

# O epimorfnoj slici centra $C^*$ -algebre

---

**Tomašević, Mateo**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:166939>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Mateo Tomašević

O EPIMORFNOJ SLICI CENTRA  
 $C^*$ -ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Ilja Gogić

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Elementarna spektralna teorija</b>	<b>4</b>
1.1 Algebre, *-algebre, Banachove *-algebre, $C^*$ -algebre . . . . .	4
1.2 Karakteri Banachovih algebri i Geljandova teorija . . . . .	14
<b>2 <math>C^*</math>-algebre</b>	<b>25</b>
2.1 Komutativne $C^*$ -algebre i neprekidni funkcionalni račun . . . . .	25
2.2 Uređaj u $C^*$ -algebrama . . . . .	33
2.3 Aproksimativne jedinice, zatvoreni ideali i kvocijenti . . . . .	38
2.4 Stanja i reprezentacije . . . . .	41
<b>3 Spektar <math>C^*</math>-algebre</b>	<b>53</b>
3.1 Primitivni ideali. Spektar $C^*$ -algebre . . . . .	53
3.2 Dauns-Hofmannov teorem . . . . .	63
3.3 Vesterstrømov teorem . . . . .	68
<b>4 Appendix</b>	<b>76</b>
4.1 Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori . . . . .	76
4.2 Lokalno konveksni topološki vektorski prostori . . . . .	80
4.3 Von Neumannove algebre . . . . .	86
4.4 Hewitt-Cohenov teorem faktorizacije . . . . .	88
<b>Bibliografija</b>	<b>92</b>

# Uvod

Začeci teorije  $C^*$ -algebri sežu još od von Neumanna, Schrödingera i Heisenberga u kvantnoj mehanici još u 1920-ima. Poznato je da opservable korespondiraju hermitskim operatorima na Hilbertovom prostoru stanja. Apstraktno okruženje za proučavanje hermitskih operatora su upravo  $C^*$ -algebre.

Pojam  $C^*$ -algebre uveden je 1943. u radovima sovjetskih matematičara Isra-ela Geljfanda i Marka Naimarka. Riječ je o Banachovoj algebri  $A$  nad  $\mathbb{C}$  na kojoj je uvedena izometrična involutorna operacija  $*$  koja zadovoljava tzv.  $C^*$ -svojstvo:  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  za sve elemente  $a \in A$ . Ova jednostavna relacija daje snažnu dodatnu strukturu u odnosu na Banachove algebre. Primjerice, norma na  $C^*$ -algebri je jedinstveno određena njenom algebarskom strukturom. Osnovni primjeri  $C^*$ -algebri su funkcijske algebre  $C(\Omega)$  i  $C_0(\Omega)$  gdje je  $\Omega$  kompaktan odnosno lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, s operacijama po točkama i sup-normom. Od nekomutativnih primjera valja spomenuti algebru ograničenih operatora  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$ .

Veliku ulogu u proučavanju  $C^*$ -algebri ima spektar elementa. Prisjetimo se, spektar elementa  $a$  u unitalnoj algebri  $A$  je skup svih skalara  $\lambda \in \mathbb{C}$  takvih da  $a - \lambda 1$  nije invertibilan element algebre  $A$ . Spektralna teorija dozvolit će nam konstrukciju neprekidnog funkcionalnog računa za normalne elemente na  $C^*$ -algebrama, koji direktno poopćava funkcionalni račun nad normalnim matricama u linearnoj algebri. Uvodi se i pojam pozitivnih elemenata koji poopćuju pozitivne operatore na Hilbertovim prostorima.

Fundamentalni strukturni teorem komutativnih  $C^*$ -algebri je Geljfund-Naimarkov teorem za komutativne  $C^*$ -algebre koji tvrdi da je svaka komutativna  $C^*$ -algebra  $A$  (izometrički)  $*$ -izomorfna algebri  $C_0(\Omega)$  za neki lokalno kompaktan prostor  $\Omega$ . Nadalje, prostor  $\Omega$  se prirodno realizira kao prostor karaktera tj. nenul linearnih  $*$ -multiplikativnih funkcionala  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Prostor karaktera se može opskrbiti Geljfundovom topologijom (relativnom slabom- $*$  topologijom s duala algebre  $A^*$ ), i na taj način postaje topološka invarijanta komutativne  $C^*$ -algebre. Geljfund-Naimarkov teorem se može izreći i u terminima maksimalnih ideala, budući da postoji prirodna bijekcija karaktera i maksimalnih ideala  $\varphi \mapsto \ker \varphi$ .

Kao i u teoriji grupa, glavni alat za proučavanje  $C^*$ -algebri (posebno nekomutativnih) su reprezentacije. Elemente  $C^*$ -algebri želimo reprezentirati kao ograničene operatore na nekom Hilbertovom prostoru: formalno, promatramo  $*$ -homomorfizme s  $C^*$ -algebre u algebru  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  za neki Hilbertov prostor  $\mathcal{H}$ . Uz pojam reprezentacija je usko vezan pojam stanja: stanje na  $C^*$ -algebri je svaki pozitivan funkcional norme 1. Iz stanja se na prirodan način konstruiraju reprezentacije (riječ je o tzv. Gelfand-Naimark-Segal (GNS) konstrukciji). U ovoj konstrukciji *čista* stanja (ekstremne točke konveksnog skupa svih stanja) odgovaraju upravo ireducibilnim reprezentacijama  $C^*$ -algebre. Fundamentalni rezultat ove teorije je drugi Gelfand-Naimarkov teorem: svaka  $C^*$ -algebra je (izometrički)  $*$ -izomorfna nekoj zatvorenoj  $*$ -podalgebri od  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  za neki Hilbertov prostor  $\mathcal{H}$ .

Komutativni Gelfand-Naimarkov teorem se pokušao generalizirati i na nekomutativne  $C^*$ -algebre. Prvo pitanje koje se postavilo je što bi igralo ulogu baznog prostora, kao što karakteri (odnosno maksimalni ideali) čine u komutativnom slučaju, i kojom bi topologijom bio opremljen. Nameću se dva kandidata: prostor primitivnih ideala i spektar algebre. Primitivni ideali su jezgre ireducibilnih reprezentacija  $C^*$ -algebre. Pokazat ćemo da su u komutativnom slučaju sve ireducibilne reprezentacije unitarno ekvivalentne karakterima algebre pa se primitivni ideali podudaraju s maksimalnima. Skup primitivnih ideala  $C^*$ -algebre  $A$ , u oznaci  $\text{Prim } A$ , se oprema tzv. Jacobsonovom topologijom. Spektar  $C^*$ -algebre (ne valja ga miješati sa spektrom elementa) je prostor svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija. U komutativnom slučaju ovo upravo odgovara prostoru karaktera, koji se u tom kontekstu često naziva i Gelfandov spektar. Topologiju na spektru  $C^*$ -algebre možemo konstruirati na više načina. Jedan od njih je da povučemo Jacobsonovu topologiju s prostora primitivnih ideala, jer su spektar i prostor primitivnih ideala povezani prirodnom bijekcijom  $[\pi] \mapsto \ker \pi$ . Drugi način je da prenesemo relativnu slabu- $*$  topologiju sa skupa čistih stanja na spektar preko GNS-konstrukcije koja nam daje preslikavanje  $\rho \mapsto [\pi_\rho]$  sa skupa čistih stanja na spektar. Te dvije topologije na spektru se podudaraju.

Ova teorija nije u potpunosti uspjela generalizirati komutativni Gelfand-Naimarkov teorem. Uspjela jest u nekim slučajevima, npr. kada je prostor primitivnih ideala Hausdorffov. Ti rezultati koriste teoriju svežnjeva.

Osnovni problem kojim se bavimo u ovom diplomskom radu je problem  $*$ -epimorfne slike centra za unitalne  $C^*$ -algebre. Prisjetimo se, centar  $Z(A)$  algebre  $A$  je skup svih elemenata koji komutiraju sa svim elementima algebre.

Neka su  $A$  i  $B$   $C^*$ -algebre i  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -epimorfizam. Tada uvijek vrijedi

$$\phi(Z(A)) \subseteq Z(B).$$

Zaista, neka je  $z \in Z(A)$ . Tvrdimo da je  $\phi(z) \in Z(B)$ . Za svaki  $b \in B$  postoji  $a \in A$

takav da je  $\phi(a) = b$ . Imamo

$$\phi(z)b = \phi(z)\phi(a) = \phi(za) = \phi(az) = \phi(a)\phi(z) = b\phi(z).$$

U primjerima ćemo vidjeti da je općenito  $\phi(Z(A)) \neq Z(B)$ . Htjeli bismo naći nužan i dovoljan uvjet na  $C^*$ -algebru  $A$  takvu da za svaku  $C^*$ -algebru  $B$  i  $*$ -epimorfizam  $\phi : A \rightarrow B$  vrijedi jednakost  $\phi(Z(A)) = Z(B)$  (u tom slučaju kažemo da  $A$  ima CQ-svojtvo). U ovom diplomskom radu ćemo se baviti ovim problemom kad je  $A$  unitalna algebra.

Misonou 1952. uvodi pojam *slabo centralne*  $C^*$ -algebre kao unitalne  $C^*$ -algebre takve da je preslikavanje

$$\eta_A : \text{Max } A \rightarrow \text{Max } Z(A), \quad \eta_A(M) = M \cap Z(A), \text{ za } M \in \text{Max } A$$

injektivno, gdje su  $\text{Max } A$  i  $\text{Max } Z(A)$  redom prostori maksimalnih ideala algebre  $A$  odnosno  $Z(A)$ .

Glavni rezultat koji ovdje prezentiramo je teorem danskog matematičara Jørgena Vesterstrøma iz 1971.:

**Teorem** (Vesterstrøm). *Za unitalnu  $C^*$ -algebru  $A$  ekvivalentno je:*

- (i) *Za svaku  $C^*$ -algebru  $B$  i  $*$ -epimorfizam  $\phi : A \rightarrow B$  vrijedi  $\phi(Z(A)) = Z(B)$ .*
- (ii)  *$A$  je slabo centralna.*

Istaknuti primjeri slabo centralnih (unitalnih)  $C^*$ -algebri su:

- tzv. *centralne*  $C^*$ -algebre, koje se mogu okarakterizirati kao one čiji je prostor primitivnih ideala Hausdorffov,
- unitalne  $C^*$ -algebre koje imaju jedinstven maksimalan ideal (uključujući proste unitalne  $C^*$ -algebre), npr.  $\mathbb{B}(\ell^2)$ ,
- Von Neumannove algebre.

Robert Archbold i Ilja Gogić su 2019. poopćili Vesterstrømov teorem za općenite (ne nužno unitalne)  $C^*$ -algebre.

# Poglavlje 1

## Elementarna spektralna teorija

### 1.1 Algebre, \*-algebre, Banachove \*-algebre, $C^*$ -algebre

Neka je  $A$  algebra nad poljem  $\mathbb{C}$ . Za vektorski potprostor  $I$  od  $A$  kažemo da je **lijevi (desni) ideal** u  $A$  ako je  $ax \in I$  za sve  $x \in I, a \in A$  ( $xa \in I$  za sve  $x \in I, a \in A$ ).

Za  $I \subseteq A$  kažemo da je **obostrani ideal** u  $A$  ako je i lijevi i desni ideal u  $A$ . Ako drugačije nije naglašeno, idealom uvijek smatramo obostrani ideal.

Ako je  $I$  ideal u  $A$ , tada znamo da  $A/I$  ima strukturu kvocijentnog vektorskog prostora. Lako se pokaže da na  $A/I$  prirodno možemo definirati i množenje

$$(a + I)(b + I) := ab + I, \quad \text{za sve } a, b \in A$$

s kojim  $A/I$  postaje algebra, koju nazivamo kvocijentna algebra. Kanonski epimorfizam  $q : A \rightarrow A/I, a \mapsto a + I$  je epimorfizam algebr. Ako je  $A$  unitalna, tada je i  $A/I$  unitalna s jedinicom  $1 + I$ .

Za pravi ideal  $M$  u  $A$  kažemo da je **maksimalan** ako nije sadržan ni u jednom drugom pravom idealu  $M$  u  $A$ .

Za algebru  $A$  kažemo da je **prosta** ako nema ideala različitih od  $\{0\}$  i  $A$ .

Za lijevi (desni) ideal  $I$  kažemo da je **modularan** ako postoji  $e \in A$  takav da je  $ae - a \in I$  ( $ea - a \in I$ ) za sve  $a \in A$ . U tom slučaju se  $e$  zove desna (lijeva) jedinica modulo  $I$ . Za obostrani ideal  $I$  u  $A$  kažemo da je modularan ako je istovremeno modularan i kao lijevi i kao desni ideal. U tom slučaju postoji **jedinica modulo  $I$** , tj.  $e \in A$  takav da je  $ae - a, ea - a \in I$  za sve  $a \in A$ . Ako je  $A$  unitalna tada je svaki ideal modularan, naime stavimo  $e = 1$ . Primijetimo da je  $I$  modularan ako i samo ako je kvocijentna algebra  $A/I$  unitalna, s jedinicom  $e + I$  gdje je  $e$  jedinica modulo  $I$ .

Skup svih maksimalnih modularnih ideala za  $A$  označavamo s  $\text{Max } A$ .



**Propozicija 1.1.1.** *Svaki pravi modularni ideal u  $A$  je sadržan u nekom modularnom maksimalnom idealu u  $A$ .*

*Dokaz.* Neka je  $I$  pravi modularni ideal s jedinicom  $e$  modulo  $I$ . Za ideal  $J \supseteq I$  u  $A$  vrijedi  $J = A$  ako i samo ako  $e \in J$ . Promotrimo familiju

$$\mathcal{F} = \{J \text{ ideal u } A : J \supseteq I, e \notin J\}.$$

Imamo  $I \in \mathcal{F}$  pa je  $\mathcal{F}$  neprazna. Uredimo  $\mathcal{F}$  inkluzijom i promotrimo lanac  $\mathcal{L}$  u  $\mathcal{F}$ . Očito je  $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$  i gornja međa za  $\mathcal{L}$  pa prema Zornovoj lemi postoji maksimalni element  $M$  za  $\mathcal{F}$ . Slijedi da je  $M$  modularni maksimalni ideal u  $A$ .  $\square$

Oдавde posebno slijedi da unitalna algebra  $A$  ima maksimalni ideal. Naime, u tom slučaju je svaki ideal modularan pa primijenimo tvrdnju na pravi ideal  $\{0\}$ .

**Propozicija 1.1.2.** *Neka je  $A$  komutativna unitalna algebra. Tada je  $a \in A$  invertibilan ako i samo ako  $a \notin M$  za sve  $M \in \text{Max } A$ .*

*Dokaz.* Vrijedi  $a \notin A^\times$  ako i samo ako je  $aA$  pravi ideal u  $A$ , što je ekvivalentno s  $aA \subseteq M$  za neki  $M \in \text{Max } A$ .  $\square$

**Propozicija 1.1.3.** *Neka je  $A$  komutativna algebra i  $M \in \text{Max } A$ . Tada je  $A/M$  polje.*

*Dokaz.* Primijetimo da je  $A/M$  prosta algebra. Zaista, pretpostavimo da je  $I$  ideal u  $A/M$ . Ako je  $\pi_M : A \rightarrow A/M$  kvocijentno preslikavanje, tada je  $\pi_M^{-1}(I)$  ideal u  $A$  koji sadrži  $M$ . Slijedi  $\pi_M^{-1}(I) \in \{M, A\}$  pa  $I \in \{A/M, \{0\}\}$ . Dakle,  $A/M$  je unitalna komutativna prosta algebra. Stoga  $\text{Max}(A/M) = \{M\}$  pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije.  $\square$

U unitalnoj algebri  $A$  znamo da je **spektar** elementa  $a \in A$  definiran kao

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin A^\times\}.$$

**Rezolventni skup** definiramo kao  $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ .

Za algebru  $A$  definiramo njenu **unitizaciju**  $A^1$  kao vektorski prostor  $A \oplus \mathbb{C}$  s operacijom množenja

$$(a, \alpha)(b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta), \quad \text{za sve } a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$A^1$  je unitalna algebra s jedinicom  $(0, 1)$  i ulaganjem  $A \hookrightarrow A^1, a \mapsto (a, 0)$ ,  $A$  postaje ideal u  $A^1$ . Elemente od  $A^1$  najčešće pišemo kao  $a + \lambda 1$  za neki  $a \in A$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Ako je  $A$  neunitalna algebra, spektar elementa  $a \in A$  definiramo kao njegov spektar u unitalnoj algebri  $A^1$ :

$$\sigma_A(a) := \sigma_{A^1}(a)$$

Napomenimo da  $A^1$  nije jedina unitalna algebra koja sadrži  $A$  kao podalgebru i da spektar elementa  $a \in A$  u drugačijim unitalnim nadalgebrama općenito nije jednak  $\sigma_{A^1}(a)$ .

**Propozicija 1.1.4.** *Neka je  $\phi : A \rightarrow B$  unitalni homomorfizam unitalnih algebri  $A$  i  $B$ . Tada za svaki  $a \in A$  vrijedi*

$$\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a).$$

*Dokaz.* Slijedi direktno iz  $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$ . □

Involucija na algebri  $A$  je funkcija  $*$  :  $A \rightarrow A$  sa svojstvima

- (i)  $(a^*)^* = a$  (involutivnost),
- (ii)  $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^*$  (antilinearnost),
- (iii)  $(ab)^* = b^*a^*$  (antimultiplikativnost),

za sve  $a, b \in A$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Algebru  $A$  sa zadanom involucijom  $*$  nazivamo **\*-algebra**. Za homomorfizam \*-algebri  $\phi : A \rightarrow B$  kažemo da je **\*-homomorfizam** ako vrijedi  $\phi(a^*) = \phi(a)^*$  za sve  $a \in A$ .

Za element  $a$  \*-algebre  $A$  definiramo da je:

- **hermitski** ako je  $a^* = a$ ,
- **antihermitski** ako je  $a^* = -a$ ,
- **normalan** ako je  $a^*a = aa^*$ ,
- **projekcija** ako je  $a^* = a^2 = a$ ,
- **unitaran** ako je  $A$  unitalna i  $a^*a = aa^* = 1$ .

Skup svih hermitskih elemenata označavamo s  $A_h$ . Svaki element  $a \in A$  se na jedinstven način zapisuje kao suma hermitskog i antihermitskog elementa, tj.

$$a = (\operatorname{Re} a) + i(\operatorname{Im} a)$$

gdje su  $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + a^*)$  i  $\operatorname{Im} a = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ . Također imamo

$$\begin{aligned} a^*a &= (\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 - i(\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a), \\ aa^* &= (\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 + i(\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a). \end{aligned}$$

Ako je  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  linearan funkcional, tada je s

$$\varphi^*(a) := \overline{\varphi(a^*)}, \quad a \in A$$

također zadan linearan funkcional na  $A$ . Vrijedi

$$\varphi^{**} = \varphi, \quad (\lambda\varphi + \mu\psi)^* = \bar{\lambda}\varphi^* + \bar{\mu}\psi^*$$

Za  $\varphi$  kažemo da je **hermitski** ako je  $\varphi^* = \varphi$  (tj. ako je  $\varphi$  \*-linearno preslikavanje  $A \rightarrow \mathbb{C}$ ).

**Propozicija 1.1.5.** *Neka je  $A$  \*-algebra. Linearan funkcional  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  je hermitski ako i samo ako je  $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$ . U tom slučaju je  $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re} \varphi(a)$  za sve  $a \in A$ .*

*Dokaz.* Ako je  $\varphi$  hermitski, tada za  $a \in A_h$  imamo  $\varphi(a) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$  tj.  $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ .

Obratno, ako je  $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$  tada je očito  $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re} \varphi(a)$  i vrijedi

$$\varphi(a^*) = \varphi(\operatorname{Re} a - i \operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \overline{\varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)} = \overline{\varphi(a)}$$

pa je  $\varphi$  hermitski. □

**Propozicija 1.1.6.** *Neka je  $A$  unitalna \*-algebra. Tada vrijedi*

$$(i) \quad 1^* = 1,$$

$$(ii) \quad a \in A^\times \iff a^* \in A^\times \text{ i tada } (a^{-1})^* = (a^*)^{-1},$$

$$(iii) \quad \sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}.$$

*Dokaz.* (i) Adjungiranjem<sup>1</sup> jednakosti  $a1 = 1a = a$  za sve  $a \in A$  slijedi da je  $1^*$  također jedinica u  $A$  pa je  $1^* = 1$  jer je jedinica u algebri jedinstvena.

(ii) Tvrdnja slijedi adjungiranjem jednakosti  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ .

(iii) Imamo

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma(a) &\iff a - \lambda 1 \in A^\times \iff (a - \lambda 1)^* \in A^\times \\ &\iff a^* + \bar{\lambda} 1 \in A^\times \iff \bar{\lambda} \in \sigma(a^*). \end{aligned}$$

□

---

<sup>1</sup>Primjenu operatora  $*$  još zovemo i **adjungiranje**, po analogiji sa \*-algebrom ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru.

**Propozicija 1.1.7.** *Neka je  $A$   $*$ -algebra. Tada vrijedi*

- (i) *Svaka lijeva/desna jedinica u  $A$  je jedinica u  $A$ .*
- (ii) *Ako je  $A$  unitalna i  $a \in A_h$  lijevo/desno invertibilan u  $A$ , tada je  $a$  invertibilan u  $A$ .*

*Dokaz.* (i) Pretpostavimo da  $A$  ima lijevu jedinicu  $e$ . Adjungiranjem jednakosti  $ea = a$  za sve  $a \in A$  dobivamo  $a^*e = a^*$  za sve  $a \in A$ , odnosno  $e^*$  je desna jedinica u  $A$ . Sada slijedi  $e^* = ee^* = e$  pa je  $e = e^*$  jedinica u  $A$ .

- (ii) Pretpostavimo da je  $a \in A_h$  lijevo invertibilan. Tada postoji  $b \in A$  takav da je  $ba = 1$ . Adjungiranjem te jednakosti slijedi  $ab^* = (ba)^* = 1^* = 1$  pa je  $b = b^*$  inverz od  $a$  u  $A$ .

□

Za ideal  $I$  u  $*$ -algebri  $A$  kažemo da je  $*$ -ideal ili samoadjungiran ako je  $I^* = I$ . U tom slučaju kvocijentnu algebru  $A/I$  prirodno snabdijevamo involucijom definiranom kao

$$(a + I)^* := a^* + I, \quad \text{za sve } a \in A$$

s kojom  $A/I$  dobiva strukturu  $*$ -algebre, koju nazivamo **kvocijentna  $*$ -algebra**.

Nadalje, unitizacija  $A^1$   $*$ -algebre  $A$  je također  $*$ -algebra s involucijom  $(a + \lambda 1)^* := a^* + \bar{\lambda}1$ , u koju se  $A$  ulaže kao  $*$ -ideal.

**Propozicija 1.1.8.** *Neka su  $A$  i  $B$  neunitalne  $*$ -algebre i neka je  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -homomorfizam. Tada postoji jedinstveni unitalni  $*$ -homomorfizam  $\tilde{\phi} : A^1 \rightarrow B^1$  koji proširuje  $\phi$ , i dan je s*

$$\tilde{\phi}(a + \lambda 1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B, \quad \text{za sve } a \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

*Dokaz.*  $\tilde{\phi}$  je očito linearno i proširuje  $\phi$ . Imamo

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}[(a + \lambda 1_A)(b + \mu 1_A)] &= \tilde{\phi}(ab + \lambda b + \mu a + \lambda \mu 1_A) \\ &= \phi(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda \mu 1_B \\ &= \phi(a)\phi(b) + \lambda \phi(b) + \mu \phi(a) + \lambda \mu 1_B \\ &= (\phi(a) + \lambda 1_B)(\phi(b) + \mu 1_B) \\ &= \tilde{\phi}(a + \lambda 1_A)\tilde{\phi}(b + \mu 1_A) \end{aligned}$$

i

$$\tilde{\phi}[(a + \lambda 1_A)^*] = \tilde{\phi}(a^* + \bar{\lambda}1_A) = \phi(a^*) + \bar{\lambda}1_B = (\phi(a) + \lambda 1_B)^* = [\tilde{\phi}(a + \lambda 1_A)]^*.$$

Ako je  $\psi : A^1 \rightarrow B^1$  neko drugo unitalno \*-homomorfno proširenje od  $\phi$ , tada imamo

$$\psi(a + \lambda 1_A) = \psi(a) + \lambda \psi(1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B = \tilde{\phi}(a + \lambda 1_A).$$

□

Neka je  $A$  normirana algebra. Ako je  $I$  ideal u  $A$ , tada znamo da se na kvocijentnoj algebri  $A/I$  može zadati norma

$$\|a + I\| := \inf_{x \in I} \|a + x\|, \quad \text{za sve } a \in A$$

koja je submultiplikativna, stoga je  $A/I$  normirana algebra.

Zaista, za  $a, b \in A$  imamo

$$\begin{aligned} \|(a + I)(b + I)\| &= \|ab + I\| \\ &= \inf_{x \in I} \|ab + x\| \\ &\leq \inf_{x, y \in I} \|ab + xb + ya + xy\| \\ &= \inf_{x, y \in I} \|(a + x)(b + y)\| \\ &\leq \inf_{x, y \in I} \|a + x\| \|b + y\| \\ &= \inf_{x \in I} \|a + x\| \cdot \inf_{y \in I} \|b + y\| \\ &= \|a + I\| \|b + I\|. \end{aligned}$$

Ako je  $A$  potpuna, tada je i  $A/I$ .

Unitizacija  $A^1$  normirane (Banachove) algebre je i sama unitalna normirana (Banachova algebra) s normom

$$\|a + \lambda 1\| := \|a\| + |\lambda|, \quad \text{za sve } a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$$

u koju se  $A$  ulaže kao zatvoren ideal.

Ako je na normiranoj (Banachovoj) algebri  $A$  zadana involucija  $*$  sa svojstvom

$$\|a^*\| = \|a\|, \quad \text{za sve } a \in A$$

tada  $A$  ima strukturu **normirane (Banachove) \*-algebre**.

Za Banachovu \*-algebru  $A$  koja zadovoljava sljedeće  **$C^*$ -svojstvo**

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \text{za sve } a \in A$$

kažemo da je  **$C^*$ -algebra**.

Za normu na \*-algebri  $A$  koju  $A$  čini  $C^*$ -algebrom kažemo da je  **$C^*$ -norma**.

**Propozicija 1.1.9.** *Neka je  $A$  Banachova algebra snabdjevena involucijom  $*$  :  $A \rightarrow A$ . Ako za sve  $a \in A$  vrijedi  $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ , tada je involucija na  $A$  izometrična i  $A$  je  $C^*$ -algebra.*

*Dokaz.* Za  $a \in A$  imamo

$$\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|$$

pa je  $\|a\| \leq \|a^*\|$ . Zamjenom  $a$  s  $a^*$  dobivamo  $\|a^*\| = \|a\|$ . Sada slijedi  $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ .  $\square$

Za zatvorenu  $*$ -podalgebru  $B$   $C^*$ -algebre  $A$  kažemo da je  **$C^*$ -podalgebra** od  $A$ . Ako je dodatno  $A$  unitalna i  $B$  sadrži njenu jedincu, za  $B$  kažemo da je **unitalna  $C^*$ -podalgebra** od  $A$ .

Unitizacija  $A^1$   $C^*$ -algebre  $A$  kao Banachove  $*$ -algebre općenito nije  $C^*$ -algebra s normom  $\|a + \lambda 1\| = \|a\| + |\lambda|$ . Međutim  $A^1$  možemo opskrbiti  $C^*$ -normom koja proširuje normu od  $A$ :

**Teorem 1.1.10.** *Neka je  $A$  neunitalna  $C^*$ -algebra. Na njenoj unitizaciji  $A^1$  kao  $*$ -algebri definiramo normu*

$$\|a + \lambda 1\|_{A^1} := \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|ax + \lambda x\|$$

Tada je  $\|\cdot\|_{A^1}$   $C^*$ -norma na  $A^1$  koja proširuje normu  $\|\cdot\|$  od  $A$ .

*Dokaz.* Definiramo unitalni  $*$ -homomorfizam algebri  $\phi : A^1 \rightarrow \mathbb{B}(A)$  formulom  $\phi(a + \lambda 1) := L_{a+\lambda 1}$  gdje je  $L_{a+\lambda 1}$  lijevi multiplikator elementa  $a + \lambda 1$  zadan formulom  $x \mapsto (a + \lambda 1)x = ax + \lambda x$ .

Uočimo da je  $\|a + \lambda 1\|_{A^1} = \|L_{a+\lambda 1}\| = \|\phi(a + \lambda 1)\|$ .

Tvrdimo da je  $\phi$  injektivan. Zaista, neka je  $a + \lambda 1 \in A^1$  takav da je  $ax + \lambda x = 0$  za sve  $x \in A$ . Kad bi bilo  $\lambda \neq 0$ , za element  $e = -\frac{1}{\lambda}a$  vrijedilo bi  $ex = x, \forall x \in A$ , tj.  $e$  bi bila lijeva jedinica u  $A$ . Stoga je  $e$  jedinica u  $A$ , što je u kontradikciji s pretpostavkom da  $A$  nije unitalna. Dakle,  $\lambda = 0$  pa imamo  $ax = 0, \forall x \in A$ . Specijalno, za  $x = a^*$  dobivamo

$$0 = \|aa^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2$$

pa je  $a = 0$ . Slijedi da je  $\phi$  injektivan.

Oдавde slijedi da je  $\|\cdot\|_{A^1}$  submultiplikativna norma na  $A^1$ , tj.  $A^1$  je normirana algebra.

Za  $a \in A, a \neq 0$  imamo

$$\|a\| = \left\| a \left( \frac{a^*}{\|a\|} \right) \right\| = \|a\|_{A^1} = \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|ax\| \leq \|a\|$$

pa  $\|\cdot\|_{A^1}$  proširuje normu od  $A$ .

Pokažimo da  $\|\cdot\|_{A^1}$  zadovoljava  $C^*$ -svojstvo: za  $a + \lambda 1 \in A^1$  imamo

$$\begin{aligned} \|a + \lambda 1\|_{A^1}^2 &= \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|ax + \lambda x\|^2 \\ &= \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|(ax + \lambda x)^*(ax + \lambda x)\| \\ &= \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|x^*(a + \lambda)^*(a + \lambda)x\| \\ &\leq \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|(a + \lambda)^*(a + \lambda)x\| \\ &= \sup_{x \in \text{Ball}(A)} \|(a + \lambda)^*(a + \lambda)\|. \end{aligned}$$

Iz Propozicije 1.1.9 slijedi  $\|a + \lambda 1\|_{A^1}^2 = \|(a + \lambda 1)^*(a + \lambda 1)\|_{A^1}$ .

