\perp$ imamo

$$\langle \pi(a)\xi, k\rangle = \langle \xi, \underbrace{\pi(a^*)k}_{\in\mathcal{K}}\rangle = 0, \text{ za sve } k \in \mathcal{K}$$

pa je $\pi(a)\xi \in \mathcal{K}^\perp$. Posebno, vrijedi $\pi \sim \pi_\mathcal{K} \oplus \pi_{\mathcal{K}^\perp}$.

Za reprezentaciju π kažemo da je **ireducibilna** ako $\mathcal{H}$ nema netrivijalnih π-invarijantnih potprostora.

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $S \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ skup operatora. Tada **komutant** od S, u oznaci S', definiramo kao skup svih operatora iz $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ koji komutiraju sa svim operatorima iz S.

Lema 2.4.2. *Reprezentacija π C^*-algebre A je ireducibilna ako i samo ako su multipli identitete $1_{\mathcal{H}_\pi}$ jedini operatori koji komutiraju s $\pi(A)$.*

Dokaz. Ako π ima netrivijalan invarijantan potprostor, tada ortogonalna projekcija na taj potprostor komutira s $\pi(A)$ i nije skalarni operator. Obratno, ako neskalarni operator T komutira s $\pi(A)$, tada isto vrijedi i za T^* pa i realni i imaginarni dio od T komutiraju s $\pi(A)$. Jedan od njih je neskalarni pa zaključujemo da postoji neskalarni hermitski operator S koji komutira s $\pi(A)$. Slijedi da se $\sigma(S)$ sastoji od barem dvije točke. Stoga postoje nenul realne funkcije $f, g \in C(\sigma(S))$ takve da je $fg = 0$. Imamo $f(S), g(S) \in C^*(S) \subseteq \pi(A)'$ pa su $\overline{f(S)\mathcal{H}_\pi}$ i $\overline{g(S)\mathcal{H}_\pi}$ međusobno ortogonalni nenul π-invarijantni potprostori. Dakle, π je reducibilna. $\square$

Za reprezentaciju π C^*-algebre A definiramo **esencijalni potprostor** kao

$$\operatorname{ess}\pi := \overline{\operatorname{span}}\, \pi(A)\mathcal{H}_\pi = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(a)h : a \in A, h \in \mathcal{H}_\pi\}.$$

Uočimo da je $\operatorname{ess}\pi$ uvijek π-invarijantan. Za π kažemo da je **nedegenerirana** ako $\operatorname{ess}\pi = \mathcal{H}_\pi$.

Neka je $\xi \in \mathcal{H}_\pi$. Za potprostor

$$\overline{\pi(A)\xi} = \overline{\{\pi(a)\xi : a \in A\}}$$

kažemo da je **ciklički potprostor** za π. Uočimo da je $\pi(A)\xi$ uvijek π-invarijantan. Za vektor ξ kažemo da je **ciklički vektor** za π ako je $\pi(A)\xi = \mathcal{H}_\pi$. Za reprezentaciju π kažemo da je **ciklička** ako postoji ciklički vektor za π.

Propozicija 2.4.3. *Neka je A C^*-algebra i π njena reprezentacija.*

(i) Ako je A unitalna, tada je π nedegenerirana ako i samo ako vrijedi $\pi(1) = 1$.

(ii) π je nedegenerirana ako i samo ako za svaku aproksimativnu jedinicu $(e_i)_i$ u A vrijedi $\pi(e_i) \xrightarrow{SOT} 1$.

(iii) π je nedegenerirana ako i samo ako za svaki $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ vrijedi implikacija $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A \implies \xi = 0$.

Dokaz. (i) Ako je $\pi(1) = 1$, vrijedi $\operatorname{ess}\pi \supseteq \pi(1)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Obratno, pretpostavimo da je π nedegenerirana i da je $\pi(1) \neq 1$. Tada je $\pi(1)$ netrivijalan ortogonalan projektor na zatvoren potprostor $\pi(1)\mathcal{H}_\pi$ koji je π-invarijantan.

(ii) Ako za svaku aproksimativnu jedinicu $(e_i)_i$ u A vrijedi $\pi(e_i) \xrightarrow{SOT} 1$, tada za svaki $h \in \mathcal{H}_\pi$ imamo $\pi(e_i)h \to h$ pa je $\pi(A)\mathcal{H}_\pi$ gust u $\mathcal{H}_\pi$. Obratno, pretpostavimo da je π nedegenerirana. Neka je $h \in \mathcal{H}_\pi$ i $(e_i)_i$ aproksimativna jedinica u A. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog gustoće span $\pi(A)\mathcal{H}_\pi$ možemo odabrati $a_1, \ldots, a_n \in A$ i $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}_\pi$ takve da je

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k)h_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tada postoji indeks i_0 takav da za sve $i \geq i_0$ vrijedi

$$\left\| \pi(e_i) \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k)h_k - \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k)h_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pa $\|\pi(e_i)h - h\|$ za $i \geq i_0$ možemo ograničiti s

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left\|\pi(e_i)h - \pi(e_i)\sum_{k=1}^{n}\pi(a_k)h_k\right\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
&+ \underbrace{\left\|\pi(e_i)\sum_{k=1}^{n}\pi(a_k)h_k - \sum_{k=1}^{n}\pi(a_k)h_k\right\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
&+ \underbrace{\left\|\sum_{k=1}^{n}\pi(a_k)h_k - h\right\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti ε slijedi $\pi(e_i)h \to h$. Budući da je $h \in \mathcal{H}_\pi$ bio proizvoljan, slijedi $\pi(e_i) \xrightarrow{SOT} 1$.

(iii) Pretpostavimo da je π nedegenerirana i $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A$. Tada za svaki $a \in A$ i $h \in \mathcal{H}_\pi$ imamo

$$0 = \langle \pi(a)\xi, h\rangle = \langle \xi, \pi(a^*)h\rangle$$

odnosno $\xi \perp \pi(A)\mathcal{H}_\pi$ pa slijedi $\xi = 0$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ vrijedi $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A \implies a = 0$. Ako je $\xi \perp \pi(A)\mathcal{H}_\pi$, tada kao gore vidimo $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A$ pa je $\xi = 0$. Dakle, $\operatorname{ess}\pi = \mathcal{H}_\pi$.

□

Korolar 4.4.2 Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije u stvari pokazuje da za nedegeneriranu reprezentaciju π vrijedi $\operatorname{ess}\pi = \pi(A)\mathcal{H}_\pi$ i $\overline{\operatorname{span}}\,\pi(A)\xi = \pi(A)\xi$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$.

Definicija 2.4.4. Za linearan funkcional ρ na A kažemo da je **pozitivan** ako $a \geq 0 \implies \rho(a) \geq 0$. Ekvivalentno, ρ je pozitivan ako $\rho(b^*b) \geq 0$ za sve $b \in A$.

Definicija 2.4.5. Za linearan funkcional ρ na A kažemo da je **stanje** na A ako je pozitivan i norme 1.

Uočimo da je svaki $*$-homomorfizam (karakter) $\phi : A \to \mathbb{C}$ pozitivan funkcional:

$$\phi(a^*a) = \phi(a)^*\phi(a) = |\phi(a)|^2 \geq 0, \qquad \text{za sve } a \in A$$

Nadalje, iz napomene 2.3.5 slijedi da je $\|\phi\| = 1$ pa zaključujemo da je φ stanje.

Primjer 2.4.6. Promotrimo C^*-algebru $C([0,1]^2)$ neprekidnih funkcija na jediničnom kvadratu. Ako je λ dvodimenzionalna Lebesgueova mjera, tada je linearan funkcional

$$C([0,1]^2) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_{[0,1]^2} f \, d\lambda$$

stanje na $C([0,1]^2)$, ali nije karakter.

Primjer 2.4.7. Linearan funkcional trag $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ je pozitivan linearan funkcional. Funkcional $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}$ je stanje na $M_n(\mathbb{C})$.

Lema 2.4.8. *Neka je f pozitivan funkcional u C^*-algebri A. Tada za sve $a, b \in A$ imamo*

1. $f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$.
2. *(CSB nejednakost)* $|f(a^*b)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b)$.

Dokaz. Za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo

$$0 \leq f((\lambda a + b)^*(\lambda a + b)) = \underbrace{|\lambda|^2 f(a^*a) + f(b^*b)}_{\in\mathbb{R}} + \overline{\lambda} f(a^*b) + \lambda f(b^*a)$$

pa slijedi $\mathrm{Im}(\overline{\lambda} f(a^*b) + \lambda f(b^*a)) = 0$. Biranjem $\lambda = 1$ odnosno $\lambda = i$ slijedi da su imaginarni odnosno realni djelovi od $f(b^*a)$ i $\overline{f(a^*b)}$ jednaki.

CSB nejednakost sada slijedi iz činjenice da je $(a, b) \mapsto f(b^*a)$ seskvilinearna pozitivna forma na A. $\square$

Lema 2.4.9. *Neka je A unitalna C^*-algebra i f pozitivan funkcional. Tada je $\|f\| = f(1)$.*

Dokaz. Očito je $\|f\| \geq f(1)$. Obratno, za $z \in A$, $\|z\| = 1$ imamo $z^*z \leq 1$ pa je $f(z^*z) \leq f(1)$. CSB nejednakost daje

$$|f(z)|^2 = |f(1^*z)|^2 \leq f(z^*z)f(1^*1) = f(z^*z)f(1) \leq f(1)^2.$$

Dakle, $\|f\| \leq f(1)$. $\square$

Lema 2.4.10. *Neka je τ pozitivan funkcional u C^*-algebri A. Tada je $N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}$ lijevi ideal u A.*

Dokaz. Da je N_τ lijevi ideal slijedi direktno iz

$$N_\tau = \{a \in A : \tau(b^*a) = 0, \forall b \in A\},$$

što dobijemo iz CSB nejednakosti. $\square$

Opišimo sada GNS konstrukciju. Neka je A C^*-algebra i τ stanje na A. Uvedimo skalarni produkt na vektorskom prostoru A/N_τ formulom

$$\langle a + N_\tau, b + N_\tau \rangle := \tau(b^*a), \quad \text{za sve } a, b \in A.$$

Neka A djeluje na A/N_τ lijevim multiplikacijama, tj. za $a \in A$ definiramo operator $\pi_\tau(a) : A/N_\tau \to A/N_\tau$ formulom $\pi_\tau(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau$. Operator $\pi_\tau(a)$ je ograničen. Zaista, za $b \in A$ imamo $b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$ pa djelovanjem pozitivnim funkcionalom τ dobivamo

$$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \tau(b^*a),$$

što je ekvivalentno s

$$\|\pi_\tau(a)(b + N_\tau)\| \leq \|a\| \|b + N_\tau\|$$

Neka je $\mathcal{H}_\tau$ Hilbertov prostor koji je upotpunjenje unitarnog prostora A/N_τ. Operator $\pi_\tau(a)$ proširimo po gustoći do ograničenog operatora na $\mathcal{H}_\tau$ i označimo ga istom oznakom. Lako vidimo da je $\pi_\tau : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\tau)$ $*$-homomorfizam. Ako je $(e_i)_i$ aproksimativna jedinica za A, vidimo da je $\pi_\tau(e_i) \xrightarrow{SOT} 1_{\mathcal{H}_\tau}$ pa je τ nedegenerirana (Propozicija 2.4.3 (ii)).

Propozicija 2.4.11. *Neka je A neunitalna C^*-algebra i ρ stanje na A.*

(i) Za svaku aproksimativnu jedinicu $(e_i)_i$ u A vrijedi $\rho(e_i) \to 1$.

(ii) ρ se na jedinstven način proširuje do stanja τ na A^1 formulom $\tau(\lambda 1 + a) = \lambda + \rho(a)$.

Dokaz. (i) Za proizvoljnu aproksimativnu jedinicu $(e_i)_i$ slijedi da je $(\rho(e_i))_i$ rastuća mreža u $[0,1]$ pa $\rho(e_i) \to L \in [0,1]$. Primijetimo da je

$$e_i^2 = \left(e_i^{1/2}\right)^* e_i \left(e_i^{1/2}\right) \leq \left(e_i^{1/2}\right)^* 1 \left(e_i^{1/2}\right) = e_i.$$

Dakle, za proizvoljan $a \in A$ imamo

$$|\rho(e_i a)|^2 \leq \rho(e_i^2)\rho(a^*a) \leq \rho(e_i)\|a^*a\| \leq L\|a\|^2$$

pa prelaskom na limes slijedi $|\rho(a)|^2 \leq L\|a\|^2$. Iz

$$1 = \|\rho\| = \inf\{K > 0 : |\rho(a)| \leq K\|a\|, \forall a \in A\}$$

slijedi $L \geq 1$. Dakle, $L = 1$ i posebno imamo $|\rho(a)|^2 \leq \rho(a^*a)$.

(ii) Prvo uočimo da iz (*a*) i $\tau(a^*b) = \overline{\tau(b^*a)}$ slijedi $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$. Imamo

$$\begin{aligned}\tau((\lambda 1 + a)^*(\lambda 1 + a)) &= \tau(|\lambda|^2 1 + \overline{\lambda} a + \lambda a^* + a^* a)\\ &= |\lambda|^2 1 + \overline{\lambda}\rho(a) + \lambda\overline{\rho(a)} + \rho(a^*a)\\ &= |\lambda|^2 1 + 2\operatorname{Re}[\overline{\lambda}\rho(a)] + \rho(a^*a)\\ &\geq |\lambda|^2 1 - 2\,|\lambda\rho(a)| + |\rho(a)|^2\\ &= (|\lambda| - |\rho(a)|)^2\\ &\geq 0\end{aligned}$$

pa je τ pozitivan funkcional. Iz $\tau(1) = 1$ slijedi da je τ stanje.

□

Propozicija 2.4.12. *Ako je ρ stanje na C^*-algebri A, tada postoji jedinični vektor $h_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ ciklički za π_ρ takav da je $\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho\rangle$ za sve $a \in A$.*

Obratno, ako je h jedinični ciklički vektor reprezentacije $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$, tada je $\tau : a \mapsto \langle \pi(a)h, h\rangle$ stanje na A i $U : \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_\pi, a \mapsto \pi(a)h$ je unitaran operator takav da $\pi(a) = U\pi_\tau(a)U^*$ za sve $a \in A$.

Dokaz. Ako je A unitalna, stavimo $h_\rho = 1 + N_\rho$.

Ako A nije unitalna, prema Propoziciji 2.4.11 proširimo ρ do stanja τ na A^1. Promotrimo izometriju $V : \mathcal{H}_\rho \to \mathcal{H}_\tau$ definiranu s $V(a + N_\rho) = a + N_\tau$. Uočimo da za sve $a \in A$ vrijedi $V\pi_\rho(a) = \pi_\tau(a)V$. Tada $\mathcal{H}_\rho$ možemo identificirati s potprostorom $V\mathcal{H}_\rho \subseteq \mathcal{H}_\tau$. Zaista, $\mathcal{H}_\rho$ je esencijalni potprostor od $\pi_\tau|_A = \pi_\rho \oplus 0$ na $\mathcal{H}_\rho \oplus \mathcal{H}_\rho^\perp = \mathcal{H}_\tau$. Projekcija h_ρ vektora $1 + N_\tau$ na potprostor $\mathcal{H}_\rho$ zadovoljava

$$\pi_\rho(a)h_\rho = \pi_\tau(a)(1 + N_\tau) = a + N_\tau$$

pa je h_ρ ciklički vektor za π_ρ i zadovoljava

$$\langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho\rangle = \langle \pi_\tau(a)(1 + N_\tau), 1 + N_\tau\rangle = \tau(a) = \rho(a)$$

U stvari smo pokazali da je $\mathcal{H}_\rho = \mathcal{H}_\tau$ jer

$$1 \leq \|\rho\| \leq \|h_\rho\|^2 \leq \|1 + N_\tau\|^2 = 1$$

pa slijedi $h_\rho = 1 + N_\tau$.

Za obrat, uočimo da je τ pozitivan funkcional norme najviše $\|h\|^2 = 1$. U stvari je $\|\tau\| = 1$ jer za bilo koju aproksimativnu jedinicu $(e_i)_i$ od A vrijedi $\tau(e_i)h \to h$. Vrijedi

$$N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\} = \{a \in A : \langle \pi(a^*a)h, h\rangle = 0\} = \{a \in A : \pi(a)h = 0\}$$

pa je dobro definiran linearan operator $U_0 : A/N_\tau \to \mathcal{H}_\pi$, $U_0(a + N_\tau) = \pi(a)h$. U_0 je izometrija:

$$\langle U_0(a+N_\tau), U_0(b+N_\tau)\rangle = \langle \pi(a)h, \pi(b)h\rangle = \langle \pi(b^*a)h, h\rangle = \tau(b^*a) = \langle a+N_\tau, b+N_\tau\rangle$$

pa se proširuje do izometrije $U : \mathcal{H}_\tau \to \overline{\pi(A)h} = \mathcal{H}_\pi$ na upotpunjenju od A/N_τ. Stoga je U unitaran i imamo

$$U\pi_\tau(a)(b + N_\tau) = U(ab + N_\tau) = \pi(ab)h = \pi(a)(\pi(b)h) = \pi(a)U(b + N_\tau)$$

pa je $U\pi_\tau(a)U^* = \pi(a)$ za sve $a \in A$. $\square$

Korolar 2.4.13. *Ako je π ireducibilna reprezentacija C^*-algebre A i $h \in \mathcal{H}_\pi$ jedinični vektor, tada je π ekvivalentna GNS reprezentaciji π_ω dobivenoj iz stanja $\omega : a \mapsto \langle \pi(a)h, h\rangle$.*

Dokaz. Potrebno je pokazati da je h ciklički vektor za π. Imamo da je $\overline{\pi(A)h}$ π-invarijantan potprostor koji je zbog nedegeneriranosti od π netrivijalan. Slijedi da je $\overline{\pi(A)h} = \mathcal{H}_\pi$. $\square$

Vrijedi i obrat Leme 2.4.9:

Lema 2.4.14. *Neka je f linearan funkcional norme 1 na unitalnoj C^*-algebri A. Tada je f stanje ako i samo ako $f(1) = 1$.*

Dokaz. Znamo da stanja zadovoljavaju $f(1) = 1$. Pretpostavimo da vrijedi $f(1) = 1$ i da postoji $a \in A$ takav da je $f(a^*a) \notin [0, \infty\rangle$.

Tada geometrijski možemo odabrati $\lambda \in \mathbb{C}$ i $R > 0$ takve da je $\sigma(a^*a) \subseteq B(\lambda, R)$, ali $f(a^*a) \notin B(\lambda, R)$. Prva relacija povlači $\sigma(a^*a - 1) \subseteq B(0, R)$ pa je $\|a^*a - 1\| = r(a^*a - 1) \leq R$. Sada slijedi

$$|f(a^*a) - \lambda| = |f(a^*a) - \lambda f(1)| \leq \|f\|\|a^*a - 1\| \leq R$$

pa je $f(a^*a) \in B(\lambda, R)$ što je kontradikcija s drugom relacijom. $\square$

Lema 2.4.15. *Neka je A C^*-algebra i $a \in A$ hermitski element. Tada postoji stanje ρ od A takvo da je $|\rho(a)| = \|a\|$. Posebno, za svaki $a \in A$ postoji stanje ρ takvo da je $\rho(a^*a) = \|a\|^2$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A unitalna. Promotrimo komutativnu C^*-algebru $C^*(a)$ generiranu s a i 1. Geljfandova transformacija $\hat{a}$ je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu karaktera od $C^*(a)$ pa postiže maksimum u nekom karakteru ϕ:

$$|\phi(a)| = |\hat{a}(\phi)| = \|\hat{a}\|_\infty = \|a\|.$$

Korolar Hahn-Banachovog teorema povlači da postoji $\rho \in A^*$ takav da je $\rho|_{C^*(a)} = \phi$ i $\|\rho\| = \|\phi\| = 1$. Sada slijedi $\rho(1) = \phi(1) = 1$ pa je ρ stanje po Lemi 2.4.14. Imamo $|\rho(a)| = |\phi(a)| = \|a\|$ pa ρ zadovoljava traženo svojstvo. □

Za reprezentaciju kažemo da je **vjerna** ako ima trivijalnu jezgru.