Preostaje dokazati da je  $A^1$  potpuna s obzirom na normu  $\|\cdot\|_{A^1}$ . Monomorfizam  $\phi : A^1 \rightarrow \mathbb{B}(A)$  je izometričan i  $\mathbb{B}(A)$  je potpuna pa je dovoljno pokazati da je  $\phi(A^1) = A^1 + \mathbb{C}1_{\mathbb{B}(A)}$  zatvorena u  $\mathbb{B}(A)$ . To slijedi iz činjenice da je  $\phi(A)$  zatvorena kao izometrična slika potpune algebre i iz toga što je suma zatvorenog i konačnodimenzionalnog potprostora zatvoren potprostor.  $\square$

Neka je  $K$  kompaktan Hausdorffov (kraće CH) prostor. Tada promatramo skup

$$C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ neprekidna}\}$$

na kojem definiramo operacije po točkama:

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t), \quad (f + g)(t) := f(t) + g(t), \quad (fg)(t) := f(t)g(t), \quad f^*(t) := \overline{f(t)}$$

za  $t \in K$  i uniformnu ili sup-normu  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in K} |f(t)|$ . Tada se lako provjeri da je  $C(K)$  komutativna unitalna  $C^*$ -algebra.

CH prostori su posebno normalni pa za njih vrijede klasična Urysohnova lema i Tietzeov teorem o proširenju.

Općenitije, za topološki prostor  $\Omega$  kažemo da je lokalno kompaktan ako svaka točka iz  $\Omega$  ima kompaktnu okolinu. Appendix 4.1 sadrži neke osnovne činjenice o lokalno kompaktnim Hausdorffovim (kraće LCH) prostorima.

Za neprekidnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da **trne u  $\infty$**  ako je  $\{|f| \geq \varepsilon\} = \{t \in \Omega : |f(t)| \geq \varepsilon\}$  kompaktan skup u  $\Omega$  za sve  $\varepsilon > 0$ . Skup svih neprekidnih funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  koje trne u  $\infty$  označavamo s  $C_0(\Omega)$ . Propozicija 4.1.4 pokazuje da je  $C_0(\Omega)$  uz operacije kao gore također primjer komutativne  $C^*$ -algebre.  $C_0(\Omega)$  je neunitalna ako  $\Omega$  nije kompaktan jer konstantna funkcija 1 ne trne u  $\infty$ .

Također su od interesa Banachova algebra  $C_b(\Omega)$  svih neprekidnih ograničenih funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  s istim operacijama i normom kao gore, te njena \*-podalgebra  $C_c(\Omega)$  neprekidnih funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  s kompaktnim nosačem. Propozicija 4.1.5 pokazuje da  $C_0(\Omega) = \overline{C_c(\Omega)}$  unutar  $C_b(\Omega)$ .

Prisjetimo se: neka je  $(\Omega, \tau)$  LCH prostor koji nije kompaktan i neka je  $\infty \notin \Omega$ . Stavimo  $\tilde{\Omega} := \Omega \cup \{\infty\}$  i definirajmo topologiju  $\tilde{\tau}$  na  $\tilde{\Omega}$  na sljedeći način:

$$\tilde{\tau} := \tau \cup \{(\Omega \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subseteq \Omega \text{ kompaktan}\}.$$

Tada je  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\tau})$  CH prostor koji sadrži  $\Omega$  kao gust otvoren podskup. Prostor  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\tau})$  nazivamo **Aleksandrovljeva (jednotočkovna) kompaktifikacija** od  $\Omega$ . Prelaskom na Aleksandrovljevu kompaktifikaciju možemo identificirati  $C(\tilde{\Omega})$  s unitizacijom  $C_0(\Omega)^1$ , te  $C_0(\Omega)$  s  $\{f \in C(\tilde{\Omega}) : f(\infty) = 0\}$ .

**Primjer 1.1.11.** Neka je  $X$  normiran prostor. Tada je  $\mathbb{B}(X)$  unitalna normirana algebra. Za  $\dim X > 1$  algebra  $\mathbb{B}(X)$  je nekomutativna. Nadalje,  $\mathbb{B}(X)$  je Banachova algebra ako i samo ako je  $X$  Banachov prostor. Ako je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor, tada je  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$   $C^*$ -algebra. Specijalno, sve matrične algebre  $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$  su  $C^*$ -algebre.

Podsjetimo se nekih činjenica o Banachovim algebra (vidi [5, Potpoglavlje 2.2]):

**Propozicija 1.1.12.** *Neka je  $A$  unitalna Banachova algebra.*

(i) *Ako je  $a \in A$ ,  $\|a\| < 1$ , tada je  $1 - a \in A^\times$  s inverzom*

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

*Posebno,  $\|(1 - a)^{-1}\| \leq (1 - \|a\|)^{-1}$ .*

(ii)  *$A^\times$  je otvoren skup u  $A$  i  $a \mapsto a^{-1}$  je diferencijabilna bijekcija  $A^\times \rightarrow A^\times$ .*

Podsjetimo se nekih svojstava spektra i spektralnog radijusa  $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$ .

**Teorem 1.1.13.** *Neka je  $A$  Banachova algebra. Za svaki  $a \in A$  imamo*

(i)  *$\sigma(a)$  je neprazan kompaktan podskup od  $\mathbb{C}$  sadržan u  $K(0, r(a))$ .*

(ii) *Vrijedi  $0 \leq r(a) \leq \|a\|$ , i te ocjene su najbolje moguće.*

(iii)  *$r(\lambda a) = |\lambda|r(a)$ , za sve  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*

(iv)  *$r(a^n) = r(a)^n$ .*



- (v)  $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$ .
- (vi) Za svaki polinom  $p \in \mathbb{C}$  imamo  $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$ .
- (vii) Ako je  $a$  invertibilan tada  $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$ .
- (viii)  $r(ab) = r(ba)$ .
- (ix) (Geljfandova formula)  $r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ .

**Teorem 1.1.14** (Geljfand-Mazur). *Neka je  $A$  unitalna Banachova algebra u kojoj je svaki nenul element invertibilan. Tada je  $A$  izometrički izomorfna Banachovoj algebri  $\mathbb{C}$ .*

**Propozicija 1.1.15.** *Neka je  $B$  unitalna Banachova podalgebra Banachove algebre  $A$ .*

- (i)  $B^\times$  je otvoren i zatvoren podskup od  $B \cap A^\times$ .
- (ii) Za sve  $b \in B$  vrijedi  $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$  i  $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$ .
- (iii) Ako je  $b \in B$  takav da  $\sigma_A(b)$  nema rupa (tj.  $\rho_A(a)$  je povezan podskup of  $\mathbb{C}$ ), tada je  $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ .

*Dokaz.* (i) Znamo da je  $B^\times$  otvoren u  $B$  i  $B^\times \subseteq B \cap A^\times$  pa je otvoren u  $B \cap A^\times$ . Pokažimo zatvorenost. Neka je  $(b_n)_n$  niz u  $B^\times$  koji konvergira prema  $b \in B \cap A^\times$ . Invertiranje je neprekidno pa  $b_n^{-1} \rightarrow b^{-1}$  u  $A$ , a budući da je  $B$  zatvorena, dobivamo  $b^{-1} \in B$ .

- (ii) Zbog  $B^\times \subseteq A^\times$  za  $b \in B$  imamo  $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$  odnosno  $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ . Ako je  $\lambda \in \partial\sigma_B(b) \subseteq \sigma_B(b)$ , postoji niz  $(\lambda_n)_n$  u  $\rho_B(b)$  takav da  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . Imamo  $\lambda_n 1 - b \in B^\times$ , ali  $\lambda 1 - b \notin B^\times$  pa iz (i) slijedi  $\lambda 1 - b \notin A^\times$ , tj.  $\lambda \in \sigma_A(b)$ . S druge strane imamo  $\lambda_n 1 - b \in A^\times$ , tj.  $\lambda_n \in \rho_A(b)$  i  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . Slijedi  $\lambda \in \sigma_A(b)$ .
- (iii) Ako je  $b \in B$  takav da  $\sigma_A(b)$  nema rupa, onda je  $\rho_A(b)$  povezan podskup od  $\mathbb{C}$ . Prema (i) i (ii) dobivamo da je  $\rho_B(b)$  otvoren i zatvoren podskup od  $\rho_A(b)$  pa zbog povezanosti od  $\rho_A(b)$  slijedi  $\rho_B(b) = \rho_A(b)$ , odnosno  $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ .  $\square$

**Napomena 1.1.16.** *Neka je  $\phi : A \rightarrow B$  unitalni homomorfizam unitalnih algebri  $A$  i  $B$ . Tada za svaki  $a \in A$  imamo  $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ . Naime, to direktno slijedi iz  $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$ .*

**Primjer 1.1.17.** Neka je  $\Omega$  CH prostor. Tada se lako pokaže da je spektar funkcije  $f \in C(\Omega)$  upravo njena slika:  $\sigma(f) = f(\Omega)$ . Zaista, za  $\lambda \in \mathbb{C}$  imamo

$$\begin{aligned} \lambda 1 - f \notin C(\Omega)^\times &\iff \exists t \in \Omega \text{ takav da } (\lambda 1 - f)(t) = 0 \\ &\iff \exists t \in \Omega \text{ takav da } f(t) = \lambda \\ &\iff \lambda \in f(\Omega) \end{aligned}$$

**Primjer 1.1.18.** Neka je  $\Omega$  LCH prostor koji nije kompaktan. Znamo da unitizaciju  $C_0(\Omega)^1$  možemo identificirati s algebrom neprekidnih funkcija  $C(\tilde{\Omega})$  na Aleksandrovljevoj kompakfikaciji  $\tilde{\Omega}$  od  $\Omega$ . Pri toj identifikaciji svaku funkciju  $f \in C_0(\Omega)$  identificiramo s  $\tilde{f} \in C(\tilde{\Omega})$  takvom da se  $\tilde{f}$  poklapa s  $f$  na  $\Omega$  te  $\tilde{f}(\infty) = 0$ . Stoga je spektar funkcije  $f$  dan s

$$\sigma_{C_0(\Omega)}(f) = \sigma_{C(\tilde{\Omega})}(\tilde{f}) = \tilde{f}(\tilde{\Omega}) = f(\Omega) \cup \{0\}.$$

Za dokaze nekih rezultata trebat će nam verzije klasičnog Stone-Weierstrassovog teorema. Dokazi se mogu naći u [5, Teorem 1.4.7, Korolar 1.4.8.].

**Teorem 1.1.19** (Stone-Weierstrass, CH verzija). *Neka je  $K$  CH prostor i neka je  $A$  zatvorena \*-podalgebra od  $C(K)$  koja razdvaja točke od  $K$  i koja sadrži konstantne funkcije. Tada je  $A = C(K)$ .*

Iz ovog teorema se može pokazati i lokalno kompaktna verzija:

**Teorem 1.1.20** (Stone-Weierstrass, LCH verzija). *Neka je  $\Omega$  LCH prostor i neka je  $A$  zatvorena \*-podalgebra od  $C_0(\Omega)$  koja razdvaja točke od  $\Omega$  te za svaku točku  $t \in \Omega$  postoji funkcija  $f \in A$  takva da je  $f(t) \neq 0$ . Tada je  $A = C_0(\Omega)$ .*

## 1.2 Karakteri Banachovih algebri i Geljfangova teorija

**Definicija 1.2.1.** **Karakter** algebre  $A$  je svaki nenul homomorfizam  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ . S  $\Omega(A)$  označavamo skup svih karaktera algebre  $A$ .

Uočimo da ako je  $A$  unitalna, svaki karakter  $\phi \in \Omega(A)$  je unitalan. Zaista, imamo  $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2$  pa je  $\varphi(1) \in \{0, 1\}$ . Kad bi bilo  $\varphi(1) = 0$ , slijedilo bi  $\phi = 0$ , što ne vrijedi.

**Lema 1.2.2.** *Neka je  $A$  unitalna algebra i  $\varphi$  linearan funkcional na  $A$ . Tada je*

$$\varphi \in \Omega(A) \iff \phi(1) = 1 \text{ i } \varphi(a^2) = \varphi(a)^2, \forall a \in A.$$

*Dokaz.* Ako je  $\varphi$  karakter, onda oĉito zadovoljava traŹene uvjete. Obratno, neka  $\varphi$  zadovoljava uvjete. Tada za sve  $a, b \in A$  imamo

$$\begin{aligned}\varphi(a)^2 + \varphi(ab + ba) + \varphi(b^2) &= \varphi(a^2 + ab + ba + b^2) \\ &= \varphi((a + b)^2) \\ &= (\varphi(a) + \varphi(b))^2 \\ &= \varphi(a)^2 + 2\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b^2)\end{aligned}$$

odakle slijedi  $\varphi(ab + ba) = 2\varphi(a)\varphi(b)$ . Stoga je za multiplikativnost dovoljno pokazati da vrijedi  $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ . Uoĉimo da za proizvoljne  $x, y \in A$  vrijedi

$$(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x]$$

pa je

$$\begin{aligned}\varphi(ab - ba) + 4\varphi(x)^2\varphi(y)^2 &= \varphi((xy - yx)^2 + (xy + yx)^2) \\ &= 2\varphi(x(yxy) + (yxy)x) \\ &= 4\varphi(x)\varphi(yxy).\end{aligned}$$

Sada za  $x := a - \varphi(a)1$  i  $y := b$  imamo  $\varphi(x) = 0$  pa slijedi  $\varphi(xb - bx)^2 = 0$ , a odatle  $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ .  $\square$

**Teorem 1.2.3** (Gleason-Kahane-Źelazko). *Neka je  $A$  unitalna Banachova algebra. Ako je  $\varphi$  linearan funkcional na  $A$ , tada je ekvivalentno:*

- (i)  $\varphi \in \Omega(A)$ .
- (ii)  $\varphi(1) = 1$  i  $\varphi(a) \neq 0$  za sve  $a \in A^\times$ .
- (iii)  $\varphi(a) \in \sigma(a)$  za sve  $a \in A$ .

*Dokaz.* (i)  $\implies$  (ii). Iz  $\varphi \in \Omega(A)$  odmah slijedi  $\varphi(1) = 1$  pa za sve  $a \in A^\times$  imamo

$$1 = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}\varphi(a)$$

pa posebno  $\varphi(a) \neq 0$ .

(ii)  $\implies$  (iii). Za  $\lambda \in \rho(a)$  imamo  $a - \lambda 1 \in A^\times$  pa je  $0 \neq \varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda$ .

(iii)  $\implies$  (i). Imamo  $\varphi(1) \in \sigma(1) = \{1\}$  pa je  $\varphi(1) = 1$ . Prema Lemi 1.2.2 dovoljno je pokazati  $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$  za sve  $a \in A$ . Fiksirajmo  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  i definirajmo polinom

$$p(\lambda) = \varphi((\lambda 1 - a)^n).$$

Neka su  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  korijeni od  $p$  s kratnostima. Tada imamo

$$0 = p(\lambda_i) = \varphi((\lambda_i 1 - a)^n) \in \sigma((\lambda_i 1 - a)^n) = (\lambda_i - \sigma(a))^n, \quad \text{za sve } i = 1, \dots, n$$

pa je  $\lambda_i \in \sigma(a)$ , odakle slijedi  $|\lambda_i| \leq r(a)$ . Imamo

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = p(\lambda) = \lambda^n - n\varphi(a)\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\varphi(a^2)\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n\varphi(a^n)$$

pa Vièteove formule daju

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n\varphi(a), \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \binom{n}{2}\varphi(a^2),$$

što povlači

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n(n-1)\varphi(a^2).$$

Sada slijedi

$$\begin{aligned} n^2|\varphi(a)^2 - \varphi(a^2)| &= n^2 \left| \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - n\varphi(a^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \right| \\ &= \left| -n\varphi(a^2) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right| \\ &\leq n|\varphi(a^2)| + nr(a)^2 \end{aligned}$$

pa dijeljenjem s  $n^2$  i puštanjem  $n \rightarrow \infty$  slijedi  $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ .  $\square$

**Primjer 1.2.4.** Neka je  $K$  CH prostor. Tada su svi karakteri na  $C(K)$  oblika evaluacija  $\varepsilon_t : f \mapsto f(t)$  za neki  $t \in K$ .

Zaista, pokazat ćemo da su svi maksimalni ideali u  $C(K)$  oblika

$$M_t := \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$$

za neki  $t \in K$ . Ideali  $M_t$  su maksimalni jer je algebra  $C(K)/M_t$  izomorfna polju  $\mathbb{C}$ . Neka je  $M$  maksimalan ideal u  $C(K)$ . Tvrdimo da sve funkcije iz  $M$  imaju zajedničku nultočku; u suprotnom za svaki  $t \in K$  postoji funkcija  $f_t \in M$  takva da je  $|f_t| > 0$  na

nekoj otvorenoj okolini  $U(t)$  od  $t$ . Zbog kompaktnosti od  $K$  postoji konačno mnogo točaka  $t_1, \dots, t_n \in K$  takvih da je  $K = U(t_1) \cup \dots \cup U(t_n)$  pa je

$$f = |f_{t_1}|^2 + \dots + |f_{t_n}|^2 = f_{t_1} \overline{f_{t_1}} + f_{t_n} \overline{f_{t_n}} \in M$$

i invertibilna je jer nema nultočaka, što je kontradikcija s činjenicom da je  $M$  pravi ideal. Dakle postoji  $t \in K$  takav da je  $f(t) = 0$  za sve  $f \in M$ . Tada imamo inkluziju  $M_t \subseteq M$  pa vrijedi i jednakost.

Neka je  $\varphi$  karakter na  $C(K)$ . Znamo da je  $\ker \varphi$  maksimalni ideal jer je po Prvom teoremu o izomorfizmu za algebre  $C(K)/\ker \varphi$  izomorfno polju  $\mathbb{C}$ . Dakle, postoji  $t \in K$  takav da je  $\ker \varphi = M_t$ . Neka je  $f \in C(K)$  proizvoljna. Tada je  $f - f(t)1 \in M_t$  pa slijedi

$$\varphi(f) = \varphi(f(t)1) = f(t)\varphi(1) = f(t).$$

Zaključujemo  $\varphi = \varepsilon_t$ .

**Primjer 1.2.5.** Matrična algebra  $M_n(\mathbb{C})$  je prosta za  $n \in \mathbb{N}$ . Zaista, neka je  $J \neq \{0\}$  ideal u  $M_n(\mathbb{C})$ . Tada postoji  $A \in J$  s  $A_{ij} \neq 0$ . Označimo s  $E_{rs}$  matricu s 1 na mjestu  $(r, s)$ , ostalo su 0. Tada je  $A_{ij}E_{ij} = E_{ij}AE_{ji} \in J$  pa množenjem s  $\frac{1}{A_{ij}}$  dobivamo  $E_{ij} \in J$ . Sada je  $E_{jj} = E_{ji}E_{ii}E_{ij} \in J$  za sve  $1 \leq j \leq n$  pa je  $I = E_{11} + \dots + E_{nn} \in J$ .

Posebno,  $\text{Max } M_n(\mathbb{C}) = \emptyset$  pa  $M_n(\mathbb{C})$  nema karaktera.

**Napomena 1.2.6.** Neka je  $A$  neunitalna algebra i  $A^1$  njena unitizacija. Za svaki karakter  $\psi \in \Omega(A^1)$  mora vrijediti  $\psi(1) = 1$  pa karakter  $\varphi \in \Omega(A)$  možemo na jedinstven način proširiti do karaktera  $\tilde{\varphi} \in \Omega(A^1)$  koji je zadan formulom  $\tilde{\varphi}(a + \lambda 1) = \varphi(a) + \lambda$  za  $a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ .

Neka je  $\varphi_\infty \in \Omega(A^1)$  karakter s jezgrom  $A$ , tj.  $\varphi_\infty(a + \lambda 1) = \lambda$ . Tada ako  $\varphi \in \Omega(A)$  poistovjetimo s  $\tilde{\varphi} \in \Omega(A^1)$  vrijedi

$$\Omega(A^1) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$$

**Korolar 1.2.7.** Neka je  $A$  Banachova algebra i  $\varphi \in \Omega(A)$ . Tada je  $\varphi$  ograničen linearan funkcional na  $A$  za kojeg vrijedi  $|\varphi(a)| \leq r(a)$  za sve  $a \in A$ . Specijalno  $\|\varphi\| \leq 1$  i  $\|\varphi\| = 1$  ako je  $A$  unitalna.

*Dokaz.* Uzevši u obzir prethodnu napomenu smijemo pretpostaviti da je  $A$  unitalna. Tvrdnja sada slijedi iz relacije  $\varphi(a) \in \sigma(a)$  za sve  $a \in A$ , i  $\varphi(1) = 1$ .  $\square$

**Lema 1.2.8.** Neka je  $A$  Banachova algebra i  $I$  pravi modularni ideal u  $A$ . Ako je  $e \in A$  jedinica modulo  $I$ , tada je  $I$  ne siječe otvorenu kuglu oko  $e$  radijusa 1, tj.  $I \cap B_A(e, 1) = \emptyset$ . Posebno

(i)  $\bar{I}$  je također pravi ideal u  $A$ .

(ii) Svaki modularni maksimalni ideal  $M$  u  $A$  je zatvoren.

*Dokaz.* Neka je  $A'$  algebra  $A$  ako je  $A$  unitalna, odnosno  $A^1$  ako je  $A$  neunitalna. Neka je  $a \in B_A(e, 1)$ . Tada je  $\|a - e\| \leq 1$  pa je prema Propoziciji 1.1.12  $1 - (e - a)$  invertibilan u  $A'$ . Stavimo  $(1 - (e - a))^{-1} = b + \lambda 1$  za neke  $b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$  pa vrijedi

$$1 = (b + \lambda 1)(1 - (e - a)) = \lambda 1 + b - \lambda e - be + \lambda a + ba.$$

Pretpostavimo  $a \in I$ . Ako je  $1 \in A$ , imamo

$$1 = \overbrace{\lambda 1 - (\lambda 1)e}^{\in I} + \overbrace{b - be}^{\in I} + (\lambda 1 + b)a \in I$$

što je kontradikcija. Ako je  $1 \notin A$ , imamo

$$(1 - \lambda)1 = b - \lambda e - be + \lambda a + ba \in A$$

pa je  $\lambda = 1$  i  $e = \overbrace{b - be}^{\in I} + a + ba \in I$ , što je kontradikcija. Slijedi  $a \notin I$ .  $\square$

**Teorem 1.2.9.** Neka je  $A$  komutativna Banachova algebra. Tada je preslikavanje

$$\Theta : \Omega(A) \rightarrow \text{Max } A, \quad \Theta(\varphi) := \ker \varphi$$

bijekcija sa skupa svih karaktera od  $A$  na skup svih maksimalnih modularnih ideala u  $A$ .

*Dokaz.* Ako je  $\varphi \in \Omega(A)$ , tada je  $\ker \varphi$  zatvoreni ideal u  $A$  kodimenziije 1 pa je maksimalan.

Odaberimo  $e \in A$  takav da je  $\varphi(e) = 1$ . Tada za sve  $a \in A$  imamo

$$\varphi(ea - a) = \varphi(e)\varphi(a) - \varphi(a) = 0$$

pa je  $ea - a \in \ker \varphi$ . Dakle,  $e$  je jedinica modulo  $\ker \varphi$  pa je  $\ker \varphi$  modularni maksimalni ideal.

Pokažimo injektivnost od  $\Theta$ . Neka su  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$  takvi da je  $\ker \theta_1 = \ker \theta_2 =: I$ . Neka je  $e$  jedinica modulo  $I$ . Slijedi da je  $\varphi(e) = 1$  za svaki  $\varphi \in \Omega(A)$  takav da je  $\ker \varphi = I$ . Budući da je  $I$  kodimenziije 1, svaki element  $a \in A$  se na jedinstven način prikazuje kao  $a = \lambda e + b$  za neke  $\lambda \in \mathbb{C}, b \in I$ . Imamo

$$\varphi_1(a) = \lambda \varphi_1(e) + \varphi_1(b) = \lambda = \lambda \varphi_2(e) + \varphi_2(b) = \varphi_2(a)$$

pa slijedi  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Pokažimo surjektivnost od  $\Theta$ . Neka je  $M \in \text{Max } A$ . Prema prethodnoj lemi,  $M$  je zatvoren ideal u  $A$ . Nadalje, prema Propoziciji 1.1.3 slijedi da

je  $A/M$  polje. Prema Geljfund-Mazurovom teoremu imamo da je  $A/M$  izometrički izomorfna Banachovoj algebri  $\mathbb{C}$ . Neka je  $\varphi : A/M \rightarrow \mathbb{C}$  izometrički izomorfizam i  $q : A \rightarrow A/M$  kvocijentno preslikavanje. Tada je  $\varphi := \phi \circ q \in \Omega(A)$  i  $\Theta(\varphi) = \ker \varphi = M$ .  $\square$

**Korolar 1.2.10.** *Neka je  $A$  unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je  $\Omega(A)$  neprazan.*

*Dokaz.* Prema Propoziciji 1.1.1, ideal  $\{0\}$  je sadržan u nekom maksimalnom idealu koji je prema prethodnom teoremu jezgra nekog karaktera iz  $\Omega(A)$ . Posebno  $\Omega(A) \neq \emptyset$ .  $\square$

Uvedimo sada osnove Geljfundove teorije.

**Definicija 1.2.11.** Neka je  $A$  komutativna Banachova algebra. Prema Korolaru 1.2.7 slijedi da je  $\Omega(A) \subseteq \text{Ball}(A^*)$  gdje je  $A^*$  dual od  $A$ . Relativna  $w^*$ -topologija na  $\Omega(A)$  zove se Geljfundova topologija. Eksplicitno, bazu okolina karaktera  $\varphi_0 \in \Omega(A)$  čine skupovi oblika

$$U_{\Omega(A)}(\varphi_0, a_1, \dots, a_n, \varepsilon) := \{\varphi \in \Omega(A) : |\varphi(a_1) - \varphi_0(a_1)| < \varepsilon, \dots, |\varphi(a_n) - \varphi_0(a_n)| < \varepsilon\}$$

za neke  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A$  i  $\varepsilon > 0$ .

Skup  $\Omega(A)$  snabdjeven Geljfundovom topologijom nazivamo **Geljfundov spektar** od  $A$ .

**Teorem 1.2.12** (Banach-Alaoglu). *Neka je  $X$  normiran prostor. Tada je  $\text{Ball}(X^*)$   $w^*$ -kompaktna.*

*Dokaz.* Definiramo topološki prostor

$$D = \prod_{x \in X} \overline{B}(0, \|x\|),$$

gdje je  $\overline{B}(0, \|x\|)$  zatvorena kugla u  $\mathbb{C}$ .  $D$  je kompaktan po Tihonovljevom teoremu.

Definiramo  $\Psi : \text{Ball}(X^*) \rightarrow D$  formulom  $\Psi(f) = (f(x))_{x \in X}$ . Na domeni promatramo  $w^*$ -topologiju.

$\Psi$  je neprekidan:

$$f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \implies f_\lambda(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X \implies (f_\lambda(x))_{x \in X} \rightarrow (f(x))_{x \in X}.$$

Uočimo da je  $\Psi$  i injekcija.

Pokažimo da je  $\Psi(\text{Ball}(X^*))$  zatvoren podskup u  $D$ . Neka je  $(f_\lambda(x))_{x \in X}$  mreža u  $\Psi(\text{Ball}(X^*))$  koja konvergira prema  $(\gamma_x)_{x \in X} \in D$ . Definiramo funkciju  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  sa  $f(x) = \gamma_x$ .  $f$  je linearna:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \gamma_{\alpha x + \beta y} = \lim_{\lambda} f_\lambda(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{\lambda} \alpha f_\lambda(x) + \beta f_\lambda(y) \\ &= \alpha \lim_{\lambda} f_\lambda(x) + \beta \lim_{\lambda} f_\lambda(y) \\ &= \alpha \gamma_x + \beta \gamma_y \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Također je  $f(x) \in \overline{B}(0, \|x\|)$  pa je  $|f(x)| \leq \|x\|$  za sve  $x \in X$ . Dakle  $f \in \text{Ball}(X^*)$  i očito  $(f_\lambda(x))_{x \in X} \rightarrow (f(x))_{x \in X}$  pa je  $(\gamma_x)_{x \in X} = (f(x))_{x \in X} \in \Psi(\text{Ball}(X^*))$ .

Dakle,  $\Psi(\text{Ball}(X^*))$  je zatvoren podskup u  $D$ . Posebno je i kompaktan u  $D$ .

Lako vidimo da je i inverz na slici  $\Psi^{-1}$  neprekidan pa zaključujemo da je  $\Psi$  homeomorfizam na svoju sliku. Dakle,  $\text{Ball}(X^*)$  je homeomorfan kompaktnom potprostoru od  $D$  pa je i sam kompaktan.  $\square$

**Propozicija 1.2.13.** *Neka je  $A$  komutativna Banachova algebra.*

(i) *Ako je  $A$  unitalna, tada je  $\Omega(A)$  kompaktan Hausdorffov prostor.*

(ii) *Ako  $A$  nije unitalna, tada je  $\Omega(A)$  lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Štoviše, ako  $\Omega(A)$  nije kompaktan, tada je  $\Omega(A^1) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$  Aleksandrovljeva kompaktifikacija od  $\Omega(A)$ .*

*Dokaz.* (i) Prema [Banach-Alaogluovom](#) teoremu vrijedi da je  $\text{Ball}(A^*)$   $w^*$ -kompaktna pa je dovoljno pokazati da je  $\Omega(A)$  zatvoren podskup od  $\text{Ball}(A^*)$ . Neka je  $\varphi_0 \in \overline{\Omega(A)}^{w^*}$ . Tvrđimo da je  $\varphi_0 \in \Omega(A)$ , tj.  $\varphi_0(ab) = \varphi_0(a)\varphi_0(b)$  za sve  $a, b \in A$  i  $\varphi_0(1) = 1$ .

Neka su  $a, b \in A$  i  $\varepsilon > 0$ . Stavimo  $\delta = (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)^{-1}\varepsilon$  i odaberimo  $\varphi \in \Omega(A) \cap U_{A^*}(\varphi_0, 1, \varepsilon) \cap U_{A^*}(\varphi_0, a, b, ab, \delta)$ . Imamo  $\varphi(1) = 1$  pa je

$$|1 - \varphi_0(1)| = |\varphi(1) - \varphi_0(1)| < \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti  $\varepsilon > 0$  slijedi  $\varphi_0(1) = 1$ . Nadalje, zbog  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  imamo

$$\begin{aligned} |\varphi_0(ab) - \varphi_0(a)\varphi_0(b)| &= |(\varphi_0(ab) - \varphi(ab)) + \varphi(a)(\varphi(b) - \varphi_0(b)) + \varphi_0(b)(\varphi(a) - \varphi_0(a))| \\ &\leq |\varphi_0(ab) - \varphi(ab)| + |\varphi(a)(\varphi(b) - \varphi_0(b))| + |\varphi_0(b)(\varphi(a) - \varphi_0(a))| \\ &< (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$



Zbog proizvoljnosti  $a, b \in A$  i  $\varepsilon > 0$  slijedi da je  $\varphi_0$  multiplikativan, dakle  $\varphi_0 \in \Omega(A)$ .

- (ii) Neka  $A$  nije unitalna algebra. Koristeći identifikaciju  $\Omega(A^1) = \Omega(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ , za  $\varphi \in \Omega(A)$ ,  $\varepsilon > 0$  i konačan  $F \subseteq A$  imamo

$$U_{\Omega(A^1)}(\varphi, F, \varepsilon) = \begin{cases} U_{\Omega(A)}(\varphi, F, \varepsilon) \cup \{\varphi_\infty\}, & \text{ako je } |\varphi(a)| < \varepsilon \text{ za sve } a \in F \\ U_{\Omega(A)}(\varphi, F, \varepsilon), & \text{inače.} \end{cases}$$

pa se Geljandova topologija na  $\Omega(A)$  podudara s relativnom Geljandovom topologijom od  $\Omega(A^1)$ . Prema (i) znamo da je  $\Omega(A^1)$  kompaktan, a  $\{\varphi_\infty\}$  je zatvoren u  $\Omega(\tilde{A})$  pa je  $\Omega(A) = \Omega(A^1) \setminus \{\varphi_\infty\}$  lokalno kompaktan kao otvoren podskup kompaktnog prostora. □

**Definicija 1.2.14.** Neka je  $A$  komutativna Banachova algebra. Za  $a \in A$  definiramo funkciju

$$\hat{a} : \Omega(A) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\varphi) := \varphi(a), \text{ za sve } \varphi \in \Omega(A).$$

Prema definiciji Geljandove topologije na  $\Omega(A)$ , funkcija  $\hat{a}$  je očito neprekidna.

Preslikavanje  $\Gamma_A : A \rightarrow C(\Omega(A))$  definirano s  $\Gamma_A : a \mapsto \hat{a}$  zove se **Geljandova transformacija** od  $A$ .

**Teorem 1.2.15.** *Neka je  $A$  komutativna Banachova algebra takva da je  $\Omega(A) \neq \emptyset$  i neka je  $\Gamma = \Gamma_A$  Geljandova transformacija od  $A$ .*

- (i)  $\Gamma$  je homomorfizam algebri. Ako je  $A$  unitalna,  $\Gamma$  je unitalan.
- (ii)  $\Gamma$  separira točke od  $\Omega(A)$  i vrijedi  $\Gamma(A)(\varphi) \neq \{0\}$  za sve  $\varphi \in \Omega(A)$ .
- (iii) Ako je  $A$  unitalna algebra, tada je

$$\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(A)\}.$$

Ako  $A$  nije unitalna algebra, tada je  $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$ .

- (iv)  $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Omega(A))$  i za sve  $a \in A$  vrijedi  $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$ . Specijalno,  $\Gamma$  je kontraktivni homomorfizam  $A \rightarrow C_0(\Omega(A))$ .
- (v)  $\ker \Gamma = \bigcap_{\varphi \in \Omega(A)} \ker \varphi$ .
- (vi)  $\Gamma$  je izometrija ako i samo ako vrijedi  $\|a^2\| = \|a\|^2$  za sve  $a \in A$ .

*Dokaz.* (i) Neka su  $a, b \in A$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Za svaki  $\varphi \in \Omega(A)$  imamo

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha a + \beta b})(\varphi) &= \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\hat{a}(\varphi) + \beta\hat{b}(\varphi) = (\alpha\hat{a} + \beta\hat{b})(\varphi), \\ \widehat{ab}(\varphi) &= \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi) = (\hat{a}\hat{b})(\varphi). \end{aligned}$$

(ii) Trivijalno.

(iii) Neka je  $A$  unitalna algebra. Znamo da je  $\varphi(a) \in \sigma(a)$  za sve  $\varphi \in \Omega(A)$  pa je  $\hat{a}(\Omega(A)) \subseteq \sigma(a)$ . Obratno, neka je  $\lambda \in \sigma(a)$ . Tada je  $a - \lambda 1 \notin A^\times$  pa prema Korolaru 1.1.2 postoji  $M \in \text{Max } A$  takav da je  $a - \lambda 1 \in M$ . Znamo da je  $M$  jezgra nekog karaktera  $\varphi \in \Omega(A)$  pa je  $\lambda - \varphi(a) = \varphi(a - \lambda 1) = 0$ , odnosno  $\lambda = \varphi(a) = \hat{a}(\varphi)$ . Ako  $A$  nije unitalna, tada imamo

$$\sigma_A(a) = \sigma_{A^1}(a) = \hat{a}(\Omega(A^1)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(A)\} \cup \{\varphi_\infty(a)\} = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}.$$

(iv) Prema (iii) imamo

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(a)$$

pa je  $\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) \leq \|a\|$ . Preostaje dokazati da je  $\Gamma(A) \subseteq C_0(\Omega(A))$ . To je jasno ako je  $\Omega(A)$  kompaktan. U suprotnom znamo da je  $\Omega(A^1)$  Aleksandrovljeva kompaktifikacija od  $\Omega(A)$  i za sve  $a \in A$  je  $\hat{a}(\varphi_\infty) = 0$ , odnosno  $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$ .

(v) Slijedi direktno iz definicije od  $\Gamma$ .

(vi) Pretpostavimo da za sve  $a \in A$  vrijedi  $\|a^2\| = \|a\|^2$ . Tada indukcijom slijedi  $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  pa iz (iv) i Geljandove formule slijedi

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|$$

pa je  $\Gamma$  izometrija. Obratno, ako je  $\Gamma$  izometrija onda

$$\|a^2\| = \|\widehat{a^2}\|_\infty = \|\hat{a}^2\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2 = \|a\|^2.$$

□

Neka je  $A$  unitalna normirana algebra i  $S \subseteq A$ . Postoji najmanja zatvorena unitalna podalgebra  $B$  od  $A$  koja sadrži  $S$ . Ona je realizirana kao presjek svih zatvorenih podalgebri od  $A$  koje sadrže skup  $S \cup \{1\}$ . Vrijedi da je  $S$  zatvarač linearne ljuske svih konačnih produkata elemenata od  $S \cup \{1\}$ .

Sljedeća propozicija pokazuje da je spektralni radijus submultiplikativna polunorma na komutativnim Banachovim algebra:

**Propozicija 1.2.16.** *Neka je  $A$  Banachova algebra i  $a, b \in A$  komutirajući elementi. Tada vrijedi*

$$r(a + b) \leq r(a) + r(b), \quad r(ab) \leq r(a)r(b).$$

*Dokaz.* Spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj algebri pa možemo prijeći na unitalizaciju  $A^1$  i potom na unitalnu Banachovu podalgebru generiranu skupom  $\{a, b\}$ . Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $A$  unitalna i komutativna. Tada Geljfundova transformacija daje

$$r(a + b) = \|\hat{a} + \hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty + \|\hat{b}\|_\infty = r(a) + r(b).$$

$$r(ab) = \|\hat{a}\hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty \|\hat{b}\|_\infty = r(a)r(b).$$

□

Neka je  $A$  unitalna komutativna Banachova algebra i  $a_1, \dots, a_n \in A$ . **Grupni spektar** od  $a_1, \dots, a_n$  definiramo kao

$$\sigma(a_1, \dots, a_n) = \{(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) : \varphi \in \Omega(A)\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Preslikavanje  $T : \Omega(A) \rightarrow \sigma(a_1, \dots, a_n)$ ,  $T : \varphi \mapsto (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$  je neprekidna surjekcija, a  $\Omega(A)$  je kompaktan skup pa je  $\sigma(a_1, \dots, a_n)$  kompaktan podskup od  $\mathbb{C}^n$ .

**Propozicija 1.2.17.** *Neka je  $A$  unitalna komutativna Banachova algebra generirana konačnim skupom  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Tada je preslikavanje  $T : \Omega(A) \rightarrow \sigma(a_1, \dots, a_n)$  homeomorfizam.*

*Dokaz.* Ako se  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$  podudaraju na generatorima  $a_1, \dots, a_n$  (i na jedinici 1) tada se po linearnosti i neprekidnosti podudaraju na  $A$ . Dakle,  $T$  je neprekidna bijekcija s CH prostora  $\Omega(A)$  na CH prostor  $\sigma(a_1, \dots, a_n)$  pa je homeomorfizam. □

Neka je  $\phi : A \rightarrow B$  algebarski izomorfizam komutativnih Banachovih algebri  $A$  i  $B$ . Definiramo **transponat**  $\phi^t : \Omega(B) \rightarrow \Omega(A)$  od  $\phi$  formulom

$$\phi^t(\psi) := \psi \circ \phi, \quad \psi \in \Omega(B).$$

$\phi^t$  je bijekcija s inverzom  $\varphi \mapsto \varphi \circ \phi^{-1}$  za  $\varphi \in \Omega(A)$ . Štoviše,  $\phi^t$  je homeomorfizam s  $\Omega(B)$  na  $\Omega(A)$ . Zaista, za mrežu  $(\psi_i)_i$  i karakter  $\psi_0$  u  $\Omega(B)$  imamo

$$\begin{aligned} \psi_i \rightarrow \psi_0 \text{ u } \Omega(B) &\iff \psi_i(b) \rightarrow \psi_0(b), \forall b \in B \\ &\iff \psi_i(\phi(a)) \rightarrow \psi_0(\phi(a)), \forall a \in A \\ &\iff \phi^t(\psi_i) \rightarrow \phi^t(\psi_0) \text{ u } \Omega(A). \end{aligned}$$

Možemo ići i u obratnom smjeru. Neka je  $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  homeomorfizam LCH prostora  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Definiramo transponat  $F^t : C_0(\Omega_2) \rightarrow C_0(\Omega_1)$  od  $F$  formulom

$$F^t(g) := g \circ F, \quad g \in C_0(\Omega_2).$$

Tada je  $F^t$  algebarski izomorfizam s inverzom  $f \circ F^{-1}$  za  $f \in C_0(\Omega_1)$  te za sve  $g \in C_0(\Omega_2)$  vrijedi

$$\|F^t(g)\|_\infty = \sup_{t \in \Omega_1} |g(F(t))| = \sup_{s \in \Omega_2} |g(s)| = \|g\|_\infty.$$

Zaključujemo da je  $F^t$  izometrički izomorfizam Banachovih algebri  $C_0(\Omega_2)$  i  $C_0(\Omega_1)$ .

Dakle, vrijedi sljedeći rezultat (vidjeti Primjer 1.2.4):

**Korolar 1.2.18.** *Za CH prostore  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  ekvivalentno je:*

- (i) *Banachove algebre  $C(\Omega_1)$  i  $C(\Omega_2)$  su izometrički izomorfne.*
- (ii) *Banachove algebre  $C(\Omega_1)$  i  $C(\Omega_2)$  su algebarski izomorfne.*
- (iii) *Prostori  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  su homeomorfni.*

# Poglavlje 2

## $C^*$ -algebre

### 2.1 Komutativne $C^*$ -algebre i neprekidni funkcionalni račun

Sada ćemo Geljandovu transformaciju primijeniti na  $C^*$ -algebre.

**Propozicija 2.1.1.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $a \in A$  normalni element. Tada je  $\|a\| = r(a)$ .*

*Dokaz.* Za svaki hermitski element  $b \in B$  vrijedi  $\|b^2\| = \|b^*b\| = \|b\|^2$  pa indukcijom slijedi  $\|b\|^{2^n} = \|b^{2^n}\|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Sada prema Geljandovoj formuli vrijedi

$$r(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|b^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|b\|.$$

Primjenom ovog rezultata (koristeći Propoziciju 1.2.16 i normalnost od  $a$ ) na hermitski element  $a^*a$  slijedi

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) \leq r(a^*)r(a) = r(a)^2 \leq \|a\|^2$$

pa je  $r(a) = \|a\|$ . □

**Propozicija 2.1.2.** *Na  $*$ -algebri  $A$  postoji najviše jedna  $C^*$ -norma.*

*Dokaz.* Ako je  $\|\cdot\|$   $C^*$ -norma na  $A$  tada slijedi

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a^*a)} |\lambda|$$

pa je  $\|\cdot\|$  u potpunosti određena  $*$ -algebarskom strukturom od  $A$ . □

**Teorem 2.1.3.** *Neka je  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -homomorfizam  $C^*$ -algebri. Tada je  $\phi$  kontrak-tivan.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da su  $A$  i  $B$  unitalne i da je  $\phi$  unitalan. Tada prema Napomeni 1.1.16 imamo  $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$  pa slijedi

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\|^2 = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Pretpostavimo da je samo  $A$  unitalna. Tada je  $\phi(1_A)$  jedinica u algebri  $\phi(A)$  pa po neprekidnosti množenja slijedi da je  $C^*$ -algebra  $\phi(A)$  unitalna s jedinicom  $\phi(1_A)$ . Spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj  $C^*$ -algebri (dan je Geljandovom formu-lom, Propozicija 1.1.13 (vii)) pa jednaki račun kao gore pokazuje da je  $\phi$  kontrakcija.

Pretpostavimo sada da ni  $A$  nije unitalna i neka je  $A^1$  njena unitizacija. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je  $B$  unitalna, u suprotnom ju zamijenimo unitizacijom  $B^1$ .  $*$ -homomorfizam  $\phi$  tada možemo proširiti do  $*$ -homomorfizma  $\tilde{\phi} : A^1 \rightarrow B$

$$\tilde{\phi}(a + \lambda 1_A) = \phi(a) + \lambda 1_B, \quad a \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Iz gore dokazanih tvrdnji slijedi da je  $\tilde{\phi}$  kontrakcija pa je i restrikcija  $\phi = \tilde{\phi}|_A$  kon-trakcija.  $\square$

**Korolar 2.1.4.** *Ako je  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -izomorfizam  $C^*$ -algebri, tada je  $\phi$  izometrija.*

*Dokaz.* Znamo da je  $\phi$  kontrakcija.  $\phi^{-1}$  je također  $*$ -homomorfizam pa je i on kon-trakcija.  $\square$

U stvari vrijedi (Teorem 2.1.15) da je svaki injektivni  $*$ -homomorfizam  $C^*$ -algebri izometrija.

**Propozicija 2.1.5.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $a \in A$ .*

(i) *Ako je  $a$  hermitski element, tada je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ .*

(ii) *Ako je  $a$  projektor, tada je  $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$ .*

(iii) *Ako je  $A$  unitalna i  $a$  unitaran, tada je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$ .*

*Dokaz.* (i) Prelaskom na  $A^1$  možemo pretpostaviti da je  $A$  unitalna. Neka je  $\lambda \in \sigma(a)$ . Promotrimo niz  $(a_n)_n$  u  $A$  zadan s

$$a_n = a - (\operatorname{Re} \lambda)1 + in(\operatorname{Im} \lambda)1.$$

Tada je  $i(n+1)(\operatorname{Im} \lambda) \in \sigma(a_n)$  pa je

$$\begin{aligned} (n^2 + 2n + 1)(\operatorname{Im} \lambda)^2 &= |i(n+1)(\operatorname{Im} \lambda)|^2 \\ &\leq r(a_n)^2 \\ &\leq \|a_n\|^2 \\ &= \|a_n^* a_n\| \\ &= \|(a - (\operatorname{Re} \lambda)1)^2 + n^2(\operatorname{Im} \lambda)^2 1\| \\ &\leq \|a - (\operatorname{Re} \lambda)1\|^2 + n^2(\operatorname{Im} \lambda)^2 \end{aligned}$$

pa je  $(2n+1)(\operatorname{Im} \lambda)^2 \leq \|a - (\operatorname{Re} \lambda)1\|^2$  za sve  $n \in \mathbb{N}$  odakle slijedi  $\operatorname{Im} \lambda = 0$  pa je  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(ii) Za polinom  $p(x) = x^2 - x$  imamo  $p(a) = 0$  pa prema Teoremu 1.1.13 (vi) vrijedi

$$p(\sigma(a)) = \sigma(p(a)) = \sigma(0) = \{0\},$$

odnosno  $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$ .

(iii)  $a$  je unitaran pa je  $\|a\| = 1$  odakle slijedi  $\sigma(a) \subseteq \overline{K}(0, 1)$ . Također zbog  $a^{-1} = a^*$  imamo (Teorem 1.1.13 (vii) i Propozicija 1.1.6 (iii))

$$\sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1}) = \sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)} \subseteq \overline{\overline{K}(0, 1)} = \overline{K}(0, 1)$$

pa je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$ .

□

**Napomena 2.1.6.** Uočimo da je svaki karakter  $\varphi$   $C^*$ -algebre  $A$  hermitski funkcional. To slijedi iz  $\varphi(a) \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$  za sve  $a \in A_h$ .

**Teorem 2.1.7** (Komutativni Geljfund-Naimark). *Ako je  $A$  komutativna  $C^*$ -algebra, tada je njena Geljfundova transformacija  $\Gamma : A \rightarrow C_0(\Omega(A))$ ,  $\Gamma : a \mapsto \hat{a}$  (izometrički)  $*$ -izomorfizam. Ako je  $A$  unitalna, tada je  $\Gamma$  unitalni (izometrički)  $*$ -izomorfizam  $A \rightarrow C(\Omega(A))$ .*

*Dokaz.* Znamo da je  $\Gamma$  homomorfizam. Za sve  $\varphi \in \Omega(A)$  i  $a \in A$  imamo

$$\Gamma(a^*)(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\varphi)} = \Gamma(a)^*(\varphi)$$

pa je  $\Gamma$   $*$ -homomorfizam. Nadalje, imamo

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| = r(a^* a) = \|\Gamma(a^* a)\|_\infty = \|\Gamma(a)^* \Gamma(a)\| = \|\Gamma(a)\|_\infty^2$$

pa je  $\Gamma$  izometrija, specijalno i injekcija.

Za surjektivnost primijetimo da  $\Gamma$  zadovoljava uvjete Teorema 1.1.20. Zaista, iz dokazanog slijedi da je  $\Gamma(A)$  zatvorena  $*$ -podalgebra od  $C_0(\Omega(A))$ , a iz Teorema 1.2.15 (ii) znamo da  $\Gamma(A)$  razdvaja točke od  $\Omega(A)$  i da za svaki karakter  $\varphi \in \Omega(A)$  postoji element  $a \in A$  takav da je  $\Gamma(a)(\varphi) \neq 0$ .

Ako je  $A$  unitalna, tada je prema Propoziciji 1.2.13 (i)  $\Omega(A)$  kompaktan prostor i  $\Gamma : A \rightarrow C(\Omega(A))$  je unitalni  $*$ -homomorfizam (Teorem 1.2.15 (i)).  $\square$

**Korolar 2.1.8.** *Za komutativne  $C^*$ -algebre  $A$  i  $B$  su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

- (i)  $A$  i  $B$  su  $*$ -izomorfne.
- (ii)  $A$  i  $B$  su algebarski izomorfne.
- (iii)  $\Omega(A)$  i  $\Omega(B)$  su homeomorfni.

*Dokaz.* Neka je  $F$  homeomorfizam LCH prostora  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Tada znamo da je njegov transponat  $F^t : C_0(\Omega_2) \rightarrow C_0(\Omega_1)$ ,  $F^t(g) = g \circ F$  izometrički izomorfizam. Primijetimo da je  $F^t$  štoviše i  $*$ -izomorfizam jer

$$F^t(g^*)(t) = (g^* \circ F)(t) = g^*(F(t)) = \overline{g(F(t))} = (g \circ F)^*(t) = (F^t(g))^*(t).$$

Sada iz Teorema 2.1.7 i Korolara 1.2.18 direktno slijedi tražena ekvivalencija.  $\square$

Ako je  $B$  unitalna podalgebra unitalne Banachove algebre  $A$ , tada znamo (Propozicija 1.1.15) da za svaki element  $b \in B$  vrijedi  $\sigma_B(b) \subseteq \sigma_A(b)$ . Ta inkluzija općenito može biti striktna. Međutim, ako su  $A$  i  $B$   $C^*$ -algebre, vrijedi jednakost:

**Teorem 2.1.9** (Spektralna permanencija). *Neka je  $B$  unitalna  $C^*$ -podalgebra unitalne  $C^*$ -algebre  $A$ . Tada je  $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$  za sve  $b \in B$ .*

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati da je  $B^\times = B \cap A^\times$ . Neka je  $b \in B$  hermitski element koji je invertibilan u  $A$ . Tada je  $\sigma_A(b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$  pa specijalno  $\sigma_A(b)$  nema rupa kao podskup od  $\mathbb{C}$ . Prema Propoziciji 1.1.15 (iii) slijedi  $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ . Posebno  $0 \notin \sigma_B(b)$  pa je  $b \in B^\times$ .

Neka je sada  $b \in B$  proizvoljan element koji je invertibilan u  $A$ . Tada vrijedi  $bb^*(b^{-1})^*b^{-1} = 1$  pa je hermitski element  $bb^*$  invertibilan u  $A$ . Odozgo slijedi  $(bb^*)^{-1} \in B$  pa slijedi  $b^{-1} = b^*(bb^*)^{-1} \in B$ .  $\square$

Uočimo da ovo implicira da spektar elementa neunitalne  $C^*$ -algebre ne ovisi o ambijentalnoj unitalnoj  $C^*$ -algebri.

Slična tvrdnja vrijedi i u neunitalnom slučaju:

**Korolar 2.1.10.** *Ako je  $B$   $C^*$ -podalgebra  $C^*$ -algebre  $A$ , tada je  $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$  za sve  $b \in B$ .*



*Dokaz.* Pokažimo prvo sljedeću pomoćnu algebarsku tvrdnju: ako je  $B$  podalgebra unitalne algebre  $A$  takva da je  $B + \mathbb{C}1_A = A$ , tada je  $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$  za sve  $b \in B$ . Zaista, ako  $B$  nije unitalna, tada je preslikavanje  $B^1 \rightarrow A$ ,  $(b, \lambda) \mapsto b + \lambda 1_A$  unitalni izomorfizam algebri pa je  $\sigma_B(b) = \sigma_{B^1}(b) = \sigma_A(b)$ . Ako je  $B$  unitalna s jedinicom  $e \neq 1_A$ , tada tvrdimo da je  $\sigma_A(b) = \sigma_B(b) \cup \{0\}$ . Zaista, očito je  $0 \in \sigma_A(b)$ . Ako je  $\lambda \in \mathbb{C}$  takav da je  $\lambda 1_A - b \in A^\times$ , tada je  $\lambda e - b \in B^\times$ , što slijedi po djelovanju homomorfizma algebr  $A \rightarrow B$ ,  $b + \lambda 1_A \mapsto b + \lambda e$ . Odavde slijedi inkluzija  $\sigma_B(b) \subseteq \sigma_A(b)$ . Obratno, ako je  $\lambda \neq 0$  takav da je  $\lambda e - b \in B^\times$  s inverzom  $b'$  u  $B$ , tada je  $b' + \lambda^{-1}(1_A - e)$  inverz od  $\lambda 1_A - b$  u  $A$ . Odavde slijedi  $\sigma_A(b) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_B(b)$ .

Sada dokažimo tvrdnju korolar. Ako je  $A$  neunitalna zamijenimo ju unitizacijom  $A^1$  pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $A$  unitalna. Tada je  $B + \mathbb{C}1_A$  unitalna  $C^*$ -podalgebra od unitalne  $C^*$ -algebre  $A$  pa Teorem 2.1.9 daje

$$\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_{B+\mathbb{C}1_A}(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}.$$

□

Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra i  $S \subseteq A$ . Sa  $C^*(S)$  označavamo najmanju unitalnu  $C^*$ -podalgebru od  $A$  koja sadrži  $S$ , tj

$$C^*(S) := \bigcap \{S \subseteq B : B \text{ unitalna } C^*\text{-podalgebra od } A\}$$

i za nju kažemo da je **generirana** sa  $S$ . Vidimo da se  $C^*(S)$  podudara s unitalnom Banachovom algebrom generiranom skupom  $S \cup S^*$ , tj. zatvarač je linearne ljuške svih produkata elemenata iz  $S \cup S^* \cup \{1\}$ . U slučaju konačnog skupa pišemo još  $C^*(a_1, \dots, a_n) := C^*(\{a_1, \dots, a_n\})$ . Element  $a \in A$  je normalan ako i samo ako je

$$C^*(a) = \overline{\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, w]\}}.$$

**Propozicija 2.1.11.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra i  $a \in A$  normalan element. Gelfandova transformacija  $\hat{a}$  od  $a$  je homeomorfizam s  $\Omega(C^*(a))$  na  $\sigma(a)$ .*

*Dokaz.* Prema Propoziciji 1.2.17, preslikavanje  $T : \varphi \mapsto (\varphi(a), \varphi(a^*))$  je homeomorfizam s  $\Omega(C^*(a))$  na grupni spektar  $\overline{\sigma(a, a^*)}$  elemenata  $a$  i  $a^*$ . Karakteri su hermitski funkcionali pa imamo  $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ , odakle slijedi  $T(\varphi) = (\varphi(a), \overline{\varphi(a)})$  pa je projekcija na prvu koordinatu  $\pi_1$  homeomorfizam s  $\sigma(a, a^*)$  na  $\sigma(a)$ . Konačno,  $\hat{a} = \pi_1 \circ T$  je homeomorfizam. □

**Teorem 2.1.12.** *Neka je  $a$  normalan element unitalne  $C^*$ -algebre  $A$ . Postoji jedinstven unitalni  $*$ -izomorfizam  $\phi_a : C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$  takav da vrijedi  $\phi_a(\text{id}) = a$ , gdje je  $\text{id}(\lambda) = \lambda, \forall \lambda \in \sigma(a)$  identiteta.*

*Dokaz.* Prema [Komutativnom Geljfand-Naimarkovom teoremu](#), Geljfandova transformacija  $\Gamma = \Gamma_{C^*(a)}$  uspostavlja unitalni  $*$ -izomorfizam s  $C^*(a)$  na  $C(\Omega(C^*(a)))$ . S druge strane,  $\hat{a} : \Omega(C^*(a)) \rightarrow \sigma(a)$  je homeomorfizam (Propozicija [2.1.11](#)) pa je njegov transponat  $\hat{a}^t : C(\sigma(a)) \rightarrow C(\Omega(C^*(a)))$  unitalni  $*$ -izomorfizam. Tada je  $\phi_a : C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$ ,  $\phi_a := \Gamma^{-1} \circ \hat{a}^t$  unitalni  $*$ -izomorfizam. Nadalje, vrijedi

$$\phi(\text{id}) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(\text{id})) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Svaki unitalni  $*$ -izomorfizam  $C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$  s gornjim svojstvom se podudara s  $\phi_a$  na  $C^*(\text{id}) \subseteq C(\sigma(a))$ . Uočimo da je  $C^*(\text{id})$  zatvorena  $*$ -podalgebra od  $C(\sigma(a))$  koja sadrži konstantne funkcije i separira točke od  $\sigma(a)$  pa je prema [Stone-Weierstrassovom teoremu](#)  $C^*(\text{id}) = C(\sigma(a))$ . Slijedi da je  $\phi_a$  jedinstven.  $\square$

Za funkciju  $f \in C(\sigma(a))$  element  $\phi_a(f)$  označavamo s  $f(a)$ . Oznaka ima smisla jer za svaki polinom  $p \in \mathbb{C}[z, w]$  vrijedi  $\phi_a(p|_{\sigma(a)}(\cdot, \bar{\cdot})) = p(a, a^*)$ . U tom smislu, preslikavanje  $f \mapsto f(a)$  nazivamo **neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa  $a$ .

**Korolar 2.1.13.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra i neka je  $a \in A$  normalan element. Neprekidni funkcionalni račun od  $a$  ima sljedeća svojstva:*

- (i) *Ako je  $f(\lambda) = p(\lambda, \bar{\lambda})$  gdje je  $p \in \mathbb{C}[z, w]$ , tada je  $f(a) = p(a, a^*)$ .*
- (ii) *Ako je  $(f_n)_n$  niz u  $C(\sigma(a))$  i  $f \in C(\sigma(a))$  takva da  $f_n \rightarrow f$  uniformno na  $\sigma(a)$ , tada  $f_n(a) \rightarrow f(a)$  u  $A$ .*
- (iii) *(Teorem o preslikavanju spektra)  $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$  za sve  $f \in C(\sigma(a))$ .*
- (iv) *Ako su  $f \in C(\sigma(a))$  i  $g \in C(f(\sigma(a)))$  takve da  $g \circ f \in C(\sigma(a))$ , tada je  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ .*
- (v) *Ako je  $(a_n)_n$  niz normalnih elemenata takav da  $a_n \rightarrow a$ ,  $K$  kompaktna okolina od  $\sigma(a)$  i  $f \in C(K)$ , tada je  $\sigma(a_n) \subseteq K$  za gotovo sve  $n$  i  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ .*
- (vi) *Ako je  $\phi$  unitalni  $*$ -homomorfizam s  $A$  u unitalnu  $C^*$ -algebru  $B$ , tada je  $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$  za sve  $f \in C(\sigma(a))$ .*

*Dokaz.* (i) Već diskutirano nakon dokaza Teorema [2.1.12](#).

(ii) Direktno slijedi iz izometričnosti od  $\phi_a$ .

(iii)  $\phi_a : C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$  je unitalni  $*$ -izomorfizam pa imamo

$$\sigma_A(f(a)) = \sigma_{C^*(a)}(f(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a)).$$

- (iv) Prema (i) znamo da jednakost  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  vrijedi za sve funkcije  $g$  oblika  $g(\lambda) = p(\lambda, \bar{\lambda})$  gdje je  $p \in \mathbb{C}[z, w]$ . Takve funkcije su guste u  $C(\sigma(f(a)))$  i  $\phi_{f(a)}$  je neprekidan pa zaključujemo  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  za sve  $g \in C(\sigma(f(a)))$ .
- (v) Pokažimo prvo svojevrsnu neprekidnost spektra: za svaki otvoren podskup  $O \subseteq \mathbb{C}$  koji sadrži  $\sigma(a)$  postoji  $\delta > 0$  takav da je  $\sigma(b) \subseteq O$  za sve  $b \in A$ ,  $\|b - a\| < \delta$ . Zaista, promotrimo zatvoreni disk  $D := \overline{B}(0, 1 + \|a\|) \subseteq \mathbb{C}$ . Budući da je  $A^\times$  otvoren skup u  $A$ , za svaki  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$  postoji  $r_\lambda > 0$  takav da je otvorena kugla  $U_\lambda = B_A(\lambda 1 - a, 2r_\lambda)$  u  $A$  sadržana u  $A^\times$ . Neka je  $O_\lambda = B(\lambda, r_\lambda) \subseteq \mathbb{C}$  otvoreni disk. Zbog  $\sigma(a) \subseteq D$  slijedi da je  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)}$  otvoreni pokrivač od  $D \setminus O$  pa zbog kompaktnosti postoje  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$  takvi da  $\{O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_n}\}$  pokriva  $D \setminus O$ . Stavivši  $\delta := \min\{r_{\lambda_1}, \dots, r_{\lambda_n}, 1\}$ , za  $\|a - b\| < \delta$  i  $\lambda \in D \setminus O$  imamo  $\lambda \in O_{\lambda_j}$  za neki  $j \in \{1, \dots, n\}$  i imamo

$$\|(\lambda_j 1 - a) - (\lambda 1 - b)\| \leq |\lambda_j - \lambda| + \|a - b\| < \delta + r_{\lambda_j} < 2r_{\lambda_j}.$$

Dakle,  $\lambda 1 - b \in U_{\lambda_j}$  pa je  $\lambda 1 - b \in A^\times$ . Stoga  $D \setminus O \subseteq D \setminus \sigma(b)$ . Također imamo  $\|a - b\| < 1$  pa je  $\|b\| < 1 + \|a\|$  odakle slijedi  $\sigma(b) \subseteq D$ . Ako je  $\lambda' \in \sigma(b)$ , tada  $\lambda' \notin D \setminus \sigma(b)$  pa  $\lambda' \notin D \setminus O$ . No,  $\lambda' \in D$  pa slijedi  $\lambda' \in O$ . Zaključujemo  $\sigma(b) \subseteq O$ .