Teorem 2.4.16 (Geljfand-Naimark)**.** *Svaka C^*-algebra A ima vjernu nedegeneriranu reprezentaciju.*

Dokaz. Za svaki $a \in A, a \neq 0$ prethodna lema daje stanje ρ_a od A sa svojstvom $\rho_a(a^*a) = \|a\|^2$. Neka je π_{ρ_a} pripadna GNS-reprezentacija of A s pripadnim cikličkim vektorom h_{ρ_a}. Tada $\pi_{\rho_a}(a) \neq 0$ jer

$$0 < \|a\|^2 = \rho_a(a^*a) = \langle \pi_{\rho_a}(a^*a)h_{\rho_a}, h_{\rho_a} \rangle = \|\pi_{\rho_a}(a)h_{\rho_a}\|^2.$$

Stoga je

$$\pi = \bigoplus_{a \in A, a \neq 0} \pi_{\rho_a}$$

vjerna reprezentacija od A. Ona je nedegenerirana kao direktna suma nedegeneriranih reprezentacija. □

Definicija 2.4.17. Neka je S konveksan skup u vektorskom prostoru X. Za točku $x_0 \in S$ kažemo da je **ekstremna točka** za S ako iz $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$ za $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ i $x, y \in S$ slijedi $x = y$. Skup svih ekstremnih točaka od S označavamo s $\operatorname{ext} S$.

Uočimo da je skup svih stanja C^*-algebre A konveksan.

Definicija 2.4.18. Ekstremnu točku konveksnog skupa svih stanja C^*-algebre nazivamo **čisto stanje**.

Lema 2.4.19. *Neka je ρ stanje C^*-algebre A. Tada je pripadna GNS-reprezentacija π_ρ ireducibilna ako i samo ako je ρ čisto stanje.*

Dokaz. Pretpostavimo da π_ρ nije ireducibilna; stoga postoji netrivijalan π_ρ-invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}_\rho$. Za pripadnu ortogonalnu projekciju P vrijedi $P \neq 0, 1$.

Zapisat ćemo ρ kao netrivijalnu konveksnu kombinaciju stanja. $\mathcal{K}$ je π_ρ-invarijantan pa $\pi_\rho(a)P = P\pi_\rho(a)$ za sve $a \in A$.

Neka je h_ρ ciklički vektor za π_ρ. Zbog $\overline{\pi_\rho(A)h_\rho} = \mathcal{H}_\rho$ imamo

$$Ph_\rho = 0 \implies \pi_\rho(A)Ph_\rho = 0 \implies P\pi_\rho(A)h_\rho \implies P\mathcal{H}_\rho \implies P = 0$$

pa je $Ph_\rho \neq 0$, te analogno slijedi $(1-P)h_\rho \neq 0$.

Stoga definiramo stanja ϕ, ψ od A:

$$\phi(a) = \left\langle \pi_\rho(a)\frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|}, \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|} \right\rangle, \qquad \psi(a) = \left\langle \pi_\rho(a)\frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|}, \frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|} \right\rangle.$$

Sada za stanje ρ imamo

$$\begin{aligned}
\rho(a) &= \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho\rangle \\
&= \langle \pi_\rho(a)h_\rho, Ph_\rho\rangle + \langle \pi_\rho(a)h_\rho, (1-P)h_\rho\rangle \\
&= \|Ph_\rho\|^2 \left\langle \pi_\rho(a)\frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|}, \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|} \right\rangle \\
&+ (1-\|Ph_\rho\|^2)\left\langle \pi_\rho(a)\frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|}, \frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|} \right\rangle \\
&= \|Ph_\rho\|^2\phi(a) + (1-\|Ph_\rho\|^2)\psi(a)
\end{aligned}$$

gdje je $\|Ph_\rho\|^2 \in \langle 0, 1\rangle$.

Kad bi bilo $\rho = \phi$, tada bismo imali

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho\rangle &= \rho(a) \\
&= \phi(a) \\
&= \frac{1}{\|Ph_\rho\|^2}\langle \pi_\rho(a)Ph_\rho, Ph_\rho\rangle \\
&= \frac{1}{\|Ph_\rho\|^2}\langle P\pi_\rho(a)h_\rho, Ph_\rho\rangle \\
&= \frac{1}{\|Ph_\rho\|^2}\langle \pi(a)_\rho h_\rho, Ph_\rho\rangle
\end{aligned}$$

odakle slijedi $h_\rho = \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|^2}$ pa onda $Ph_\rho = \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|^2}$, što povlači $\|Ph_\rho\|^2 = 1$. Ovo je kontradikcija s $\|Ph_\rho\|^2 \in \langle 0, 1\rangle$. Analognim računom za projektor $1-P$ slijedi da $\rho \neq \psi$. Dakle, ρ nije ekstremna točka skupa svih stanja od A.

Obratno, pretpostavimo da je π_ρ ireducibilna reprezentacija, uz $\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho\rangle$ za neki $h_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ jedinični ciklički vektor za π_ρ.

Pokažimo da je ρ ekstremna točka skupa svih stanja: pretpostavimo da je $\rho = \lambda\phi + (1-\lambda)\psi$ za neka stanja ϕ, ψ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Tvrdimo da vrijedi $\rho = \phi$.

ψ i ϕ su pozitivni pa je

$$N_\rho = \{a \in A : \rho(a^*a) = 0\} \subseteq N_\phi = \{a \in A : \phi(a^*a) = 0\}.$$

Vrijedi $\pi_\rho(a)h_\rho = \pi_\rho(b)h_\rho$ ako i samo ako $a - b \in N_\rho$ pa Cauchy-Schwarzova nejednakost povlači da je

$$[\pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(b)h_\rho] := \lambda\phi(b^*a)$$

dobro definirana seskvilinearna forma na gustom potprostoru $\pi_\rho(A)h_\rho$ od $\mathcal{H}_\rho$.

Nadalje, imamo

$$[\pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(a)h_\rho] = \lambda\phi(a^*a) = \rho(a^*a) - (1-\lambda)\psi(a^*a) \leq \rho(a^*a) = \|\pi_\rho(a)h_\rho\|^2$$

pa je $[\cdot,\cdot]$ ograničena seskvilinearna forma na $\pi_\rho(A)h_\rho$. Možemo ju po gustoći proširiti do ograničene seskvilinearne forme q na $\mathcal{H}_\rho$. Dakle, postoji ograničen operator $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\rho)$ takav da je $q(x,y) = \langle x, Ty\rangle$ za sve $x, y \in \mathcal{H}_\rho$. Posebno imamo

$$\langle \pi_\rho(a)h_\rho, T\pi_\rho(b)h_\rho\rangle = [\pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(b)h_\rho] = \lambda\phi(b^*a).$$

ϕ je pozitivan, a $\pi_\rho(A)h_\rho$ je gust pa je T pozitivan operator norme ≤ 1.

Nadalje, tvrdimo da $T \in \pi_\rho(A)'$. Zaista, za $a, b, c \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\rho(a)h_\rho, T\pi(c)\pi_\rho(b)h_\rho\rangle\rangle &= \lambda\phi\left((cb)^*a\right)\\
&= \lambda\phi\left(b^*(c^*a)\right)\\
&= \langle \pi_\rho(c^*a)h_\rho, T\pi_\rho(b)h_\rho\rangle\\
&= \langle \pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(c)T\pi(b)h_\rho\rangle.
\end{aligned}$$

Budući da je $\pi_\rho(A)h_\rho$ gust u $\mathcal{H}_\rho$, slijedi da je $\pi_\rho(c)T = T\pi_\rho(c)$. π_ρ je ireducibilna pa prema Lemi 2.4.2 vrijedi $\pi_\rho(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\rho}$, pa budući da je $T \geq 0$ postoji skalar $\alpha \geq 0$ takav da je $T = \alpha 1_{\mathcal{H}_\rho}$.

Ako je $(e_i)_i$ aproksimativna jedinica za A, tada za svaki $a \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\lambda\phi(a) &= \lim_i \lambda\phi(e_i a)\\
&= \lim_i \langle \pi_\rho(a)h_\rho, T\pi_\rho(e_i)h_\rho\rangle\\
&= \lim_i \alpha\langle \pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(e_i)h_\rho\rangle\\
&= \alpha\langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho\rangle\\
&= \alpha\rho(a).
\end{aligned}$$

Tada Propozicija 2.4.11 (i) povlači

$$\lambda = \lim_i \lambda\phi(e_i) = \lim_i \alpha\rho(e_i) = \alpha$$

odnosno $\rho = \phi$. □

Za dokaz sljedeće leme potreban nam je jedan klasični teorem funkcionalne analize, koji je iskazan u jeziku teorije lokalno konveksnih prostora. Dokaz teorema i neke osnovne informacije o lokalno konveksnim prostorima su u Appendixu 4.2.

Teorem 2.4.20 (Krein-Milman)**.** *Neka je S kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog prostora X. Tada je skup ekstremnih točaka* $\operatorname{ext} S$ *neprazan. Štoviše, S je zatvorena konveksna ljuska od* $\operatorname{ext} S$*, tj.*

$$S = \{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{ext} S, t_1, \ldots, t_n \geq 0, t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Lema 2.4.21. *Za svaki element a C^*-algebre A postoji čisto stanje ρ na A takvo da je $\rho(a^*a) = \|a\|^2$.*

Dokaz. Neka je Σ skup svih stanja ρ od A koja zadovoljavaju $\rho(a^*a) = \|a\|^2$. Prema Lemi 2.4.15 imamo $\Sigma \neq \emptyset$ i lako vidimo da je Σ slabo-$*$ kompaktan (kao zatvoren podskup od $\operatorname{Ball}(A^*)$ koja je slabo-$*$ kompaktna) i konveksan podskup duala A^*. Prema Krein-Milmanovom teoremu dobivamo da Σ ima ekstremnu točku ρ. Tvrdimo da je ρ nužno čisto stanje, tj. da je ekstremna točka većeg skupa svih stanja na A. Stoga pretpostavimo $\rho = \lambda\phi + (1-\lambda)\psi$ za neki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ i stanja ϕ, ψ na A. Imamo

$$\rho(a^*a) = \lambda\phi(a^*a) + (1-\lambda)\psi(a^*a) \leq \lambda\|a\|^2 + (1-\lambda)\|a\|^2 = \|a\|^2 = \rho(a^*a)$$

pa je $\phi(a^*a) = \|a\|^2 = \psi(a^*a)$. Stoga $\phi, \psi \in \Sigma$ pa iz $\rho \in \operatorname{ext}\Sigma$ slijedi $\rho = \phi = \psi$. Dakle, ρ je čisto stanje. □

Teorem 2.4.22. *Neka je A C^*-algebra. Za svaki $a \in A$ postoji ireducibilna reprezentacija π od A takva da je $\|\pi(a)\| = \|a\|$.*

Dokaz. Neka je $a \in A$ i odaberimo stanje ρ kao u prethodnoj lemi. Tada je π_ρ ireducibilna prema Lemi 2.4.19 i imamo

$$\|a\|^2 = \rho(a^*a) = \langle \pi_\rho(a^*a)h_\rho, h_\rho\rangle = \|\pi_\rho(a)h_\rho\|^2 \leq \|\pi_\rho(a)\|^2 \leq \|a\|^2$$

pa je $\|\pi_\rho(a)\| = \|a\|$. □

Poglavlje 3

Spektar C^*-algebre

3.1 Primitivni ideali. Spektar C^*-algebre

Definicija 3.1.1. **Spektar** $\hat{A}$ C^*-algebre A je skup klasa ekvivalencije unitarno ekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija od A.[1]

Primjer 3.1.2. Svaka ireducibilna reprezentacija od $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ je ekvivalentna identiteti $\mathrm{id} : \mathbb{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, tj. $\widehat{\mathbb{K}(\mathcal{H})} = \{[\mathrm{id}]\}$. Zaista, neka je $\pi : \mathbb{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ ireducibilna reprezentacija i $e \in \mathcal{H}$ jedinični vektor. Za $h, k \in \mathcal{H}$ definiramo operator $h \otimes \overline{k} \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ formulom $(h \otimes \overline{k})(v) := \langle v, k\rangle h$. Za $P = \pi(e \otimes \overline{e})$ vrijedi $P^2 = P^* = P$ pa je P ortogonalni projektor na $P(\mathcal{H}_\pi)$. Fiksirajmo jedinični vektor $\xi \in P(\mathcal{H}_\pi)$. Potprostor $\overline{\pi(\mathbb{K}(\mathcal{H}))\xi}$ je zatvoren, nenul (sadrži $\xi = \pi(e\otimes\overline{e})\xi$) i π-invarijantan pa je po ireducibilnosti od π jednak $\mathcal{H}_\pi$. Definiramo operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ kao $Uh = \pi(h\otimes\overline{e})\xi$. U je izometrija:

$$\begin{aligned}
\langle Ug, Uh\rangle &= \langle \pi(g \otimes \overline{e})\xi, \pi(h \otimes \overline{e})\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \pi((g \otimes \overline{e})^*(h \otimes \overline{e}))\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \pi((e \otimes \overline{g})(h \otimes \overline{e}))\xi\rangle \\
&= \langle \xi, \pi(\langle h, g\rangle(e \otimes \overline{e}))\xi\rangle \\
&= \langle g, h\rangle\langle \xi, \pi(e \otimes \overline{e})\xi\rangle \\
&= \langle g, h\rangle\|\xi\|^2 \\
&= \langle g, h\rangle.
\end{aligned}$$

[1] Uočimo da je $\hat{A}$ zaista skup: za svaku ireducibilnu reprezentaciju π od A i $h \in \mathcal{H}_\pi$ vrijedi da je $\pi(A)h$ gust u $\mathcal{H}_\pi$ pa je $\dim \mathcal{H}_\pi \leq \aleph_0 \cdot \mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, A$. Hilbertovi prostori iste dimenzije su izomorfni pa je svaka ireducibilna reprezentacija unitarno ekvivalentna reprezentaciji na nekom fiksnom Hilbertovom prostoru određene dimenzije.

U je i surjekcija jer $\{\pi(h \otimes \overline{k})\xi : h, k \in \mathcal{H}\} \subseteq \operatorname{ran} U$, a taj skup razapinje $\pi(\mathbb{K}(\mathcal{H}))\xi$, što je gust potprostor od $\mathcal{H}_\pi$:

$$\pi(h \otimes \overline{k})\xi = \pi(h \otimes \overline{k})\pi(e \otimes \overline{e})\xi = \langle e, k\rangle \pi(h \otimes \overline{e})\xi = \langle e, k\rangle Uh.$$

Dakle, U je unitaran operator. Nadalje

$$\begin{aligned}\pi(h \otimes \overline{k})(Ug) &= \pi((h \otimes \overline{k})(g \otimes \overline{e}))\xi \\ &= \langle g, k\rangle \pi(h \otimes \overline{e})\xi \\ &= \langle g, k\rangle Uh \\ &= U(\langle g, k\rangle h) \\ &= U((h \otimes \overline{k})g)\end{aligned}$$

pa po linearnosti i neprekidnosti slijedi $\pi(T)U = UT = U \operatorname{id}(T)$ za sve $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$. Dakle, π je unitarno ekvivalentna identiteti.

Primjer 3.1.3. Neka je K CH prostor. Tvrdimo da su sve ireducibilne reprezentacije od $C(K)$ jednodimenzionalne, tj. da su karakteri na $C(K)$. Neka je π ireducibilna reprezentacija od $C(K)$. $\pi(C(K))$ je komutativna pa po Lemi 2.4.2 imamo $\pi(C(K)) = \pi(C(K))' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$. Posebno je svaki potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ π-invarijantan pa zbog ireducibilnosti π slijedi $\dim \mathcal{H}_\pi = 1$. Nadalje, iz Leme 1.2.4 slijedi da je π evaluacija $f \mapsto f(t)$ u nekoj točki $t \in K$.

Definicija 3.1.4. Jezgre ireducibilnih reprezentacija C^*-algebre A zovemo **primitivnim idealima**. Skup svih primitivnih ideala od A nazivamo **prostor primitivnih ideala** ili **primitivni spektar** i označavamo s $\operatorname{Prim} A$.

Propozicija 3.1.5. *Neka je A C^*-algebra.*

(i) Svaki zatvoren ideal I u A je presjek primitivnih ideala koji ga sadrže:

$$I = \bigcap \{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}.$$

(ii) Ako je $I \in \operatorname{Prim} A$ i J, K dva ideala u A takva da je $J \cap K \subseteq I$, tada $J \subseteq I$ ili $K \subseteq I$.

Dokaz. (i) Očito je $I \subseteq \bigcap\{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}$. Obratno, za $a \in A, a \notin I$ moramo pokazati da postoji $P \in \operatorname{Prim} A$ takav da je $I \subseteq P$ i $a \notin P$. Promotrimo nenul element $a + I$ kvocijentne C^*-algebre A/I. Postoji ireducibilna reprezentacija π od A/I takva da je $\|\pi(a+I)\| = \|a+I\| \neq 0$. Tada ako je $q : A \to A/I$ kvocijentno preslikavanje, kompozicija $\pi \circ q : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ je ireducibilna (ima istu sliku kao π) reprezentacija od A takva da je $a \notin \ker(\pi \circ q)$.

(ii) Neka je $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ ireducibilna reprezentacija od A takva da je $\ker \pi = I$. Pretpostavimo $J \not\subseteq I$. Tada $\pi(J) \neq \{0\}$ pa je $\mathcal{V} := \overline{\operatorname{span}}\, \pi(J)\mathcal{H}_\pi$ nenul zatvoren potprostor od $\mathcal{H}_\pi$. Nadalje, $\mathcal{V}$ je i π-invarijantan jer je J ideal: za $x \in J, h \in \mathcal{H}_\pi$ imamo

$$\pi(a)(\pi(x)h) = \pi(ax)h \in \pi(J)\mathcal{H}_\pi$$

pa linearnost i neprekidnost od $\pi(a)$ povlače $\pi(a)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$. Ireducibilnost od π povlači $\overline{\operatorname{span}}\, \pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{V} = \mathcal{H}_\pi$. Sada je

$$\pi(K)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) \subseteq \pi(K \cap J)\mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(I)\mathcal{H}_\pi = 0$$

pa je $K \subseteq \ker \pi = I$.

□

Napomena 3.1.6. Za svaka dva zatvorena ideala J, K u C^*-algebri A općenito vrijedi $JK = J \cap K$. Naime, očito je $JK \subseteq J \cap K$. Obratno, $J \cap K$ je zatvoren ideal u A pa je i sam C^*-algebra. Dakle, $J \cap K$ djeluje sam na sebe lijevim množenjem. Prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije (Teorem 4.4.1), svaki $a \in J \cap K$ može se zapisati kao $a = bc$ za neke $b, c \in J \cap K$. Posebno $b \in J$, $c \in K$ pa je $a \in JK$, odakle slijedi $J \cap K \subseteq JK$.

U tom smislu (b) dio prethodne propozicije pokazuje da su primitivni ideali prosti. Naime neka su J, K (ne nužno zatvoreni) ideali u A takvi da je $JK \subseteq P$ za neki $P \in \operatorname{Prim} A$. Prelaskom na zatvarače slijedi $\overline{J} \cap \overline{K} = \overline{JK} \subseteq P$ pa $J \subseteq \overline{J} \subseteq P$ odnosno $K \subseteq \overline{K} \subseteq P$.