Neka je sada  $O = K$  kao u iskazu. Prema dokazanom zaključujemo da postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da za sve  $n \geq n_0$  vrijedi  $\sigma(a_n) \subseteq K$ . Neka je  $\varepsilon > 0$ . Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom  $p \in \mathbb{C}[z, w]$  takav da je  $\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \bar{\lambda})| < \varepsilon$ . Tada imamo

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f(a_n) - f(a)\| &\leq 2 \sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \bar{\lambda})| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|p(a_n, a_n^*) - p(a, a^*)\| \\ &\leq 2\varepsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti  $\varepsilon > 0$  imamo  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ .

- (vi) Imamo  $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$  (Propozicija 1.1.16) pa je  $f(\phi(a))$  dobro definiran za svaku funkciju  $f \in C(\sigma_A(a))$ . Fiksirajmo  $f \in C(\sigma_A(a))$  i neka je  $\varepsilon > 0$ . Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom  $p \in \mathbb{C}[z, w]$  takav da je  $\sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} \|f(\lambda) - p(\lambda, \bar{\lambda})\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tada posebno  $\|f(\phi(a)) - p(\phi(a), \phi(a)^*)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Zbog kontraktivnosti od  $\phi$  imamo

$$\begin{aligned} \|\phi(f(a)) - f(\phi(a))\| &\leq \|\phi(f(a)) - \phi(p(a, a^*))\| + \|\phi(p(a, a^*)) - f(\phi(a))\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |f(\lambda) - p(\lambda, \bar{\lambda})| + \|p(\phi(a), \phi(a)^*) - f(\phi(a))\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti  $\varepsilon > 0$  slijedi  $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$ . □

Ako je  $A$  neunitalna  $C^*$ -algebra i  $a \in A$  normalan element, tada neprekidni funkcionalni račun možemo provesti u unitizaciji  $A^1$ . Dobivamo  $*$ -izomorfizam  $\phi_a : C(\sigma(a)) \rightarrow C_{A^1}^*(a)$ . Zbog  $0 \in \sigma(0)$  stavimo

$$C(\sigma(a))_0 := \{f \in C(\sigma(a)) : f(0) = 0\}$$

i neka je  $C_0^*(a)$  najmanja  $C^*$ -podalgebra od  $A$  koja sadrži  $a$ . Lako se pokaže da je

$$C_0^*(a) = \overline{\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, w], p(0, 0) = 0\}}.$$

Lako vidimo da je svaka funkcija  $f \in C(\sigma(a))_0$  uniformni limes funkcija oblika  $\lambda \mapsto p(\lambda, \bar{\lambda})$ ,  $\lambda \in \sigma(a)$  gdje je  $p \in \mathbb{C}[z, w]$  takav da je  $p(0, 0) = 0$ . Odavde slijedi da je  $f(a) \in C_0^*(a) \subseteq A$ . Dakle, ako se ograničimo na funkcije iz  $C(\sigma(a))_0$ , neprekidni funkcionalni račun možemo u potpunosti provesti unutar algebre  $A$ , bez ikakvog pozivanja na jedinicu 1 od  $A^1$ . Ovo nazivamo **neunitalni neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa  $a$ .

Uočimo da ovo ima smisla i za unitalne  $C^*$ -algebre: tada je  $0 \notin \sigma(a)$  pa je naprosto  $C(\sigma(a))_0 = C(\sigma(a))$  i  $C_0^*(a) = C^*(a)$ , odnosno dobivamo standardni unitalni neprekidni funkcionalni račun.

**Korolar 2.1.14.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Neunitalni neprekidni funkcionalni račun  $\phi_a : f \mapsto f(a)$  normalnog elementa  $a \in A$  je  $*$ -izomorfizam s  $C(\sigma(a))_0$  na  $C_0^*(a)$ .*

**Teorem 2.1.15.** *Neka je  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -homomorfizam  $C^*$ -algebri  $A$  i  $B$ . Ako je  $\phi$  injektivan, tada je  $\phi$  izometrija.*

*Dokaz.* Slično kao u dokazu Teorema 2.1.3 pretpostavimo da su  $A$  i  $B$  unitalne te da je  $\phi$  unitalan. Tada tvrdimo da za proizvoljan  $a \in A_h$  vrijedi  $\sigma_B(\phi(a)) = \sigma_A(a)$ . Zaista, prema Napomeni 1.1.16, uvijek vrijedi  $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ . Pretpostavimo da ti spektri nisu jednaki. Tada postoji  $f \in C(\sigma_A(a))$  takva da je  $f \neq 0$ , ali  $f|_{\sigma_B(\phi(a))} = 0$ . Budući da  $*$ -homomorfizmi komutiraju s neprekidnim funkcionalnim računom, slijedi  $\phi(f(a)) = f(\phi(a)) = 0$ .  $\phi$  je injektivan pa slijedi  $f(a) = 0$ , no to je u kontradikciji s činjenicom da je  $f \neq 0$  na  $\sigma_A(a)$ . Dakle, vrijedi jednakost  $\sigma_B(\phi(a)) = \sigma_A(a)$ .

Sada za proizvoljan  $a \in A$  imamo

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

pa je  $\phi$  izometrija. □

**Propozicija 2.1.16.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i neka je  $a \in A$  normalan element.*

- (i)  $a$  je hermitski ako i samo ako je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ .
- (ii)  $a$  je projektor ako i samo ako je  $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$ .
- (iii) Ako je  $A$  unitalna, tada je  $a$  unitaran ako i samo ako je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$ .

*Dokaz.* Jedan smjer svake tvrdnje slijedi iz Propozicije 2.1.5.

- (i) Ako je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ , tada su funkcije  $\lambda \mapsto \lambda$  i  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$  jednake na  $\sigma(a)$  pa je  $a^* = a$ .
- (ii) Ako je  $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$ , tada su funkcije  $\lambda \mapsto \lambda$  i  $\lambda \mapsto \lambda^2$  jednake na  $\sigma(a)$  pa je  $a^2 = a$ .
- (iii) Ako je  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$ , tada su funkcije  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda\bar{\lambda}$  i  $\lambda \mapsto 1$  jednake na  $\sigma(a)$  pa je  $a^*a = aa^* = a$ .

□

## 2.2 Uređaj u $C^*$ -algebrama

Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Za  $a \in A_h$  kažemo da je **pozitivan** i pišemo  $a \geq 0$  ako je  $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ . Skup svih pozitivnih elemenata označavamo s  $A_+$ .

Uočimo da je  $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$  jer za element  $a \in A_+ \cap (-A_+)$  vrijedi  $\sigma(a) = 0$  pa iz hermitičnosti slijedi  $a = 0$ . Nadalje, Korolar 2.1.10 implicira da za svaku  $C^*$ -podalgebru vrijedi  $B_+ = B \cap A_+$ .

**Propozicija 2.2.1.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $n \in \mathbb{N}$ . Za svaki pozitivni element  $a \in A_+$  postoji jedinstveni element  $b \in A_+$  takav da je  $b^n = a$ . Element  $b$  označavamo s  $a^{1/n}$  i zovemo ga **pozitivni  $n$ -ti korijen** od  $a$ .*

*Dokaz.* Imamo  $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$  pa je funkcija  $f : \sigma(a) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $t \mapsto \sqrt[n]{t}$  dobro definirana i neprekidna. Nadalje, vrijedi  $f(0) = 0$  pa je  $b := f(a) \in C_0^*(a) \subseteq A$ . Znamo da je  $b$  normalan element i vrijedi  $\sigma(b) = f(\sigma(a)) \subseteq [0, \infty)$  pa je  $b \in A_+$ . Zbog  $f(t)^n = t, \forall t \in [0, \infty)$ , slijedi  $b^n = a$ .

Pretpostavimo da je  $c \in A_+$  neki drugi element takav da je  $c^n = a$ . Vrijedi  $ac = c^n c = cc^n = ca$  pa  $a$  i  $c$  komutiraju. Zbog  $b \in C_0^*(a)$  slijedi da  $a$  i  $c$  također komutiraju. Promotrimo komutativnu  $C^*$ -podalgebru  $C^*(b, c)$  od  $A$  i uočimo da ona sadrži  $a$ . Geljandovi transformati od  $a, b$  i  $c$  zadovoljavaju  $\hat{b}^n = \hat{a} = \hat{c}^n$  pa iz pozitivnosti funkcija  $\hat{b}, \hat{c}$  slijedi  $\hat{b} = \hat{c}$ , odnosno  $b = c$ . □

**Propozicija 2.2.2.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Za svaki  $a \in A_h$  postoje jedinstveni  $a_+, a_- \in A_+$  takvi da vrijedi  $a = a_+ - a_-$  i  $a_+a_- = a_-a_+ = 0$ . Pri tome vrijedi  $\|a\| = \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}$ .*

*Dokaz.* Definiramo funkcije  $f_+, f_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$f_+(t) = \begin{cases} t, & \text{ako } t \geq 0 \\ 0, & \text{ako } t \leq 0 \end{cases}, \quad f_-(t) = \begin{cases} 0, & \text{ako } t \geq 0 \\ -t, & \text{ako } t \leq 0 \end{cases}$$

i elemente  $a_+ = f_+(a)$ ,  $a_- = f_-(a)$ . Zbog  $f_+(0) = f_-(0) = 0$  slijedi  $a_+, a_- \in C_0^*(a) \subseteq A$ . Također slijedi  $a_+, a_- \subseteq A_+$  jer su  $f_+, f_-$  nenegativne funkcije. Iz  $\text{id}_{\mathbb{R}} = f_+ - f_-$  i  $f_+f_- = f_-f_+ = 0$  slijede tražene jednakosti. Nadalje

$$\|a\| = \sup_{t \in \sigma(a)} |t| = \max \left\{ \sup_{t \in \sigma(a)} f_+(t), \sup_{t \in \sigma(a)} f_-(t) \right\} = \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}.$$

Pokažimo jedinstvenost od  $a_+, a_-$ . Pretpostavimo da su  $a_1, a_2 \in A_+$  neki drugi elementi takvi da je  $a = a_1 + a_2$  i  $a_1a_2 = a_2a_1 = 0$ . Tada je  $a^n = a_1^n + (-a_2)^n$  za sve  $n \in \mathbb{N}$  odakle slijedi  $p(a) = p(a_1) + p(a_2)$  za sve polinome  $p \in \mathbb{R}[x]$  takve da je  $p(0) = 0$ . Zbog  $f_+(0) = 0$  iz Stone-Weierstrassovog teorema slijedi da postoji niz takvih polinoma  $(p_n)_n$  koji konvergira prema  $f_+$  uniformno na  $\sigma(a) \cup \sigma(a_1) \cup \sigma(-a_2)$ . Tada je

$$f_+(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(-a_2) = f_+(a_1) + f_+(-a_2).$$

Imamo da je  $f_+(t) = t$  za sve  $t \in \sigma(a_1)$  i  $f_+ \equiv 0$  na  $\sigma(-a_2)$  pa je  $f_+(a_1) = a_1$  i  $f_+(-a_2) = 0$ . Dakle,  $a_1 = f_+(a) = a_+$  pa je i  $a_2 = a_-$ .  $\square$

**Korolar 2.2.3.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Svaki element  $a \in A$  se može prikazati kao linearna kombinacija četiri pozitivna elementa.*

*Dokaz.* Za  $a \in A$  imamo

$$a = \text{Re } a + i(\text{Im } a) = (\text{Re } a)_+ - (\text{Re } a)_- + i[(\text{Im } a)_+ - (\text{Im } a)_-].$$

$\square$

**Lema 2.2.4.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra. Za hermitski element  $a \in A_h$  ekvivalentno je:*

(i)  $a \in A_+$ .

(ii) Za neki  $t \geq \|a\|$  vrijedi  $\|t1 - a\| \leq t$ .

(iii) Za svaki  $t \geq \|a\|$  vrijedi  $\|t1 - a\| \leq t$ .

*Dokaz.* Uočimo da je za realnu funkciju  $f \in C(\Omega)$  na nekom CH prostoru  $\Omega$  ekvivalentno

- (i)  $f \geq 0$ .
- (ii) Za neki  $t \geq \|f\|_\infty$  vrijedi  $\|t1 - f\|_\infty \leq t$ .
- (iii) Za svaki  $t \geq \|f\|_\infty$  vrijedi  $\|t1 - f\|_\infty \leq t$ .

Možemo pretpostaviti da je  $A = C^*(a)$ , pa je (izometrički)  $*$ -izomorfna  $C^*$ -algebri  $C(\sigma(a))$ .  $\square$

**Propozicija 2.2.5.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Skup  $A_+$  je zatvoren u  $A$  i vrijedi:*

- (i) Za  $a \in A_+$  i  $t \in [0, \infty)$  vrijedi  $ta \in A_+$ .
- (ii) Za  $a, b \in A_+$  vrijedi  $a + b \in A_+$ .

*Dokaz.* Za neunitalnu algebru  $A$  imamo  $A_+ = A \cap (A^1)_+$  pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $A$  unitalna.

Iz neprekidnosti odnosno izometričnosti involucije slijedi da je  $A_h$  zatvoren podskup od  $A$ . Prethodna lema povlači

$$A_+ = A_h \cap \{a \in A : \| \|a\|1 - a \| \leq \|a\|\}$$

pa je  $A_+$  zatvoren kao presjek dva zatvorena skupa.

- (i) Vrijedi  $ta \in A_h$  i  $\sigma(ta) = t\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$  pa je  $ta \in A_+$ .
- (ii) Prema prethodnoj lemi imamo  $\| \|a\|1 - a \| \leq \|a\|$  i  $\| \|b\|1 - b \| \leq \|b\|$  pa je

$$\| (\|a\| + \|b\|)1 - (a + b) \| \leq \| \|a\|1 - a \| + \| \|b\|1 - b \| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Dakle,  $a + b \in A_+$ .

$\square$

**Propozicija 2.2.6.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Svaki element oblika  $a^*a$  za neki  $a \in A$  je pozitivan.*

*Dokaz.* Pokažimo prvo da iz  $-a^*a \in A_h$  slijedi  $a = 0$ . Zaista, imamo  $\sigma(-aa^*) \setminus \{0\} = \sigma(-a^*a) \setminus \{0\}$  (Teorem 1.1.13 (v)) pa je i  $-aa^* \in A_h$ . Sada je

$$a^*a = \underbrace{2(\operatorname{Re} a)^2 + 2(\operatorname{Im} a)^2}_{\in A_+} - aa^* \in A_+$$

pa je  $\sigma(a^*a) = \{0\}$ , odnosno  $a^*a = 0$ . Slijedi  $a = 0$ .

Neka je sada  $a \in A$  proizvoljan i  $b := a^*a$ . Vrijedi  $b \in A_h$  pa imamo  $b = b_+ - b_-$  gdje su  $b_+, b_-$  kao u Propoziciji 2.2.2. Imamo

$$-(ab_-)^*(ab_-) = -b_-a^*ab_- = -b_-(b_+ - b_-)b_- = b_-^3 \in A_h$$

pa slijedi  $ab_- = 0$ . Dakle,  $b_- = 0$  odakle slijedi  $a^*a = b_+ \in A_+$ .  $\square$

Definirajmo sada uređaj na realnom vektorskom prostoru  $A_h$ : za  $a, b \in A_h$  stavljamo  $a \leq b$  ako je  $b - a \in A_+$ . Vrijedi da je  $\leq$  parcijalni uređaj na  $A_h$ :

- Refleksivnost: očito je  $a \leq a$  za sve  $a \in A_h$ .
- Antisimetričnost: Ako su  $a, b \in A_h$  takvi da je  $a \leq b$  i  $b \leq a$ , tada je  $b - a \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$  pa je  $a = b$ .
- Tranzitivnost: Ako su  $a, b, c \in A_h$  takvi da je  $a \leq b$  i  $b \leq c$  tada je  $c - a = \underbrace{(c - b)}_{\in A_+} + \underbrace{(b - a)}_{\in A_+} \in A_h$  pa je  $a \leq c$ .

Također se lako uvjeravamo da za sve  $a, b, c \in A_h$  vrijedi

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

te da za  $t \geq 0$  i  $a, b \in A_h$  imamo  $a \leq b \implies ta \leq tb$ . Nadalje vrijedi i  $a \leq b \iff -b \leq -a$ .

Za  $a \in A$  definiramo njegovu **apsolutnu vrijednost** kao  $|a| := (a^*a)^{1/2} \in A_+$ . Tada vrijedi  $\| |a| \| = \|a\|$  i  $a_{\pm} = \frac{1}{2}(|a| \pm a)$ , i  $a \in A_+ \iff a = |a|$ .

**Teorem 2.2.7.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Tada je*

$$(i) \quad A_+ = \{a^2 : a \in A_h\} = \{a^*a : a \in A\}.$$

(ii) *Ako za  $a, b \in A_h$  vrijedi  $a \leq b$ , tada je  $c^*ac \leq c^*bc$  za sve  $c \in A$ .*

(iii) *Ako su  $a, b \in A_+$  takvi da je  $a \leq b$ , tada je  $\|a\| \leq \|b\|$ .*

(iv) *Ako je  $A$  unitalna i  $a, b \in A_+ \cap A^{\times}$  takvi da je  $a \leq b$ , onda vrijedi i  $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$ .*

*Dokaz.* (i) Tvrdnja slijedi direktno iz pozitivnosti elementa  $a^*a$  i egzistencije pozitivnog drugog korijena.



(ii) Zbog  $b - a \geq 0$  imamo

$$\begin{aligned} cb^*c - c^*ac &= c^*(b - a)c \\ &= c^*(b - a)^{1/2}(b - a)^{1/2}c \\ &= ((b - a)^{1/2}c)^* ((b - a)^{1/2}c) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(iii) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $A$  unitalna (inače dokaz provodimo u  $A^1$ ). Vrijedi  $a \leq b \leq \|b\|1$ . Zbog  $a \in A_+$  vrijedi  $\|a\| \in \sigma(a)$  pa je

$$\|b\| - \|a\| \in \sigma(\|b\|1 - a) \subseteq [0, \infty).$$

(iv) Uočimo da iz  $c \geq 1, c \in A_h$  slijedi  $c^{-1} \leq 1$  jer je ista tvrdnja točna u funkcijskim  $C^*$ -algebrama, kojoj je  $C^*(c)$  izomorfna. Ako su  $a, b \in A_h$  takvi da je  $a \leq b$  tada imamo

$$1 = a^{-1/2}aa^{-1/2} \leq a^{-1/2}ba^{-1/2}$$

pa je  $a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} = (a^{-1/2}ba^{-1/2})^{-1} \leq 1$ . Sada slijedi

$$b^{-1} = a^{-1/2}(a^{1/2}b^{-1}a^{1/2})a^{-1/2} \leq a^{-1/2}a^{-1/2} = a^{-1}.$$

□

**Propozicija 2.2.8.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $a, b \in A_+$  takvi da je  $a \leq b$ . Tada je  $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$ .*

*Dokaz.* Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: za  $a, b \in A_+$  vrijedi  $a^2 \leq b^2 \implies a \leq b$ . Možemo pretpostaviti da je  $A$  unitalna. Neka je  $\varepsilon > 0$  i neka su  $c$  i  $d$  realni i imaginarni dio elementa  $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a)$ . Tada je

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}[(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) + (\varepsilon 1 + b - a)(\varepsilon 1 + b + a)] \\ &= \varepsilon^2 1 + 2\varepsilon b + b^2 - a^2 \\ &\geq \varepsilon^2 1 \end{aligned}$$

pa je  $c \in A_+ \cap A^\times$ . Također imamo

$$c^{-\frac{1}{2}}(c + id)c^{-\frac{1}{2}} = 1 + ic^{-\frac{1}{2}}dc^{-\frac{1}{2}} \in A^\times$$

pa je  $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) = c + id \in A^\times$ . Specijalno, element  $\varepsilon 1 + b - a$  je invertibilan slijeva pa iz hermitičnosti slijedi  $\varepsilon 1 + b - a \in A^\times$ . Slijedi  $-\varepsilon \notin \sigma(b - a)$  za sve  $\varepsilon > 0$ , pa je  $\sigma(b - a) \subseteq [0, \infty)$  odnosno  $a \leq b$ . □

## 2.3 Aproksimativne jedinice, zatvoreni ideali i kvocijenti

**Definicija 2.3.1.** Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. **Aproksimativna jedinica** u  $A$  je svaka rastuća mreža  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  u  $\text{Ball}(A_+)$  takva da za sve  $a \in A$  imamo  $ae_i \rightarrow a$  i  $e_i a \rightarrow a$ .

Uočimo da vrijedi  $a = \lim_{i \in \mathbb{I}} ae_i$  za sve  $a \in A$  ako i samo ako je  $a = \lim_{i \in \mathbb{I}} e_i a$  za sve  $a \in A$ . U unitalnim  $C^*$ -algebrama uvijek možemo staviti  $e_i = 1$  za sve  $i \in \mathbb{I}$ . Nadalje, u tom slučaju sve aproksimativne jedinice konvergiraju prema 1.

Označimo  $\mathbb{J} = \{a \in A_+ : \|a\| < 1\}$ .

**Lema 2.3.2.** Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $a, b \in \mathbb{J}$ . Tada vrijedi

$$0 \leq a \leq b \implies a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$$

u  $A^1$ .

*Dokaz.* Uočimo da za svaki  $c \in \mathbb{J}$  vrijedi da je  $1+c$  invertibilan u  $A^1$  i vrijedi  $c(1+c)^{-1} = 1 - (1+c)^{-1}$ .

Iz  $0 \leq a \leq b$  slijedi  $1+a \leq 1+b$  pa iz Teorema 2.2.7 (iv) slijedi  $(1+b)^{-1} \leq (1+a)^{-1}$ . Oдавде slijedi  $1 - (1+a)^{-1} \leq 1 - (1+b)^{-1}$  što je prema gornjoj tvrdnji ekvivalentno s  $a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$ .  $\square$

Promotrimo  $\mathbb{J}$  s uređajem naslijeđenim od  $A_h$ . Tada je  $\mathbb{J}$  usmjeren skup. Naime, neka su  $a, b \in \mathbb{J}$  proizvoljni. Primijetimo da za svaki  $x \in A_+$  vrijedi  $x(1+x)^{-1} \in \mathbb{J}$ . To vrijedi ako je  $A$  funkcijska  $C^*$ -algebra, a  $C^*(x)$  je izometrički  $*$ -izomorfna  $C_0(\sigma(x))$ . Sada stavimo  $a' = a(1-a)^{-1}$ ,  $b' = b(1-b)^{-1}$  i onda

$$c = (a' + b')(1 + a' + b')^{-1} \in \mathbb{J}.$$

Sada iz  $a' \leq a' + b'$  slijedi  $a = a'(1+a')^{-1} \leq c$ . Analogno dobijemo  $b \leq c$ .

**Teorem 2.3.3.** Svaka  $C^*$ -algebra  $A$  ima aproksimativnu jedinicu.

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti neka  $A$  nije unitalna. Neka je  $\mathbb{J}$  usmjeren skup definiran gore. Za  $i \in \mathbb{J}$  definiramo  $e_i := i$ . Tada je  $(e_i)_{i \in \mathbb{J}}$  strogo rastuća mreža u  $\mathbb{J}$ . Treba dokazati da za svaki  $a \in A$  vrijedi  $a = \lim_{i \in \mathbb{J}} e_i a$ . Prema Korolaru 2.2.3 ovo je dovoljno pokazati za sve  $a \in \mathbb{I}$ .

Uzmimo stoga  $a \in \mathbb{J}$  i neka je  $0 < \varepsilon < 1$ . Imamo  $\sigma(a) \subseteq [0, 1)$  pa stavimo  $K := [\varepsilon, 1) \cap \sigma(a)$ . Neka je  $g : \sigma(a) \rightarrow [0, 1]$  neprekidna funkcija takva da je  $g(0) = 0$  i  $g|_K = 1$ . Uzmimo  $0 < \delta < 1$  takav da je  $1 - \delta < \varepsilon$  i stavimo  $i_0 = e_{i_0} := \delta g(a)$ . Iz svojstava neunitalnog neprekidnog funkcionalnog računa slijedi da je  $i_0 \in \mathbb{J}$  i  $\|a - e_{i_0} a\| = \sup_{t \in \sigma(a)} |t - \delta g(t)| < \varepsilon$ .

Za svaki  $i \in \mathbb{J}, i \geq i_0$  imamo  $1 - e_i \leq 1 - e_{i_0}$  u  $A^1$  pa iz Teorema 2.2.7 (ii) slijedi  $a(1 - e_i)a \leq a(1 - e_{i_0})a$ . Sada imamo

$$\begin{aligned} \|a - e_i a\|^2 &= \|(1 - e_i)^{\frac{1}{2}}(1 - e_i)^{\frac{1}{2}}a\|^2 \leq \|(1 - e_i)^{\frac{1}{2}}a\|^2 \leq \|a(1 - e_i)a\| \\ &\leq \|a(1 - e_{i_0})a\| \leq \|(1 - e_{i_0})a\| < \varepsilon \end{aligned}$$

odakle slijedi  $\lim_{i \in \mathbb{J}} e_i a = a$ .  $\square$

**Napomena 2.3.4.** Svaka separabilna  $C^*$ -algebra  $A$  ima aproksimativnu jedinicu koja je niz u  $A$ . Naime, neka je  $F = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  prebrojiv gust skup u  $A$  i neka je  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  proizvoljna aproksimativna jedinica u  $A$ . Tada za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $i_\varepsilon \in \mathbb{I}$  takav da je  $\|a_k - e_i a_k\| < \varepsilon, \forall k = 1, \dots, n$  i  $i \geq i_\varepsilon$ . Posebno za  $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$  dobivamo  $i_n \in \mathbb{I}$  takav da je  $\|a_k - e_{i_n} a_k\| < \frac{1}{n}, \forall k = 1, \dots, n$ . Možemo postići da za sve  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $i_n \leq i_{n+1}$ . Tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_k - e_{i_n} a_k\| = 0, \forall k \in \mathbb{N}$  pa po gustoći isto vrijedi i za sve  $a \in A$ . Slijedi da je  $(e_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$  aproksimativna jedinica u  $A$ .

**Napomena 2.3.5.** Sada možemo pokazati da svaki karakter  $\varphi$   $C^*$ -algebre  $A$  ima normu 1. Ako je  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  aproksimativna jedinica za  $A$ , tada je  $(\varphi(e_i))_{i \in \mathbb{I}}$  aproksimativna jedinica za  $\mathbb{C}$  pa imamo

$$1 \geq \|\varphi\| \geq \lim_{i \in \mathbb{I}} \varphi(e_i) = 1.$$

**Teorem 2.3.6.** Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i neka je  $I$  zatvoren ideal u  $A$ . Tada je  $I$  samoadjungiran, dakle  $C^*$ -podalgebra od  $A$ . Nadalje, ako je  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  aproksimativna jedinica u  $I$  tada za kvocijentnu normu na  $A/I$  vrijedi

$$\|a + I\| = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a - e_i a\| = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a - a e_i\|, \quad \text{za sve } a \in A.$$

*Dokaz.* Stavimo  $B = I \cap I^*$  i primijetimo da je  $B$   $C^*$ -podalgebra od  $A$  pa ima aproksimativnu jedinicu  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ . Za  $a \in I$  imamo  $a^* a \in B$  pa je  $\lim_{i \in \mathbb{I}} \|a^* a - a^* a e_i\| = 0$ . U  $A^1$  imamo

$$\lim_{i \in \mathbb{I}} \|a - a e_i\|^2 = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|(1 - e_i) a^* a (1 - e_i)\| \leq \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a^* a (1 - e_i)\| = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a^* a - a^* a e_i\| = 0$$

pa slijedi  $a = \lim_{i \in \mathbb{I}} a e_i$ . Iz izometričnosti involucije slijedi  $a^* = \lim_{i \in \mathbb{I}} e_i a^* \in I$  pa je  $I$  samoadjungiran.

Neka je sada  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  proizvoljna aproksimativna jedinica u  $I$ . Iz definicije kvocijentne norme na  $A/I$ , za  $a \in A$  i  $\varepsilon > 0$  postoji  $b \in I$  takav da je  $\|a + b\| < \|a + I\| + \frac{\varepsilon}{2}$ . Iz  $e_i b \rightarrow b$  postoji  $i_0 \in \mathbb{I}$  takav da je  $\|b - e_i b\| < \frac{\varepsilon}{2}$  za sve  $i \geq i_0$ . Sada za sve  $i \geq i_0$  u  $A^1$  imamo

$$\|a - e_i a\| \leq \|(1 - e_i)(a + b)\| + \|b - e_i b\| \leq \|a + b\| + \|b - e_i b\| < \|a + I\| + \varepsilon$$

pa je  $\|a + I\| = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a - e_i a\|$ . Adjungiranjem dobivamo i

$$\|a + I\| = \|a^* + I\| = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a^* - e_i a^*\| = \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a - a e_i\|.$$

□

**Korolar 2.3.7** (Segal). *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $I$  zatvoren ideal u  $A$ . Tada je  $A/I$   $C^*$ -algebra.*

*Dokaz.* Neka je  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  aproksimativna jedinica u  $I$ . Iz Teorema 2.3.6 slijedi da za  $a \in A$  i  $b \in I$  imamo u  $A^1$ :

$$\begin{aligned} \|a + I\|^2 &= \lim_{i \in \mathbb{I}} \|a - a e_i\|^2 \\ &= \lim_{i \in \mathbb{I}} \|(1 - e_i) a^* a (1 - e_i)\| \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{I}} \|(1 - e_i)(a^* a + b)(1 - e_i)\| + \lim_{i \in \mathbb{I}} \|(1 - e_i) b (1 - e_i)\| \\ &\leq \|a^* a + b\| + \lim_{i \in \mathbb{I}} \|b - b e_i\| \\ &= \|a^* a + b\| \end{aligned}$$

pa uzimanjem infimuma po  $b \in I$  slijedi  $\|a + I\|^2 \leq \|a^* a + I\|$ . Iz Propozicije 1.1.9 slijedi da je  $A/I$   $C^*$ -algebra. □

**Teorem 2.3.8.** *Neka je  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -homomorfizam  $C^*$ -algebri  $A$  i  $B$ . Tada je  $\phi(B)$   $C^*$ -podalgebra od  $B$ .*

*Dokaz.* Inducirano preslikavanje  $\dot{\phi} : A/\ker \phi \rightarrow B$  dano s  $\dot{\phi}(a + \ker \phi) = \phi(a)$  je dobro definiran  $*$ -monomorfizam  $C^*$ -algebri  $A/\ker \phi$  i  $B$  pa je  $\dot{\phi}$  izometričan (usp. Prvi teorem o homomorfizmu za prstene). Stoga je  $\dot{\phi}(A/\ker \phi) = \phi(A)$  potpuna pa je  $C^*$ -podalgebra od  $B$ . □

Istaknimo neke posljedice ovih rezultata:

**Propozicija 2.3.9.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Ako je  $I$  zatvoren ideal u  $A$  i  $J$  zatvoren ideal u  $I$ , tada je  $J$  ideal u  $A$ .*

*Dokaz.*  $J$  je samoadjungiran pa je dovoljno dokazati da za sve  $a \in A$  i  $b \in J$  vrijedi  $ab \in J$ .  $J$  je  $C^*$ -algebra pa je ovo prema Korolaru 2.2.3 dovoljno pokazati za sve  $b \in J_+ = A_+ \cap J$ . Neka je  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  aproksimativna jedinica u  $I$ . Tada za  $b \in J_+$  imamo  $e_i b^{\frac{1}{2}} \rightarrow b^{\frac{1}{2}}$  jer je  $b^{\frac{1}{2}} \in J \subseteq I$ . Odavde slijedi  $a e_i b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \rightarrow ab$ . Zbog  $b^{\frac{1}{2}} \in J$  i  $a e_i b^{\frac{1}{2}} \in I$  zaključujemo  $ab \in J$ . □

**Propozicija 2.3.10.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra te neka je  $B$   $C^*$ -podalgebra od  $A$  i  $I$  zatvoren ideal u  $A$ . Tada je  $B + I$   $C^*$ -podalgebra od  $A$ .*

*Dokaz.* Treba dokazati da je  $B + I$  zatvoren u  $A$  jer je ostalo jasno. Budući da je  $I$  zatvoren, on je Banachov prostor pa je ekvivalentno pokazati da je kvocijent  $(B + I)/I$  Banachov prostor.  $B \cap I$  je zatvoren ideal u  $B$  pa Korolar 2.3.7 povlači da je  $B/(B \cap I)$   $C^*$ -algebra. Preslikavanje

$$\phi : B/(B \cap I) \rightarrow A/I, \quad \phi(b + B \cap I) := b + I$$

je dobro definirani  $*$ -homomorfizam  $C^*$ -algebri  $B/(B \cap I)$  i  $A/I$ . Njegova slika je  $(B + I)/I$  pa je prema Teoremu 2.3.8  $C^*$ -algebra. Posebno je i Banachov prostor, što dokazuje traženu tvrdnju.  $\square$

Uočimo da je  $\phi$   $*$ -izomorfizam  $C^*$ -algebri  $B/(B \cap I)$  i  $(B + I)/I$  (usp. Drugi teorem o homomorfizmu za prstene).