Napomena 3.1.7 (Aksiomi Kuratowskog)**.** Topologiju na skupu X možemo zadati tako da definiramo operator $\overline{\cdot} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sa svojstvima:

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(ii) $A \subseteq \overline{A}$ za sve $A \subseteq X$.

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ za sve $A \subseteq X$.

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ za sve $A, B \subseteq X$.

Štoviše, postoji jedinstvena topologija na X takva da $\overline{\cdot}$ odgovara operatoru zatvarača. Naime, definiramo da je $A \subseteq X$ zatvoren ako $A = \overline{A}$, tj. $A \supseteq \overline{A}$. Familija zatvorenih skupova zadovoljava tražena svojstva topologije:

- $\emptyset$ je zatvoren po definiciji. Za X imamo $\overline{X} \in \mathcal{P}(X)$ pa je $X \supseteq \overline{X}$.

- Iz (iii) slijedi monotonost: $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$. Neka je $(F_i)_{i\in I}$ indeksirana familija zatvorenih skupova u X. Za svaki $j \in I$ imamo $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq F_j$ pa i $\overline{\bigcap_{i\in I} F_i} \subseteq \overline{F_j} = F_j$. Slijedi $\overline{\bigcap_{i\in I} F_i} \subseteq \bigcap_{j\in J} F_j$ pa je i $\bigcap_{i\in I} F_i$ zatvoren.

- Neka su $F_1, \ldots, F_n \subseteq X$ zatvoreni. Tada indukcijom iz (iv) slijedi

$$\overline{F_1 \cup \cdots \cup F_n} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$$

  pa je $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ zatvoren.

Definicija 3.1.8. Neka je A C^*-algebra i $F \subseteq \operatorname{Prim} A$. Definiramo zatvarač $\overline{F}$ kao

$$\overline{F} = \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap F \subseteq P \right\}.$$

Ova definicija zadovoljava aksiome Kuratowskog; inducirana topologija na $\operatorname{Prim} A$ naziva se **Jacobsonova topologija**.

Zaista, provjerimo aksiome Kuratowskog:

(i)
$$\overline{\emptyset} = \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap \emptyset \subseteq P \right\} = \{ P \in \operatorname{Prim} A : A \subseteq P \} = \emptyset.$$

(ii) Za svaki $P \in F$ imamo $\bigcap F \subseteq P$ pa je $P \in \overline{F}$. Slijedi $F \subseteq \overline{F}$.

(iii) Uočimo da vrijedi $\bigcap F = \bigcap \overline{F}$. Naime, zbog $F \subseteq \overline{F}$ slijedi $\bigcap \overline{F} \subseteq \bigcap F$. Obratno, za svaki $P \in \overline{F}$ imamo $\bigcap F \subseteq P$ pa je $\bigcap F \subseteq \bigcap \overline{F}$. Iz ovoga slijedi

$$\overline{\overline{F}} = \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap \overline{F} \subseteq P \right\} = \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap F \subseteq P \right\} = \overline{F}.$$

(iv) Za $F \subseteq H \subseteq \operatorname{Prim} A$ imamo

$$\overline{F} = \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap F \subseteq P \right\} \subseteq \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \bigcap H \subseteq P \right\} = \overline{H}$$

pa slijedi $\overline{F} \cup \overline{G} \subseteq \overline{F \cup G}$. Obratno, neka je $P \in \overline{F \cup G}$. Tada je

$$\left(\bigcap F \right) \cap \left(\bigcap G \right) = \bigcap (F \cup G) \subseteq P$$

pa prostost od P povlači $\bigcap F \subseteq P$ ili $\bigcap G \subseteq P$, odnosno $P \in \overline{F}$ ili $P \in \overline{G}$.

Jezgre ekvivalentnih reprezentacija su jednake pa je preslikavanje $\theta_A : \hat{A} \twoheadrightarrow \operatorname{Prim} A$, $\pi \mapsto \ker \pi$ surjektivno. Ono nije uvijek injektivno, ali jest za velik broj C^*-algebri, npr. $C(T)$. Preslikavanjem $\pi \mapsto \ker \pi$ možemo povući Jacobsonovu topologiju s $\operatorname{Prim} A$ na $\hat{A}$. Formalno, za $S \subseteq \hat{A}$ definiramo da je otvoren u $\hat{A}$ ako i samo ako je $\{\ker \pi : \pi \in S\}$ otvoren u $\hat{A}$.

Ovdje smo uveli klasičnu pokratu: poistovjećujemo π s klasom ekvivalencije $[\pi]$.

Teorem 3.1.9. *Neka je $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ nedegenerirana reprezentacija C^*-algebre A. Tada postoje međusobno ortogonalni π-ciklički potprostori takvi da je njihova direktna suma gusta u $\mathcal{H}_\pi$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}$ familija svih skupova međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora od $\mathcal{H}_\pi$, parcijalno uređen inkluzijom. Iz Propozicije 2.4.3 (iii) slijedi da je π-ciklički potprostor $\overline{\pi(\mathcal{H}_\pi)\xi}$ netrivijalan za bilo koji nenul $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ pa zaključujemo $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Ako je $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ linearno uređen podskup, tada je $\bigcup \mathcal{R}$ očito gornja međa za $\mathcal{R}$ i element od $\mathcal{P}$. Stoga prema Zornovoj lemi familija $\mathcal{P}$ posjeduje maksimalni element X.

Dakle, X je skup međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora takav da ne postoji $Y \in \mathcal{P}$ sa svojstvom $X \subsetneq Y$. Neka je ΣX suma svih potprostora iz X. Pretpostavimo da ΣX nije gust u $\mathcal{H}_\pi$. Tada je $\mathcal{K} = (\Sigma X)^\perp \neq \{0\}$ π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}_\pi$. Restrikcija $\pi|_\mathcal{K}$ je nedegenerirana pa $\mathcal{K}$ sadrži neki ciklički potprostor $\mathcal{L}$. Tada za vrijedi $X \subsetneq X \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{P}$, što je kontradikcija s maksimalnošću od X.

□

Lema 3.1.10. *Neka je I ideal u C^*-algebri A i neka je $\pi : I \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ nedegenerirana reprezentacija. Tada se π na jedinstven način proširuje do nedegenerirane reprezentacije $\tilde{\pi} : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$. Ona zadovoljava $\tilde{\pi}(a)\pi(b) = \pi(ab)$ za sve $a \in A, b \in I$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je π ciklička reprezentacija s cikličkim vektorom $h \in \mathcal{H}_\pi$. Očito je jedini kandidat za $\tilde{\pi}(a)$ na gustom potprostoru $\pi(I)h$ od $\mathcal{H}_\pi$ zadan s

$$\tilde{\pi}(a)[\pi(b)h] := \pi(ab)h$$

za $a \in A, b \in I$, pri čemu je $ab \in I$. Jednom kad pokažemo da je $\tilde{\pi}$ dobro definiran, slijedi da je $\tilde{\pi}(a)$ očito linearan. Ograničenost slijedi iz $a^*a \leq \|a\|^2 1 \in A^1$, odnosno $b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\pi}(a)[\pi(b)h]\|^2 &= \|\pi(ab)h\|^2 \\
&= \langle \pi(ab)h, \pi(ab)h \rangle \\
&= \langle \pi(b^*a^*ab)h, h \rangle \\
&\leq \|a\|^2 \langle \pi(b^*b)h, h \rangle \\
&= \|a\|^2 \|\pi(b)h\|^2.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $\tilde{\pi}(a)$ dobro definiran: ako je $\pi(b)h = \pi(b')h$, tada je $\pi(b-b')h = 0$ pa je

$$\|[\pi(a(b-b'))h]\|^2 \leq \|a\|^2\|\pi(b-b')h\|^2 = 0$$

odnosno $\pi(ab)h = \pi(ab')h$.

U općem slučaju postoji familija međusobno ortogonalnih π-cikličkih potprostora $(\mathcal{H}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od $\mathcal{H}_\pi$ takva da je $\overline{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}_\lambda} = \mathcal{H}_\pi$. Za svaki $a \in A$ i $\lambda \in \Lambda$ postoji $\rho_\lambda \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_i)$ takav da je

$$\rho_\lambda(a)\pi(b)|_{\mathcal{H}_\lambda} = \pi(ab)|_{\mathcal{H}_\lambda}, \quad \text{za sve } b \in A.$$

Definirajmo $\rho(a) : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}_\lambda$ kao $\rho(a) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\rho_\lambda(a)$, tj. $\rho(a)|_{\mathcal{H}_\lambda} = \rho_\lambda(a)$. $\rho(a)$ je ograničen linearan operator na gustom potprostoru od $\mathcal{H}_\pi$ pa se proširuje do $\tilde{\pi}(a) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ s traženim svojstvom $\tilde{\pi}(a)\pi(b) = \pi(ab)$ za sve $a \in A, b \in I$.

Za $a \in A$ imamo

$$\tilde{\pi}(a)[\pi(b)h] = \pi(ab)h = \pi(a)[\pi(b)h], \text{ za sve } b \in A, h \in \mathcal{H}_\pi$$

pa je $\tilde{\pi}(a) = \pi(a)$, tj. $\tilde{\pi}$ proširuje π. $\tilde{\pi}$ je očito nedegenerirana zbog $\operatorname{ess}\tilde{\pi} = \overline{\operatorname{span}}\,\tilde{\pi}(A)\mathcal{H}_\pi \supseteq \overline{\operatorname{span}}\,\pi(I)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Pokažimo da je $\tilde{\pi}$ $*$-homomorfizam:

$$\tilde{\pi}(ab)[\pi(x)h] = \pi(abx)h = \tilde{\pi}(a)[\pi(bx)h] = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)[\pi(x)h],$$

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\pi}(a)\pi(x)h, \pi(y)k\rangle &= \langle\pi(ax)h, \pi(y)k\rangle \\
&= \langle h, \pi(x^*a^*)\pi(y)k\rangle \\
&= \langle h, \pi(x^*a^*y)k\rangle \\
&= \langle h, \pi(x)^*\pi(a^*y)k\rangle \\
&= \langle\pi(x)h, \pi(a^*y)k\rangle \\
&= \langle\pi(x)h, \tilde{\pi}(a^*)\pi(y)k\rangle,
\end{aligned}$$

gdje su $a, b \in A, x, y \in I$ i $h, k \in \mathcal{H}_\pi$. Zbog $\overline{\operatorname{span}}\,\pi(I)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$ slijedi $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$ i $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$.

□

Sljedeće dvije propozicije uspostavljaju vezu između spektra i primitivnog spektra C^*-algebre A i njenih ideala i kvocijenata. Prva to čini na skupovnoj razini, a druga na topološkoj.

Propozicija 3.1.11. *Neka je I ideal u C^*-algebri A i $q : A \to A/I$ kvocijentno preslikavanje. Tada*

(i) Preslikavanje $\pi \mapsto \pi|_I$ je bijekcija $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} \to \hat{I}$, a preslikavanje $P \mapsto P \cap I$ je bijekcija $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\} \to \operatorname{Prim} I$.

(ii) *Preslikavanje* $\pi \mapsto \pi \circ q$ *je bijekcija* $\widehat{A/I} \to \{\rho \in \hat{A} : \rho|_I = 0\}$, *a* $Q \mapsto q^{-1}(Q)$ *je bijekcija* $\operatorname{Prim} A/I \to \{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}$ *s inverzom* $P \mapsto P/I$.

Dokaz. (i) Neka je $\pi \in \hat{A}, \pi|_I \neq 0$. $\overline{\operatorname{span}}\, \pi(I)\mathcal{H}_\pi$ je zatvoren π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ pa mora biti $\overline{\operatorname{span}}\, \pi(I)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$, odnosno $\pi|_I$ je nedegenerirana. Ako je potprostor $\mathcal{V}$ od $\mathcal{H}_\pi$ $\pi|_I$-invarijantan, tada jednakost

$$\pi(a)[\pi(x)k] = \pi(ax)k, \quad a \in A, x \in I, k \in \mathcal{H}_\pi$$

pokazuje da je $\mathcal{V}$ π-invarijantan. Slijedi $\mathcal{V} = \{0\}$ ili $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\pi$ pa je $\pi|_I$ ireducibilna. Ako je $\pi \sim \rho$, trivijalno slijedi $\pi|_I \sim \rho|_I$ pa je $\pi \mapsto \pi|_I$ dobro definirano preslikavanje $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} \to \hat{I}$.

Pretpostavimo $\pi|_I \sim \rho|_I$. Tada postoji unitaran operator $U : \mathcal{H}_\rho \to \mathcal{H}_\pi$ takav da za sve $x \in I$ vrijedi $\pi(x)U = U\rho(x)$. Zaista, za $a \in A$ i $k \in \mathcal{H}_\rho$ imamo

$$U\rho(a)[\rho(x)k] = U\rho(ax)k = \pi(ax)Uk = \pi(a)[\pi(x)Uk] = \pi(a)U\rho(x)k$$

pa iz linearnosti i neprekidnosti slijedi $U\rho(a) = \pi(a)U$, odnosno $\pi \sim \rho$ pa je $\pi \mapsto \pi|_I$ injektivno.

Neka je $\rho \in \hat{I}$ te neka je $\tilde{\rho}$ proširenje od ρ do reprezentacije od A dobiveno iz Leme 3.1.10. Zbog $\tilde{\rho}(A) \supseteq \rho(I)$ dobivamo da je i $\tilde{\rho}$ ireducibilna reprezentacija. Slijedi da je $\pi \mapsto \pi|_I$ surjektivno.

Zbog $(\ker \pi) \cap I = \ker(\pi|_I)$ slijedi da je $P \mapsto P \cap I$ dobro definirano preslikavanje $\operatorname{Prim} A \to \operatorname{Prim} I$.

Dokažimo surjektivnost: svaka ireducibilna reprezentacija π od I se proširuje do ireducibilne reprezentacije $\tilde{\pi}$ od A pa je $\ker \pi = (\ker \tilde{\pi}) \cap I$.

Dokažimo injektivnost: neka su $P_1, P_2 \in \operatorname{Prim} A$, $I \not\subseteq P_1, P_2$ takvi da je $P_1 \cap I = P_2 \cap I$. Tada posebno $P_2 \cap I \subseteq P_1$ pa prostost od P_1 povlači $P_2 \subseteq P_1$. Iz simetrije slijedi $P_1 = P_2$.

(ii) Za svaku reprezentaciju π od A/I, reprezentacija $\pi \circ q$ od A ima istu sliku kao π. Stoga je $\pi \circ q$ ireducibilna ako i samo ako je π ireducibilna (Lema 2.4.2), i $\pi \circ q \sim \rho \circ q$ ako i samo ako $\pi \sim \rho$.

Slijedi da je $\pi \mapsto \pi \circ q$ dobro definirano injektivno preslikavanje $\widehat{A/I} \to \{\rho \in \hat{A} : \rho|_I \equiv 0\}$.

Dokažimo surjektivnost: neka je $\rho \in \hat{A}$ takva da je $I \subseteq \ker \rho$. Definiramo reprezentaciju $\widetilde{\rho} : A/I \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\rho)$ formulom $\widetilde{\rho}(a + I) = \rho(a)$. Stoga $\widetilde{\rho} \circ q = \rho$ i $\widetilde{\rho}$ je ireducibilna jer je ρ ireducibilna. Slijedi $\widetilde{\rho} \in \widehat{A/I}$. Odavde direktno slijedi i druga tvrdnja.

$\square$

Definicija 3.1.12. Neka je A C^*-algebra i neka je $F \subseteq \operatorname{Prim} A$. Definiramo **jezgru** od F kao

$$\ker(F) := \bigcap F = \bigcap_{J \in F} J.$$

Neka je $I \in \operatorname{Prim} A$. Definiramo **ljusku** od I kao $\operatorname{hull}(I) := \{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}$.

Propozicija 3.1.13. *(i) Preslikavanje $F \mapsto \ker(F)$ je bijekcija zatvorenih skupova od $\operatorname{Prim} A$ i zatvorenih ideala u A, s inverzom $I \mapsto \operatorname{hull}(I)$.*

(ii) Ako je I zatvoren ideal u A, tada je $P \mapsto P \cap I$ homeomorfizam otvorenog skupa $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\} \subseteq \operatorname{Prim} A$ na $\operatorname{Prim} I$. Preslikavanje $\pi \mapsto \pi|_I$ je homeomorfizam otvorenog skupa $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I = 0\} \subseteq \hat{A}$ na $\hat{I}$.

(iii) Ako je I ideal u A, i $q : A \to A/I$ kvocijentno preslikavanje, tada je $Q \mapsto q^{-1}(Q)$ homeomorfizam $\operatorname{Prim} A/I$ na zatvoren skup $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}$ u $\operatorname{Prim} A$, s inverzom $P \mapsto P/I$ i $\pi \mapsto \pi \circ q$ je homeomorfizam $\widehat{A/I}$ na zatvoren skup $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I = 0\}$ od $\hat{A}$.

Dokaz. (i) Prisjetimo se da za svaki ideal I u A vrijedi

$$I = \bigcap \{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\} = \bigcap \operatorname{hull}(I).$$

Odavde slijedi da je $\operatorname{hull}(I)$ zatvoren skup u $\operatorname{Prim} A$:

$$P \in \overline{\operatorname{hull}(I)} \iff \bigcap_{J \in \operatorname{hull}(I)} J \subseteq P \iff I \subseteq P \iff P \in \operatorname{hull}(I).$$

Također slijedi da je $I = \bigcap \operatorname{hull}(I) = \ker(\operatorname{hull}(I))$.

S druge strane, za $F \subseteq \operatorname{Prim} A$ vrijedi $\ker F \subseteq P \iff P \in \overline{F}$ pa za zatvoren F vrijedi $F = \{P \in \operatorname{Prim} A : \ker(F) \subseteq P\} = \operatorname{hull}(\ker(F))$.

(ii) Kanonska preslikavanja $\theta_A : \hat{A} \to \operatorname{Prim} A$ i $\theta_I : \hat{I} \to \operatorname{Prim} I$ su neprekidna i otvorena. Promotrimo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} \arrow[r, "\pi \mapsto \pi|_I"] \arrow[d, "\theta_I"'] & \hat{I} \arrow[d, "\theta_A"] \\
\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\} \arrow[r, "P \mapsto P \cap I"] & \operatorname{Prim} I
\end{tikzcd}$$

gdje su horizontalna preslikavanja bijekcije i

$$\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} = \theta_I^{-1}(\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\}).$$

Prema (i) slijedi da je $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\}$ otvoren skup u $\operatorname{Prim} A$. Preostaje dokazati da je $P \mapsto P \cap I$ homeomorfizam. Opišimo otvorene skupove u relativnoj topologiji na $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\}$.

Za $N \subseteq \operatorname{Prim} A$ vrijedi da je otvoren ako i samo ako postoji ideal J u A takav da je $N = \{P \in \operatorname{Prim} A : J \not\subseteq P\}$.

Za $M \subseteq \{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\}$ vrijedi da je otvoren u relativnoj topologiji na $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \not\subseteq P\}$ ako i samo ako postoji ideal J u A takav da je

$$M = \{P \in \operatorname{Prim} A, I, J \not\subseteq P\} = \{P \in \operatorname{Prim} A : I \cap J \not\subseteq P\}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz prostosti P. Sada je

$$\begin{aligned} P \in M &\iff I \cap J \not\subseteq P \\ &\iff I \cap J \not\subseteq I \cap P \\ &\iff I \cap P \in \{Q \in \operatorname{Prim} I : I \cap J \not\subseteq Q\} \end{aligned}$$

pa je $P \mapsto P \cap I$ homeomorfizam.

(iii) Prema (i) je $\operatorname{hull}(I) = \{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}$ zatvoren skup u $\operatorname{Prim} A$.