Tvrdnja ove propozicije specijalno povlači da je suma  $I + J$  dva zatvorena ideala  $I, J$  u  $A$  opet zatvoren ideal u  $A$ .

**Propozicija 2.3.11.** *Ako je  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -homomorfizam  $C^*$ -algebri  $A$  i  $B$ , tada je  $\phi(A_+) = \phi(A)_+$ .*

*Dokaz.*  $\phi(A)$  je  $C^*$ -algebra pa vrijedi  $\phi(A)_+ = \phi(A) \cap B_+$ .

Neka je  $a \in A_+$ . Tada je  $a = x^*x$  za neki  $x \in A$  odakle slijedi  $\phi(a) = \phi(x)^*\phi(x) \in \phi(A)_+$ . Dakle,  $\phi(A_+) \subseteq \phi(A)_+$ .

Obratno, neka je  $b \in \phi(A)_+$  i  $a \in A$  takav da je  $\phi(a) = b$ . Tada je  $\phi(a^*) = \phi(a)^* = b^* = b$  odakle slijedi  $\phi(a^*a) = b^2$ . Imamo

$$b^2 = \phi(a^*a) = \phi(|a|^2) = \phi(|a|)^2.$$

Iz jedinstvenosti drugog korijena na  $B_+$  slijedi  $b = \phi(|a|) \in \phi(A_+)$ .  $\square$

## 2.4 Stanja i reprezentacije

**Definicija 2.4.1. Reprezentacija**  $C^*$ -algebre  $A$  na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$  je svaki  $*$ -homomorfizam  $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ . U ovoj situaciji najčešće označavamo  $\mathcal{H}_\pi := \mathcal{H}$ .

Za reprezentacije  $\pi$  i  $\rho$  algebre  $A$  kažemo da su **unitarno ekvivalentne** ako postoji unitaran operator  $U : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_\rho$  (tzv. **operator ispreplitanja**) takav da je  $U\pi(a) = \rho(a)U$  (ekvivalentno  $U\pi(a)U^* = \rho(a)$ ) za sve  $a \in A$ . U tom slučaju pišemo  $\pi \sim \rho$  i lako vidimo da je  $\sim$  relacija ekvivalencije na klasi svih reprezentacija  $C^*$ -algebre  $A$ .

Ako imamo familiju reprezentacija  $(\pi_i)_{i \in I}$   $C^*$ -algebre  $A$ , tada definiramo njihovu direktnu sumu  $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$  formulom

$$\pi(a)(x_i)_{i \in I} = (\pi(a)x_i)_{i \in I}, \quad \text{za sve } a \in A, (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_{\pi_i}.$$

Tada je  $\pi$  reprezentacija od  $A$  na Hilbertovom prostoru  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_{\pi_i}$ .

Za zatvoren potprostor  $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}_\pi$  kažemo da je  **$\pi$ -invarijantan** ako je  $\pi(a)$ -invarijantan za sve  $a \in A$ . Uočimo da je restrikcija  $\pi_{\mathcal{K}} : a \mapsto \pi(a)|_{\mathcal{K}}$  reprezentacija od  $A$  na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{K}$ .

Ako je  $\mathcal{K}$   $\pi$ -invarijantan potprostor, tada je i  $\mathcal{K}^\perp$   $\pi$ -invarijantan. Zaista, za  $a \in A$  i  $\xi \in \mathcal{K}^\perp$  imamo

$$\langle \pi(a)\xi, k \rangle = \langle \xi, \underbrace{\pi(a^*)k}_{\in \mathcal{K}} \rangle = 0, \quad \text{za sve } k \in \mathcal{K}$$

pa je  $\pi(a)\xi \in \mathcal{K}^\perp$ . Posebno, vrijedi  $\pi \sim \pi_{\mathcal{K}} \oplus \pi_{\mathcal{K}^\perp}$ .

Za reprezentaciju  $\pi$  kažemo da je **ireducibilna** ako  $\mathcal{H}$  nema netrivialnih  $\pi$ -invarijantnih potprostora.

Neka je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor i  $S \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$  skup operatora. Tada **komutant** od  $S$ , u oznaci  $S'$ , definiramo kao skup svih operatora iz  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  koji komutiraju sa svim operatorima iz  $S$ .

**Lema 2.4.2.** *Reprezentacija  $\pi$   $C^*$ -algebre  $A$  je ireducibilna ako i samo ako su multipli identitete  $1_{\mathcal{H}_\pi}$  jedini operatori koji komutiraju s  $\pi(A)$ .*

*Dokaz.* Ako  $\pi$  ima netrivialan invarijantan potprostor, tada ortogonalna projekcija na taj potprostor komutira s  $\pi(A)$  i nije skalarni operator. Obratno, ako neskalaran operator  $T$  komutira s  $\pi(A)$ , tada isto vrijedi i za  $T^*$  pa i realni i imaginarni dio od  $T$  komutiraju s  $\pi(A)$ . Jedan od njih je neskalaran pa zaključujemo da postoji neskalaran hermitski operator  $S$  koji komutira s  $\pi(A)$ . Slijedi da se  $\sigma(S)$  sastoji od barem dvije točke. Stoga postoje nenul realne funkcije  $f, g \in C(\sigma(S))$  takve da je  $fg = 0$ . Imamo  $f(S), g(S) \in C^*(S) \subseteq \pi(A)'$  pa su  $f(S)\mathcal{H}_\pi$  i  $g(S)\mathcal{H}_\pi$  međusobno ortogonalni nenul  $\pi$ -invarijantni potprostori. Dakle,  $\pi$  je reducibilna.  $\square$

Za reprezentaciju  $\pi$   $C^*$ -algebre  $A$  definiramo **esencijalni potprostor** kao

$$\text{ess } \pi := \overline{\text{span}} \pi(A)\mathcal{H}_\pi = \overline{\text{span}} \{ \pi(a)h : a \in A, h \in \mathcal{H}_\pi \}.$$

Uočimo da je  $\text{ess } \pi$  uvijek  $\pi$ -invarijantan. Za  $\pi$  kažemo da je **nedegenerirana** ako  $\text{ess } \pi = \mathcal{H}_\pi$ .

Neka je  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ . Za potprostor

$$\overline{\pi(A)\xi} = \overline{\{ \pi(a)\xi : a \in A \}}$$

kažemo da je **ciklički potprostor** za  $\pi$ . Uočimo da je  $\pi(A)\xi$  uvijek  $\pi$ -invarijantan. Za vektor  $\xi$  kažemo da je **ciklički vektor** za  $\pi$  ako je  $\pi(A)\xi = \mathcal{H}_\pi$ . Za reprezentaciju  $\pi$  kažemo da je **ciklička** ako postoji ciklički vektor za  $\pi$ .

**Propozicija 2.4.3.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $\pi$  njena reprezentacija.*

- (i) *Ako je  $A$  unitalna, tada je  $\pi$  nedegenerirana ako i samo ako vrijedi  $\pi(1) = 1$ .*
- (ii)  *$\pi$  je nedegenerirana ako i samo ako za svaku aproksimativnu jedinicu  $(e_i)_i$  u  $A$  vrijedi  $\pi(e_i) \xrightarrow{SOT} 1$ .*
- (iii)  *$\pi$  je nedegenerirana ako i samo ako za svaki  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  vrijedi implikacija  $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A \implies \xi = 0$ .*

*Dokaz.* (i) Ako je  $\pi(1) = 1$ , vrijedi  $\text{ess } \pi \supseteq \pi(1)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$ . Obratno, pretpostavimo da je  $\pi$  nedegenerirana i da je  $\pi(1) \neq 1$ . Tada je  $\pi(1)$  netrivialan ortogonalan projektor na zatvoren potprostor  $\pi(1)\mathcal{H}_\pi$  koji je  $\pi$ -invarijantan.

- (ii) Ako za svaku aproksimativnu jedinicu  $(e_i)_i$  u  $A$  vrijedi  $\pi(e_i) \xrightarrow{SOT} 1$ , tada za svaki  $h \in \mathcal{H}_\pi$  imamo  $\pi(e_i)h \rightarrow h$  pa je  $\pi(A)\mathcal{H}_\pi$  gust u  $\mathcal{H}_\pi$ . Obratno, pretpostavimo da je  $\pi$  nedegenerirana. Neka je  $h \in \mathcal{H}_\pi$  i  $(e_i)_i$  aproksimativna jedinica u  $A$ . Neka je  $\varepsilon > 0$ . Zbog gustoće  $\text{span } \pi(A)\mathcal{H}_\pi$  možemo odabrati  $a_1, \dots, a_n \in A$  i  $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}_\pi$  takve da je

$$\left\| h - \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tada postoji indeks  $i_0$  takav da za sve  $i \geq i_0$  vrijedi

$$\left\| \pi(e_i) \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k - \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pa  $\|\pi(e_i)h - h\|$  za  $i \geq i_0$  možemo ograničiti s

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left\| \pi(e_i)h - \pi(e_i) \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k \right\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ & + \underbrace{\left\| \pi(e_i) \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k - \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k \right\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ & + \underbrace{\left\| \sum_{k=1}^n \pi(a_k)h_k - h \right\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ & < \varepsilon \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti  $\varepsilon$  slijedi  $\pi(e_i)h \rightarrow h$ . Budući da je  $h \in \mathcal{H}_\pi$  bio proizvoljan, slijedi  $\pi(e_i) \xrightarrow{SOT} 1$ .

- (iii) Pretpostavimo da je  $\pi$  nedegenerirana i  $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A$ . Tada za svaki  $a \in A$  i  $h \in \mathcal{H}_\pi$  imamo

$$0 = \langle \pi(a)\xi, h \rangle = \langle \xi, \pi(a^*)h \rangle$$

odnosno  $\xi \perp \pi(A)\mathcal{H}_\pi$  pa slijedi  $\xi = 0$ .

Obratno, pretpostavimo da za svaki  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  vrijedi  $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A \implies a = 0$ . Ako je  $\xi \perp \pi(A)\mathcal{H}_\pi$ , tada kao gore vidimo  $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A$  pa je  $\xi = 0$ . Dakle,  $\text{ess } \pi = \mathcal{H}_\pi$ .

□

Korolar 4.4.2 Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije u stvari pokazuje da za nedegeneriranu reprezentaciju  $\pi$  vrijedi  $\text{ess } \pi = \pi(A)\mathcal{H}_\pi$  i  $\overline{\text{span}} \pi(A)\xi = \pi(A)\xi$  za svaki  $\xi \in \mathcal{H}$ .

**Definicija 2.4.4.** Za linearan funkcional  $\rho$  na  $A$  kažemo da je **pozitivan** ako  $a \geq 0 \implies \rho(a) \geq 0$ . Ekvivalentno,  $\rho$  je pozitivan ako  $\rho(b^*b) \geq 0$  za sve  $b \in A$ .

**Definicija 2.4.5.** Za linearan funkcional  $\rho$  na  $A$  kažemo da je **stanje** na  $A$  ako je pozitivan i norme 1.

Uočimo da je svaki  $*$ -homomorfizam (karakter)  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  pozitivan funkcional:

$$\phi(a^*a) = \phi(a)^*\phi(a) = |\phi(a)|^2 \geq 0, \quad \text{za sve } a \in A$$

Nadalje, iz napomene 2.3.5 slijedi da je  $\|\phi\| = 1$  pa zaključujemo da je  $\phi$  stanje.



**Primjer 2.4.6.** Promotrimo  $C^*$ -algebru  $C([0, 1]^2)$  neprekidnih funkcija na jediničnom kvadratu. Ako je  $\lambda$  dvodimenzionalna Lebesgueova mjera, tada je linearan funkcional

$$C([0, 1]^2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_{[0, 1]^2} f d\lambda$$

stanje na  $C([0, 1]^2)$ , ali nije karakter.

**Primjer 2.4.7.** Linearan funkcional trag  $\text{Tr} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  je pozitivan linearan funkcional. Funkcional  $\frac{1}{n} \text{Tr}$  je stanje na  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Lema 2.4.8.** *Neka je  $f$  pozitivan funkcional u  $C^*$ -algebri  $A$ . Tada za sve  $a, b \in A$  imamo*

1.  $f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$ .
2. (CSB nejednakost)  $|f(a^*b)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b)$ .

*Dokaz.* Za svaki  $\lambda \in \mathbb{C}$  imamo

$$0 \leq f((\lambda a + b)^*(\lambda a + b)) = \underbrace{|\lambda|^2 f(a^*a) + f(b^*b)}_{\in \mathbb{R}} + \bar{\lambda} f(a^*b) + \lambda f(b^*a)$$

pa slijedi  $\text{Im}(\bar{\lambda} f(a^*b) + \lambda f(b^*a)) = 0$ . Biranjem  $\lambda = 1$  odnosno  $\lambda = i$  slijedi da su imaginarni odnosno realni dijelovi od  $f(b^*a)$  i  $\overline{f(a^*b)}$  jednaki.

CSB nejednakost sada slijedi iz činjenice da je  $(a, b) \mapsto f(b^*a)$  seskvilinearna pozitivna forma na  $A$ .  $\square$

**Lema 2.4.9.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra i  $f$  pozitivan funkcional. Tada je  $\|f\| = f(1)$ .*

*Dokaz.* Očito je  $\|f\| \geq f(1)$ . Obratno, za  $z \in A$ ,  $\|z\| = 1$  imamo  $z^*z \leq 1$  pa je  $f(z^*z) \leq f(1)$ . CSB nejednakost daje

$$|f(z)|^2 = |f(1^*z)|^2 \leq f(z^*z)f(1^*1) = f(z^*z)f(1) \leq f(1)^2.$$

Dakle,  $\|f\| \leq f(1)$ .  $\square$

**Lema 2.4.10.** *Neka je  $\tau$  pozitivan funkcional u  $C^*$ -algebri  $A$ . Tada je  $N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}$  lijevi ideal u  $A$ .*

*Dokaz.* Da je  $N_\tau$  lijevi ideal slijedi direktno iz

$$N_\tau = \{a \in A : \tau(b^*a) = 0, \forall b \in A\},$$

što dobijemo iz CSB nejednakosti.  $\square$

Opišimo sada GNS konstrukciju. Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $\tau$  stanje na  $A$ . Uvedimo skalarni produkt na vektorskom prostoru  $A/N_\tau$  formulom

$$\langle a + N_\tau, b + N_\tau \rangle := \tau(b^*a), \quad \text{za sve } a, b \in A.$$

Neka  $A$  djeluje na  $A/N_\tau$  lijevim multiplikacijama, tj. za  $a \in A$  definiramo operator  $\pi_\tau(a) : A/N_\tau \rightarrow A/N_\tau$  formulom  $\pi_\tau(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau$ . Operator  $\pi_\tau(a)$  je ograničen. Zaista, za  $b \in A$  imamo  $b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$  pa djelovanjem pozitivnim funkcionalom  $\tau$  dobivamo

$$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \tau(b^*a),$$

što je ekvivalentno s

$$\|\pi_\tau(a)(b + N_\tau)\| \leq \|a\| \|b + N_\tau\|$$

Neka je  $\mathcal{H}_\tau$  Hilbertov prostor koji je upotpunjenje unitarnog prostora  $A/N_\tau$ . Operator  $\pi_\tau(a)$  proširimo po gustoći do ograničenog operatora na  $\mathcal{H}_\tau$  i označimo ga istom oznakom. Lako vidimo da je  $\pi_\tau : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\tau)$  \*-homomorfizam. Ako je  $(e_i)_i$  aproksimativna jedinica za  $A$ , vidimo da je  $\pi_\tau(e_i) \xrightarrow{SOT} 1_{\mathcal{H}_\tau}$  pa je  $\tau$  nedegenerirana (Propozicija 2.4.3 (ii)).

**Propozicija 2.4.11.** *Neka je  $A$  neunitalna  $C^*$ -algebra i  $\rho$  stanje na  $A$ .*

(i) *Za svaku aproksimativnu jedinicu  $(e_i)_i$  u  $A$  vrijedi  $\rho(e_i) \rightarrow 1$ .*

(ii)  *$\rho$  se na jedinstven način proširuje do stanja  $\tau$  na  $A^1$  formulom  $\tau(\lambda 1 + a) = \lambda + \rho(a)$ .*

*Dokaz.* (i) Za proizvoljnu aproksimativnu jedinicu  $(e_i)_i$  slijedi da je  $(\rho(e_i))_i$  rastuća mreža u  $[0, 1]$  pa  $\rho(e_i) \rightarrow L \in [0, 1]$ . Primijetimo da je

$$e_i^2 = \left(e_i^{1/2}\right)^* e_i \left(e_i^{1/2}\right) \leq \left(e_i^{1/2}\right)^* 1 \left(e_i^{1/2}\right) = e_i.$$

Dakle, za proizvoljan  $a \in A$  imamo

$$|\rho(e_i a)|^2 \leq \rho(e_i^2) \rho(a^* a) \leq \rho(e_i) \|a^* a\| \leq L \|a\|^2$$

pa prelaskom na limes slijedi  $|\rho(a)|^2 \leq L \|a\|^2$ . Iz

$$1 = \|\rho\| = \inf\{K > 0 : |\rho(a)| \leq K \|a\|, \forall a \in A\}$$

slijedi  $L \geq 1$ . Dakle,  $L = 1$  i posebno imamo  $|\rho(a)|^2 \leq \rho(a^* a)$ .

(ii) Prvo uočimo da iz (a) i  $\tau(a^*b) = \overline{\tau(b^*a)}$  slijedi  $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ . Imamo

$$\begin{aligned} \tau((\lambda 1 + a)^*(\lambda 1 + a)) &= \tau(|\lambda|^2 1 + \bar{\lambda}a + \lambda a^* + a^*a) \\ &= |\lambda|^2 1 + \bar{\lambda}\rho(a) + \lambda\overline{\rho(a)} + \rho(a^*a) \\ &= |\lambda|^2 1 + 2\operatorname{Re}[\bar{\lambda}\rho(a)] + \rho(a^*a) \\ &\geq |\lambda|^2 1 - 2|\lambda\rho(a)| + |\rho(a)|^2 \\ &= (|\lambda| - |\rho(a)|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

pa je  $\tau$  pozitivan funkcional. Iz  $\tau(1) = 1$  slijedi da je  $\tau$  stanje.  $\square$

**Propozicija 2.4.12.** *Ako je  $\rho$  stanje na  $C^*$ -algebri  $A$ , tada postoji jedinični vektor  $h_\rho \in \mathcal{H}_\rho$  ciklički za  $\pi_\rho$  takav da je  $\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho \rangle$  za sve  $a \in A$ .*

*Obratno, ako je  $h$  jedinični ciklički vektor reprezentacije  $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ , tada je  $\tau : a \mapsto \langle \pi(a)h, h \rangle$  stanje na  $A$  i  $U : \mathcal{H}_\tau \rightarrow \mathcal{H}_\pi, a \mapsto \pi(a)h$  je unitaran operator takav da  $\pi(a) = U\pi_\tau(a)U^*$  za sve  $a \in A$ .*

*Dokaz.* Ako je  $A$  unitalna, stavimo  $h_\rho = 1 + N_\rho$ .

Ako  $A$  nije unitalna, prema Propoziciji 2.4.11 proširimo  $\rho$  do stanja  $\tau$  na  $A^1$ . Promotrimo izometriju  $V : \mathcal{H}_\rho \rightarrow \mathcal{H}_\tau$  definiranu s  $V(a + N_\rho) = a + N_\tau$ . Uočimo da za sve  $a \in A$  vrijedi  $V\pi_\rho(a) = \pi_\tau(a)V$ . Tada  $\mathcal{H}_\rho$  možemo identificirati s potprostorom  $V\mathcal{H}_\rho \subseteq \mathcal{H}_\tau$ . Zaista,  $\mathcal{H}_\rho$  je esencijalni potprostor od  $\pi_\tau|_A = \pi_\rho \oplus 0$  na  $\mathcal{H}_\rho \oplus \mathcal{H}_\rho^\perp = \mathcal{H}_\tau$ . Projekcija  $h_\rho$  vektora  $1 + N_\tau$  na potprostor  $\mathcal{H}_\rho$  zadovoljava

$$\pi_\rho(a)h_\rho = \pi_\tau(a)(1 + N_\tau) = a + N_\tau$$

pa je  $h_\rho$  ciklički vektor za  $\pi_\rho$  i zadovoljava

$$\langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho \rangle = \langle \pi_\tau(a)(1 + N_\tau), 1 + N_\tau \rangle = \tau(a) = \rho(a)$$

U stvari smo pokazali da je  $\mathcal{H}_\rho = \mathcal{H}_\tau$  jer

$$1 \leq \|\rho\| \leq \|h_\rho\|^2 \leq \|1 + N_\tau\|^2 = 1$$

pa slijedi  $h_\rho = 1 + N_\tau$ .

Za obrat, uočimo da je  $\tau$  pozitivan funkcional norme najviše  $\|h\|^2 = 1$ . U stvari je  $\|\tau\| = 1$  jer za bilo koju aproksimativnu jedinicu  $(e_i)_i$  od  $A$  vrijedi  $\tau(e_i)h \rightarrow h$ . Vrijedi

$$N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\} = \{a \in A : \langle \pi(a^*a)h, h \rangle = 0\} = \{a \in A : \pi(a)h = 0\}$$

pa je dobro definiran linearan operator  $U_0 : A/N_\tau \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ ,  $U_0(a + N_\tau) = \pi(a)h$ .  $U_0$  je izometrija:

$$\langle U_0(a + N_\tau), U_0(b + N_\tau) \rangle = \langle \pi(a)h, \pi(b)h \rangle = \langle \pi(b^*a)h, h \rangle = \tau(b^*a) = \langle a + N_\tau, b + N_\tau \rangle$$

pa se proširuje do izometrije  $U : \mathcal{H}_\tau \rightarrow \overline{\pi(A)h} = \mathcal{H}_\pi$  na upotpunjenju od  $A/N_\tau$ . Stoga je  $U$  unitaran i imamo

$$U\pi_\tau(a)(b + N_\tau) = U(ab + N_\tau) = \pi(ab)h = \pi(a)(\pi(b)h) = \pi(a)U(b + N_\tau)$$

pa je  $U\pi_\tau(a)U^* = \pi(a)$  za sve  $a \in A$ .  $\square$

**Korolar 2.4.13.** *Ako je  $\pi$  ireducibilna reprezentacija  $C^*$ -algebre  $A$  i  $h \in \mathcal{H}_\pi$  jedinični vektor, tada je  $\pi$  ekvivalentna GNS reprezentaciji  $\pi_\omega$  dobivenoj iz stanja  $\omega : a \mapsto \langle \pi(a)h, h \rangle$ .*

*Dokaz.* Potrebno je pokazati da je  $h$  ciklički vektor za  $\pi$ . Imamo da je  $\overline{\pi(A)h}$   $\pi$ -invarijantan potprostor koji je zbog nedegeneriranosti od  $\pi$  netrivialan. Slijedi da je  $\overline{\pi(A)h} = \mathcal{H}_\pi$ .  $\square$

Vrijedi i obrat Leme 2.4.9:

**Lema 2.4.14.** *Neka je  $f$  linearan funkcional norme 1 na unitalnoj  $C^*$ -algebri  $A$ . Tada je  $f$  stanje ako i samo ako  $f(1) = 1$ .*

*Dokaz.* Znamo da stanja zadovoljavaju  $f(1) = 1$ . Pretpostavimo da vrijedi  $f(1) = 1$  i da postoji  $a \in A$  takav da je  $f(a^*a) \notin [0, \infty)$ .

Tada geometrijski možemo odabrati  $\lambda \in \mathbb{C}$  i  $R > 0$  takve da je  $\sigma(a^*a) \subseteq B(\lambda, R)$ , ali  $f(a^*a) \notin B(\lambda, R)$ . Prva relacija povlači  $\sigma(a^*a - 1) \subseteq B(0, R)$  pa je  $\|a^*a - 1\| = r(a^*a - 1) \leq R$ . Sada slijedi

$$|f(a^*a) - \lambda| = |f(a^*a) - \lambda f(1)| \leq \|f\| \|a^*a - 1\| \leq R$$

pa je  $f(a^*a) \in B(\lambda, R)$  što je kontradikcija s drugom relacijom.  $\square$

**Lema 2.4.15.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $a \in A$  hermitski element. Tada postoji stanje  $\rho$  od  $A$  takvo da je  $|\rho(a)| = \|a\|$ . Posebno, za svaki  $a \in A$  postoji stanje  $\rho$  takvo da je  $\rho(a^*a) = \|a\|^2$ .*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $A$  unitalna. Promotrimo komutativnu  $C^*$ -algebru  $C^*(a)$  generiranu s  $a$  i 1. Geljandova transformacija  $\hat{a}$  je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu karaktera od  $C^*(a)$  pa postiže maksimum u nekom karakteru  $\phi$ :

$$|\phi(a)| = |\hat{a}(\phi)| = \|\hat{a}\|_\infty = \|a\|.$$

Korolar Hahn-Banachovog teorema povlači da postoji  $\rho \in A^*$  takav da je  $\rho|_{C^*(a)} = \phi$  i  $\|\rho\| = \|\phi\| = 1$ . Sada slijedi  $\rho(1) = \phi(1) = 1$  pa je  $\rho$  stanje po Lemi 2.4.14. Imamo  $|\rho(a)| = |\phi(a)| = \|a\|$  pa  $\rho$  zadovoljava traženo svojstvo.  $\square$

Za reprezentaciju kažemo da je **vjerna** ako ima trivijalnu jezgru.

**Teorem 2.4.16** (Gel'fand-Naimark). *Svaka  $C^*$ -algebra  $A$  ima vjernu nedegeneriranu reprezentaciju.*

*Dokaz.* Za svaki  $a \in A, a \neq 0$  prethodna lema daje stanje  $\rho_a$  od  $A$  sa svojstvom  $\rho_a(a^*a) = \|a\|^2$ . Neka je  $\pi_{\rho_a}$  pripadna GNS-reprezentacija od  $A$  s pripadnim cikličkim vektorom  $h_{\rho_a}$ . Tada  $\pi_{\rho_a}(a) \neq 0$  jer

$$0 < \|a\|^2 = \rho_a(a^*a) = \langle \pi_{\rho_a}(a^*a)h_{\rho_a}, h_{\rho_a} \rangle = \|\pi_{\rho_a}(a)h_{\rho_a}\|^2.$$

Stoga je

$$\pi = \bigoplus_{a \in A, a \neq 0} \pi_{\rho_a}$$

vjerna reprezentacija od  $A$ . Ona je nedegenerirana kao direktna suma nedegeneriranih reprezentacija.  $\square$

**Definicija 2.4.17.** Neka je  $S$  konveksan skup u vektorskom prostoru  $X$ . Za točku  $x_0 \in S$  kažemo da je **ekstremna točka** za  $S$  ako iz  $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y$  za  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  i  $x, y \in S$  slijedi  $x = y$ . Skup svih ekstremnih točaka od  $S$  označavamo s  $\text{ext } S$ .

Uočimo da je skup svih stanja  $C^*$ -algebre  $A$  konveksan.

**Definicija 2.4.18.** Ekstremnu točku konveksnog skupa svih stanja  $C^*$ -algebre nazivamo **čisto stanje**.

**Lema 2.4.19.** *Neka je  $\rho$  stanje  $C^*$ -algebre  $A$ . Tada je pripadna GNS-reprezentacija  $\pi_\rho$  ireducibilna ako i samo ako je  $\rho$  čisto stanje.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da  $\pi_\rho$  nije ireducibilna; stoga postoji netrivijalan  $\pi_\rho$ -invarijantan potprostor  $\mathcal{K}$  od  $\mathcal{H}_\rho$ . Za pripadnu ortogonalnu projekciju  $P$  vrijedi  $P \neq 0, 1$ .

Zapisat ćemo  $\rho$  kao netrivijalnu konveksnu kombinaciju stanja.  $\mathcal{K}$  je  $\pi_\rho$ -invarijantan pa  $\pi_\rho(a)P = P\pi_\rho(a)$  za sve  $a \in A$ .

Neka je  $h_\rho$  ciklički vektor za  $\pi_\rho$ . Zbog  $\overline{\pi_\rho(A)h_\rho} = \mathcal{H}_\rho$  imamo

$$Ph_\rho = 0 \implies \pi_\rho(A)Ph_\rho = 0 \implies P\overline{\pi_\rho(A)h_\rho} \implies P\mathcal{H}_\rho \implies P = 0$$

pa je  $Ph_\rho \neq 0$ , te analogno slijedi  $(1 - P)h_\rho \neq 0$ .

Stoga definiramo stanja  $\phi, \psi$  od  $A$ :

$$\phi(a) = \left\langle \pi_\rho(a) \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|}, \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|} \right\rangle, \quad \psi(a) = \left\langle \pi_\rho(a) \frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|}, \frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|} \right\rangle.$$

Sada za stanje  $\rho$  imamo

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho \rangle \\ &= \langle \pi_\rho(a)h_\rho, Ph_\rho \rangle + \langle \pi_\rho(a)h_\rho, (1-P)h_\rho \rangle \\ &= \|Ph_\rho\|^2 \left\langle \pi_\rho(a) \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|}, \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|} \right\rangle \\ &\quad + (1 - \|Ph_\rho\|^2) \left\langle \pi_\rho(a) \frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|}, \frac{(1-P)h_\rho}{\|(1-P)h_\rho\|} \right\rangle \\ &= \|Ph_\rho\|^2 \phi(a) + (1 - \|Ph_\rho\|^2) \psi(a) \end{aligned}$$

gdje je  $\|Ph_\rho\|^2 \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Kad bi bilo  $\rho = \phi$ , tada bismo imali

$$\begin{aligned} \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho \rangle &= \rho(a) \\ &= \phi(a) \\ &= \frac{1}{\|Ph_\rho\|^2} \langle \pi_\rho(a)Ph_\rho, Ph_\rho \rangle \\ &= \frac{1}{\|Ph_\rho\|^2} \langle P\pi_\rho(a)h_\rho, Ph_\rho \rangle \\ &= \frac{1}{\|Ph_\rho\|^2} \langle \pi_\rho(a)h_\rho, Ph_\rho \rangle \end{aligned}$$

odakle slijedi  $h_\rho = \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|^2}$  pa onda  $Ph_\rho = \frac{Ph_\rho}{\|Ph_\rho\|^2}$ , što povlači  $\|Ph_\rho\|^2 = 1$ . Ovo je kontradikcija s  $\|Ph_\rho\|^2 \in \langle 0, 1 \rangle$ . Analognim računom za projektor  $1 - P$  slijedi da  $\rho \neq \psi$ . Dakle,  $\rho$  nije ekstremna točka skupa svih stanja od  $A$ .

Obratno, pretpostavimo da je  $\pi_\rho$  ireducibilna reprezentacija, uz  $\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho \rangle$  za neki  $h_\rho \in \mathcal{H}_\rho$  jedinični ciklički vektor za  $\pi_\rho$ .

Pokažimo da je  $\rho$  ekstremna točka skupa svih stanja: pretpostavimo da je  $\rho = \lambda\phi + (1 - \lambda)\psi$  za neka stanja  $\phi, \psi$  i  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ . Tvrdimo da vrijedi  $\rho = \phi$ .

$\psi$  i  $\phi$  su pozitivni pa je

$$N_\rho = \{a \in A : \rho(a^*a) = 0\} \subseteq N_\phi = \{a \in A : \phi(a^*a) = 0\}.$$

Vrijedi  $\pi_\rho(a)h_\rho = \pi_\rho(b)h_\rho$  ako i samo ako  $a - b \in N_\rho$  pa Cauchy-Schwarzova nejednakost povlači da je

$$[\pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(b)h_\rho] := \lambda\phi(b^*a)$$

dobro definirana seskvilinearna forma na gustom potprostoru  $\pi_\rho(A)h_\rho$  od  $\mathcal{H}_\rho$ .

Nadalje, imamo

$$[\pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(a)h_\rho] = \lambda\phi(a^*a) = \rho(a^*a) - (1 - \lambda)\psi(a^*a) \leq \rho(a^*a) = \|\pi_\rho(a)h_\rho\|^2$$

pa je  $[\cdot, \cdot]$  ograničena seskvilinearna forma na  $\pi_\rho(A)h_\rho$ . Možemo ju po gustoći proširiti do ograničene seskvilinearne forme  $q$  na  $\mathcal{H}_\rho$ . Dakle, postoji ograničen operator  $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\rho)$  takav da je  $q(x, y) = \langle x, Ty \rangle$  za sve  $x, y \in \mathcal{H}_\rho$ . Posebno imamo

$$\langle \pi_\rho(a)h_\rho, T\pi_\rho(b)h_\rho \rangle = [\pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(b)h_\rho] = \lambda\phi(b^*a).$$

$\phi$  je pozitivan, a  $\pi_\rho(A)h_\rho$  je gust pa je  $T$  pozitivan operator norme  $\leq 1$ .

Nadalje, tvrdimo da  $T \in \pi_\rho(A)'$ . Zaista, za  $a, b, c \in A$  imamo

$$\begin{aligned} \langle \pi_\rho(a)h_\rho, T\pi(c)\pi_\rho(b)h_\rho \rangle &= \lambda\phi((cb)^*a) \\ &= \lambda\phi(b^*(c^*a)) \\ &= \langle \pi_\rho(c^*a)h_\rho, T\pi_\rho(b)h_\rho \rangle \\ &= \langle \pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(c)T\pi(b)h_\rho \rangle. \end{aligned}$$

Budući da je  $\pi_\rho(A)h_\rho$  gust u  $\mathcal{H}_\rho$ , slijedi da je  $\pi_\rho(c)T = T\pi_\rho(c)$ .  $\pi_\rho$  je ireducibilna pa prema Lemi 2.4.2 vrijedi  $\pi_\rho(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\rho}$ , pa budući da je  $T \geq 0$  postoji skalar  $\alpha \geq 0$  takav da je  $T = \alpha 1_{\mathcal{H}_\rho}$ .

Ako je  $(e_i)_i$  aproksimativna jedinica za  $A$ , tada za svaki  $a \in A$  imamo

$$\begin{aligned} \lambda\phi(a) &= \lim_i \lambda\phi(e_i a) \\ &= \lim_i \langle \pi_\rho(a)h_\rho, T\pi_\rho(e_i)h_\rho \rangle \\ &= \lim_i \alpha \langle \pi_\rho(a)h_\rho, \pi_\rho(e_i)h_\rho \rangle \\ &= \alpha \langle \pi_\rho(a)h_\rho, h_\rho \rangle \\ &= \alpha\rho(a). \end{aligned}$$

Tada Propozicija 2.4.11 (i) povlači

$$\lambda = \lim_i \lambda\phi(e_i) = \lim_i \alpha\rho(e_i) = \alpha$$

odnosno  $\rho = \phi$ . □

Za dokaz sljedeće leme potreban nam je jedan klasični teorem funkcionalne analize, koji je iskazan u jeziku teorije lokalno konveksnih prostora. Dokaz teorema i neke osnovne informacije o lokalno konveksnim prostorima su u Appendixu 4.2.

**Teorem 2.4.20** (Krein-Milman). *Neka je  $S$  kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog prostora  $X$ . Tada je skup ekstremnih točaka  $\text{ext } S$  neprazan. Stoviše,  $S$  je zatvorena konveksna ljuska od  $\text{ext } S$ , tj.*

$$S = \{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in \text{ext } S, t_1, \dots, t_n \geq 0, t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

**Lema 2.4.21.** *Za svaki element  $a$   $C^*$ -algebre  $A$  postoji čisto stanje  $\rho$  na  $A$  takvo da je  $\rho(a^*a) = \|a\|^2$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\Sigma$  skup svih stanja  $\rho$  od  $A$  koja zadovoljavaju  $\rho(a^*a) = \|a\|^2$ . Prema Lemi 2.4.15 imamo  $\Sigma \neq \emptyset$  i lako vidimo da je  $\Sigma$  slabo- $*$  kompaktan (kao zatvoren podskup od  $\text{Ball}(A^*)$  koja je slabo- $*$  kompaktan) i konveksan podskup duala  $A^*$ . Prema Krein-Milmanovom teoremu dobivamo da  $\Sigma$  ima ekstremnu točku  $\rho$ . Tvrdimo da je  $\rho$  nužno čisto stanje, tj. da je ekstremna točka većeg skupa svih stanja na  $A$ . Stoga pretpostavimo  $\rho = \lambda\phi + (1 - \lambda)\psi$  za neki  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  i stanja  $\phi, \psi$  na  $A$ . Imamo

$$\rho(a^*a) = \lambda\phi(a^*a) + (1 - \lambda)\psi(a^*a) \leq \lambda\|a\|^2 + (1 - \lambda)\|a\|^2 = \|a\|^2 = \rho(a^*a)$$

pa je  $\phi(a^*a) = \|a\|^2 = \psi(a^*a)$ . Stoga  $\phi, \psi \in \Sigma$  pa iz  $\rho \in \text{ext } \Sigma$  slijedi  $\rho = \phi = \psi$ . Dakle,  $\rho$  je čisto stanje.  $\square$

**Teorem 2.4.22.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Za svaki  $a \in A$  postoji ireducibilna reprezentacija  $\pi$  od  $A$  takva da je  $\|\pi(a)\| = \|a\|$ .*

*Dokaz.* Neka je  $a \in A$  i odaberimo stanje  $\rho$  kao u prethodnoj lemi. Tada je  $\pi_\rho$  ireducibilna prema Lemi 2.4.19 i imamo

$$\|a\|^2 = \rho(a^*a) = \langle \pi_\rho(a^*a)h_\rho, h_\rho \rangle = \|\pi_\rho(a)h_\rho\|^2 \leq \|\pi_\rho(a)\|^2 \leq \|a\|^2$$

pa je  $\|\pi_\rho(a)\| = \|a\|$ .  $\square$



# Poglavlje 3

## Spektar $C^*$ -algebre

### 3.1 Primitivni ideali. Spektar $C^*$ -algebre

**Definicija 3.1.1.** Spektar  $\hat{A}$   $C^*$ -algebre  $A$  je skup klasa ekvivalencije unitarno ekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija od  $A$ .<sup>1</sup>

**Primjer 3.1.2.** Svaka ireducibilna reprezentacija od  $\mathbb{K}(\mathcal{H})$  je ekvivalentna identiteti  $\text{id} : \mathbb{K}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ , tj.  $\widehat{\mathbb{K}(\mathcal{H})} = \{[\text{id}]\}$ . Zaista, neka je  $\pi : \mathbb{K}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  ireducibilna reprezentacija i  $e \in \mathcal{H}$  jedinični vektor. Za  $h, k \in \mathcal{H}$  definiramo operator  $h \otimes \bar{k} \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  formulom  $(h \otimes \bar{k})(v) := \langle v, k \rangle h$ . Za  $P = \pi(e \otimes \bar{e})$  vrijedi  $P^2 = P^* = P$  pa je  $P$  ortogonalni projektor na  $P(\mathcal{H}_\pi)$ . Fiksirajmo jedinični vektor  $\xi \in P(\mathcal{H}_\pi)$ . Potprostor  $\overline{\pi(\mathbb{K}(\mathcal{H}))\xi}$  je zatvoren, nenul (sadrži  $\xi = \pi(e \otimes \bar{e})\xi$ ) i  $\pi$ -invarijantan pa je po ireducibilnosti od  $\pi$  jednak  $\mathcal{H}_\pi$ . Definiramo operator  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\pi$  kao  $Uh = \pi(h \otimes \bar{e})\xi$ .  $U$  je izometrija:

$$\begin{aligned} \langle Ug, Uh \rangle &= \langle \pi(g \otimes \bar{e})\xi, \pi(h \otimes \bar{e})\xi \rangle \\ &= \langle \xi, \pi((g \otimes \bar{e})^*(h \otimes \bar{e}))\xi \rangle \\ &= \langle \xi, \pi((e \otimes \bar{g})(h \otimes \bar{e}))\xi \rangle \\ &= \langle \xi, \pi(\langle h, g \rangle (e \otimes \bar{e}))\xi \rangle \\ &= \langle g, h \rangle \langle \xi, \pi(e \otimes \bar{e})\xi \rangle \\ &= \langle g, h \rangle \|\xi\|^2 \\ &= \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Uočimo da je  $\hat{A}$  zaista skup: za svaku ireducibilnu reprezentaciju  $\pi$  od  $A$  i  $h \in \mathcal{H}_\pi$  vrijedi da je  $\pi(A)h$  gust u  $\mathcal{H}_\pi$  pa je  $\dim \mathcal{H}_\pi \leq \aleph_0 \cdot \text{card } A = \text{card } A$ . Hilbertovi prostori iste dimenzije su izomorfní pa je svaka ireducibilna reprezentacija unitarno ekvivalentna reprezentaciji na nekom fiksnom Hilbertovom prostoru određene dimenzije.

$U$  je i surjeksija jer  $\{\pi(h \otimes \bar{k})\xi : h, k \in \mathcal{H}\} \subseteq \text{ran } U$ , a taj skup razapinja  $\pi(\mathbb{K}(\mathcal{H}))\xi$ , što je gust potprostor od  $\mathcal{H}_\pi$ :

$$\pi(h \otimes \bar{k})\xi = \pi(h \otimes \bar{k})\pi(e \otimes \bar{e})\xi = \langle e, k \rangle \pi(h \otimes \bar{e})\xi = \langle e, k \rangle U h.$$

Dakle,  $U$  je unitaran operator. Nadalje

$$\begin{aligned} \pi(h \otimes \bar{k})(Ug) &= \pi((h \otimes \bar{k})(g \otimes \bar{e}))\xi \\ &= \langle g, k \rangle \pi(h \otimes \bar{e})\xi \\ &= \langle g, k \rangle U h \\ &= U(\langle g, k \rangle h) \\ &= U((h \otimes \bar{k})g) \end{aligned}$$

pa po linearnosti i neprekidnosti slijedi  $\pi(T)U = UT = U \text{id}(T)$  za sve  $T \in \mathbb{K}(\mathcal{H})$ . Dakle,  $\pi$  je unitarno ekvivalentna identiteti.

**Primjer 3.1.3.** Neka je  $K$  CH prostor. Tvrdimo da su sve ireducibilne reprezentacije od  $C(K)$  jednodimenzionalne, tj. da su karakteri na  $C(K)$ . Neka je  $\pi$  ireducibilna reprezentacija od  $C(K)$ .  $\pi(C(K))$  je komutativna pa po Lemi 2.4.2 imamo  $\pi(C(K)) = \pi(C(K))' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$ . Posebno je svaki potprostor od  $\mathcal{H}_\pi$   $\pi$ -invarijantan pa zbog ireducibilnosti  $\pi$  slijedi  $\dim \mathcal{H}_\pi = 1$ . Nadalje, iz Leme 1.2.4 slijedi da je  $\pi$  evaluacija  $f \mapsto f(t)$  u nekoj točki  $t \in K$ .

**Definicija 3.1.4.** Jezgre ireducibilnih reprezentacija  $C^*$ -algebre  $A$  zovemo **primitivnim idealima**. Skup svih primitivnih ideala od  $A$  nazivamo **prostor primitivnih ideala** ili **primitivni spektar** i označavamo s  $\text{Prim } A$ .

**Propozicija 3.1.5.** Neka je  $A$   $C^*$ -algebra.

(i) Svaki zatvoren ideal  $I$  u  $A$  je presjek primitivnih ideala koji ga sadrže:

$$I = \bigcap \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}.$$

(ii) Ako je  $I \in \text{Prim } A$  i  $J, K$  dva ideala u  $A$  takva da je  $J \cap K \subseteq I$ , tada  $J \subseteq I$  ili  $K \subseteq I$ .

*Dokaz.* (i) Očito je  $I \subseteq \bigcap \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}$ . Obratno, za  $a \in A, a \notin I$  moramo pokazati da postoji  $P \in \text{Prim } A$  takav da je  $I \subseteq P$  i  $a \notin P$ . Promotrimo nenul element  $a + I$  kvocijentne  $C^*$ -algebre  $A/I$ . Postoji ireducibilna reprezentacija  $\pi$  od  $A/I$  takva da je  $\|\pi(a + I)\| = \|a + I\| \neq 0$ . Tada ako je  $q : A \rightarrow A/I$  kvocijentno preslikavanje, kompozicija  $\pi \circ q : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  je ireducibilna (ima istu sliku kao  $\pi$ ) reprezentacija od  $A$  takva da je  $a \notin \ker(\pi \circ q)$ .

- (ii) Neka je  $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  ireducibilna reprezentacija od  $A$  takva da je  $\ker \pi = I$ . Pretpostavimo  $J \not\subseteq I$ . Tada  $\pi(J) \neq \{0\}$  pa je  $\mathcal{V} := \overline{\text{span}} \pi(J)\mathcal{H}_\pi$  nenul zatvoren potprostor od  $\mathcal{H}_\pi$ . Nadalje,  $\mathcal{V}$  je i  $\pi$ -invarijantan jer je  $J$  ideal: za  $x \in J, h \in \mathcal{H}_\pi$  imamo

$$\pi(a)(\pi(x)h) = \pi(ax)h \in \pi(J)\mathcal{H}_\pi$$

pa linearnost i neprekidnost od  $\pi(a)$  povlače  $\pi(a)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ . Ireducibilnost od  $\pi$  povlači  $\overline{\text{span}} \pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{V} = \mathcal{H}_\pi$ . Sada je

$$\pi(K)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) \subseteq \pi(K \cap J)\mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(I)\mathcal{H}_\pi = 0$$

pa je  $K \subseteq \ker \pi = I$ .

□

**Napomena 3.1.6.** Za svaka dva zatvorena ideala  $J, K$  u  $C^*$ -algebri  $A$  općenito vrijedi  $JK = J \cap K$ . Naime, očito je  $JK \subseteq J \cap K$ . Obratno,  $J \cap K$  je zatvoren ideal u  $A$  pa je i sam  $C^*$ -algebra. Dakle,  $J \cap K$  djeluje sam na sebe lijevim množenjem. Prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije (Teorem 4.4.1), svaki  $a \in J \cap K$  može se zapisati kao  $a = bc$  za neke  $b, c \in J \cap K$ . Posebno  $b \in J, c \in K$  pa je  $a \in JK$ , odakle slijedi  $J \cap K \subseteq JK$ .

U tom smislu (b) dio prethodne propozicije pokazuje da su primitivni ideali prosti. Naime neka su  $J, K$  (ne nužno zatvoreni) ideali u  $A$  takvi da je  $JK \subseteq P$  za neki  $P \in \text{Prim } A$ . Prelaskom na zatvarače slijedi  $\overline{J} \cap \overline{K} = \overline{JK} \subseteq P$  pa  $J \subseteq \overline{J} \subseteq P$  odnosno  $K \subseteq \overline{K} \subseteq P$ .

**Napomena 3.1.7** (Aksiomi Kuratowskog). Topologiju na skupu  $X$  možemo zadati tako da definiramo operator  $\overline{\cdot} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  sa svojstvima:

- (i)  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .
- (ii)  $A \subseteq \overline{A}$  za sve  $A \subseteq X$ .
- (iii)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$  za sve  $A \subseteq X$ .
- (iv)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  za sve  $A, B \subseteq X$ .

Štoviše, postoji jedinstvena topologija na  $X$  takva da  $\overline{\cdot}$  odgovara operatoru zatvarača. Naime, definiramo da je  $A \subseteq X$  zatvoren ako  $A = \overline{A}$ , tj.  $A \supseteq \overline{A}$ . Familija zatvorenih skupova zadovoljava tražena svojstva topologije:

- $\emptyset$  je zatvoren po definiciji. Za  $X$  imamo  $\overline{X} \in \mathcal{P}(X)$  pa je  $X \supseteq \overline{X}$ .

- Iz (iii) slijedi monotonost:  $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$ . Neka je  $(F_i)_{i \in I}$  indeksirana familija zatvorenih skupova u  $X$ . Za svaki  $j \in I$  imamo  $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_j$  pa i  $\overline{\bigcap_{i \in I} F_i} \subseteq \overline{F_j} = F_j$ . Slijedi  $\overline{\bigcap_{i \in I} F_i} \subseteq \bigcap_{j \in J} F_j$  pa je i  $\bigcap_{i \in I} F_i$  zatvoren.
- Neka su  $F_1, \dots, F_n \subseteq X$  zatvoreni. Tada indukcijom iz (iv) slijedi

$$\overline{F_1 \cup \dots \cup F_n} = F_1 \cup \dots \cup F_n$$

pa je  $F_1 \cup \dots \cup F_n$  zatvoren.

**Definicija 3.1.8.** Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $F \subseteq \text{Prim } A$ . Definiramo zatvarač  $\overline{F}$  kao

$$\overline{F} = \left\{ P \in \text{Prim } A : \bigcap F \subseteq P \right\}.$$

Ova definicija zadovoljava aksiome Kuratowskog; inducirana topologija na  $\text{Prim } A$  naziva se **Jacobsonova topologija**.

Zaista, provjerimo aksiome Kuratowskog:

(i)

$$\overline{\emptyset} = \left\{ P \in \text{Prim } A : \bigcap \emptyset \subseteq P \right\} = \{ P \in \text{Prim } A : A \subseteq P \} = \emptyset.$$

(ii) Za svaki  $P \in F$  imamo  $\bigcap F \subseteq P$  pa je  $P \in \overline{F}$ . Slijedi  $F \subseteq \overline{F}$ .

(iii) Uočimo da vrijedi  $\bigcap F = \bigcap \overline{F}$ . Naime, zbog  $F \subseteq \overline{F}$  slijedi  $\bigcap \overline{F} \subseteq \bigcap F$ . Obratno, za svaki  $P \in \overline{F}$  imamo  $\bigcap F \subseteq P$  pa je  $\bigcap F \subseteq \bigcap \overline{F}$ . Iz ovoga slijedi

$$\overline{\overline{F}} = \left\{ P \in \text{Prim } A : \bigcap \overline{F} \subseteq P \right\} = \left\{ P \in \text{Prim } A : \bigcap F \subseteq P \right\} = \overline{F}.$$

(iv) Za  $F \subseteq H \subseteq \text{Prim } A$  imamo

$$\overline{F} = \left\{ P \in \text{Prim } A : \bigcap F \subseteq P \right\} \subseteq \left\{ P \in \text{Prim } A : \bigcap H \subseteq P \right\} = \overline{H}$$

pa slijedi  $\overline{F} \cup \overline{G} \subseteq \overline{F \cup G}$ . Obratno, neka je  $P \in \overline{F \cup G}$ . Tada je

$$\left( \bigcap F \right) \cap \left( \bigcap G \right) = \bigcap (F \cup G) \subseteq P$$

pa prostost od  $P$  povlači  $\bigcap F \subseteq P$  ili  $\bigcap G \subseteq P$ , odnosno  $P \in \overline{F}$  ili  $P \in \overline{G}$ .

Jezgre ekvivalentnih reprezentacija su jednake pa je preslikavanje  $\theta_A : \hat{A} \rightarrow \text{Prim } A$ ,  $\pi \mapsto \ker \pi$  surjektivno. Ono nije uvijek injektivno, ali jest za velik broj  $C^*$ -algebri, npr.  $C(T)$ . Preslikavanjem  $\pi \mapsto \ker \pi$  možemo povući Jacobsonovu topologiju s  $\text{Prim } A$  na  $\hat{A}$ . Formalno, za  $S \subseteq \hat{A}$  definiramo da je otvoren u  $\hat{A}$  ako i samo ako je  $\{\ker \pi : \pi \in S\}$  otvoren u  $\hat{A}$ .

Ovdje smo uveli klasičnu pokratu: poistovjećujemo  $\pi$  s klasom ekvivalencije  $[\pi]$ .

**Teorem 3.1.9.** *Neka je  $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  nedegenerirana reprezentacija  $C^*$ -algebre  $A$ . Tada postoje međusobno ortogonalni  $\pi$ -ciklički potprostori takvi da je njihova direktna suma gusta u  $\mathcal{H}_\pi$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{P}$  familija svih skupova međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora od  $\mathcal{H}_\pi$ , parcijalno uređen inkluzijom. Iz Propozicije 2.4.3 (iii) slijedi da je  $\pi$ -ciklički potprostor  $\pi(\mathcal{H}_\pi)\xi$  netrivialan za bilo koji nenul  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  pa zaključujemo  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Ako je  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$  linearno uređen podskup, tada je  $\bigcup \mathcal{R}$  očito gornja međa za  $\mathcal{R}$  i element od  $\mathcal{P}$ . Stoga prema Zornovoj lemi familija  $\mathcal{P}$  posjeduje maksimalni element  $X$ .

Dakle,  $X$  je skup međusobno ortogonalnih cikličkih potprostora takav da ne postoji  $Y \in \mathcal{P}$  sa svojstvom  $X \subsetneq Y$ . Neka je  $\Sigma X$  suma svih potprostora iz  $X$ . Pretpostavimo da  $\Sigma X$  nije gust u  $\mathcal{H}_\pi$ . Tada je  $\mathcal{K} = (\Sigma X)^\perp \neq \{0\}$   $\pi$ -invarijantan potprostor od  $\mathcal{H}_\pi$ . Restrikcija  $\pi|_{\mathcal{K}}$  je nedegenerirana pa  $\mathcal{K}$  sadrži neki ciklički potprostor  $\mathcal{L}$ . Tada za vrijedi  $X \subsetneq X \cup \{\mathcal{L}\} \in \mathcal{P}$ , što je kontradikcija s maksimalnošću od  $X$ . □

**Lema 3.1.10.** *Neka je  $I$  ideal u  $C^*$ -algebri  $A$  i neka je  $\pi : I \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  nedegenerirana reprezentacija. Tada se  $\pi$  na jedinstven način proširuje do nedegenerirane reprezentacije  $\tilde{\pi} : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$ . Ona zadovoljava  $\tilde{\pi}(a)\pi(b) = \pi(ab)$  za sve  $a \in A, b \in I$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $\pi$  ciklička reprezentacija s cikličkim vektorom  $h \in \mathcal{H}_\pi$ . Očito je jedini kandidat za  $\tilde{\pi}(a)$  na gustom potprostoru  $\pi(I)h$  od  $\mathcal{H}_\pi$  zadan s

$$\tilde{\pi}(a)[\pi(b)h] := \pi(ab)h$$

za  $a \in A, b \in I$ , pri čemu je  $ab \in I$ . Jednom kad pokažemo da je  $\tilde{\pi}$  dobro definiran, slijedi da je  $\tilde{\pi}(a)$  očito linearan. Ograničenost slijedi iz  $a^*a \leq \|a\|^2 1 \in A^1$ , odnosno  $b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$ :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\pi}(a)[\pi(b)h]\|^2 &= \|\pi(ab)h\|^2 \\ &= \langle \pi(ab)h, \pi(ab)h \rangle \\ &= \langle \pi(b^*a^*ab)h, h \rangle \\ &\leq \|a\|^2 \langle \pi(b^*b)h, h \rangle \\ &= \|a\|^2 \|\pi(b)h\|^2. \end{aligned}$$

Oдавде vidimo da je  $\tilde{\pi}(a)$  dobro definiran: ako je  $\pi(b)h = \pi(b')h$ , tada je  $\pi(b-b')h = 0$  pa je

$$\|[\pi(a(b-b'))h]\|^2 \leq \|a\|^2 \|\pi(b-b')h\|^2 = 0$$

odnosno  $\pi(ab)h = \pi(ab')h$ .

U općem slučaju postoji familija međusobno ortogonalnih  $\pi$ -cikličkih potprostora  $(\mathcal{H}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  od  $\mathcal{H}_\pi$  takva da je  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\pi$ . Za svaki  $a \in A$  i  $\lambda \in \Lambda$  postoji  $\rho_\lambda \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\lambda)$  takav da je

$$\rho_\lambda(a)\pi(b)|_{\mathcal{H}_\lambda} = \pi(ab)|_{\mathcal{H}_\lambda}, \quad \text{za sve } b \in A.$$

Definirajmo  $\rho(a) : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}_\lambda$  kao  $\rho(a) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(a)$ , tj.  $\rho(a)|_{\mathcal{H}_\lambda} = \rho_\lambda(a)$ .  $\rho(a)$  je ograničen linearan operator na gustom potprostoru od  $\mathcal{H}_\pi$  pa se proširuje do  $\tilde{\pi}(a) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$  s traženim svojstvom  $\tilde{\pi}(a)\pi(b) = \pi(ab)$  za sve  $a \in A, b \in I$ .

Za  $a \in A$  imamo

$$\tilde{\pi}(a)[\pi(b)h] = \pi(ab)h = \pi(a)[\pi(b)h], \quad \text{za sve } b \in A, h \in \mathcal{H}_\pi$$

pa je  $\tilde{\pi}(a) = \pi(a)$ , tj.  $\tilde{\pi}$  proširuje  $\pi$ .  $\tilde{\pi}$  je očito nedegenerirana zbog  $\text{ess } \tilde{\pi} = \overline{\text{span}} \tilde{\pi}(A)\mathcal{H}_\pi \supseteq \overline{\text{span}} \pi(I)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$ . Pokažimo da je  $\tilde{\pi}$  \*-homomorfizam:

$$\tilde{\pi}(ab)[\pi(x)h] = \pi(abx)h = \tilde{\pi}(a)[\pi(bx)h] = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)[\pi(x)h],$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\pi}(a)\pi(x)h, \pi(y)k \rangle &= \langle \pi(ax)h, \pi(y)k \rangle \\ &= \langle h, \pi(x^*a^*)\pi(y)k \rangle \\ &= \langle h, \pi(x^*a^*y)k \rangle \\ &= \langle h, \pi(x)^*\pi(a^*y)k \rangle \\ &= \langle \pi(x)h, \pi(a^*y)k \rangle \\ &= \langle \pi(x)h, \tilde{\pi}(a^*)\pi(y)k \rangle, \end{aligned}$$

gdje su  $a, b \in A, x, y \in I$  i  $h, k \in \mathcal{H}_\pi$ . Zbog  $\overline{\text{span}} \pi(I)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$  slijedi  $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$  i  $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$ . □

Sljedeće dvije propozicije uspostavljaju vezu između spektra i primitivnog spektra  $C^*$ -algebre  $A$  i njenih ideala i kvocijenata. Prva to čini na skupovnoj razini, a druga na topološkoj.

**Propozicija 3.1.11.** *Neka je  $I$  ideal u  $C^*$ -algebri  $A$  i  $q : A \rightarrow A/I$  kvocijentno preslikavanje. Tada*

- (i) *Preslikavanje  $\pi \mapsto \pi|_I$  je bijekcija  $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} \rightarrow \hat{I}$ , a preslikavanje  $P \mapsto P \cap I$  je bijekcija  $\{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\} \rightarrow \text{Prim } I$ .*

(ii) Preslikavanje  $\pi \mapsto \pi \circ q$  je bijekcija  $\widehat{A/I} \rightarrow \{\rho \in \hat{A} : \rho|_I = 0\}$ , a  $Q \mapsto q^{-1}(Q)$  je bijekcija  $\text{Prim } A/I \rightarrow \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}$  s inverzom  $P \mapsto P/I$ .