Zatvoreni skupovi u $\{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\}$ su oblika

$$\begin{aligned} \{P \in \operatorname{Prim} A : I \subseteq P\} \cap \{P \in \operatorname{Prim} A : J \subseteq P\} &= \{P \in \operatorname{Prim} A : I \cup J \subseteq P\} \\ &= \{P \in \operatorname{Prim} A : I + J \subseteq P\}. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo da su zatvoreni skupovi u $\operatorname{hull}(I)$ točno oblika

$$T_K = \{P \in \operatorname{Prim} A : K \subseteq P\}$$

za neki ideal K od A koji sadrži I. S druge strane, zatvoreni skupovi u $\operatorname{Prim} A/I$ su točno oblika

$$S_L = \{Q \in \operatorname{Prim} A/I : L \subseteq Q\}$$

za neki ideal L od A/I. Prema tome, $Q \mapsto q^{-1}(Q)$ preslikava $S_L \mapsto T_{q^{-1}(L)}$, a njen inverz $P \mapsto P/I$ preslikava $T_K \mapsto S_{K/I}$. Slijedi da je $Q \mapsto q^{-1}(Q)$ homeomorfizam.

□

Korolar 3.1.14. *Otvoreni skupovi u* $\operatorname{Prim} A$ *su točno oblika*

$$\mathcal{O}_J = \{P \in \operatorname{Prim} A : J \not\subseteq P\}$$

za neki ideal J *u* A.

Napomena 3.1.15. Uočimo da je prema Teoremu 2.4.22 $\|a\| = \|\pi(a)\|$ za neku $\pi \in \hat{A}$. Koristeći kanonski izomorfizam $A/P \cong \pi(A)$, gdje je $P = \ker \pi$, dobivamo $\|a\| = \|a + P\|$. Posebno,

$$\|a\| = \sup_{\pi \in \hat{A}} \|\pi(a)\| = \sup_{P \in \operatorname{Prim} A} \|a + P\|.$$

Propozicija 3.1.16. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Tada je $\hat{A}$ kompaktan prostor.* $\operatorname{Prim} A$ *je kompaktan prostor kao slika od $\hat{A}$ pri neprekidnoj funkciji θ_A.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ filter na $\hat{A}$. Tvrdimo da $\mathcal{F}$ ima gomilište. Za $F \in \mathcal{F}$ definiramo ideal $J_F = \bigcap_{\pi \in F} \ker \pi$ u A. Stavimo

$$J = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} J_F}$$

i tvrdimo da je J pravi zatvoren ideal u A. Pokažimo prvo da je J potprostor od A. Neka su $a, b \in J$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ nenul skalari te fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Tada postoje $a', b' \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} J_F$ takvi da vrijedi

$$\|a - a'\| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \quad \text{i} \quad \|b - b'\| \leq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}.$$

Postoje $F, G \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi $a' \in F$ i $b' \in G$. Zbog $F \cup G \supseteq F$ je i $F \cup G \in \mathcal{F}$ pa slijedi $\alpha a' + \beta b' \in J_{F \cup G}$. Slijedi

$$\|(\alpha a + \beta b) - \underbrace{(\alpha a' + \beta b')}_{\in J}\| \leq \varepsilon$$

pa zbog proizvoljnosti ε zaključujemo $\alpha a + \beta b \in J$. Analogno se dokazuje da je J ideal u A. Da je J pravi ideal slijedi iz činjenice da je za svaki $F \in \mathcal{F}$ ideal J_F disjunktan s otvorenom kuglom $B(1_A, 1)$ u A (Propozicija 1.2.8 (i)).

Iz Teorema 2.4.22 slijedi da postoji ireducibilna reprezentacija od A/J takva da je $\|\rho(1 + J)\| = \|1 + J\| = 1$. Propozicija 3.1.11 povlači da postoji $\eta \in \hat{A}$ takva da je $J \subseteq \ker \eta$. Stoga zbog $J_F \subseteq J$ vrijedi $\eta \in \{\pi \in \hat{A} : J_F \subseteq \ker \pi\} = \overline{F}$ za sve $F \in \mathcal{F}$ pa je η gomilište filtra $\mathcal{F}$. $\square$

Primjer 3.1.17. Promotrimo C^*-algebru $A := C(T, M_n(\mathbb{C}))$ za neki CH prostor T (operacije su definirane po točkama, a norma je dana s $\|f\|_\infty := \sup_{t \in T} \|f(t)\|_{M_n(\mathbb{C})}$). Pokazat ćemo da je

$$\hat{A} = \{[\varepsilon_t] : t \in T\}, \quad \operatorname{Prim} A = \{\ker \varepsilon_t : t \in T\}$$

gdje je $\varepsilon_t : A \to M_n(\mathbb{C}), a \mapsto a(t)$ evaluacija u točki $t \in T$. Nadalje, oba preslikavanja $t \mapsto [\varepsilon_t]$ i $t \mapsto \ker \varepsilon_t$ su homeomorfizmi.

Pretpostavimo da je $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ireducibilna reprezentacija od A. Ako s $1_n \in M_n(\mathbb{C})$ označimo jediničnu matricu, preslikavanje $f \mapsto f1_n$ je unitalni $*$-homomorfizam $C(T) \to A$ pa je preslikavanje $f \mapsto \pi(f1_n)$ nedegenerirana reprezentacija $C(T) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Za svaki $f \in C(T)$, $\pi(f1_n)$ komutira s $\pi(A)$ pa prema Lemi 2.4.2 slijedi da je $\pi(f1_n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. Prema istoj lemi slijedi da je $f \mapsto \pi(f1_n)$ ireducibilna pa prema Primjeru 3.1.3 slijedi da je unitarno ekvivalentna evaluaciji u nekoj točki $t \in T$. Stoga postoji $t \in T$ takav da je $\pi(f1_n) = f(t)1_{\mathcal{H}}$ za sve $f \in C(T)$.

Sada tvrdimo da je $I_t = \{a \in A : a(t) = 0\} \subseteq \ker \pi$. Zaista, neka je $a(t) = 0$ i uzmimo $\varepsilon > 0$. Odaberimo okolinu N od t takvu da je $\|a(s)\| < \varepsilon$ za sve $s \in N$. Prema Urysohnovoj lemi postoji $f \in C(T)$, $0 \leq f \leq 1$ takva da je $f(t) = 0$ i $f(s) = 1$ za sve $s \notin N$. Tada za sve $s \in T$ imamo $\|a(s) - f(s)a(s)\| < \varepsilon$ i stoga $\|\pi(a) - \pi(f1_n)\pi(a)\| < \varepsilon$. Zbog $\pi(f1_n) = f(t)1_{\mathcal{H}} = 0$ slijedi $\|\pi(a)\| < \varepsilon$. Iz proizvoljnosti ε slijedi $\pi(a) = 0$.

Zbog $I_t \subseteq \ker \pi$, postoji reprezentacija $\widetilde{\pi} : A/I_t \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, $\widetilde{\pi}(a+I_t) := \pi(a)$ koja je ireducibilna jer ima istu sliku kao π. Preslikavanje $a \to a(t)$ inducira $*$-izomorfizam $\phi_t : A/I_t \to M_n(\mathbb{C})$ tako da je $\widetilde{\pi} \circ \pi_t^{-1}$ ireducibilna reprezentacija od $M_n(\mathbb{C})$. Prema Primjeru 3.1.2, ona je unitarno ekvivalentna identiteti pa je $\pi = \widetilde{\pi} \circ \pi_t^{-1} \circ \varepsilon_t$ unitarno ekvivalentna ε_t. Za različite $s, t \in T$ reprezentacije ε_s i ε_t očito imaju različite jezgre pa su neekvivalentne. Ovo opravdava opis od $\hat{A}$ i $\operatorname{Prim} A$, barem na skupovnoj razini.

Preostaje pokazati da su $t \mapsto [\varepsilon_t]$ i $t \mapsto \ker \varepsilon_t$ homeomorfizmi. Preslikavanje $[\varepsilon_t] \mapsto \ker \varepsilon$ je bijekcija $\hat{A} \to \operatorname{Prim} A$ pa je homeomorfizam. Stoga je dovoljno pokazati da je $t \mapsto \ker \varepsilon_t$ homeomorfizam, a za to je dovoljno pokazati da

$$\overline{\{\ker \varepsilon_t : t \in N\}} = \{\ker \varepsilon_t : t \in \overline{N}\}$$

za sve $N \subseteq T$. Znamo da je $\overline{\{\ker \varepsilon_t : t \in N\}} = \{\ker \varepsilon_t : t \in M\}$ za

$$M := \left\{ s \in T : \bigcap_{t \in N} \ker \varepsilon_t \subseteq \ker \varepsilon_s \right\}$$

i tvrdimo $\overline{M} = N$. Elementi od A su neprekidne funkcije na T pa $a = 0$ na N povlači $a = 0$ na $\overline{N}$ pa zasigurno $\overline{N} \subseteq M$. S druge strane, ako $s \notin \overline{N}$ tada prema Urysohnovoj lemi postoji $f \in C(T)$ takva da je $f|_{\overline{N}} = 0$ i $f(s) = 1$. Tada je $f1_n \in \ker \varepsilon_t$ za sve $t \in \overline{N}$, ali $f1_n \notin \ker \varepsilon_s$ što povlači $s \notin M$. Dakle, $M = \overline{N}$.

3.2 Dauns-Hofmannov teorem

Ako je P primitivni ideal C^*-algebre A, s $q_P : A \to A/P$ označavamo kanonski $*$-epimorfizam $a \mapsto a + P$.

Napomena 3.2.1. Centar $Z(A)$ C^*-algebre A je C^*-podalgebra od A. Zaista, lako se vidi da je $Z(A)$ $*$-podalgebra od A. Preostaje dokazati da je $Z(A)$ zatvoren podskup od A. Uočimo da je za fiksni $a \in A$ preslikavanje $[a, \cdot] : A \to A$, $[a, x] = ax - xa$ neprekidno pa je

$$Z(A) = \bigcap_{a \in A} \ker[a, \cdot]$$

zatvoren podskup od A.

Lema 3.2.2. *Neka je X normiran prostor i neka su $X_0, X_1, \ldots, X_n$ zatvoreni potprostori od X takvi da je za svaki $1 \leq k \leq n$ kanonski linearni izomorfizam*

$$\phi_k : (X_0 + \cdots + X_k)/((X_0 + \cdots + X_k) \cap X_{k+1}) \to (X_0 + \cdots + X_{k+1})/X_{k+1},$$

$$x + (X_0 + \cdots + X_k) \cap X_{k+1} \mapsto x + X_{k+1}$$

izometrija. Tada za svaki $x \in X_0 + \cdots + X_n$ i $\delta > 0$ postoje $x_i \in X_i$ $(0 \leq i \leq n)$ takvi da je $x = x_0 + \cdots + x_n$ i $\|x_i\| \leq (2 + \delta)\|x\|$ za sve $0 \leq i \leq n$.

Dokaz. Dokaz provodimo konačnom indukcijom. Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ tvrdnja leme vrijedi za $n = k$ i da je pretpostavka leme ispunjena za $n = k + 1$. Za $x \in X_0 + \cdots + X_{k+1}$ neka je $x' \in X_0 + \cdots + X_k$ takav da je $x - x' \in X_{k+1}$. Tada je $x + X_{k+1} = x' + X_{k+1}$ pa jer je ϕ_k izometričan imamo

$$\|x + X_{k+1}\| = \|x' + X_{k+1}\| = \|x' + (X_0 + \cdots + X_k) \cap X_{k+1}\|.$$

Neka je $\delta' > 0$. Tada po definiciji kvocijentne norme postoji $x'' \in (X_0 + \cdots + X_k) \cap X_{k+1}$ takav da je

$$\|x' + (X_0 + \cdots + X_k) \cap X_{k+1}\| + \delta'\|x + X_{k+1}\| > \|x' + x''\|.$$

Za $y := x' + x''$ vrijedi $y \in X_0 + \cdots + X_k$ i $x - y \in X_{k+1}$ pa slijedi

$$\|y\| < (1 + \delta')\|x + X_{k+1}\|.$$

Prema pretpostavci indukcije, za $\delta'' > 0$ postoje $x_i \in X_i$ takvi da je $y = x_0 + \cdots + x_k$ i $\|x_i\| \leq (2 + \delta'')\|y\|$ za sve $0 \leq i \leq k$.

Nadalje, za $x_{k+1} := x - y \in X_{k+1}$ imamo $x = x_0 + \cdots + x_{k+1}$ i $\|x_{k+1}\| \leq \|x\| + \|y\|$ odakle slijedi

$$\|x_i\| \leq (2 + \delta'')(1 + \delta')\|x\|, \quad 0 \leq i \leq k, \quad \|x_{k+1}\| \leq (2 + \delta')\|x\|.$$

Ako odaberemo $\delta', \delta'' > 0$ dovoljno malene tako da vrijedi $2\delta' + \delta'' + \delta'\delta'' \leq \delta$ dobivamo da $x_0, \ldots, x_{k+1}$ zadovoljavaju traženi uvjet. □

Lema 3.2.3. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Tada za $a \in A, f \in C(\operatorname{Prim} A)$ i $\varepsilon > 0$ postoji $b_\varepsilon \in A$ takav da vrijedi*

$$\|q_P(b_\varepsilon) - f(P)q_P(a)\| < \varepsilon, \qquad \text{za sve } P \in \operatorname{Prim} A. \tag{3.1}$$

Za svaki drugi $b'_\varepsilon \in A$ koji ovo zadovoljava vrijedi $\|b_\varepsilon - b'_\varepsilon\| < 2\varepsilon$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je f realna funkcija. $f(\operatorname{Prim} A)$ je kompakt u $\mathbb{R}$ pa skaliranjem možemo pretpostaviti da f poprima vrijednosti u $[0,1]$. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq k \leq n$ definiramo otvorene skupove

$$O_k := \left\{ P \in \operatorname{Prim} A : \frac{k-1}{n} < f(P) < \frac{k+1}{n} \right\}.$$

Tada je

$$\bigcup_{k=0}^{n} O_k = \operatorname{Prim} A, \qquad O_k \cap O_j = \emptyset \text{ za } |k-j| > 1.$$

Posebno, svaki $P \in \operatorname{Prim} A$ se nalazi u najviše dva skupa O_k. Za $0 \leq k \leq n$ neka su J_k ideali u A takvi da je $O_k = \mathcal{O}_{J_k}$, odnosno

$$J_k := \bigcap \{P \in \operatorname{Prim} A : P \notin O_k\}.$$

Vrijedi $J_0 + \cdots + J_n = A$. Zaista, kad bi bilo $J_0 + \cdots + J_n \neq A$, postojao bi $P \in \operatorname{Prim} A$ takav da je $J_0 + \cdots + J_n \subseteq P$, pa je $P \in \operatorname{Prim} A \setminus \bigcup_{k=0}^{n} O_k = \emptyset$, što je kontradikcija.

Prema Lemi 3.2.2 za $\delta = 1$ postoje $a_k \in J_k$ takvi da je

$$a = a_0 + \cdots + a_n, \qquad \|a_k\| \leq 3\|a\|.$$

Definiramo

$$b_{\frac{1}{n}} := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} a_k$$

i fiksirajmo $P \in \operatorname{Prim} A$. Za $0 \leq k \leq n$ vrijedi jedna od dvije mogućnosti:

- $P \in O_k$, tada je $\left|\frac{k}{n} - f(P)\right| < \frac{1}{n}$
- $P \notin O_k$, tada je $J_k \subseteq P$ pa je $q_P(a_k) = 0$

te se prvi slučaj događa za najviše dva $0 \leq k \leq n$. Stoga imamo

$$\begin{aligned}
\left\| q_P(b_{\frac{1}{n}}) - f(P)q_P(a) \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} q_P(a_k) - f(P)q_P(a_k) \right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - f(P) \right| \|q_P(a_k)\| \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ P \in \overline{O}_k}} \frac{1}{n} \|a_k\| \\
&\leq \frac{6}{n} \|a\|
\end{aligned}$$

pa ako izaberemo $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{6\|a\|}{\varepsilon}$, tada $b_\varepsilon := b_{\frac{1}{n}}$ zadovoljava traženi uvjet (3.1).

Ako je $f = f_1 + i f_2$ kompleksna funkcija, tada prethodni argument za $\frac{\varepsilon}{2}$ primijenjen na f_1 i f_2 daje $b^1_{\frac{\varepsilon}{2}}$ i $b^2_{\frac{\varepsilon}{2}}$ pa je $b_\varepsilon := b^1_{\frac{\varepsilon}{2}} + i b^2_{\frac{\varepsilon}{2}}$ traženi element.

Ako je $b'_\varepsilon \in A$ neki drugi element koji zadovoljava traženi uvjet, tada iz Napomene 3.1.15 imamo

$$\begin{aligned}
\|b_\varepsilon - b'_\varepsilon\| &= \sup_{P \in \operatorname{Prim} A} \|q_P(b_\varepsilon) - q_P(b'_\varepsilon)\| \\
&\leq \sup_{P \in \operatorname{Prim} A} \Big(\|q_P(b_\varepsilon) - f(P)q_P(a)\| + \|f(P)q_P(a) - q_P(b'_\varepsilon)\| \Big) \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.2.4 (Dauns-Hofmann, unitalni slučaj)**.** *Neka je A unitalna C^*-algebra. Za svaki $P \in \operatorname{Prim} A$ neka je $q_P : A \to A/P$ pripadni kvocijentni $*$-epimorfizam. Tada postoji $*$-izomorfizam $\Psi_A : Z(A) \to C(\operatorname{Prim} A)$ takav da vrijedi*

$$q_P(za) = \Psi_A(z) q_P(a), \qquad \text{za sve } z \in Z(A), a \in A, P \in \operatorname{Prim} A. \tag{3.2}$$

Dokaz. Neka je π ireducibilna reprezentacija od A. Stavimo $Z = Z(A)$, neka je $\hat{Z}$ prostor svih karaktera na Z te neka je $\check{Z} = \operatorname{Max} Z$ maksimalni spektar od Z (prostor svih maksimalnih ideala u Z).

Za svaki $z \in Z$ imamo $\pi(z) \in \pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$. Dakle $\pi(z) = \omega_\pi(z)1_{\mathcal{H}_\pi}$ gdje je $\omega_\pi : Z \to \mathbb{C}$ $*$-homomorfizam i $\omega_\pi(1) = 1$. Slijedi da je ω_π karakter of Z, tj. $\omega_\pi \in \hat{Z}$.

Imamo $\ker \omega_\pi = \ker \pi \cap Z$ pa ω_π ovisi samo o $\ker \pi$. Stoga je je $\chi_A : \operatorname{Prim} A \to \check{Z}$, $\chi_A(\ker \pi) = \ker \omega_\pi$ dobro definirano preslikavanje.

Tvrdimo da je χ_A neprekidno. Tipičan otvoren skup u $\check{Z}$ je oblika $\mathcal{O}_J = \{\ker \omega : \omega \in \hat{Z}, J \not\subseteq \ker \omega\}$ za neki ideal J u Z.

Promatramo ideal $A[J]$ u A generiran s J. Za njegov otvoren skup $\mathcal{V}_{A[J]} = \{P \in \operatorname{Prim} A : A[J] \not\subseteq P\}$ u $\operatorname{Prim} A$ vrijedi

$$\begin{aligned}\chi_A^{-1}(\mathcal{O}_J) &= \{P \in \operatorname{Prim} A : \chi_A(P) \in \mathcal{O}_J\}\\ &= \{\ker\pi : \pi \in \hat{A}, J \not\subseteq \ker\omega_\pi\}\\ &= \{\ker\pi : \pi \in \hat{A}, A[J] \not\subseteq \ker\pi\}\\ &= \mathcal{V}_{A[J]}.\end{aligned}$$

Slijedi da je χ_A neprekidno pa inducira $*$-homomorfizam

$$\Psi_A : Z(A) \to C(\operatorname{Prim} A), \quad \Psi_A(z) = \hat{z} \circ \theta_Z^{-1} \circ \chi_A$$

gdje je $\theta_Z : \hat{Z} \to \check{Z}, \omega \mapsto \ker\omega$ kanonski homeomorfizam i $\hat{z} : \hat{Z} \to \mathbb{C}$ Geljfandova transformacija od $z \in Z$. Eksplicitno

$$\Psi_A(z)(\ker\pi) = \hat{z}(\omega_\pi) = \omega_\pi(z), \quad z \in Z, [\pi] \in \hat{A}$$

odnosno $\Psi_A(z)(\ker\pi)1_{\mathcal{H}_\pi} = \pi(z)$.

Za $P \in \operatorname{Prim} A$ odaberimo $[\pi] \in \hat{A}$ takvu da je $P = \ker\pi$. Koristeći kanonski izomorfizam $A/P \to \pi(A)$, $a + P \mapsto \pi(a)$ imamo

$$q_P(za) = \pi(za) = \pi(z)\pi(a) = \Psi_A(z)(\ker\pi)\pi(a) = \Psi_A(z)(\ker\pi)q_P(a)$$

za sve $z \in Z$ i $a \in A$ pa vrijedi (3.2).

Odavde slijedi i injektivnost od Ψ_A. Naime, neka je $z \in Z$ takav da je $\Psi_A(z) = 0$. Gornja relacija za $a = 1$ i proizvoljan $P \in \operatorname{Prim} A$ daje $q_P(z) = P$ odnosno $z \in P$. Slijedi $z \in \bigcap \operatorname{Prim} A = \{0\}$.

Pokažimo surjektivnost od Ψ_A. Neka je $f \in C(\operatorname{Prim} A)$. Tada prema Lemi 3.2.3 za $a = 1$ dobivamo niz $\left(b_{\frac{1}{n}}\right)_n$ u A takav da vrijedi

$$\left\| q_P(b_{\frac{1}{n}}) - (f(P)1 + P) \right\| < \frac{1}{n}, \quad \text{za sve } P \in \operatorname{Prim} A \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

Iz drugog dijela leme slijedi da je niz $\left(b_{\frac{1}{n}}\right)_n$ Cauchyjev pa konvergira prema nekom $z \in A$. Prelaskom na limes u gornjoj relaciji dobivamo

$$q_P(z) = f(P)1 + P.$$

Uočimo da je $z \in Z$. Naime, za proizvoljan $a \in A$ imamo

$$\begin{aligned}q_P(za) = q_P(z)q_P(a) &= (f(P)1 + P)(a + P) = f(P)a + P = af(P)1 + P\\ &= (a + P)(f(P)1 + P) = q_P(a)q_P(z) = q_P(az)\end{aligned}$$

za svaki $P \in \operatorname{Prim} A$ pa je $za = az$. Tvrdimo da je $\Psi_A(z) = f$. Neka je $P \in \operatorname{Prim} A$ i neka je π ireducibilna reprezentacija od A takva da je $\ker \pi = P$. Koristeći kanonski izomorfizam $a + P \mapsto \pi(a)$ imamo

$$\Psi_A(z)(P)1_{\mathcal{H}_\pi} = \Psi_A(z)(\ker \pi)1_{\mathcal{H}_\pi} = \pi(z) = q_P(z) = f(P)1 + P = f(P)1_{\mathcal{H}_\pi}$$

odakle slijedi tražena tvrdnja. □

3.3 Vesterstrømov teorem

U ovom poglavlju ćemo dokazati glavni rezultat ovog rada: dat ćemo nužan i dovoljan uvjet na *unitalnu* C^*-algebru A takvu da za svaku C^*-algebru B i $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$ vrijedi

$$\phi(Z(A)) = Z(B). \tag{3.3}$$

U tom slučaju kažemo da A ima **CQ-svojstvo** (engl. centre-quotient property, pojam je uveo R. Archbold u svojoj disertaciji 1972.).

Definicija 3.3.1 (Kaplansky, [6]). Za unitalnu C^*-algebru kažemo da je **centralna** ako različiti primitivni ideali od A imaju različit presjek s centrom od A, tj.

$$P, Q \in \operatorname{Prim} A, P \neq Q \implies P \cap Z(A) \neq Q \cap Z(A).$$

Lema 3.3.2. *Neka je A centralna C^*-algebra i $P, Q \in \operatorname{Prim} A$. Tada je $P \cap Z(A) = Q \cap Z(A)$ ako i samo ako je $f(P) = f(Q)$ za sve $f \in C(\operatorname{Prim} A)$.*

Dokaz. Koristeći oznake iz dokaza Dauns-Hofmannovog teorema imamo

$$\begin{aligned} P \cap Z(A) = Q \cap Z(A) &\iff \chi_A(P) = \chi_A(Q) \\ &\iff (\hat{z} \circ \theta_Z^{-1} \circ \chi_A)(P) = (\hat{z} \circ \theta_Z^{-1} \circ \chi_A)(Q), \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\iff \Psi_A(z)(P) = \Psi_A(z)(Q), \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\iff f(P) = f(Q), \text{ za sve } f \in C(\operatorname{Prim} A). \end{aligned}$$

□

Napomena 3.3.3. U komutativnim C^*-algebrama karakteri se podudaraju s čistim stanjima. Naime, već znamo da su karakteri uvijek stanja. Karakteri su i čista stanja: neka je φ karakter komutativne C^*-algebre A i pretpostavimo da je $\varphi = \lambda\rho + (1 - \lambda)\tau$ za neka stanja ρ, τ na A. Ako je $\varphi(a) = 0$, tada je i $\varphi(a^*a) = 0$ pa je $\rho(a^*a) = 0$. Iz $|\rho(a)|^2 \leq \rho(a^*a) = 0$ slijedi $\rho(a) = 0$. Zaključujemo $\ker \varphi \subseteq \ker \rho$ pa iz elementarne linearne algebre slijedi da postoji skalar t takav da je $\rho = t\varphi$. Ako je $(e_i)_i$ aproksimativna jedinica za A, imamo

$$1 \leftarrow \rho(e_i) = t\varphi(e_i) \rightarrow t$$

pa je $t = 1$, odnosno $\varphi = \rho = \tau$.

Obratno, ako imamo čisto stanje ρ na komutativnoj C^*-algebri $C(X)$, tada je pripadna ireducibilna reprezentacija π_ρ unitarno ekvivalentna evaluaciji u nekoj točki $x \in X$, pa imamo $\rho(f) = \langle \pi_\rho(f)h_\rho, h_\rho\rangle = f(x)$, tj. ρ je evaluacija u točki x. Posebno, ρ je karakter.

Centralne C^*-algebre su karakterizirane sljedećim teoremom:

Teorem 3.3.4. *Unitalna C^*-algebra A je centralna ako i samo ako je* $\operatorname{Prim} A$ *Hausdorffov prostor. U tom je slučaju preslikavanje iz dokaza Dauns-Hofmannovog teorema*

$$\chi_A : \operatorname{Prim} A \to \operatorname{Max} Z(A) = \operatorname{Prim} Z(A), \quad \chi_A(P) = P \cap Z(A), P \in \operatorname{Prim} A$$

homeomorfizam.

Dokaz. Pretpostavimo da je A centralna i uzmimo $P, Q \in \operatorname{Prim} A$, $P \neq Q$. Iz prethodne leme slijedi da postoji $f \in C(\operatorname{Prim} A)$ takva da $f(P) \neq f(Q)$, odnosno funkcije iz $C(\operatorname{Prim} A)$ separiraju točke iz $\operatorname{Prim} A$. Odavde lagano slijedi da je $\operatorname{Prim} A$ Hausdorffov.

Obratno, pretpostavimo da je $\operatorname{Prim} A$ Hausdorffov i uzmimo $P, Q \in \operatorname{Prim} A$, $P \neq Q$. $\operatorname{Prim} A$ je kompaktan Hausdorffov prostor pa je posebno normalan. Korištenjem Urysohnove leme slijedi da postoji $f \in C(\operatorname{Prim} A)$ takva da je $f(P) = 0$ i $f(Q) = 1$. Specijalno, $f(P) \neq f(Q)$ pa prema prethodnoj lemi slijedi $P \cap Z(A) \neq Q \cap Z(A)$.

Preostaje dokazati da je χ_A homeomorfizam. Iz dokaza Dauns-Hofmannovog teorema znamo da je χ_A neprekidna. Injektivnost slijedi po definiciji centralnosti od A.

Za dokaz surjektivnosti uzmimo $\ker \omega \in \operatorname{Max} Z(A)$ za neki karakter $\omega \in \widehat{Z(A)}$. Iz Napomene 3.3.3 zaključujemo da je ω čisto stanje na $Z(A)$. Tvrdimo da se ω može proširiti do čistog stanja ω' na A. Definiramo skup

$$\Sigma = \{\tau \text{ stanje na } A : \tau|_{Z(A)} = \omega\}.$$

Hahn-Banachov teorem i $\omega(1) = \tau(1) = 1$ impliciraju $\Sigma \neq \emptyset$. Lako vidimo da je Σ konveksan slabo-$*$ kompaktan podskup od duala A^* pa Krein-Milmanov teorem povlači da Σ ima ekstremnu točku τ_0. Vrijedi da je τ_0 ekstremna točka i skupa svih stanja na A: pretpostavimo $\tau_0 = \lambda\phi + (1-\lambda)\psi$ za neki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ i stanja ϕ, ψ na A. Za svaki $z \in Z(A)$ imamo

$$\omega(z) = \tau_0(z) = \lambda\phi(z) + (1-\lambda)\psi(z).$$

Budući da je ω čisto stanje na $Z(A)$, slijedi da je $\phi|_{Z(A)} = \omega = \psi|_{Z(A)}$ odnosno $\phi, \psi \in \Sigma$. Sada zbog $\tau_0 \in \operatorname{ext}\Sigma$ dobivamo $\phi = \tau_0 = \psi$. Dakle, τ_0 je čisto stanje na A pa stavimo $\omega' = \tau_0$.

Neka je $\pi_{\omega'}$ ireducibilna reprezentacija od A dobivena iz ω', s cikličkim vektorom $h_{\omega'}$. Tvrdimo da vrijedi $\ker \pi_{\omega'} \cap Z(A) = \ker\omega$. Iz $\omega'(a) = \langle \pi_{\omega'}(a)h_{\omega'}, h_{\omega'}\rangle, \forall a \in A$ direktno slijedi $\ker \pi_{\omega'} \cap Z(A) \subseteq \ker\omega$.

S druge strane, za $z \in \ker\omega \subseteq \ker\omega'$ imamo $z^* \in \ker\omega'$ pa vrijedi

$$\langle \pi_{\omega'}(a)h_{\omega'}, \pi_{\omega'}(z)h_{\omega'}\rangle = \langle \pi_{\omega'}(z^*a)h_{\omega'}, h_{\omega'}\rangle = \omega'(z^*a) = 0, \text{ za sve } a \in A$$

zato što CSB nejednakost povlači

$$|\omega'(z^*a)| \leq \omega'(z^*z)\omega'(a^*a) = \underbrace{|\omega(z)|^2}_{=0}\omega'(a^*a) = 0.$$

Slijedi $\pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} \perp \pi_{\omega'}(A)h_{\omega'}$ pa zbog gustoće od $\pi_{\omega'}(A)h_{\omega'}$ imamo $\pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} = 0$. Odavde dalje slijedi

$$\pi_{\omega'}(z)\pi_{\omega'}(a)h_{\omega'} = \pi_{\omega'}(a)\pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} = 0$$

pa opet zbog gustoće od $\pi_{\omega'}(A)h'_{\omega}$ slijedi $\pi_{\omega'}(z) = 0$, tj. $z \in \ker \pi_{\omega'}$.

Dakle, $\chi_A(\ker \pi_{\omega'}) = \ker \pi_{\omega'} \cap Z(A) = \ker\omega$ pa je χ_A surjektivno. Napokon, χ_A je neprekidna bijekcija s kompaktnog prostora $\operatorname{Prim} A$ na Hausdorffov prostor $\operatorname{Max} Z(A)$ pa je homeomorfizam. □

Lema 3.3.5. *Neka su X i Y CH prostori te $F : X \to Y$ neprekidna funkcija. Definiramo $*$-homomorfizam $\phi_F : C(Y) \to C(X)$ formulom $\phi_F(f) := f \circ F$ za sve $f \in C(Y)$. Tada je ϕ_F injekcija ako i samo ako je F surjekcija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je F surjektivna. Tada iz $0 = \phi_F(f) = f \circ F$ slijedi $\{0\} = f(F(X)) = f(Y)$ pa je $f = 0$. Dakle, ϕ_F ima trivijalnu jezgru pa je injekcija.

Obratno, pretpostavimo da F nije surjekcija. Tada postoji $y \in Y \setminus F(X)$ pa prema Urysohnovoj lemi postoji funkcija $f \in C(Y)$ takva da je $f|_{F(X)} = 0$ i $f(y) = 1$ pa $\phi_F(f) = f \circ F = 0$. Dakle, $f \in \ker\phi_F$ i $f \neq 0$ pa ϕ_F nije injekcija. □

Sada dokazujemo jedan dovoljan uvjet za CQ-svojstvo (3.3):

Teorem 3.3.6 (Vesterstrøm)**.** *Neka su A i B unitalne C^*-algebre i $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Ako je A centralna, tada je i B centralna i vrijedi $\phi(Z(A)) = Z(B)$.*

Dokaz. Znamo da $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$ uvijek vrijedi. ϕ je $*$-epimorfizam pa možemo identificirati $A/\ker\phi$ s B. Iz Propozicije 3.1.13 slijedi da je preslikavanje

$$\check{\phi} : \operatorname{Prim} B \to \operatorname{Prim} A, \quad \check{\phi}(P) = \phi^{-1}(P), P \in \operatorname{Prim} B$$

homeomorfizam na svoju sliku koja je zatvorena u $\operatorname{Prim} A$. A je centralna pa je prema Teoremu 3.3.4 $\operatorname{Prim} A$ Hausdorffov. $\operatorname{Prim} B$ možemo identificirati s podskupom od $\operatorname{Prim} A$ pa je i $\operatorname{Prim} B$ Hausdorffov, odnosno B je centralna, prema istoj propoziciji.

Promotrimo restrikciju $\phi_Z := \phi|_{Z(A)} : Z(A) \to Z(B)$. Uočimo da je za svaki karakter $\omega \in \widehat{Z(B)}$ s $\omega_\phi := \omega \circ \phi_Z$ definiran karakter na $Z(A)$, odnosno $\omega_\phi \in \widehat{Z(A)}$. Preslikavanje $F : \widehat{Z(B)} \to \widehat{Z(A)}$, $\omega \mapsto \omega_\phi$ je neprekidno s obzirom na slabe-$*$ topologije. Nadalje, F je injektivno ako i samo ako je ϕ_Z surjektivno. Zaista, ϕ_Z inducira $*$-homomorfizam $\psi : C(\widehat{Z(A)}) \to C(\widehat{Z(B)})$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} Z(A) \arrow[r, "\phi_Z"] \arrow[d, "\Gamma_{Z(A)}"'] & Z(B) \arrow[d, "\Gamma_{Z(B)}"] \\ C(\widehat{Z(A)}) \arrow[r, "\psi"] & C(\widehat{Z(B)}) \end{tikzcd}$$

gdje su $\Gamma_{Z(A)}$ i $\Gamma_{Z(B)}$ pripadne Geljfandove transformacije. Obje su $*$-izomorfizmi pa slijedi da je ϕ_Z surjekcija ako i samo ako je ψ surjekcija. Za $a \in Z(A)$ imamo

$$\psi(\widehat{a}) = (\psi \circ \Gamma_{Z(A)})(a) = (\Gamma_{Z(B)} \circ \phi_Z)(a) = \widehat{\phi_Z(a)},$$

odnosno za $\omega \in \widehat{Z(A)}$ imamo

$$\psi(\widehat{a})(\omega) = \widehat{\phi_Z(a)}(\omega) = (\omega \circ \phi_Z)(a) = \widehat{a}(\omega \circ \phi_Z) = (\widehat{a} \circ F)(\omega).$$

Slijedi da za sve $f \in C(\widehat{Z(A)})$ imamo $\psi(f) = f \circ F$ pa prema Lemi 3.3.5 zaključujemo da je ψ surjektivno ako i samo ako je F injektivno. Konačno, imamo

$$F \text{ je injekcija} \iff \psi \text{ je surjekcija} \iff \phi_Z \text{ je surjekcija.}$$

Budući da je $\phi_Z^{-1}(\ker\omega) = (\omega \circ \phi_Z)^{-1}(0) = \ker\omega_\phi$ maksimalan ideal u $Z(A)$, slijedi da je

$$\check{\phi}_Z : \operatorname{Max} Z(B) \to \operatorname{Max} Z(A), \quad \check{\phi}_Z(J) = \phi_Z^{-1}(J), J \in \operatorname{Max} Z(B)$$

dobro definirano neprekidno preslikavanje koje je injektivno ako i samo ako je ϕ_Z surjektivno.

Prema Teoremu 3.3.4 slijedi da su χ_A i χ_B homeomorfizmi pa sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Prim} B & \xrightarrow{\check{\phi}} & \operatorname{Prim} A \\ {\scriptstyle\chi_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\chi_A} \\ \operatorname{Max} Z(B) & \xrightarrow{\check{\phi}_Z} & \operatorname{Max} Z(A) \end{array}$$

Zaista, za $P \in \operatorname{Prim} B$ imamo

$$\begin{aligned}(\chi_A \circ \check{\phi})(P) &= \chi_A(\phi^{-1}(P)) = \phi^{-1}(P) \cap Z(A) = \phi^{-1}(P) \cap \phi^{-1}(Z(B)) \cap Z(A) \\ &= \phi^{-1}(P \cap Z(B)) \cap Z(A) = \check{\phi}_Z(P \cap Z(B)) \\ &= (\check{\phi}_Z \circ \chi_B)(P).\end{aligned}$$

Dakle, imamo $\check{\phi}_Z = \chi_A \circ \check{\phi} \circ \chi_B^{-1}$ pa iz toga slijedi da je $\check{\phi}_Z$ injektivno, odnosno da je ϕ_Z surjektivno. Dakle, $\phi(Z(A)) = Z(B)$. $\square$

Sada ćemo dokazati da CQ-svojstvo (3.3) vrijedi i za širu klasu unitalnih C^*-algebri, tzv. slabo centralne C^*-algebre.

Lema 3.3.7. *Neka je A C^*-algebra. Tada je* $\operatorname{Max} A \subseteq \operatorname{Prim} A$.

Dokaz. Neka je $M \in \operatorname{Max} A$. Prema 2.4.22 postoji ireducibilna reprezentacija $\pi' : A/M \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ od A/M. A/M je prosta algebra pa slijedi da je π' vjerna. Tada je $\pi := \pi' \circ q : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ ireducibilna reprezentacija od A koja ima jezgru M. Specijalno, $M \in \operatorname{Prim} A$. $\square$

Skup $\operatorname{Max} A$ opskrbljujemo relativnom Jacobsonovom topologijom. Definiramo preslikavanje

$$\eta_A : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} Z(A), \quad \eta_A(M) := M \cap Z(A), M \in \operatorname{Max} A.$$

Iz dokaza Teorema 3.3.4 zaključujemo da je η_A surjektivno i očito neprekidno preslikavanje.

Definicija 3.3.8 (Misonou, [8]). Za unitalnu C^*-algebru A kažemo da je **slabo centralna** ako je preslikavanje η_A injektivno, tj. ako različiti *maksimalni* ideali u A imaju različit presjek s $Z(A)$.

Napomena 3.3.9. Ako je unitalna C^*-algebra slabo centralna, tada istim argumentom kao u dokazu Teorema 3.3.4 zaključujemo da je η_A homeomorfizam.