*Dokaz.* (i) Neka je  $\pi \in \hat{A}, \pi|_I \neq 0$ .  $\overline{\text{span}} \pi(I)\mathcal{H}_\pi$  je zatvoren  $\pi$ -invarijantan potprostor od  $\mathcal{H}_\pi$  pa mora biti  $\overline{\text{span}} \pi(I)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$ , odnosno  $\pi|_I$  je nedegenerirana. Ako je potprostor  $\mathcal{V}$  od  $\mathcal{H}_\pi$   $\pi|_I$ -invarijantan, tada jednakost

$$\pi(a)[\pi(x)k] = \pi(ax)k, \quad a \in A, x \in I, k \in \mathcal{H}_\pi$$

pokazuje da je  $\mathcal{V}$   $\pi$ -invarijantan. Slijedi  $\mathcal{V} = \{0\}$  ili  $\mathcal{V} = \mathcal{H}_\pi$  pa je  $\pi|_I$  ireducibilna. Ako je  $\pi \sim \rho$ , trivijalno slijedi  $\pi|_I \sim \rho|_I$  pa je  $\pi \mapsto \pi|_I$  dobro definirano preslikavanje  $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} \rightarrow \hat{I}$ .

Pretpostavimo  $\pi|_I \sim \rho|_I$ . Tada postoji unitaran operator  $U : \mathcal{H}_\rho \rightarrow \mathcal{H}_\pi$  takav da za sve  $x \in I$  vrijedi  $\pi(x)U = U\rho(x)$ . Zaista, za  $a \in A$  i  $k \in \mathcal{H}_\rho$  imamo

$$U\rho(a)[\rho(x)k] = U\rho(ax)k = \pi(ax)Uk = \pi(a)[\pi(x)Uk] = \pi(a)U\rho(x)k$$

pa iz linearnosti i neprekidnosti slijedi  $U\rho(a) = \pi(a)U$ , odnosno  $\pi \sim \rho$  pa je  $\pi \mapsto \pi|_I$  injektivno.

Neka je  $\rho \in \hat{I}$  te neka je  $\tilde{\rho}$  proširenje od  $\rho$  do reprezentacije od  $A$  dobiveno iz Leme 3.1.10. Zbog  $\tilde{\rho}(A) \supseteq \rho(I)$  dobivamo da je i  $\tilde{\rho}$  ireducibilna reprezentacija. Slijedi da je  $\pi \mapsto \pi|_I$  surjektivno.

Zbog  $(\ker \pi) \cap I = \ker(\pi|_I)$  slijedi da je  $P \mapsto P \cap I$  dobro definirano preslikavanje  $\text{Prim } A \rightarrow \text{Prim } I$ .

Dokažimo surjektivnost: svaka ireducibilna reprezentacija  $\pi$  od  $I$  se proširuje do ireducibilne reprezentacije  $\tilde{\pi}$  od  $A$  pa je  $\ker \pi = (\ker \tilde{\pi}) \cap I$ .

Dokažimo injektivnost: neka su  $P_1, P_2 \in \text{Prim } A, I \not\subseteq P_1, P_2$  takvi da je  $P_1 \cap I = P_2 \cap I$ . Tada posebno  $P_2 \cap I \subseteq P_1$  pa prostost od  $P_1$  povlači  $P_2 \subseteq P_1$ . Iz simetrije slijedi  $P_1 = P_2$ .

(ii) Za svaku reprezentaciju  $\pi$  od  $A/I$ , reprezentacija  $\pi \circ q$  od  $A$  ima istu sliku kao  $\pi$ . Stoga je  $\pi \circ q$  ireducibilna ako i samo ako je  $\pi$  ireducibilna (Lema 2.4.2), i  $\pi \circ q \sim \rho \circ q$  ako i samo ako  $\pi \sim \rho$ .

Slijedi da je  $\pi \mapsto \pi \circ q$  dobro definirano injektivno preslikavanje  $\widehat{A/I} \rightarrow \{\rho \in \hat{A} : \rho|_I \equiv 0\}$ .

Dokažimo surjektivnost: neka je  $\rho \in \hat{A}$  takva da je  $I \subseteq \ker \rho$ . Definiramo reprezentaciju  $\tilde{\rho} : A/I \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\rho)$  formulom  $\tilde{\rho}(a+I) = \rho(a)$ . Stoga  $\tilde{\rho} \circ q = \rho$  i  $\tilde{\rho}$  je ireducibilna jer je  $\rho$  ireducibilna. Slijedi  $\tilde{\rho} \in \widehat{A/I}$ . Odavde direktno slijedi i druga tvrdnja. □

**Definicija 3.1.12.** Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i neka je  $F \subseteq \text{Prim } A$ . Definiramo **jezgru** od  $F$  kao

$$\ker(F) := \bigcap F = \bigcap_{J \in F} J.$$

Neka je  $I \in \text{Prim } A$ . Definiramo **ljusku** od  $I$  kao  $\text{hull}(I) := \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}$ .

**Propozicija 3.1.13.** (i) Preslikavanje  $F \mapsto \ker(F)$  je bijekcija zatvorenih skupova od  $\text{Prim } A$  i zatvorenih ideala u  $A$ , s inverzom  $I \mapsto \text{hull}(I)$ .

(ii) Ako je  $I$  zatvoren ideal u  $A$ , tada je  $P \mapsto P \cap I$  homeomorfizam otvorenog skupa  $\{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\} \subseteq \text{Prim } A$  na  $\text{Prim } I$ . Preslikavanje  $\pi \mapsto \pi|_I$  je homeomorfizam otvorenog skupa  $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I = 0\} \subseteq \hat{A}$  na  $\hat{I}$ .

(iii) Ako je  $I$  ideal u  $A$ , i  $q : A \rightarrow A/I$  kvocijento preslikavanje, tada je  $Q \mapsto q^{-1}(Q)$  homeomorfizam  $\text{Prim } A/I$  na zatvoren skup  $\{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}$  u  $\text{Prim } A$ , s inverzom  $P \mapsto P/I$  i  $\pi \mapsto \pi \circ q$  je homeomorfizam  $\widehat{A/I}$  na zatvoren skup  $\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I = 0\}$  od  $\hat{A}$ .

*Dokaz.* (i) Prisjetimo se da za svaki ideal  $I$  u  $A$  vrijedi

$$I = \bigcap \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\} = \bigcap \text{hull}(I).$$

Oдавde slijedi da je  $\text{hull}(I)$  zatvoren skup u  $\text{Prim } A$ :

$$P \in \overline{\text{hull}(I)} \iff \bigcap_{J \in \text{hull}(I)} J \subseteq P \iff I \subseteq P \iff P \in \text{hull}(I).$$

Također slijedi da je  $I = \bigcap \text{hull}(I) = \ker(\text{hull}(I))$ .

S druge strane, za  $F \subseteq \text{Prim } A$  vrijedi  $\ker F \subseteq P \iff P \in \overline{F}$  pa za zatvoren  $F$  vrijedi  $F = \{P \in \text{Prim } A : \ker(F) \subseteq P\} = \text{hull}(\ker(F))$ .

(ii) Kanonska preslikavanja  $\theta_A : \hat{A} \rightarrow \text{Prim } A$  i  $\theta_I : \hat{I} \rightarrow \text{Prim } I$  su neprekidna i otvorena. Promotrimo komutativni dijagram

$$\begin{array}{ccc} \{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} & \xrightarrow{\pi \mapsto \pi|_I} & \hat{I} \\ \theta_I \downarrow & & \downarrow \theta_A \\ \{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\} & \xrightarrow{P \mapsto P \cap I} & \text{Prim } I \end{array}$$

gdje su horizontalna preslikavanja bijekcije i

$$\{\pi \in \hat{A} : \pi|_I \neq 0\} = \theta_I^{-1}(\{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\}).$$



Prema (i) slijedi da je  $\{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\}$  otvoren skup u  $\text{Prim } A$ . Preostaje dokazati da je  $P \mapsto P \cap I$  homeomorfizam. Opišimo otvorene skupove u relativnoj topologiji na  $\{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\}$ .

Za  $N \subseteq \text{Prim } A$  vrijedi da je otvoren ako i samo ako postoji ideal  $J$  u  $A$  takav da je  $N = \{P \in \text{Prim } A : J \not\subseteq P\}$ .

Za  $M \subseteq \{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\}$  vrijedi da je otvoren u relativnoj topologiji na  $\{P \in \text{Prim } A : I \not\subseteq P\}$  ako i samo ako postoji ideal  $J$  u  $A$  takav da je

$$M = \{P \in \text{Prim } A, I, J \not\subseteq P\} = \{P \in \text{Prim } A : I \cap J \not\subseteq P\}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz prostosti  $P$ . Sada je

$$\begin{aligned} P \in M &\iff I \cap J \not\subseteq P \\ &\iff I \cap J \not\subseteq I \cap P \\ &\iff I \cap P \in \{Q \in \text{Prim } I : I \cap J \not\subseteq Q\} \end{aligned}$$

pa je  $P \mapsto P \cap I$  homeomorfizam.

(iii) Prema (i) je  $\text{hull}(I) = \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}$  zatvoren skup u  $\text{Prim } A$ .

Zatvoreni skupovi u  $\{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\}$  su oblika

$$\begin{aligned} \{P \in \text{Prim } A : I \subseteq P\} \cap \{P \in \text{Prim } A : J \subseteq P\} &= \{P \in \text{Prim } A : I \cup J \subseteq P\} \\ &= \{P \in \text{Prim } A : I + J \subseteq P\}. \end{aligned}$$

Oдавde dobivamo da su zatvoreni skupovi u  $\text{hull}(I)$  točno oblika

$$T_K = \{P \in \text{Prim } A : K \subseteq P\}$$

za neki ideal  $K$  od  $A$  koji sadrži  $I$ . S druge strane, zatvoreni skupovi u  $\text{Prim } A/I$  su točno oblika

$$S_L = \{Q \in \text{Prim } A/I : L \subseteq Q\}$$

za neki ideal  $L$  od  $A/I$ . Prema tome,  $Q \mapsto q^{-1}(Q)$  preslikava  $S_L \mapsto T_{q^{-1}(L)}$ , a njen inverz  $P \mapsto P/I$  preslikava  $T_K \mapsto S_{K/I}$ . Slijedi da je  $Q \mapsto q^{-1}(Q)$  homeomorfizam.

□

**Korolar 3.1.14.** *Otvoreni skupovi u  $\text{Prim } A$  su točno oblika*

$$\mathcal{O}_J = \{P \in \text{Prim } A : J \not\subseteq P\}$$

za neki ideal  $J$  u  $A$ .

**Napomena 3.1.15.** Uočimo da je prema Teoremu 2.4.22  $\|a\| = \|\pi(a)\|$  za neku  $\pi \in \hat{A}$ . Koristeći kanonski izomorfizam  $A/P \cong \pi(A)$ , gdje je  $P = \ker \pi$ , dobivamo  $\|a\| = \|a + P\|$ . Posebno,

$$\|a\| = \sup_{\pi \in \hat{A}} \|\pi(a)\| = \sup_{P \in \text{Prim } A} \|a + P\|.$$

**Propozicija 3.1.16.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra. Tada je  $\hat{A}$  kompaktan prostor.  $\text{Prim } A$  je kompaktan prostor kao slika od  $\hat{A}$  pri neprekidnoj funkciji  $\theta_A$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{F}$  filter na  $\hat{A}$ . Tvrdimo da  $\mathcal{F}$  ima gomilište. Za  $F \in \mathcal{F}$  definiramo ideal  $J_F = \bigcap_{\pi \in F} \ker \pi$  u  $A$ . Stavimo

$$J = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} J_F}$$

i tvrdimo da je  $J$  pravi zatvoren ideal u  $A$ . Pokažimo prvo da je  $J$  potprostor od  $A$ . Neka su  $a, b \in J$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  nenul skalari te fiksirajmo  $\varepsilon > 0$ . Tada postoje  $a', b' \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} J_F$  takvi da vrijedi

$$\|a - a'\| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \quad \text{i} \quad \|b - b'\| \leq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}.$$

Postoje  $F, G \in \mathcal{F}$  takvi da vrijedi  $a' \in F$  i  $b' \in G$ . Zbog  $F \cup G \supseteq F$  je i  $F \cup G \in \mathcal{F}$  pa slijedi  $\alpha a' + \beta b' \in J_{F \cup G}$ . Slijedi

$$\|(\alpha a + \beta b) - \underbrace{(\alpha a' + \beta b')}_{\in J}\| \leq \varepsilon$$

pa zbog proizvoljnosti  $\varepsilon$  zaključujemo  $\alpha a + \beta b \in J$ . Analogno se dokazuje da je  $J$  ideal u  $A$ . Da je  $J$  pravi ideal slijedi iz činjenice da je za svaki  $F \in \mathcal{F}$  ideal  $J_F$  disjunktan s otvorenom kuglom  $B(1_A, 1)$  u  $A$  (Propozicija 1.2.8 (i)).

Iz Teorema 2.4.22 slijedi da postoji ireducibilna reprezentacija od  $A/J$  takva da je  $\|\rho(1 + J)\| = \|1 + J\| = 1$ . Propozicija 3.1.11 povlači da postoji  $\eta \in \hat{A}$  takva da je  $J \subseteq \ker \eta$ . Stoga zbog  $J_F \subseteq J$  vrijedi  $\eta \in \{\pi \in \hat{A} : J_F \subseteq \ker \pi\} = \overline{F}$  za sve  $F \in \mathcal{F}$  pa je  $\eta$  gomilište filtra  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Primjer 3.1.17.** Promotrimo  $C^*$ -algebru  $A := C(T, M_n(\mathbb{C}))$  za neki CH prostor  $T$  (operacije su definirane po točkama, a norma je dana s  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in T} \|f(t)\|_{M_n(\mathbb{C})}$ ). Pokazat ćemo da je

$$\hat{A} = \{[\varepsilon_t] : t \in T\}, \quad \text{Prim } A = \{\ker \varepsilon_t : t \in T\}$$

gdje je  $\varepsilon_t : A \rightarrow M_n(\mathbb{C}), a \mapsto a(t)$  evaluacija u točki  $t \in T$ . Nadalje, oba preslikavanja  $t \mapsto [\varepsilon_t]$  i  $t \mapsto \ker \varepsilon_t$  su homeomorfizmi.

Pretpostavimo da je  $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$  ireducibilna reprezentacija od  $A$ . Ako s  $1_n \in M_n(\mathbb{C})$  označimo jediničnu matricu, preslikavanje  $f \mapsto f1_n$  je unitalni \*-homomorfizam  $C(T) \rightarrow A$  pa je preslikavanje  $f \mapsto \pi(f1_n)$  nedegenerirana reprezentacija  $C(T) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ . Za svaki  $f \in C(T)$ ,  $\pi(f1_n)$  komutira s  $\pi(A)$  pa prema Lemi 2.4.2 slijedi da je  $\pi(f1_n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ . Prema istoj lemi slijedi da je  $f \mapsto \pi(f1_n)$  ireducibilna pa prema Primjeru 3.1.3 slijedi da je unitarno ekvivalentna evaluaciji u nekoj točki  $t \in T$ . Stoga postoji  $t \in T$  takav da je  $\pi(f1_n) = f(t)1_{\mathcal{H}}$  za sve  $f \in C(T)$ .

Sada tvrdimo da je  $I_t = \{a \in A : a(t) = 0\} \subseteq \ker \pi$ . Zaista, neka je  $a(t) = 0$  i uzmimo  $\varepsilon > 0$ . Odaberimo okolinu  $N$  od  $t$  takvu da je  $\|a(s)\| < \varepsilon$  za sve  $s \in N$ . Prema Urysohnovoj lemi postoji  $f \in C(T)$ ,  $0 \leq f \leq 1$  takva da je  $f(t) = 0$  i  $f(s) = 1$  za sve  $s \notin N$ . Tada za sve  $s \in T$  imamo  $\|a(s) - f(s)a(s)\| < \varepsilon$  i stoga  $\|\pi(a) - \pi(f1_n)\pi(a)\| < \varepsilon$ . Zbog  $\pi(f1_n) = f(t)1_{\mathcal{H}} = 0$  slijedi  $\|\pi(a)\| < \varepsilon$ . Iz proizvoljnosti  $\varepsilon$  slijedi  $\pi(a) = 0$ .

Zbog  $I_t \subseteq \ker \pi$ , postoji reprezentacija  $\tilde{\pi} : A/I_t \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}), \tilde{\pi}(a + I_t) := \pi(a)$  koja je ireducibilna jer ima istu sliku kao  $\pi$ . Preslikavanje  $a \rightarrow a(t)$  inducira \*-izomorfizam  $\phi_t : A/I_t \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  tako da je  $\tilde{\pi} \circ \pi_t^{-1}$  ireducibilna reprezentacija od  $M_n(\mathbb{C})$ . Prema Primjeru 3.1.2, ona je unitarno ekvivalentna identiteti pa je  $\pi = \tilde{\pi} \circ \pi_t^{-1} \circ \varepsilon_t$  unitarno ekvivalentna  $\varepsilon_t$ . Za različite  $s, t \in T$  reprezentacije  $\varepsilon_s$  i  $\varepsilon_t$  očito imaju različite jezgre pa su neekvivalentne. Ovo opravdava opis od  $\hat{A}$  i  $\text{Prim } A$ , barem na skupovnoj razini.

Preostaje pokazati da su  $t \mapsto [\varepsilon_t]$  i  $t \mapsto \ker \varepsilon_t$  homeomorfizmi. Preslikavanje  $[\varepsilon_t] \mapsto \ker \varepsilon_t$  je bijekcija  $\hat{A} \rightarrow \text{Prim } A$  pa je homeomorfizam. Stoga je dovoljno pokazati da je  $t \mapsto \ker \varepsilon_t$  homeomorfizam, a za to je dovoljno pokazati da

$$\overline{\{\ker \varepsilon_t : t \in N\}} = \{\ker \varepsilon_t : t \in \overline{N}\}$$

za sve  $N \subseteq T$ . Znamo da je  $\overline{\{\ker \varepsilon_t : t \in N\}} = \{\ker \varepsilon_t : t \in M\}$  za

$$M := \left\{ s \in T : \bigcap_{t \in N} \ker \varepsilon_t \subseteq \ker \varepsilon_s \right\}$$

i tvrdimo  $\overline{M} = N$ . Elementi od  $A$  su neprekidne funkcije na  $T$  pa  $a = 0$  na  $N$  povlači  $a = 0$  na  $\overline{N}$  pa zasigurno  $\overline{N} \subseteq M$ . S druge strane, ako  $s \notin \overline{N}$  tada prema Urysohnovoj lemi postoji  $f \in C(T)$  takva da je  $f|_{\overline{N}} = 0$  i  $f(s) = 1$ . Tada je  $f1_n \in \ker \varepsilon_t$  za sve  $t \in \overline{N}$ , ali  $f1_n \notin \ker \varepsilon_s$  što povlači  $s \notin M$ . Dakle,  $M = \overline{N}$ .

## 3.2 Dauns-Hofmannov teorem

Ako je  $P$  primitivni ideal  $C^*$ -algebre  $A$ , s  $q_P : A \rightarrow A/P$  označavamo kanonski \*-epimorfizam  $a \mapsto a + P$ .

**Napomena 3.2.1.** Centar  $Z(A)$   $C^*$ -algebre  $A$  je  $C^*$ -podalgebra od  $A$ . Zaista, lako se vidi da je  $Z(A)$   $*$ -podalgebra od  $A$ . Preostaje dokazati da je  $Z(A)$  zatvoren podskup od  $A$ . Uočimo da je za fiksni  $a \in A$  preslikavanje  $[a, \cdot] : A \rightarrow A$ ,  $[a, x] = ax - xa$  neprekidno pa je

$$Z(A) = \bigcap_{a \in A} \ker[a, \cdot]$$

zatvoren podskup od  $A$ .

**Lema 3.2.2.** Neka je  $X$  normiran prostor i neka su  $X_0, X_1, \dots, X_n$  zatvoreni potprostori od  $X$  takvi da je za svaki  $1 \leq k \leq n$  kanonski linearni izomorfizam

$$\phi_k : (X_0 + \dots + X_k) / ((X_0 + \dots + X_k) \cap X_{k+1}) \rightarrow (X_0 + \dots + X_{k+1}) / X_{k+1},$$

$$x + (X_0 + \dots + X_k) \cap X_{k+1} \mapsto x + X_{k+1}$$

izometrija. Tada za svaki  $x \in X_0 + \dots + X_n$  i  $\delta > 0$  postoje  $x_i \in X_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) takvi da je  $x = x_0 + \dots + x_n$  i  $\|x_i\| \leq (2 + \delta)\|x\|$  za sve  $0 \leq i \leq n$ .

*Dokaz.* Dokaz provodimo konačnom indukcijom. Za  $n = 0$  tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da za neki  $k \in \mathbb{N}$  tvrdnja leme vrijedi za  $n = k$  i da je pretpostavka leme ispunjena za  $n = k + 1$ . Za  $x \in X_0 + \dots + X_{k+1}$  neka je  $x' \in X_0 + \dots + X_k$  takav da je  $x - x' \in X_{k+1}$ . Tada je  $x + X_{k+1} = x' + X_{k+1}$  pa jer je  $\phi_k$  izometričan imamo

$$\|x + X_{k+1}\| = \|x' + X_{k+1}\| = \|x' + (X_0 + \dots + X_k) \cap X_{k+1}\|.$$

Neka je  $\delta' > 0$ . Tada po definiciji kvocijentne norme postoji  $x'' \in (X_0 + \dots + X_k) \cap X_{k+1}$  takav da je

$$\|x' + (X_0 + \dots + X_k) \cap X_{k+1}\| + \delta' \|x + X_{k+1}\| > \|x' + x''\|.$$

Za  $y := x' + x''$  vrijedi  $y \in X_0 + \dots + X_k$  i  $x - y \in X_{k+1}$  pa slijedi

$$\|y\| < (1 + \delta') \|x + X_{k+1}\|.$$

Prema pretpostavci indukcije, za  $\delta'' > 0$  postoje  $x_i \in X_i$  takvi da je  $y = x_0 + \dots + x_k$  i  $\|x_i\| \leq (2 + \delta'') \|y\|$  za sve  $0 \leq i \leq k$ .

Nadalje, za  $x_{k+1} := x - y \in X_{k+1}$  imamo  $x = x_0 + \dots + x_{k+1}$  i  $\|x_{k+1}\| \leq \|x\| + \|y\|$  odakle slijedi

$$\|x_i\| \leq (2 + \delta'')(1 + \delta') \|x\|, \quad 0 \leq i \leq k, \quad \|x_{k+1}\| \leq (2 + \delta') \|x\|.$$

Ako odaberemo  $\delta', \delta'' > 0$  dovoljno malene tako da vrijedi  $2\delta' + \delta'' + \delta'\delta'' \leq \delta$  dobivamo da  $x_0, \dots, x_{k+1}$  zadovoljavaju traženi uvjet.  $\square$

**Lema 3.2.3.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra. Tada za  $a \in A$ ,  $f \in C(\text{Prim } A)$  i  $\varepsilon > 0$  postoji  $b_\varepsilon \in A$  takav da vrijedi*

$$\|q_P(b_\varepsilon) - f(P)q_P(a)\| < \varepsilon, \quad \text{za sve } P \in \text{Prim } A. \quad (3.1)$$

Za svaki drugi  $b'_\varepsilon \in A$  koji ovo zadovoljava vrijedi  $\|b_\varepsilon - b'_\varepsilon\| < 2\varepsilon$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da je  $f$  realna funkcija.  $f(\text{Prim } A)$  je kompakt u  $\mathbb{R}$  pa skaliranjem možemo pretpostaviti da  $f$  poprima vrijednosti u  $[0, 1]$ . Za fiksni  $n \in \mathbb{N}$  i  $0 \leq k \leq n$  definiramo otvorene skupove

$$O_k := \left\{ P \in \text{Prim } A : \frac{k-1}{n} < f(P) < \frac{k+1}{n} \right\}.$$

Tada je

$$\bigcup_{k=0}^n O_k = \text{Prim } A, \quad O_k \cap O_j = \emptyset \text{ za } |k-j| > 1.$$

Posebno, svaki  $P \in \text{Prim } A$  se nalazi u najviše dva skupa  $O_k$ . Za  $0 \leq k \leq n$  neka su  $J_k$  ideali u  $A$  takvi da je  $O_k = \mathcal{O}_{J_k}$ , odnosno

$$J_k := \bigcap \{P \in \text{Prim } A : P \notin O_k\}.$$

Vrijedi  $J_0 + \cdots + J_n = A$ . Zaista, kad bi bilo  $J_0 + \cdots + J_n \neq A$ , postojao bi  $P \in \text{Prim } A$  takav da je  $J_0 + \cdots + J_n \subseteq P$ , pa je  $P \in \text{Prim } A \setminus \bigcup_{k=0}^n O_k = \emptyset$ , što je kontradikcija.

Prema Lemi 3.2.2 za  $\delta = 1$  postoje  $a_k \in J_k$  takvi da je

$$a = a_0 + \cdots + a_n, \quad \|a_k\| \leq 3\|a\|.$$

Definiramo

$$b_{\frac{1}{n}} := \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} a_k$$

i fiksirajmo  $P \in \text{Prim } A$ . Za  $0 \leq k \leq n$  vrijedi jedna od dvije mogućnosti:

- $P \in O_k$ , tada je  $|\frac{k}{n} - f(P)| < \frac{1}{n}$
- $P \notin O_k$ , tada je  $J_k \subseteq P$  pa je  $q_P(a_k) = 0$

te se prvi slučaj događa za najviše dva  $0 \leq k \leq n$ . Stoga imamo

$$\begin{aligned} \left\| q_P(b_{\frac{1}{n}}) - f(P)q_P(a) \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} q_P(a_k) - f(P)q_P(a_k) \right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - f(P) \right| \|q_P(a_k)\| \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ P \in \mathcal{O}_k}} \frac{1}{n} \|a_k\| \\ &\leq \frac{6}{n} \|a\| \end{aligned}$$

pa ako izaberemo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > \frac{6\|a\|}{\varepsilon}$ , tada  $b_\varepsilon := b_{\frac{1}{n}}$  zadovoljava traženi uvjet (3.1).

Ako je  $f = f_1 + if_2$  kompleksna funkcija, tada prethodni argument za  $\frac{\varepsilon}{2}$  primijenjen na  $f_1$  i  $f_2$  daje  $b_{\frac{\varepsilon}{2}}^1$  i  $b_{\frac{\varepsilon}{2}}^2$  pa je  $b_\varepsilon := b_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 + ib_{\frac{\varepsilon}{2}}^2$  traženi element.

Ako je  $b'_\varepsilon \in A$  neki drugi element koji zadovoljava traženi uvjet, tada iz Napomene 3.1.15 imamo

$$\begin{aligned} \|b_\varepsilon - b'_\varepsilon\| &= \sup_{P \in \text{Prim } A} \|q_P(b_\varepsilon) - q_P(b'_\varepsilon)\| \\ &\leq \sup_{P \in \text{Prim } A} \left( \|q_P(b_\varepsilon) - f(P)q_P(a)\| + \|f(P)q_P(a) - q_P(b'_\varepsilon)\| \right) \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Teorem 3.2.4** (Dauns-Hofmann, unitalni slučaj). *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra. Za svaki  $P \in \text{Prim } A$  neka je  $q_P : A \rightarrow A/P$  pripadni kvocijentni  $*$ -epimorfizam. Tada postoji  $*$ -izomorfizam  $\Psi_A : Z(A) \rightarrow C(\text{Prim } A)$  takav da vrijedi*

$$q_P(za) = \Psi_A(z)q_P(a), \quad \text{za sve } z \in Z(A), a \in A, P \in \text{Prim } A. \quad (3.2)$$

*Dokaz.* Neka je  $\pi$  ireducibilna reprezentacija od  $A$ . Stavimo  $Z = Z(A)$ , neka je  $\hat{Z}$  prostor svih karaktera na  $Z$  te neka je  $\check{Z} = \text{Max } Z$  maksimalni spektar od  $Z$  (prostor svih maksimalnih ideala u  $Z$ ).

Za svaki  $z \in Z$  imamo  $\pi(z) \in \pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$ . Dakle  $\pi(z) = \omega_\pi(z)1_{\mathcal{H}_\pi}$  gdje je  $\omega_\pi : Z \rightarrow \mathbb{C}$   $*$ -homomorfizam i  $\omega_\pi(1) = 1$ . Slijedi da je  $\omega_\pi$  karakter of  $Z$ , tj.  $\omega_\pi \in \hat{Z}$ .

Imamo  $\ker \omega_\pi = \ker \pi \cap Z$  pa  $\omega_\pi$  ovisi samo o  $\ker \pi$ . Stoga je  $\chi_A : \text{Prim } A \rightarrow \check{Z}$ ,  $\chi_A(\ker \pi) = \ker \omega_\pi$  dobro definirano preslikavanje.

Tvrdimo da je  $\chi_A$  neprekidno. Tipičan otvoren skup u  $\check{Z}$  je oblika  $\mathcal{O}_J = \{\ker \omega : \omega \in \hat{Z}, J \not\subseteq \ker \omega\}$  za neki ideal  $J$  u  $Z$ .

Promatramo ideal  $A[J]$  u  $A$  generiran s  $J$ . Za njegov otvoren skup  $\mathcal{V}_{A[J]} = \{P \in \text{Prim } A : A[J] \not\subseteq P\}$  u  $\text{Prim } A$  vrijedi

$$\begin{aligned}\chi_A^{-1}(\mathcal{O}_J) &= \{P \in \text{Prim } A : \chi_A(P) \in \mathcal{O}_J\} \\ &= \{\ker \pi : \pi \in \hat{A}, J \not\subseteq \ker \omega_\pi\} \\ &= \{\ker \pi : \pi \in \hat{A}, A[J] \not\subseteq \ker \pi\} \\ &= \mathcal{V}_{A[J]}.\end{aligned}$$

Slijedi da je  $\chi_A$  neprekidno pa inducira \*-homomorfizam

$$\Psi_A : Z(A) \rightarrow C(\text{Prim } A), \quad \Psi_A(z) = \hat{z} \circ \theta_Z^{-1} \circ \chi_A$$

gdje je  $\theta_Z : \hat{Z} \rightarrow \check{Z}, \omega \mapsto \ker \omega$  kanonski homeomorfizam i  $\hat{z} : \hat{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Geljfangova transformacija od  $z \in Z$ . Eksplicitno

$$\Psi_A(z)(\ker \pi) = \hat{z}(\omega_\pi) = \omega_\pi(z), \quad z \in Z, [\pi] \in \hat{A}$$

odnosno  $\Psi_A(z)(\ker \pi)1_{\mathcal{H}_\pi} = \pi(z)$ .

Za  $P \in \text{Prim } A$  odaberimo  $[\pi] \in \hat{A}$  takvu da je  $P = \ker \pi$ . Koristeći kanonski izomorfizam  $A/P \rightarrow \pi(A)$ ,  $a + P \mapsto \pi(a)$  imamo

$$q_P(za) = \pi(za) = \pi(z)\pi(a) = \Psi_A(z)(\ker \pi)\pi(a) = \Psi_A(z)(\ker \pi)q_P(a)$$

za sve  $z \in Z$  i  $a \in A$  pa vrijedi (3.2).

Oдавde slijedi i injektivnost od  $\Psi_A$ . Naime, neka je  $z \in Z$  takav da je  $\Psi_A(z) = 0$ . Gornja relacija za  $a = 1$  i proizvoljan  $P \in \text{Prim } A$  daje  $q_P(z) = P$  odnosno  $z \in P$ . Slijedi  $z \in \bigcap \text{Prim } A = \{0\}$ .