Primjer 3.3.10. Zbog $\operatorname{Max} A \subseteq \operatorname{Prim} A$ (Lema 3.3.7) je svaka je centralna C^*-algebra slabo centralna. Obrat općenito ne vrijedi: neka je $\mathcal{H}$ separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Tada C^*-algebra $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ sadrži jedinstven maksimalni ideal, ideal kompaktnih operatora $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ ([9, Theorem 4.1.15.]). Dakle, $\operatorname{Max} \mathbb{B}(\mathcal{H}) = \{\mathbb{K}(\mathcal{H})\}$ pa je η_A očito injektivno, tj. $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ je slabo centralna. Međutim, primitivni ideali $\{0\}$ i $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ imaju isti presjek $\{0\}$ s $Z(\mathbb{B}(\mathcal{H})) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ pa $\mathbb{B}(H)$ nije centralna. Alternativno, kako je $\{0\} \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{H})$ slijedi da je $\overline{\{0\}} = \{\{0\}, \mathbb{K}(\mathcal{H})\}$ pa $\operatorname{Prim} \mathbb{B}(\mathcal{H})$ nije niti T_1-prostor, a kamoli Hausdorffov. Sada slijedi da $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ nije centralna po Teoremu 3.3.4.

Lema 3.3.11 (Kineski teorem o ostacima za C^*-algebre)**.** *Neka je A unitalna C^*-algebra i I, J ideali u A takvi da je $I + J = A$. Tada postoji $*$-izomorfizam*

$$A/(I \cap J) \cong (A/I) \oplus (A/J).$$

Dokaz. Promotrimo $*$-homomorfizam $\phi : A \to A/I \oplus A/J$, $\phi(a) = (a + I, a + J)$.

ϕ je surjektivan. Naime, zbog $I + J = A$ postoje $a \in I, b \in J$ takvi da su $a + b = 1$. Neka je $(x + I, y + J) \in (A/I) \oplus (A/J)$ proizvoljan. Tada za $bx + ay$ imamo

$$\phi(bx + ay) = (bx + I, ay + J) = (bx + ax + I, ay + by + J) = (x + I, y + J).$$

Nadalje, očito je $\ker \phi = I \cap J$ pa Prvi teorem o izomorfizmu povlači

$$A/(I \cap J) = A/\ker \phi \cong \operatorname{Im} \phi = (A/I) \oplus (A/J).$$

□

Lema 3.3.12. *Neka je A unitalna prosta C^*-algebra. Tada je $Z(A)$ $*$-izomorfna s $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Znamo da je $Z(A)$ C^*-podalgebra od A. Pokazat ćemo da je $Z(A)$ algebra s dijeljenjem.

Neka je $z \in Z(A)$. Pretpostavimo da $z \notin A^\times$. Tada je zA pravi nenul ideal u A, što je kontradikcija. Dakle, postoji $z^{-1} \in A$. Tvrdimo $z^{-1} \in Z(A)$. Za svaki $a \in A$ imamo

$$z^{-1}a = z^{-1}(az)z^{-1} = z^{-1}(za)z^{-1} = az^{-1}.$$

Sada Geljfand-Mazurov teorem povlači $Z(A) \cong \mathbb{C}$. □

Sada iskazujemo karakterizaciju CQ-svojstva (3.3).

Teorem 3.3.13. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Tada je A slabo centralna ako i samo ako ima CQ-svojstvo.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A slabo centralna. Tada je sljedeći dijagram očito komutativan

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Max} B \arrow[r, "\check{\phi}|_{\operatorname{Max} B}"] \arrow[d, "\iota_B"'] & \operatorname{Max} A \arrow[d, "\iota_A"] \\
\operatorname{Prim} B \arrow[r, "\check{\phi}"] \arrow[d, "\chi_B"'] & \operatorname{Prim} A \arrow[d, "\chi_A"] \\
\operatorname{Max} Z(B) \arrow[r, "\check{\phi}_Z"] & \operatorname{Max} Z(A)
\end{tikzcd}$$

gdje su ι_A i ι_B inkluzije. Po pretpostavci, $\eta_A = \chi_A \circ \iota_A$ je injektivno, pa je injektivno i

$$\chi_A \circ \iota_A \circ \check{\phi}|_{\operatorname{Max} B} = \check{\phi}_Z \circ \chi_B \circ \iota_B = \check{\phi}_Z \circ \eta_B.$$

Odavde direktno slijedi da je η_B injektivno (drugim riječima, B je slabo centralna) pa je prema Napomeni 3.3.9 η_B homeomorfizam. Slijedi da je i $\check{\phi}_Z$ injektivno pa je prema diskusiji iz dokaza Teorema 3.3.6 ϕ_Z surjektivno, odnosno $\phi(Z(A)) = Z(B)$. Dakle, A ima CQ-svojstvo.

Obratno, pretpostavimo da A nije slabo centralna i neka su $M, N \in \operatorname{Max} A$, $M \neq N$ različiti maksimalni ideali takvi da je $M \cap Z(A) = N \cap Z(A)$. Tada je $M + N$ zatvoren ideal u A pa je zbog maksimalnosti $M + N = A$. Sada Lema 3.3.11 povlači $A/(M \cap N) \cong (A/M) \oplus (A/N)$. A/M je prosta C^*-algebra pa prema Lemi 3.3.12 slijedi $Z(A/M) \cong \mathbb{C}$. Analogno $Z(A/N) \cong \mathbb{C}$. Stoga imamo

$$Z(A/(M \cap N)) = Z((A/M) \oplus (A/N)) = Z(A/M) \oplus Z(A/N) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

S druge strane, promotrimo kanonski $*$-epimorfizam $q_{M \cap N} : A \to A/(M \cap N)$. Koristeći Drugi teorem o izomorfizmu, imamo:

$$\begin{aligned}
q_{M \cap N}(Z(A)) &= (Z(A) + M \cap N)/(M \cap N) \\
&\cong Z(A)/(Z(A) \cap (M \cap N)) \\
&= Z(A)/(Z(A) \cap M) \\
&\cong \mathbb{C}
\end{aligned}$$

jer je $Z(A) \cap M = \eta_A(M)$ maksimalan ideal u $Z(A)$. Dakle,

$$q_{M \cap N}(Z(A)) \neq Z(A/(M \cap N))$$

pa A ne zadovoljava CQ-svojstvo (3.3). □

Jedan od najvažnijih primjera slabo centralnih C^*-algebri su von Neumannove algebre (ali one općenito nisu centralne). Dokaz je netrivijalan, a relevantne reference se mogu pronaći u [11]. Više informacija o Von Neumannovim algebrama nalazi se u Appendixu 4.3.

Sada dajemo primjer C^*-algebre koja nije slabo centralna.

Primjer 3.3.14. Promotrimo C^*-algebru

$$A = \left\{ f \in C([0,1], M_2(\mathbb{C})) : f(1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ za neke } \lambda(f), \mu(f) \in \mathbb{C} \right\}.$$

Za $t \in [0,1\rangle$ označimo s $\pi_t : A \to M_2(\mathbb{C})$ evaluaciju u točki t te uvedimo jednodimenzionalne reprezentacije $\lambda, \mu : A \to \mathbb{C}$, $\lambda : f \mapsto \lambda(f), \mu : f \mapsto \mu(f)$. Može se pokazati ([10, Example A.25]) da je

$$\operatorname{Max} A = \operatorname{Prim} A = \{\pi_t : t \in [0,1\rangle\} \cup \{\ker \lambda, \ker \mu\}.$$

Centar od A je skup svih dijagonalih funkcija

$$Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} : f \in C([0,1]) \right\}$$

pa imamo

$$\ker \lambda \cap Z(A) = \ker \mu \cap Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} : f \in C([0,1]), f(1) = 0 \right\}.$$

Dakle, A nije (slabo) centralna.

Za eksplicitan primjer, definirajmo $*$-epimorfizam

$$\phi : A \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \phi(f) = (\lambda(f), \mu(f))$$

pa imamo

$$\phi(Z(A)) = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\} \subsetneq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = Z(B).$$

Poglavlje 4

Appendix

4.1 Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori

U ovom poglavlju dajemo neke osnovne informacije o LCH prostorima.

Propozicija 4.1.1. *Neka je Ω LCH prostor.*

(i) Neka je $x \in \Omega$ i $U \subseteq \Omega$ otvorena okolina od x. Tada postoji kompaktna okolina N od x takva da je $N \subseteq U$. Ekvivalentno, postoji pretkompaktna otvorena okolina V od x takva da je $\overline{V} \subseteq U$.

(ii) Neka je K kompaktan a U otvoren podskup od Ω takvi da je $K \subseteq U$. Tada postoji otvoren pretkompaktan $V \subseteq \Omega$ takav da je $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Dokaz. (i) Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je U pretkompaktan (u suprotnom promatramo $U \cap \operatorname{Int}(F)$ gdje je F kompaktna okolina od x). $\overline{U}$ je CH prostor, posebno regularan, kako je ∂U zatvoren u $\overline{U}$, postoje $V, W \subseteq \overline{U}$ disjunktni i otvoreni u $\overline{U}$ takvi da je $x \in V$, $\partial U \subseteq W$. Tada je V otvoren u Ω jer $V \subseteq U$, a $\overline{V}$ je zatvoren u $\overline{U} \setminus W$, što je kompaktan prostor kao zatvoren potprostor od $\overline{U}$. Dakle, $\overline{V}$ je tražena kompaktna okolina od x sadržana u U.

(ii) Za svaki $x \in K$ postoji pretkompaktan V_x takav da je $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$. $(V_x)_{x \in K}$ je otvoren pokrivač od K pa postoje $x_1, \dots, x_n \in K$ takvi da je $K \subseteq V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Tada je $\overline{V} = \overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}} \subseteq U$ i kompaktan je kao konačna unija kompaktnih skupova.

□

Propozicija 4.1.2. *Neka je Ω LCH prostor, K kompaktan i U otvoren skup u Ω takvi da je $K \subseteq U$.*

(i) (Urysohnova lema za LCH prostore) Postoji neprekidna funkcija $f : \Omega \to [0,1]$ *takva da je* $f|_K = 1$ *i* $\operatorname{supp} f \subseteq U$ *je kompaktan.*

(ii) Ako je $f : K \to [0,1]$ *neprekidna funkcija, tada postoji neprekidna funkcija* $F : \Omega \to [0,1]$ *takva da je* $F|_K = f$ *i* $\operatorname{supp} F \subseteq U$ *je kompaktan.*

Dokaz. (i) Neka je $\widetilde{\Omega}$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od Ω. Postoji pretkompaktan otvoren skup $V \subseteq \Omega$ takav da je $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. K i $\widetilde{\Omega} \setminus V$ su disjunktni zatvoreni podskupovi od $\widetilde{\Omega}$. $\widetilde{\Omega}$ je CH prostor, posebno normalan, pa prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $g : \widetilde{\Omega} \to [0,1]$ takva da je $f|_K = 1$ i $g|_{\widetilde{\Omega}\setminus V} = 0$. Promotrimo neprekidnu funkciju $f : \Omega \to [0,1]$, $f := g|_\Omega$. Tada je $f|_K = 1$ i $f(x) = 0$ za sve $x \in \Omega \setminus V$ pa je $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Uzimanjem zatvarača zaključujemo $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(ii) Postoji pretkompaktan otvoren skup $V \subseteq \Omega$ takav da je $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Prema klasičnom Tietzeovom teoremu primijenjenom na CH prostor $\overline{V}$, postoji $g : \overline{V} \to [0,1]$ neprekidna takva da je $g|_K = f$. Prema (i) postoji neprekidna funkcija $\phi : \Omega \to [0,1]$ takva da je $\phi|_K = 1$ i $\operatorname{supp} \phi \subseteq V$. Definiramo $F : \Omega \to [0,1]$ kao

$$F(x) = \begin{cases} g(x)\phi(x), & \text{ako je } x \in \overline{V} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

F je neprekidna prema lemi o uniji jer je $\phi \equiv 0$ na zatvorenom skupu ∂V. Nadalje, imamo $F|_K = f$ i $\operatorname{supp} F \subseteq \operatorname{supp} g \subseteq \overline{V}$.

□

Teorem 4.1.3 (Tietzeov teorem o proširenju za LCH prostore)**.** *Neka je* Ω *LCH prostor i* $K \subseteq \Omega$ *kompaktan. Ako je* $f \in C(K)$ *realna funkcija, tada postoji realna funkcija* $g \in C_c(\Omega)$ *koja proširuje* f*.*

Dokaz. Budući da je $\langle 0,1\rangle$ homeomorfan s $\mathbb{R}$, možemo pretpostaviti da je $f : K \to \langle 0,1\rangle$. Iz Propozicije 4.1.2 slijedi da postoji neprekidna funkcija $g : \Omega \to [0,1]$ s kompaktnim nosačem takva da je $g|_A = f$. Uočimo da je $g^{-1}(\{0,1\})$ zatvoren skup disjunktan s K pa prema Urysohnovoj lemi za LCH prostore postoji neprekidna funkcija $\phi : \Omega \to [0,1]$ takva da je $\phi|_{g^{-1}(\{0,1\})} = 0$ i $\phi|_A = 1$. Definirajmo $\widetilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ kao $\widetilde{g}(x) = \phi(x)g(x)$ za sve $x \in \Omega$. Vidimo da je $\widetilde{g}$ neprekidna, da $\widetilde{g}(\Omega) \subseteq \langle 0,1\rangle$ i da $\widetilde{g}|_A = g|_A = f$. Nadalje, $\operatorname{supp} \widetilde{g} \subseteq \operatorname{supp} g$ pa $\tilde{g}$ ima kompaktan nosač. □

Propozicija 4.1.4. *Neka je* Ω *LCH prostor.* $C_0(\Omega)$ *je uniformno zatvorena* $*$*-podalgebra od* $C_b(\Omega)$*. Posebno,* $C_0(\Omega)$ *je Banachov prostor s obzirom na sup-normu.*

Dokaz. Očito je $C_0(\Omega)$ samoadjungiran u $C_b(\Omega)$ jer je

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in \Omega : |\overline{f}(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Činjenica da je $C_0(\Omega)$ potprostor od $C_b(\Omega)$ slijedi iz

$$\{x \in \Omega : |\lambda f(x)| \geq \varepsilon\} = \left\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right\},$$

$$\{x \in \Omega : |f(x) + g(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in \Omega : |g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Pokažimo da je $C_0(\Omega)$ zatvoren u $C_b(\Omega)$. Neka je $(f_n)_n$ niz u $C_0(\Omega)$ koji konvergira uniformno prema $f \in C_b(\Omega)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada vrijedi

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{x \in \Omega : |f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Zaista, ako je $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ onda je

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Dakle, $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ je kompaktan. $\square$

Propozicija 4.1.5. *Neka je Ω LCH prostor. $C_0(\Omega)$ je uniformni zatvarač od $C_c(\Omega)$ unutar $C_b(\Omega)$.*

Dokaz. Zbog

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in \Omega : |f(x)| \neq 0\}$$

vrijedi $C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega)$ pa zbog zatvorenosti od $C_0(\Omega)$ slijedi $\overline{C_c(\Omega)} \subseteq C_0(\Omega)$.

Preostaje pokazati da se proizvoljna $f \in C_0(\Omega)$ može aproksimirati funkcijama iz $C_c(\Omega)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Skup $\left\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ je kompaktan pa prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $\phi : \Omega \to [0, 1]$ s kompaktnim nosačem takva da je $\phi|_{\left\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}} = 1$. Definiramo $h \in C_c(\Omega)$ s $h = f\phi$. Ako je $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ onda je $|f(x) - h(x)| = 0$, a za $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ imamo

$$|f(x) - h(x)| = |f(x) - f(x)\phi(x)| = |f(x)||1 - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pa je $\|f - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Dakle $\overline{C_c(\Omega)} = C_0(\Omega)$. $\square$

Propozicija 4.1.6. *Svaki Banachov prostor X je izometrički izomorfan zatvorenom potprostoru od $C(K)$ za neki CH prostor K.*

Dokaz. Prema Banach-Alaogluovom teoremu, $\mathrm{Ball}(X^*)$ sa slabom-$*$ topologijom je CH prostor. Definiramo preslikavanje $\beta : X \to C(\mathrm{Ball}(X^*))$ formulom

$$\beta(x)(f) = f(x)$$

za $f \in \mathrm{Ball}(X^*)$ i $x \in X$. $\beta(x)$ je zaista neprekidna funkcija $\mathrm{Ball}(X^*) \to \mathbb{C}$: ako $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$ onda

$$\beta(x)(f_\lambda) = f_\lambda(x) \to f(x) = \beta(x)(f)$$

za sve $x \in X$. β je linearno preslikavanje:

$$\begin{aligned}\beta(\lambda x + \mu u)(f) &= f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda \beta(x)(f) + \mu \beta(y)(f) \\ &= [\lambda \beta(x) + \mu \beta(y)](f)\end{aligned}$$

β je izometrija:

$$\|\beta(x)\|_\infty = \sup_{f \in \mathrm{Ball}(X^*)} |f(x)| = \|x\|.$$

Dakle, $\mathrm{Im}\,\beta$ je zatvoren potprostor od $C(\mathrm{Ball}(X^*))$ i $\beta : X \to \mathrm{Im}\,\beta$ je izometrički izomorfizam. $\square$

Propozicija 4.1.7. *Neka je Ω LCH prostor. Tada $\mathrm{Ball}(C_0(\Omega))$ ima barem jednu ekstremnu točku ako i samo ako je Ω kompaktan.*

Dokaz. Neka je Ω kompaktan. Tada je bilo koja $f \in C(\Omega)$ takva da je $|f(x)| = 1, \forall x \in \Omega$ ekstremna točka od $\mathrm{Ball}(C_0(\Omega))$. Zaista, pretpostavimo $f = (1-t)g + th$ za neke $t \in \langle 0, 1\rangle$, $g, h \in \mathrm{Ball}(C_0(\Omega))$. Za fiksan $x \in \Omega$ imamo

$$1 = |f(x)| = |(1-t)g(x) + th(x)| \le (1-t)|g(x)| + t|h(x)| \le (1-t) + t = 1$$

pa vrijedi $|g(x)| = |h(x)| = 1$ i jednakost u nejednakosti trokuta povlači da postoji $\lambda > 0$ takav da je $h(x) = \lambda g(x)$. Odavde dobivamo $1 = (1-t)|g(x)| + t|h(x)| = (1-t) + t\lambda$ pa je $\lambda = 1$. Dakle $g(x) = h(x) = f(x)$.

Obratno, neka Ω nije kompaktan. Pretpostavimo da je $f \in \mathrm{Ball}(C_0(\Omega))$ ekstremna točka. Tada je $\|f\|_\infty = 1$ i $\{x \in \Omega : |f(x)| \ge 1\} \ne \Omega$ pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $U = \{x \in \Omega : |f(x)| < 1 - \varepsilon\} \ne \emptyset$. Neka je $u \in U$ proizvoljan. Prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $\phi : \Omega \to [0, 1]$ takva da je $\phi(u) = 0$ i $\mathrm{supp}\, f \subseteq U$ kompaktan. Uočimo da vrijedi

$$f = \frac{1}{2}(f + \varepsilon\phi) + \frac{1}{2}(f - \varepsilon\phi)$$

i $\|f \pm \varepsilon\phi\|_\infty \leq 1$. Zaista, za $x \notin U$ je $|(f \pm \varepsilon\phi)(x)| = |f(x)| \leq 1$, a za $x \in U$ je

$$|(f \pm \varepsilon\phi)(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon|\phi(x)| < (1-\varepsilon) + \varepsilon = 1.$$

Vrijedi $(f \pm \varepsilon\phi)(u) = f(u) \pm \varepsilon$ pa f nije ekstremna točka, što je kontradikcija. $\square$

Propozicija 4.1.8. *Neka je Ω LCH prostor. Tada za svaku mrežu $(t_i)_{i\in I}$ u Ω vrijedi*

$$t_i \to t_0 \iff f(t_i) \to f(t_0), \forall f \in C_0(\Omega).$$

Dokaz. Implikacija $\implies$ je jasna iz neprekidnosti. Obratno, pretpostavimo $t_0 \not\to t_0$. Tada postoji otvorena okolina $U \ni t_0$ i $i_0 \in I$ takav da za svaki $i \geq i_0$ postoji $j \geq i$ takav da $t_j \notin U$. Prema Urysohnovoj lemi postoji $f \in C_c(\Omega)$, $f : \Omega \to [0,1]$ takva da je $f(t_0) = 1$ i $\operatorname{supp} f \subseteq U$. Tada za svaki $i \geq i_0$ postoji $j \geq i$ takav da $f(t_j) = 0$ pa $(f(t_i))_{i\in I}$ ne može konvergirati prema $f(t_0) = 1$. $\square$

4.2 Lokalno konveksni topološki vektorski prostori

Definicija 4.2.1. Za vektorski prostor X kažemo da je **topološki vektorski prostor** ako je snabdjeven Hausdorffovom topologijom s obzirom na koju su operacije zbrajanja $+ : X \times X \to X$ i množenja skalarom $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ neprekidne.

Neka je X vektorski prostor i neka je na X zadana separirajuća familija polunormi $\mathbb{P}$, tj. takva da iz $\|x\| = 0, \forall \|\cdot\| \in \mathcal{P}$ slijedi $x = 0$. Tada $\mathcal{P}$ inducira prirodnu topologiju τ na X kao slabu topologiju generiranu preslikavanjima $X \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x - x_0\|$ za $x_0 \in X$ i $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$. Znamo da je tada τ jedinstvena topologija na X sa svojstvom da za svaku mrežu $(x_i)_i$ u X i $x_0 \in X$ imamo

$$x_j \xrightarrow{\tau} x_0 \iff \|x_j - x_0\| \to 0, \quad \text{za svaku } \|\cdot\| \in \mathcal{P}.$$

Bazu okolina točke $x_0 \in X$ u topologiji τ čine skupovi oblina

$$U(x_0, \|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\|_1 < \varepsilon, \dots, \|x - x_0\|_n < \varepsilon\} = \bigcap_{k=1}^{n} B_{\|\cdot\|_k}(x_0, \varepsilon)$$

za $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n \in \mathcal{P}$ i $\varepsilon > 0$.

Lako se pokaže da su operacije zbrajanja i množenja skalarom neprekidne s obzirom na topologiju τ. Naime, za mrežu $((x_i, y_i))_i$ u $X \times X$ koja konvergira prema $(x, y) \in X \times X$ u produktnoj topologiji τ imamo $x_i \xrightarrow{\tau} x$ i $y_i \xrightarrow{\tau} y$ pa imamo

$$\|(x + y) - (x_i + y_i)\| \leq \|x - x_i\| + \|y - y_i\| \to 0$$

za svaku $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ odakle slijedi $x_i + y_i \xrightarrow{\tau} x + y$ pa je operacija + neprekidna. Slično, za mrežu $((\lambda_i, x_i))_i$ u $\mathbb{C} \times X$ koja konvergira prema $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times X$ u produktu standardne topologije na $\mathbb{C}$ i topologije τ imamo $\lambda_i \to \lambda$ u $\mathbb{C}$ i $x_i \xrightarrow{\tau} x$. Stoga

$$\|\lambda x - \lambda_i x_i\| \leq |\lambda_i|\|x - x_i\| + |\lambda - \lambda_i|\|x\| \to 0$$

za svaku $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ jer su mreže $(\lambda_i)_i$ i $(\|x_i\|)_i$ ograničene za dovoljno veliki indeks i. Zaključujemo $\lambda_i x_i \xrightarrow{\tau} \lambda x$ pa je operacija množenja skalarom neprekidna.

Slijedi da je (X, τ) topološki vektorski prostor, kojeg nazivamo **lokalno konveksan topološki vektorski prostor** generiran separirajućom familijom polunormi $\mathcal{P}$.

Ime lokalno konveksan dolazi od toga što nulvektor $0 \in X$ ima konveksnu bazu okolina (naime, lako se pokaže da su bazni otvoreni skupovi konveksni). Nadalje, i svaka točka $x_0 \in X$ ima konveksnu bazu okolina jer je translacija $x \mapsto x_0 + x$ homeomorfizam.

Štoviše, može se pokazati ([5, Teorem 1.2.2.]) da je svaki topološki vektorski prostor sa svojstvom da nulvektor ima konveksnu bazu okolina u stvari lokalno konveksan topološki vektorski prostor čija je topologija generirana nekom separirajućom familijom polunormi.

Skup svih neprekidnih linearnih funkcionala lokalno konveksnog prostora X označavamo s X^* i zovemo **dual** od X. Lako vidimo da je linearan funkcional $\varphi : X \to \mathbb{C}$ neprekidan ako i samo ako je neprekidan u 0, tj. ako za svaku mrežu $x_i \xrightarrow{\tau} 0$ vrijedi $\varphi(x_i) \to 0$.

Kao i kod normiranih prostora, linearni funkcionali su neprekidni ako i samo ako su ograničeni u sljedećem smislu:

Teorem 4.2.2. *Neka je X lokalno konveksan prostor čija je topologija generirana familijom polunormi $\mathcal{P}$. Neka je φ linearan funkcional na X. Ekvivalentno je:*

(i) φ je neprekidan.

(ii) Postoji konačno mnogo polunormi $\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_n \in \mathcal{P}$ i konstanta $C > 0$ tako da za sve $x \in X$ vrijedi

$$|\varphi(x)| \leq C \max\{\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n\}.$$

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Neka je φ neprekidan. Tada je $B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$ otvorena okolina 0 u $\mathbb{C}$ pa postoji bazna otvorena okolina $U = \bigcap_{i=1}^n B_i(0, \varepsilon)$ takva da je $\varphi(U) \subseteq B(0,1)$. Tvrdimo da vrijedi

$$|\varphi(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} \max\{\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n\}$$

za svaki $x \in X$.

Zaista, ako je $\|x\|_1 = \|x\|_2 = \cdots = \|x\|_n = 0$ za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ imamo $kx \in U$ pa je $k\varphi(x) = \varphi(kx) \in B(0,1)$, odakle slijedi $\varphi(x) = 0$ pa nejednakost vrijedi. U suprotnom, uočimo da je

$$\frac{\varepsilon}{2\max\{\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n\}} x \in U$$

pa je

$$|\varphi(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon}\max\{\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n\}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da je

$$|\varphi(x)| \leq C\max\{\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n\}, \qquad \text{za svaki } x \in X.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $U = \bigcap_{i=1}^n B_i\left(0, \frac{\varepsilon}{C}\right)$ vrijedi $\varphi(U) \subseteq B(0,\varepsilon)$. Dakle, φ je neprekidan u 0 pa je i neprekidan. □

Topologija lokalno konveksnog prostora općenito nije metrizabilna. Imamo sljedeći kriterij metrizabilnosti:

Propozicija 4.2.3. *Lokalno konveksan prostor X je metrizabilan ako i samo ako je njegova topologija generirana prebrojivom separirajućom familijom polunormi na X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je topologija od X generirana s prebrojivom familijom polunormi $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tada definiramo metriku $d : X \times X \to \mathbb{R}$ formulom

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}.$$

Tvrdimo da je topologija od X generirana metrikom d, tj. $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Prema pretpostavci znamo da X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Neka je $(x_n)_n$ niz u X takav da $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Tada

$$\frac{\|x-x_0\|_i}{1+\|x-x_0\|_i} \leq 2^i d(x,x_0)$$

pa $\|x-x_0\|_i \xrightarrow{n\to\infty} 0$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Dakle, $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} x_0$ pa zaključujemo $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}_d$. Alternativno, neka je $\bigcap_{i=1}^n B_i(x_0,r)$ bazni otvoreni skup u X. Za $\delta = \frac{1}{2^n}\min\{r,1\}$ imamo

$$d(x,x_0) < \delta \implies \frac{\|x-x_0\|_i}{1+\|x-x_0\|_i} < 2^d\delta \implies \|x-x_0\|_i < \frac{2^i\delta}{1-2^i\delta} \leq 2^i\delta < r$$

pa je $B_d(x_0,\delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i(x_0,r)$. Za proizvoljan $y \in \bigcap_{i=1}^n B_i(x_0,r)$ postoji bazni skup $B = \bigcap_{i=1}^m B_i(y,r')$ takav da je $y \in B \in \bigcap_{i=1}^n B_i(x_0,r)$ pa prema upravo dokazanom možemo upisati d-kuglu oko y u B. Zaključujemo da je $\bigcap_{i=1}^n B_i(x_0,r) \in \mathcal{T}_d$ pa je $\mathcal{T}_\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Obratno, neka je $B_d(x_0,r)$ za $r<2$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$. Tada za $\delta = \frac{r}{2-r}$ vrijedi da $\|x-x_0\|_i < \delta$ povlači

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\frac{\|x-x_0\|_i}{1+\|x-x_0\|_i} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\frac{r}{2} < \frac{r}{2}$$

pa slijedi $d(x,x_0) < r$. Dakle, $\bigcap_{k=1}^n B_k(x_0,\delta) \subseteq B_d(x_0,r)$. Za proizvoljan $y \in B_d(x_0,r)$ nađemo d-kuglu centriranu u y sadržanu u $B_d(x_0,r)$ pa ponovimo postupak. Zaključujemo da je $B_d(x_0,r) \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$ pa je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{P}$. Za obrat, pretpostavimo da je topologija od X metrizabilna s metrikom ρ. Promotrimo skupove $U_n = \{x \in X : \rho(x,0) < \frac{1}{n}\}$. U_n je otvorena okolina 0 pa postoji bazna okolina $\bigcap_{j=1}^k B_j(0,\varepsilon) \subseteq U_n$. Definiramo polunormu

$$p_n = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^n \|\cdot\|_j.$$

Tvrdimo da je topologija $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ generirana s $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednaka topologiji $\mathcal{T}_\rho$. Obje topologije zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti pa je dovoljno promatrati nizove. Uočimo da su p_n neprekidne s obzirom na ρ i da $p_n(x) < 1$ povlači $x \in U_n$. Pretpostavimo da $x_j \xrightarrow{\rho} x_0$. Tada zbog neprekidnosti $p_n(x_j - x_0) \xrightarrow{j\to\infty} 0, \forall n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo $\mathcal{T}_\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_\rho$. Obratno, pretpostavimo da $p_n(x_j - x_0) \xrightarrow{j\to\infty} 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i uzmimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Zbog $p_n(x_j - x_0) \xrightarrow{j\to\infty} 0$ postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da $p(x_j - x_0) < 1, \forall j \geq j_0$. Dakle za $j \geq j_0$ imamo

$$p(x_j - x_0) < 1 \implies x_j \in U_n \implies \rho(x_j, 0) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pa $x_j \xrightarrow{\rho} 0$. Dakle $\mathcal{T}_\rho \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{P}$. □

Kao i u normiranim prostorima, linearni funkcionali separiraju kompaktne konveksne skupove:

Teorem 4.2.4 (Hahn-Banachov teorem separacije, [2, Theorem IV.3.13.]). *Neka je X lokalno konveksan prostor i neka su S i K dva disjunktna konveksna podskupa od X. Ako je K kompaktan, tada postoje $\varphi \in X^*, \alpha \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za sve $x \in S$ i $y \in K$ imamo*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq \operatorname{Re}\varphi(y).$$

Iz Hahn-Banachovog teorema separacije direktno slijede neke tvrdnje čiji su analogoni za normirane prostore posljedica klasičnog Hahn-Banachovog teorema:

Korolar 4.2.5. *Neka je S konveksan podskup lokalno konveksnog prostora X. Točka $x_0 \in X$ pripada zatvaraču od S ako i samo ako postoji mreža $(x_i)_i$ u S takva da vrijedi $\varphi(x_i) \to \varphi(x_0)$ za sve $\varphi \in X^*$.*

Korolar 4.2.6. *Neka je X lokalno konveksan prostor i Y njegov zatvoren potprostor. Tada za svaku točku $x_0 \in X \setminus Y$ postoji $\varphi \in X^*$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$ i $\varphi|_Y = 0$.*

Odavde direktno slijedi da je dual netrivijalnog lokalno konveksnog prostora netrivijalan.

Primjer 4.2.7. Neka je X lokalno konveksan prostor.

- Svaki funkcional $\varphi \in X^*$ definira polunormu $x \mapsto |\varphi(x)|$ na X. Familija $\{|\varphi(\cdot)|\}_{\varphi \in X^*}$ je separirajuća prema Korolaru 4.2.6. Topologija w koju ona inducira zove se **slaba topologija** na X. U terminima mreža imamo

$$x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff \varphi(x_i) \to \varphi(x), \forall \varphi \in X^*.$$

- Svaki vektor $x \in X$ definira polunormu $\|\varphi\|_x := |\varphi(x)|$ na X^*. $\{\|\cdot\|_x\}_{x \in X}$ je očito separirajuća. Topologija w^* koju onda inducira zove se **slaba-$*$ topologija** na X^* i odgovara konvergenciji ograničenih funkcionala po točkama:

$$\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi_0 \iff \varphi_i(x) \to \varphi_0(x), \forall x \in X.$$

Propozicija 4.2.8. *Neka je X lokalno konveksan prostor i neka je $S \subseteq X$ konveksan. Tada je $\overline{S} = \overline{S}^w$.*

Dokaz. Korolar 4.2.5 povlači:

$$\begin{aligned} x \in \overline{S} &\iff \text{postoji mreža } (x_j)_j \text{ u } S \text{ takav da } x_j \to x \\ &\iff \text{postoji mreža } (x_j)_j \text{ u } S \text{ takav da } \varphi(x_j) \to \varphi(x), \forall \phi \in X^* \\ &\iff \text{postoji mreža } (x_j)_j \text{ u } S \text{ takav da } x_j \xrightarrow{w} x \\ &\iff x \in \overline{S}^w. \end{aligned}$$

□

Sada ćemo dokazati Krein-Milmanov teorem (preuzeto iz [2, Theorem V.7.4.]). Dokaz tvrdnje da je skup ekstremnih točaka neprazan je elementaran, a dokaz druge tvrdnje se temelji na Hahn-Banachovom teoremu separacije.

Dokaz Teorema 2.4.20. Lako se pokaže da je $a \in \operatorname{ext} S$ ako i samo ako je $S \setminus \{a\}$ relativno otvoren konveksan skup u S.

Stoga neka je $\mathcal{U}$ familija svih relativno otvorenih konveksnih pravih podskupova od S uređena inkluzijom. Zbog toga što je X lokalno konveksan prostor i $S \neq \emptyset$ (i možemo pretpostaviti da S ima barem dvije točke) slijedi $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{U}_0$ lanac u $\mathcal{U}$ i stavimo $U_0 = \bigcup \mathcal{U}_0$. Očito je U_0 otvoren konveksan skup. Kad bi bilo $U_0 = S$, tada bi zbog kompaktnosti od S postojao $U \in \mathcal{U}$, takav da je $U = S$, što je u kontradikciji s činjenicom da je U pravi podskup od S. Dakle, $U_0 \in \mathcal{U}$. Prema Zornovoj lemi, $\mathcal{U}$ ima maksimalan element U.

Za $x \in S$ i $\lambda \in [0,1]$ definiramo preslikavanje

$$T_{x,\lambda} : S \to S, \quad T_{x,\lambda}(y) = \lambda y + (1-\lambda)x, \text{ za sve } y \in S$$

za koje lako pokažemo da je neprekidno i afino, tj. da

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T y_j$$

za sve $y_1, \ldots, y_n \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ takve da je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

Za $x \in U$ i $\lambda \in [0,1\rangle$ imamo $T_{x,\lambda}(U) \subseteq U$. Dakle, $U \subseteq T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ i $T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ je otvoren konveksan podskup od K. Za $y \in \overline{U} \setminus U$ imamo $T_{x,\lambda}(y) \subseteq [x,y\rangle \subseteq U$[1]. Stoga $\overline{U} \subseteq T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ pa maksimalnost od U povlači $T_{x,\lambda}^{-1}(U) = S$. Dakle,

$$T_{x,\lambda}(S) \subseteq U, \quad \text{za } x \in U \text{ i } \lambda \in [0,1\rangle. \tag{4.1}$$

Tada uočimo da za proizvoljan otvoren konveksan podskup V od S imamo $V \cup U = U$ ili $V \cup U = S$. Zaista, iz (4.1) slijedi da je $V \cup U$ konveksan otvoren podskup od S pa tvrdnja slijedi iz maksimalnosti U.

Sada uočimo da ovo povlači da je $S \setminus U$ jednočlan. Zaista, pretpostavimo $a, b \in S \setminus U$, $a \neq b$. Neka su V_a, V_b disjunktni otvoreni konveksni podskupovi od K takvi da

[1]Općenito ako je A konveksan podskup lokalno konveksnog prostora X, $a \in \operatorname{Int} A$ i $b \in \overline{A}$, tada je $[a,b\rangle \subseteq \operatorname{Int} A$. Zaista, neka je $t \in \langle 0,1\rangle$ i $c = tb + (1-t)a$. Budući da je translacija homeomorfizam, postoji otvorena okolina V od 0 u X takva da je $a + V \subseteq A$. Tada za svaki $d \in A$ imamo

$$A \supseteq td + (1-t)(a+V) = t(d-b) + tb + (1-t)(a+V) = [t(d-b) + (1-t)V] + c$$

Postoji $d \in A$ takav da je $0 \in U := t(d-b) + (1-t)V$. (Zaista,

$$0 \in t(d-b) + (1-t)V \iff 0 \in t^{-1}(1-t)V + (d-b) \iff d \in b - t^{-1}(1-t)V$$

Međutim, $0 \in t^{-1}(1-t)V$ i ovaj skup je otvoren) Stoga je $c + U \subseteq A$ i U je otvorena okolina 0 pa je $c \in \operatorname{Int} A$.

je $a \in V_a$, $b \in V_b$. Zbog $a \notin U$ imamo $V_a \cup U = S$, ali to je kontradikcija s $b \notin V_a \cup U$. Stoga $S \setminus U = \{a\}$ i zaključujemo $a \in \operatorname{ext} S$.

U stvari vrijedi sljedeće: ako je V otvoren konveksan podskup od X takav da je $\operatorname{ext} S \subseteq V$, tada je i $S \subseteq V$. Zaista, pretpostavimo suprotno tj. da $V \cap S \neq S$. Tada je $V \cap S \in \mathcal{U}$ pa je sadržan u maksimalnom elementu $U \in \mathcal{U}$. Ovo je kontradikcija s činjenicom da je $S \setminus U = \{a\}$ za neki $a \in \operatorname{ext} S$.

Konačno, neka je $E = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} S)$ zatvorena konveksna ljuska od $\operatorname{ext} S$. Ako za neki $\varphi \in X^*$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi $E \subseteq V := \{x \in X : \operatorname{Re} \varphi(x) < \alpha\}$, tada prema prethodnoj tvrdnji slijedi i $S \subseteq V$. Hahn-Banachov teorem separacije sada povlači $E = S$.

□

4.3 Von Neumannove algebre

Promotrimo $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Uočimo da je jaka operatorska topologija (kraće SOT) na $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, u kontekstu prethodnog poglavlja, generirana separirajućom familjom polunormi $\{\|A(\cdot)\|\}_{A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})}$ pa je $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ opremljen jakom operatorskom topologijom lokalno konveksan prostor. Posebno, operacije zbrajanja i množenja skalarom su SOT-neprekidne. To općenito nije slučaj za operacije množenja (tj. kompozicije) i involucije.

Teorem 4.3.1 (Vigier)**.** *Neka je $(A_\lambda)_\lambda$ mreža hermitskih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $(A_\lambda)_\lambda$ SOT-konvergentan ako je rastuć i ograničen odozgo, ili ako je padajuć i ograničen odozdo.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju za rastuću mrežu jer inače pomnožimo sve operatore s -1.

Pretpostavimo stoga da je mreža $(A_\lambda)_\lambda$ rastuća i ograničena odozgo. Promatrajući odrezanu mrežu $(A_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ možemo pretpostaviti da je $(A_\lambda)_\lambda$ ograničena i odozdo. Slično, zbog translacije možemo pretpostaviti da su svi $A_\lambda \geq 0$.

Dakle, postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|A_\lambda\| \leq M$ za sve indekse λ. Slijedi da je za $x \in \mathcal{H}$ rastuća mreža $(\langle A_\lambda x, x \rangle)_\lambda$ u $\mathbb{R}$ ograničena odozdo (s $M\|x\|^2$) pa ova mreža konvergira. Koristeći polarizaciju, slijedi da je $(\langle A_\lambda x, y \rangle)_\lambda$ konvergentna mreža za sve $x, y \in \mathcal{H}$. Stavivši $\sigma(x, y) = \lim_\lambda \langle A_\lambda x, y \rangle$, lako se provjeri da je

$$\sigma : \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \sigma(x, y)$$

seskvilinearna forma na $\mathcal{H}$. σ je i ograničena zbog

$$|\sigma(x, y)| = \lim_\lambda |\langle A_\lambda x, y \rangle| \leq M\|x\|\|y\|$$

pa postoji $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ takav da je $\langle Ax, y\rangle = \sigma(x, y)$ za sve $x, y \in \mathcal{H}$. Lako se vidi da je $\|A\| \leq M$ da je A hermitski, i da $A_\lambda \leq A$ za sve indekse λ. Također za svaki $x \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned}\|Ax - A_\lambda x\|^2 &= \|(A - A_\lambda)^{\frac{1}{2}}(A - A_\lambda)^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\ &\leq \|A - A_\lambda\|\|(A - A_\lambda)^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\ &\leq 2M\langle (A - A_\lambda)x, x\rangle \\ &\xrightarrow{\lambda} 0\end{aligned}$$

pa $A_\lambda x \to Ax$. Slijedi $A_\lambda \xrightarrow{SOT} A$. $\square$

Lako vidimo da ako mreža ortogonalnih projektora $(P_\lambda)_\lambda$ jako konvergira k operatoru P, tada je i P ortogonalni projektor.

Lema 4.3.2. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i A $*$-podalgebra od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ koja sadrži $1_{\mathcal{H}_\pi}$. Tada je A SOT-gust u A''.*

Dokaz. Neka je $U \in A''$, $x \in \mathcal{H}$ i $K = \overline{Ax}$. Tada je K zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$ koji je V-invarijantan za svaki $V \in A$. A je samoadjungirana pa K reducira $\mathcal{H}$. Ako je P ortogonalan projektor na K, tada $P \in A'$ pa $UP = PU$. Stoga $Ux \in K$ pa postoji niz $(V_n)_n$ u A takav da $Ux = \lim_{n\to\infty} V_n x$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ preslikavanje

$$\varphi : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{B}(\mathcal{H}^n), \quad v \mapsto (\delta_{ij} v)$$

je unitalni $*$-homomorfizam pa je $\varphi(A)$ $*$-podalgebra od $\mathbb{B}(\mathcal{H}^n)$ koja sadrži $1_{\mathcal{H}^n}$. Nadalje, imamo $\varphi(U) \in (\varphi(A))''$. Zaista, za svaki $W \in (\varphi(A))'$ i $V \in A$ imamo $\varphi(V)W = W\varphi(V)$ odakle slijedi $VW_{ij} = W_{ij}V$. Dakle, $W_{ij} \in A'$ pa $UW_{ij} = W_{ij}U$ odnosno $\varphi(U)W = W\varphi(U)$.

Neka je sada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^n$. Po prvom dijelu dokaza postoji niz $(V_m)_m$ u A takav da $\varphi(V_m)x \to \varphi(U)x$. Stoga $V_m x_j \to Ux_j$ za sve $j = 1, \ldots, n$.

Ovo povlači da je U u SOT-zatvaraču od A. Zaista, ako je O SOT-okolina od U, moramo pokazati da je $O \cap A$ neprazan. Možemo pretpostaviti da je $O - U$ bazna okolina od 0. Stoga postoje elementi $x_1, \ldots, x_n \in H$ i $\varepsilon > 0$ takvi da

$$O - U = \{V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|Vx_j\| < \varepsilon, j = 1, \ldots, n\}.$$

Dakle, postoji niz $(V_m)_m$ u A takav da $V_m x_j \to Ux_j$ za sve $j = 1, \ldots, n$. Odavde slijedi da je $V_m \in O$ za dovoljno velik indeks m pa $O \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Definicija 4.3.3. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Za SOT-zatvorenu $*$-podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ kažemo da je **von Neumannova algebra** na $\mathcal{H}$.

SOT-zatvoren skup je i zatvoren u normi pa je svaka von Neumannova algebra ujedno i C^*-algebra.

Navedimo da je ℓ^∞ shvaćen kao algebra dijagonalnih operatora u $\mathbb{B}(\ell^2)$ s obzirom na standardnu ortonormiranu bazu za ℓ^2 von Neumannova algebra.

Uočimo da ako je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan tada $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ nije von Neumannova algebra. Zaista, ako je E ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, slijedi da mreža operatora konačnog ranga

$$\left(\sum_{e \in F} e \otimes \overline{e}\right)_{F \subseteq E \text{ neprazan konačan}}$$

SOT-konvergira prema $1_{\mathcal{H}} \notin \mathbb{K}(\mathcal{H})$.

Direktno iz prethodne leme slijedi:

Teorem 4.3.4. *(von Neumannov teorem o bikomutantu) Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i A $*$-podalgebra od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ koja sadrži $1_{\mathcal{H}_\pi}$. Tada je A von Neumannova algebra ako i samo ako $A'' = A$.*

Teorem 4.3.5. *Ako je $A \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ nenul von Neumannova algebra, tada je A unitalna.*

Dokaz. Neka je $(E_i)_i$ aproksimativna jedinica za A. Prema Vigierovom teoremu $(E_i)_i$ SOT-konvergira prema hermitskom operatoru $P \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. A je SOT-zatvorena pa očito $P \in A$. Nadalje, za $x \in \mathcal{H}$ i $U \in A$ imamo

$$PUx = \lim_i E_i Ux = Ux$$

pa je $PU = U$. Iz Propozicije 1.1.7 (i) slijedi da je P jedinica za A. $\square$

Općenito $P \neq 1_{\mathcal{H}}$.

4.4 Hewitt-Cohenov teorem faktorizacije

Neka je A normirana algebra i X normiran prostor. Za X kažemo da je **lijevi normiran A-modul** ako je X lijevi A-modul i postoji konstanta $\kappa \geq 1$ takva da

$$\|ax\| \leq \kappa \|a\| \|x\| \quad \text{za sve } a \in A, x \in X$$

Ako je X još i Banachov prostor tada kažemo da je X **lijevi Banachov A-modul**.

Za mrežu $(e_\beta)_\beta$ u A kažemo da je **lijeva aproksimativna jedinica** za X ako $e_\beta x \to x$ za sve $x \in X$.

Teorem 4.4.1 (Hewitt-Cohen). *Neka je A Banachova algebra i X lijevi Banachov A-modul s konstantom $\kappa \geq 1$. Pretpostavimo da A ima lijevu aproksimativnu jedinicu $(e_\beta)_\beta$ ograničenu nekom konstantom $\delta \geq 1$ koja je ujedno i lijeva aproksimativna jedinica za X. Tada za svaki $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ i $x \in \overline{Ax_0}$ takvi da je $x_0 = ax$, $\|a\| \leq \delta$ i $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$. Štoviše, ako $(e_\beta)_\beta$ pripada nekom zatvorenom konveksnom podskupu $C \subseteq A$, tada se i a može odabrati da bude element od C.*

Dokaz. Ako je A^1 unitizacija od A, lako se provjeri da je X lijevi Banachov-A^1 modul ograničen s κ ako je djelovanje definirano kao

$$(a + \lambda 1)x = ax + \lambda x, \qquad \text{za } x \in X, a \in A \text{ i } \lambda \in \mathbb{C}$$

Za $\gamma = \frac{1}{2\delta+1}$ stavimo $E_\beta := (1-\gamma)1 + \gamma e_\beta$ za svaki indeks β. Tada imamo

$$\|E_\beta x - x\| = \gamma \|e_\beta x - x\| \to 0, \qquad \text{za sve } x \in X$$

pa je $(E_\beta)_\beta$ lijeva aproksimativna jedinica za A i za X. Štoviše, imamo

$$\|1 - E_\beta\| = \gamma\|1 - e_\beta\| = \gamma(\|e_\beta\| + 1) \leq \gamma(\delta + 1) < 1$$

pa je prema Propoziciji 1.1.12 E_β invertibilan u A^1 i $\|E_\beta^{-1}\| \leq \Delta := \frac{1}{1-\gamma(\delta+1)}$. Stoga imamo

$$\|E_\beta^{-1}x - x\| = \|E_\beta^{-1}x - E_\beta^{-1}E_\beta x\| = \|E_\beta^{-1}\|\|x - E_\beta x\| \to 0, \qquad \text{za sve } x \in X$$

pa je $(E_\beta^{-1})_\beta$ također ograničena lijeva aproksimativna jedinica za A i za X.

Neka su sada $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Indukcijom pokazujemo da postoji niz $(e_n)_n$ u A koji zadovoljava

(i) $\|e_n\| \leq \delta$ za sve $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $F_n := \sum_{i=1}^n (1-\gamma)^{i-1}\gamma e_i + (1-\gamma)^n 1$ je invertibilan u A^1 za sve $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\|F_1^{-1}x_0 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ i $\|F_n^{-1}x_0 - F_{n-1}^{-1}x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ za $n \geq 2$.

Iz već dokazanog slijedi da možemo staviti $e_1 := E_\beta$ za dovoljno veliki indeks β. Pretpostavimo da smo odabrali $e_1, \ldots, e_n \in A$ takve da zadovoljavaju (i)-(iii). Za proizvoljne $\eta_1, \eta_2 > 0$ postoji indeks β takav da $\|E_\beta^{-1}e_i - e_i\| \leq \eta_1$ i $\|E_\beta^{-1}x_0 - x_0\| \leq \eta_2$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Definiramo

$$F := \sum_{i=1}^{n} (1-\gamma)^{i-1}\gamma E_\beta^{-1} e_i + (1-\gamma)^n 1.$$

Tada je

$$F - F_n = \sum_{i=1}^{n}(1-\gamma)^{i-1}\gamma(E_\beta^{-1}e_i - e_i).$$

Ako $\eta_1 \le \|F_n^{-1}\|^{-1}$ i $G \in A$ zadovoljava $\|G - F_n\| < \eta_1$, tada je G invertibilan i

$$\|G^{-1} - F_n^{-1}\| \le \|F_n^{-1}\|\|F_n - G\|\|G^{-1}\| \le 2\|F_n^{-1}\|^2\eta_1.$$

Stoga ako zahtijevamo $\eta_1 < n^{-1}\|F_n^{-1}\|^{-1}$, F će biti invertibilan. Stavmo $e_{n+1} := e_\beta$ pa je

$$F_{n+1} = E_\beta F = \sum_{i=1}^{n+1}(1-\gamma)^{i-1}\gamma e_i + (1-\gamma)^{n+1}e_i$$

invertibilan i imamo

$$\begin{aligned}\|F_{n+1}^{-1}x_0 - F_n^{-1}x_0\| &\le \|F_n^{-1}E_\beta^{-1}x_0 - F_n^{-1}x_0\| \\ &\le \|(F^{-1} - F_n^{-1})E_\beta^{-1}x_0\| + \|F_n^{-1}(E_\beta^{-1}x_0 - x_0)\| \\ &\le \kappa(2\|F_n\|^{-1}\Delta\|x_0\|\eta_1 + \|F_n^{-1}\|\eta_2).\end{aligned}$$

Odabravši η_1 i η_2 dovoljno malene, dobivamo tražena svojstva. Sada za $n > m \ge 1$ imamo

$$\|F_n^{-1}x_0 - F_m^{-1}x_0\| \le \sum_{k=m+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k} \le \frac{\varepsilon}{2^m}$$

pa $F_n^{-1}x_0 \to x$ za neki $x \in X$ takav da $\|x - x_0\| \le \varepsilon$. Štoviše, zbog $x_0 \in \overline{Ax_0}$ (zbog postojanja lijeve aproksimativne jedinice) slijedi $F_n^{-1}x_0 \in \overline{Ax_0}$ i zatim $x \in \overline{Ax_0}$.

Ako definiramo $a_n := \sum_{i=1}^{n}(1-\gamma)^{i-1}\gamma e_i \in A$ tada $a_n \to a$ za neki $a \in A$ takav da je

$$\|a\| \le \gamma\delta\sum_{i=0}^{\infty}(1-\gamma)^i \le \delta.$$

Zbog $F_n = a_n + (1-\gamma)^n 1$ i $(1-\gamma)^n \to 0$ imamo $F_n \to a$ i $ax = \lim_{n\to\infty} F_n(F_n^{-1}x_0) = x_0$.

Konačno, svi e_n su odabrani kao elementi aproksimativne jedinice $(e_\beta)_\beta$ pa ako $(e_\beta)_\beta$ pripada zatvorenom konveksnom skupu C, imamo $1 \in C$ i

$$(1 - (1-\gamma)^n)\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma)^{i-1}\gamma e_i \in C$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Puštanjem $n \to \infty$ dobivamo $a \in C$. □

Sljedeći korolar pokazuje da u definiciji esencijalnog potprostora nedegenerirane reprezentacije C^*-algebre ne trebamo koristiti niti linearnu ljusku niti zatvarač.

Korolar 4.4.2. *Neka je A C^*-algebra i $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ nedegenerirana reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ postoje $a \in A$ i $\eta \in \operatorname{ess}\pi$ takvi da je $\xi = \pi(a)\eta$ i $\|\xi - \eta\| < \varepsilon$. Specijalno, imamo $\pi(A)\mathcal{H} = \operatorname{ess}\pi = \mathcal{H}$.*

Dokaz. π je kontrakcija pa $\mathcal{H}$ ima strukturu lijevog Banachovog A-modula s djelovanjem definiranim kao $a\xi := \pi(a)\xi$ za sve $a \in A, \xi \in \mathcal{H}$. Zbog nedegeneriranosti od π je svaka aproksimaktivna jedinica za A ujedno i aproksimativna jedinica za $\mathcal{H}$ (Propozicija 2.4.3 (ii)). Sada rezultat slijedi iz Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije. □

Analogni argument pokazuje da je $\overline{\operatorname{span}}\, \pi(A)\xi = \pi(A)\xi$ za $\xi \in \mathcal{H}$.

Primjer 4.4.3. Na algebri

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

se ne može definirati C^*-struktura. Zaista, kad bi A bila C^*-algebra, tada bi A ograničeno djelovala sama na sebe lijevim množenjem pa bi prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije svaki element $a \in A$ bio produkt neka dva elementa iz A. Međutim, produkt bilo koja dva elementa iz A je 0.

Propozicija 4.4.4. *Neka je A C^*-algebra i J zatvoren ideal u A. Tada je $J \cap Z(A) = Z(J)$. Specijalno, $Z(J)$ je ideal u $Z(A)$.*

Dokaz. Očito je $J \cap Z(A) \subseteq Z(J)$. Obratno, neka je $z \in Z(J)$. $Z(J)$ je C^*-algebra pa z možemo faktorizirati kao $z = uv$ za neke $u, v \in Z(J)$. Sada za $a \in A$ imamo

$$za = (uv)a = u(va) = (va)u = v(au) = (au)v = a(uv) = az$$

jer su $va, au \in J$. Dakle, $z \in Z(A)$. □

Bibliografija

[1] R. S. Bryder, *Cohen's factorization theorem*, http://math.ananas.nu/korn/017.pdf, Sølvkorn 17, rukopis (rujan 2019.).

[2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2. izd., Springer-Verlag, 1990.

[3] I. Gogić, *Dauns-Hofmannov teorem i neke njegove posljedice*, 2009., rukopis (rujan 2019.).

[4] I. Gogić, *Potpuno ograničeni operatori i subhomogene C^*-algebre*, Disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2010., https://web.math.pmf.unizg.hr/%7Eilja/thesis.pdf.

[5] I. Gogić, *Odabrana poglavlja teorije operatorskih algebri*, PMF-MO, Zagreb, 2017., interna skripta.

[6] I. Kaplansky, *Normed algebras*, Duke Math J. **16** (1949.), 399–418.

[7] H. Kraljević, *Operatorske algebre*, PMF-MO, Zagreb, 2011., https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/Op_alg.pdf, interna skripta.

[8] Y. Misonou, *On a weakly central operator algebra*, Tohoku Math. J. **4** (1952.), 194–202.

[9] G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.

[10] I. Raeburn i D. P. Williams, *Morita equivalence and continuous trace C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, sv. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[11] J. Vesterstrøm, *On the homomorphic image of the center of a C^*-algebra*, Math. Scand. **29** (1971.), 134–136, https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN35397434X_0029?tify={%22pages%22:[134],%22panX%22:0.627,%22panY%22:0.575,%22view%22:%22info%22,%22zoom%22:0.566}.

[12] K. Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1993.

Sažetak

Neka su A i B unitalne C^*-algebre s centrima $Z(A)$ i $Z(B)$ i neka je $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Tada svakako vrijedi $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$. U ovom diplomskom radu izlažemo Vesterstrømov teorem iz 1971. koji daje nužan i dovoljan uvjet na unitalnu C^*-algebru A takvu da za svaku C^*-algebru B i $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$ vrijedi jednakost $\phi(Z(A)) = Z(B)$.

Za dokaz ovog teorema uvodimo pojmove spektra C^*-algebre i prostora primitivnih ideala s pripadnim topologijama, te klase centralnih i slabo centralnih unitalnih C^*-algebri. Konačno, dajemo neke značajnije primjere C^*-algebri koje zadovoljavaju gornje svojstvo.

Summary

Let A and B be unital C^*-algebras with centers $Z(A)$ and $Z(B)$, and let $\phi : A \to B$ be a $*$-epimorphism. Then we certainly have $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$. In this master thesis we present Vesterstrøm's theorem from 1971 which provides necessary and sufficient conditions on a unital C^*-algebra A such that for every C^*-algebra B and $*$-epimorphism $\phi : A \to B$ we have the equality $\phi(Z(A)) = Z(B)$.

To prove this theorem we introduce the spectrum of a C^*-algebra and the primitive ideal space equipped with respective topologies, along with two classes of C^*-algebras: central and weakly central. To finalize we give some notable examples of C^*-algebras satisfying the above property.

Životopis

Rođen sam 11. lipnja 1995. u Zagrebu gdje sam pohađao osnovnu školu te kasnije V. gimnnaziju. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na državnim natjecanjima iz matematike, logike, fizike i kemije te na Međunarnodnoj kemijskoj olimpijadi 2014.

2014. sam upisao preddiplomski studij *Matematika* na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Pararelno sam slušao i neke kolegije na Fizičkom odsjeku te na Fakultetu elektrotehnike i računarstva. 2017. upisao sam diplomski studij *Teorijska matematika*, također na Matematičkom odsjeku.

Tijekom studija bio sam demonstrator iz kolegija Linearna algebra 1 i 2, Diskretna matematika te Mjera i integral. Po završetku oba studija nagrađen sam za izniman uspjeh od Vijeća Matematičkog odsjeka.