Pokažimo surjektivnost od  $\Psi_A$ . Neka je  $f \in C(\text{Prim } A)$ . Tada prema Lemi 3.2.3 za  $a = 1$  dobivamo niz  $\left(b_{\frac{1}{n}}\right)_n$  u  $A$  takav da vrijedi

$$\left\| q_P\left(b_{\frac{1}{n}}\right) - (f(P)1 + P) \right\| < \frac{1}{n}, \quad \text{za sve } P \in \text{Prim } A \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

Iz drugog dijela leme slijedi da je niz  $\left(b_{\frac{1}{n}}\right)_n$  Cauchyjev pa konvergira prema nekom  $z \in A$ . Prelaskom na limes u gornjoj relaciji dobivamo

$$q_P(z) = f(P)1 + P.$$

Uočimo da je  $z \in Z$ . Naime, za proizvoljan  $a \in A$  imamo

$$\begin{aligned}q_P(za) &= q_P(z)q_P(a) = (f(P)1 + P)(a + P) = f(P)a + P = af(P)1 + P \\ &= (a + P)(f(P)1 + P) = q_P(a)q_P(z) = q_P(az)\end{aligned}$$

za svaki  $P \in \text{Prim } A$  pa je  $za = az$ . Tvrđimo da je  $\Psi_A(z) = f$ . Neka je  $P \in \text{Prim } A$  i neka je  $\pi$  ireducibilna reprezentacija od  $A$  takva da je  $\ker \pi = P$ . Koristeći kanonski izomorfizam  $a + P \mapsto \pi(a)$  imamo

$$\Psi_A(z)(P)1_{\mathcal{H}_\pi} = \Psi_A(z)(\ker \pi)1_{\mathcal{H}_\pi} = \pi(z) = q_P(z) = f(P)1 + P = f(P)1_{\mathcal{H}_\pi}$$

odakle slijedi tražena tvrdnja.  $\square$

### 3.3 Vesterstrømov teorem

U ovom poglavlju ćemo dokazati glavni rezultat ovog rada: dat ćemo nužan i dovoljan uvjet na unitalnu  $C^*$ -algebru  $A$  takvu da za svaku  $C^*$ -algebru  $B$  i  $*$ -epimorfizam  $\phi : A \rightarrow B$  vrijedi

$$\phi(Z(A)) = Z(B). \quad (3.3)$$

U tom slučaju kažemo da  $A$  ima **CQ-svojtvo** (engl. centre-quotient property, pojam je uveo R. Archbold u svojoj disertaciji 1972.).

**Definicija 3.3.1** (Kaplansky, [6]). Za unitalnu  $C^*$ -algebru kažemo da je **centralna** ako različiti primitivni ideali od  $A$  imaju različit presjek s centrom od  $A$ , tj.

$$P, Q \in \text{Prim } A, P \neq Q \implies P \cap Z(A) \neq Q \cap Z(A).$$

**Lema 3.3.2.** Neka je  $A$  centralna  $C^*$ -algebra i  $P, Q \in \text{Prim } A$ . Tada je  $P \cap Z(A) = Q \cap Z(A)$  ako i samo ako je  $f(P) = f(Q)$  za sve  $f \in C(\text{Prim } A)$ .

*Dokaz.* Koristeći oznake iz dokaza Dauns-Hofmannovog teorema imamo

$$\begin{aligned} P \cap Z(A) = Q \cap Z(A) &\iff \chi_A(P) = \chi_A(Q) \\ &\iff (\hat{z} \circ \theta_Z^{-1} \circ \chi_A)(P) = (\hat{z} \circ \theta_Z^{-1} \circ \chi_A)(Q), \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\iff \Psi_A(z)(P) = \Psi_A(z)(Q), \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\iff f(P) = f(Q), \text{ za sve } f \in C(\text{Prim } A). \end{aligned}$$

$\square$

**Napomena 3.3.3.** U komutativnim  $C^*$ -algebrama karakteri se podudaraju s čistim stanjima. Naime, već znamo da su karakteri uvijek stanja. Karakteri su i čista stanja: neka je  $\varphi$  karakter komutativne  $C^*$ -algebre  $A$  i pretpostavimo da je  $\varphi = \lambda\rho + (1 - \lambda)\tau$  za neka stanja  $\rho, \tau$  na  $A$ . Ako je  $\varphi(a) = 0$ , tada je i  $\varphi(a^*a) = 0$  pa je  $\rho(a^*a) = 0$ . Iz  $|\rho(a)|^2 \leq \rho(a^*a) = 0$  slijedi  $\rho(a) = 0$ . Zaključujemo  $\ker \varphi \subseteq \ker \rho$  pa



iz elementarne linearne algebre slijedi da postoji skalar  $t$  takav da je  $\rho = t\varphi$ . Ako je  $(e_i)_i$  aproksimativna jedinica za  $A$ , imamo

$$1 \leftarrow \rho(e_i) = t\varphi(e_i) \rightarrow t$$

pa je  $t = 1$ , odnosno  $\varphi = \rho = \tau$ .

Obratno, ako imamo čisto stanje  $\rho$  na komutativnoj  $C^*$ -algebri  $C(X)$ , tada je pripadna ireducibilna reprezentacija  $\pi_\rho$  unitarno ekvivalentna evaluaciji u nekoj točki  $x \in X$ , pa imamo  $\rho(f) = \langle \pi_\rho(f)h_\rho, h_\rho \rangle = f(x)$ , tj.  $\rho$  je evaluacija u točki  $x$ . Posebno,  $\rho$  je karakter.

Centralne  $C^*$ -algebre su karakterizirane sljedećim teoremom:

**Teorem 3.3.4.** *Unitalna  $C^*$ -algebra  $A$  je centralna ako i samo ako je  $\text{Prim } A$  Hausdorffov prostor. U tom je slučaju preslikavanje iz dokaza Dauns-Hofmannovog teorema*

$$\chi_A : \text{Prim } A \rightarrow \text{Max } Z(A) = \text{Prim } Z(A), \quad \chi_A(P) = P \cap Z(A), P \in \text{Prim } A$$

homeomorfizam.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $A$  centralna i uzmimo  $P, Q \in \text{Prim } A$ ,  $P \neq Q$ . Iz prethodne leme slijedi da postoji  $f \in C(\text{Prim } A)$  takva da  $f(P) \neq f(Q)$ , odnosno funkcije iz  $C(\text{Prim } A)$  separiraju točke iz  $\text{Prim } A$ . Odavde lagano slijedi da je  $\text{Prim } A$  Hausdorffov.

Obratno, pretpostavimo da je  $\text{Prim } A$  Hausdorffov i uzmimo  $P, Q \in \text{Prim } A$ ,  $P \neq Q$ .  $\text{Prim } A$  je kompaktan Hausdorffov prostor pa je posebno normalan. Korištenjem Urysohnove leme slijedi da postoji  $f \in C(\text{Prim } A)$  takva da je  $f(P) = 0$  i  $f(Q) = 1$ . Specijalno,  $f(P) \neq f(Q)$  pa prema prethodnoj lemi slijedi  $P \cap Z(A) \neq Q \cap Z(A)$ .

Preostaje dokazati da je  $\chi_A$  homeomorfizam. Iz dokaza Dauns-Hofmannovog teorema znamo da je  $\chi_A$  neprekidna. Injektivnost slijedi po definiciji centralnosti od  $A$ .

Za dokaz surjektivnosti uzmimo  $\ker \omega \in \text{Max } Z(A)$  za neki karakter  $\omega \in \widehat{Z(A)}$ . Iz Napomene 3.3.3 zaključujemo da je  $\omega$  čisto stanje na  $Z(A)$ . Tvrdimo da se  $\omega$  može proširiti do čistog stanja  $\omega'$  na  $A$ . Definiramo skup

$$\Sigma = \{\tau \text{ stanje na } A : \tau|_{Z(A)} = \omega\}.$$

Hahn-Banachov teorem i  $\omega(1) = \tau(1) = 1$  impliciraju  $\Sigma \neq \emptyset$ . Lako vidimo da je  $\Sigma$  konveksan slabo-\* kompaktan podskup od duala  $A^*$  pa Krein-Milmanov teorem povlači da  $\Sigma$  ima ekstremnu točku  $\tau_0$ . Vrijedi da je  $\tau_0$  ekstremna točka i skupa svih

stanja na  $A$ : pretpostavimo  $\tau_0 = \lambda\phi + (1 - \lambda)\psi$  za neki  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  i stanja  $\phi, \psi$  na  $A$ . Za svaki  $z \in Z(A)$  imamo

$$\omega(z) = \tau_0(z) = \lambda\phi(z) + (1 - \lambda)\psi(z).$$

Budući da je  $\omega$  čisto stanje na  $Z(A)$ , slijedi da je  $\phi|_{Z(A)} = \omega = \psi|_{Z(A)}$  odnosno  $\phi, \psi \in \Sigma$ . Sada zbog  $\tau_0 \in \text{ext } \Sigma$  dobivamo  $\phi = \tau_0 = \psi$ . Dakle,  $\tau_0$  je čisto stanje na  $A$  pa stavimo  $\omega' = \tau_0$ .

Neka je  $\pi_{\omega'}$  ireducibilna reprezentacija od  $A$  dobivena iz  $\omega'$ , s cikličkim vektorom  $h_{\omega'}$ . Tvrđimo da vrijedi  $\ker \pi_{\omega'} \cap Z(A) = \ker \omega$ . Iz  $\omega'(a) = \langle \pi_{\omega'}(a)h_{\omega'}, h_{\omega'} \rangle, \forall a \in A$  direktno slijedi  $\ker \pi_{\omega'} \cap Z(A) \subseteq \ker \omega$ .

S druge strane, za  $z \in \ker \omega \subseteq \ker \omega'$  imamo  $z^* \in \ker \omega'$  pa vrijedi

$$\langle \pi_{\omega'}(a)h_{\omega'}, \pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} \rangle = \langle \pi_{\omega'}(z^*a)h_{\omega'}, h_{\omega'} \rangle = \omega'(z^*a) = 0, \text{ za sve } a \in A$$

zato što CSB nejednakost povlači

$$|\omega'(z^*a)| \leq \omega'(z^*z)\omega'(a^*a) = \underbrace{|\omega(z)|^2}_{=0}\omega'(a^*a) = 0.$$

Slijedi  $\pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} \perp \pi_{\omega'}(A)h_{\omega'}$  pa zbog gustoće od  $\pi_{\omega'}(A)h_{\omega'}$  imamo  $\pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} = 0$ . Odavde dalje slijedi

$$\pi_{\omega'}(z)\pi_{\omega'}(a)h_{\omega'} = \pi_{\omega'}(a)\pi_{\omega'}(z)h_{\omega'} = 0$$

pa opet zbog gustoće od  $\pi_{\omega'}(A)h_{\omega'}$  slijedi  $\pi_{\omega'}(z) = 0$ , tj.  $z \in \ker \pi_{\omega'}$ .

Dakle,  $\chi_A(\ker \pi_{\omega'}) = \ker \pi_{\omega'} \cap Z(A) = \ker \omega$  pa je  $\chi_A$  surjektivno. Napokon,  $\chi_A$  je neprekidna bijekcija s kompaktnog prostora  $\text{Prim } A$  na Hausdorffov prostor  $\text{Max } Z(A)$  pa je homeomorfizam.  $\square$

**Lema 3.3.5.** *Neka su  $X$  i  $Y$  CH prostori te  $F : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija. Definiramo  $*$ -homomorfizam  $\phi_F : C(Y) \rightarrow C(X)$  formulom  $\phi_F(f) := f \circ F$  za sve  $f \in C(Y)$ . Tada je  $\phi_F$  injekcija ako i samo ako je  $F$  surjektivna.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $F$  surjektivna. Tada iz  $0 = \phi_F(f) = f \circ F$  slijedi  $\{0\} = f(F(X)) = f(Y)$  pa je  $f = 0$ . Dakle,  $\phi_F$  ima trivijalnu jezgru pa je injekcija.

Obratno, pretpostavimo da  $F$  nije surjektivna. Tada postoji  $y \in Y \setminus F(X)$  pa prema Urysohnovoj lemi postoji funkcija  $f \in C(Y)$  takva da je  $f|_{F(X)} = 0$  i  $f(y) = 1$  pa  $\phi_F(f) = f \circ F = 0$ . Dakle,  $f \in \ker \phi_F$  i  $f \neq 0$  pa  $\phi_F$  nije injekcija.  $\square$

Sada dokazujemo jedan dovoljan uvjet za CQ-svojstvo (3.3):

**Teorem 3.3.6** (Vesterstrøm). *Neka su  $A$  i  $B$  unitalne  $C^*$ -algebre i  $\phi : A \rightarrow B$   $*$ -epimorfizam. Ako je  $A$  centralna, tada je i  $B$  centralna i vrijedi  $\phi(Z(A)) = Z(B)$ .*

*Dokaz.* Znamo da  $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$  uvijek vrijedi.  $\phi$  je \*-epimorfizam pa možemo identificirati  $A/\ker \phi$  s  $B$ . Iz Propozicije 3.1.13 slijedi da je preslikavanje

$$\check{\phi} : \text{Prim } B \rightarrow \text{Prim } A, \quad \check{\phi}(P) = \phi^{-1}(P), P \in \text{Prim } B$$

homeomorfizam na svoju sliku koja je zatvorena u  $\text{Prim } A$ .  $A$  je centralna pa je prema Teoremu 3.3.4  $\text{Prim } A$  Hausdorffov.  $\text{Prim } B$  možemo identificirati s podskupom od  $\text{Prim } A$  pa je i  $\text{Prim } B$  Hausdorffov, odnosno  $B$  je centralna, prema istoj propoziciji.

Promotrimo restrikciju  $\phi_Z := \phi|_{Z(A)} : Z(A) \rightarrow Z(B)$ . Uočimo da je za svaki karakter  $\omega \in \widehat{Z(B)}$  s  $\omega_\phi := \omega \circ \phi_Z$  definiran karakter na  $Z(A)$ , odnosno  $\omega_\phi \in \widehat{Z(A)}$ . Preslikavanje  $F : \widehat{Z(B)} \rightarrow \widehat{Z(A)}$ ,  $\omega \mapsto \omega_\phi$  je neprekidno s obzirom na slabe-\* topologije. Nadalje,  $F$  je injektivno ako i samo ako je  $\phi_Z$  surjektivno. Zaista,  $\phi_Z$  inducira \*-homomorfizam  $\psi : C(\widehat{Z(A)}) \rightarrow C(\widehat{Z(B)})$  takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} Z(A) & \xrightarrow{\phi_Z} & Z(B) \\ \Gamma_{Z(A)} \downarrow & & \downarrow \Gamma_{Z(B)} \\ C(\widehat{Z(A)}) & \xrightarrow{\psi} & C(\widehat{Z(B)}) \end{array}$$

gdje su  $\Gamma_{Z(A)}$  i  $\Gamma_{Z(B)}$  pripadne Geljandove transformacije. Obje su \*-izomorfizmi pa slijedi da je  $\phi_Z$  surjektivno ako i samo ako je  $\psi$  surjektivno. Za  $a \in Z(A)$  imamo

$$\psi(\widehat{a}) = (\psi \circ \Gamma_{Z(A)})(a) = (\Gamma_{Z(B)} \circ \phi_Z)(a) = \widehat{\phi_Z(a)},$$

odnosno za  $\omega \in \widehat{Z(A)}$  imamo

$$\psi(\widehat{a})(\omega) = \widehat{\phi_Z(a)}(\omega) = (\omega \circ \phi_Z)(a) = \widehat{a}(\omega \circ \phi_Z) = (\widehat{a} \circ F)(\omega).$$

Slijedi da za sve  $f \in C(\widehat{Z(A)})$  imamo  $\psi(f) = f \circ F$  pa prema Lemi 3.3.5 zaključujemo da je  $\psi$  surjektivno ako i samo ako je  $F$  injektivno. Konačno, imamo

$$F \text{ je injektivno} \iff \psi \text{ je surjektivno} \iff \phi_Z \text{ je surjektivno}.$$

Budući da je  $\phi_Z^{-1}(\ker \omega) = (\omega \circ \phi_Z)^{-1}(0) = \ker \omega_\phi$  maksimalan ideal u  $Z(A)$ , slijedi da je

$$\check{\phi}_Z : \text{Max } Z(B) \rightarrow \text{Max } Z(A), \quad \check{\phi}_Z(J) = \phi_Z^{-1}(J), J \in \text{Max } Z(B)$$

dobro definirano neprekidno preslikavanje koje je injektivno ako i samo ako je  $\phi_Z$  surjektivno.

Prema Teoremu 3.3.4 slijedi da su  $\chi_A$  i  $\chi_B$  homeomorfizmi pa sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} \text{Prim } B & \xrightarrow{\check{\phi}} & \text{Prim } A \\ \chi_B \downarrow & & \downarrow \chi_A \\ \text{Max } Z(B) & \xrightarrow{\check{\phi}_Z} & \text{Max } Z(A) \end{array}$$

Zaista, za  $P \in \text{Prim } B$  imamo

$$\begin{aligned} (\chi_A \circ \check{\phi})(P) &= \chi_A(\phi^{-1}(P)) = \phi^{-1}(P) \cap Z(A) = \phi^{-1}(P) \cap \phi^{-1}(Z(B)) \cap Z(A) \\ &= \phi^{-1}(P \cap Z(B)) \cap Z(A) = \check{\phi}_Z(P \cap Z(B)) \\ &= (\check{\phi}_Z \circ \chi_B)(P). \end{aligned}$$

Dakle, imamo  $\check{\phi}_Z = \chi_A \circ \check{\phi} \circ \chi_B^{-1}$  pa iz toga slijedi da je  $\check{\phi}_Z$  injektivno, odnosno da je  $\phi_Z$  surjektivno. Dakle,  $\phi(Z(A)) = Z(B)$ .  $\square$

Sada ćemo dokazati da CQ-svojstvo (3.3) vrijedi i za širu klasu unitalnih  $C^*$ -algebri, tzv. slabo centralne  $C^*$ -algebre.

**Lema 3.3.7.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra. Tada je  $\text{Max } A \subseteq \text{Prim } A$ .*

*Dokaz.* Neka je  $M \in \text{Max } A$ . Prema 2.4.22 postoji ireducibilna reprezentacija  $\pi' : A/M \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$  od  $A/M$ .  $A/M$  je prosta algebra pa slijedi da je  $\pi'$  vjerna. Tada je  $\pi := \pi' \circ q : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$  ireducibilna reprezentacija od  $A$  koja ima jezgru  $M$ . Specijalno,  $M \in \text{Prim } A$ .  $\square$

Skup  $\text{Max } A$  opskrbljujemo relativnom Jacobsonovom topologijom. Definiramo preslikavanje

$$\eta_A : \text{Max } A \rightarrow \text{Max } Z(A), \quad \eta_A(M) := M \cap Z(A), M \in \text{Max } A.$$

Iz dokaza Teorema 3.3.4 zaključujemo da je  $\eta_A$  surjektivno i očito neprekidno preslikavanje.

**Definicija 3.3.8** (Misonou, [8]). Za unitalnu  $C^*$ -algebru  $A$  kažemo da je **slabo centralna** ako je preslikavanje  $\eta_A$  injektivno, tj. ako različiti *maksimalni* ideali u  $A$  imaju različit presjek s  $Z(A)$ .

**Napomena 3.3.9.** Ako je unitalna  $C^*$ -algebra slabo centralna, tada istim argumentom kao u dokazu Teorema 3.3.4 zaključujemo da je  $\eta_A$  homeomorfizam.

**Primjer 3.3.10.** Zbog  $\text{Max } A \subseteq \text{Prim } A$  (Lema 3.3.7) je svaka je centralna  $C^*$ -algebra slabo centralna. Obrat općenito ne vrijedi: neka je  $\mathcal{H}$  separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Tada  $C^*$ -algebra  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  sadrži jedinstven maksimalni ideal, ideal kompaktnih operatora  $\mathbb{K}(\mathcal{H})$  ([9, Theorem 4.1.15.]). Dakle,  $\text{Max } \mathbb{B}(\mathcal{H}) = \{\mathbb{K}(\mathcal{H})\}$  pa je  $\eta_A$  očito injektivno, tj.  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  je slabo centralna. Međutim, primitivni ideali  $\{0\}$  i  $\mathbb{K}(\mathcal{H})$  imaju isti presjek  $\{0\}$  s  $Z(\mathbb{B}(\mathcal{H})) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$  pa  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  nije centralna. Alternativno, kako je  $\{0\} \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{H})$  slijedi da je  $\overline{\{0\}} = \{\{0\}, \mathbb{K}(\mathcal{H})\}$  pa  $\text{Prim } \mathbb{B}(\mathcal{H})$  nije niti  $T_1$ -prostor, a kamoli Hausdorffov. Sada slijedi da  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  nije centralna po Teoremu 3.3.4.

**Lema 3.3.11** (Kineski teorem o ostacima za  $C^*$ -algebre). *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra i  $I, J$  ideali u  $A$  takvi da je  $I + J = A$ . Tada postoji  $*$ -izomorfizam*

$$A/(I \cap J) \cong (A/I) \oplus (A/J).$$

*Dokaz.* Promotrimo  $*$ -homomorfizam  $\phi : A \rightarrow A/I \oplus A/J$ ,  $\phi(a) = (a + I, a + J)$ .

$\phi$  je surjektivan. Naime, zbog  $I + J = A$  postoje  $a \in I, b \in J$  takvi da su  $a + b = 1$ . Neka je  $(x + I, y + J) \in (A/I) \oplus (A/J)$  proizvoljan. Tada za  $bx + ay$  imamo

$$\phi(bx + ay) = (bx + I, ay + J) = (bx + ax + I, ay + by + J) = (x + I, y + J).$$

Nadalje, očito je  $\ker \phi = I \cap J$  pa Prvi teorem o izomorfizmu povlači

$$A/(I \cap J) = A/\ker \phi \cong \text{Im } \phi = (A/I) \oplus (A/J).$$

□

**Lema 3.3.12.** *Neka je  $A$  unitalna prosta  $C^*$ -algebra. Tada je  $Z(A)$   $*$ -izomorfna s  $\mathbb{C}$ .*

*Dokaz.* Znamo da je  $Z(A)$   $C^*$ -podalgebra od  $A$ . Pokazat ćemo da je  $Z(A)$  algebra s dijeljenjem.

Neka je  $z \in Z(A)$ . Pretpostavimo da  $z \notin A^\times$ . Tada je  $zA$  pravi nenul ideal u  $A$ , što je kontradikcija. Dakle, postoji  $z^{-1} \in A$ . Tvrdimo  $z^{-1} \in Z(A)$ . Za svaki  $a \in A$  imamo

$$z^{-1}a = z^{-1}(az)z^{-1} = z^{-1}(za)z^{-1} = az^{-1}.$$

Sada [Gel'fand-Mazurov teorem](#) povlači  $Z(A) \cong \mathbb{C}$ .

□

Sada iskazujemo karakterizaciju CQ-svojstva (3.3).

**Teorem 3.3.13.** *Neka je  $A$  unitalna  $C^*$ -algebra. Tada je  $A$  slabo centralna ako i samo ako ima CQ-svojstvo.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $A$  slabo centralna. Tada je sljedeći dijagram očito komutativan

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Max } B & \xrightarrow{\check{\phi}|_{\text{Max } B}} & \text{Max } A \\
 \iota_B \downarrow & & \downarrow \iota_A \\
 \text{Prim } B & \xrightarrow{\check{\phi}} & \text{Prim } A \\
 \chi_B \downarrow & & \downarrow \chi_A \\
 \text{Max } Z(B) & \xrightarrow{\check{\phi}_Z} & \text{Max } Z(A)
 \end{array}$$

gdje su  $\iota_A$  i  $\iota_B$  inkluzije. Po pretpostavci,  $\eta_A = \chi_A \circ \iota_A$  je injektivno, pa je injektivno i

$$\chi_A \circ \iota_A \circ \check{\phi}|_{\text{Max } B} = \check{\phi}_Z \circ \chi_B \circ \iota_B = \check{\phi}_Z \circ \eta_B.$$

Odavde direktno slijedi da je  $\eta_B$  injektivno (drugim riječima,  $B$  je slabo centralna) pa je prema Napomeni 3.3.9  $\eta_B$  homeomorfizam. Slijedi da je i  $\check{\phi}_Z$  injektivno pa je prema diskusiji iz dokaza Teorema 3.3.6  $\check{\phi}_Z$  surjektivno, odnosno  $\check{\phi}(Z(A)) = Z(B)$ . Dakle,  $A$  ima CQ-svojstvo.

Obratno, pretpostavimo da  $A$  nije slabo centralna i neka su  $M, N \in \text{Max } A$ ,  $M \neq N$  različiti maksimalni ideali takvi da je  $M \cap Z(A) = N \cap Z(A)$ . Tada je  $M + N$  zatvoren ideal u  $A$  pa je zbog maksimalnosti  $M + N = A$ . Sada Lema 3.3.11 povlači  $A/(M \cap N) \cong (A/M) \oplus (A/N)$ .  $A/M$  je prosta  $C^*$ -algebra pa prema Lemi 3.3.12 slijedi  $Z(A/M) \cong \mathbb{C}$ . Analogno  $Z(A/N) \cong \mathbb{C}$ . Stoga imamo

$$Z(A/(M \cap N)) = Z((A/M) \oplus (A/N)) = Z(A/M) \oplus Z(A/N) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

S druge strane, promotrimo kanonski \*-epimorfizam  $q_{M \cap N} : A \rightarrow A/(M \cap N)$ . Koristeći Drugi teorem o izomorfizmu, imamo:

$$\begin{aligned}
 q_{M \cap N}(Z(A)) &= (Z(A) + M \cap N)/(M \cap N) \\
 &\cong Z(A)/(Z(A) \cap (M \cap N)) \\
 &= Z(A)/(Z(A) \cap M) \\
 &\cong \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

jer je  $Z(A) \cap M = \eta_A(M)$  maksimalan ideal u  $Z(A)$ . Dakle,

$$q_{M \cap N}(Z(A)) \neq Z(A/(M \cap N))$$

pa  $A$  ne zadovoljava CQ-svojstvo (3.3).  $\square$

Jedan od najvažnijih primjera slabo centralnih  $C^*$ -algebri su von Neumannove algebre (ali one općenito nisu centralne). Dokaz je netrivialan, a relevantne reference

se mogu pronaći u [11]. Više informacija o Von Neumannovim algebrama nalazi se u Appendixu 4.3.

Sada dajemo primjer  $C^*$ -algebre koja nije slabo centralna.

**Primjer 3.3.14.** Promotrimo  $C^*$ -algebru

$$A = \left\{ f \in C([0, 1], M_2(\mathbb{C})) : f(1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ za neke } \lambda(f), \mu(f) \in \mathbb{C} \right\}.$$

Za  $t \in [0, 1)$  označimo s  $\pi_t : A \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  evaluaciju u točki  $t$  te uvedimo jednodimenzionalne reprezentacije  $\lambda, \mu : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda : f \mapsto \lambda(f)$ ,  $\mu : f \mapsto \mu(f)$ . Može se pokazati ([10, Example A.25]) da je

$$\text{Max } A = \text{Prim } A = \{\pi_t : t \in [0, 1)\} \cup \{\ker \lambda, \ker \mu\}.$$

Centar od  $A$  je skup svih dijagonalnih funkcija

$$Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} : f \in C([0, 1]) \right\}$$

pa imamo

$$\ker \lambda \cap Z(A) = \ker \mu \cap Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} : f \in C([0, 1]), f(1) = 0 \right\}.$$

Dakle,  $A$  nije (slabo) centralna.

Za eksplicitan primjer, definirajmo  $*$ -epimorfizam

$$\phi : A \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \phi(f) = (\lambda(f), \mu(f))$$

pa imamo

$$\phi(Z(A)) = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\} \subsetneq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = Z(B).$$

# Poglavlje 4

## Appendix

### 4.1 Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori

U ovom poglavlju dajemo neke osnovne informacije o LCH prostorima.

**Propozicija 4.1.1.** *Neka je  $\Omega$  LCH prostor.*

- (i) *Neka je  $x \in \Omega$  i  $U \subseteq \Omega$  otvorena okolina od  $x$ . Tada postoji kompaktna okolina  $N$  od  $x$  takva da je  $N \subseteq U$ . Ekvivalentno, postoji pretkompaktna otvorena okolina  $V$  od  $x$  takva da je  $\bar{V} \subseteq U$ .*
- (ii) *Neka je  $K$  kompaktna a  $U$  otvoren podskup od  $\Omega$  takvi da je  $K \subseteq U$ . Tada postoji otvoren pretkompaktan  $V \subseteq \Omega$  takav da je  $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ .*

*Dokaz.* (i) Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $U$  pretkompaktan (u suprotnom promatramo  $U \cap \text{Int}(F)$  gdje je  $F$  kompaktna okolina od  $x$ ).  $\bar{U}$  je CH prostor, posebno regularan, kako je  $\partial U$  zatvoren u  $\bar{U}$ , postoje  $V, W \subseteq \bar{U}$  disjunktni i otvoreni u  $\bar{U}$  takvi da je  $x \in V$ ,  $\partial U \subseteq W$ . Tada je  $V$  otvoren u  $\Omega$  jer  $V \subseteq U$ , a  $\bar{V}$  je zatvoren u  $\bar{U} \setminus W$ , što je kompaktna okolina od  $x$  sadržana u  $U$ .

- (ii) Za svaki  $x \in K$  postoji pretkompaktan  $V_x$  takav da je  $x \in V_x \subseteq \bar{V}_x \subseteq U$ .  $(V_x)_{x \in K}$  je otvoren pokrivač od  $K$  pa postoje  $x_1, \dots, x_n \in K$  takvi da je  $K \subseteq V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ . Tada je  $\bar{V} = \bar{V}_{x_1} \cup \dots \cup \bar{V}_{x_n} \subseteq U$  i kompaktna je kao konačna unija kompaktnih skupova.

□

**Propozicija 4.1.2.** *Neka je  $\Omega$  LCH prostor,  $K$  kompaktna i  $U$  otvoren skup u  $\Omega$  takvi da je  $K \subseteq U$ .*



- (i) (Urysohnova lema za LCH prostore) Postoji neprekidna funkcija  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $f|_K = 1$  i  $\text{supp } f \subseteq U$  je kompaktan.
- (ii) Ako je  $f : K \rightarrow [0, 1]$  neprekidna funkcija, tada postoji neprekidna funkcija  $F : \Omega \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $F|_K = f$  i  $\text{supp } F \subseteq U$  je kompaktan.

*Dokaz.* (i) Neka je  $\tilde{\Omega}$  Aleksandrovljeva kompaktifikacija od  $\Omega$ . Postoji pretkompaktan otvoren skup  $V \subseteq \Omega$  takav da je  $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ .  $K$  i  $\tilde{\Omega} \setminus V$  su disjunktne zatvorene podskupovi od  $\tilde{\Omega}$ .  $\tilde{\Omega}$  je CH prostor, posebno normalan, pa prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija  $g : \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $f|_K = 1$  i  $g|_{\tilde{\Omega} \setminus V} = 0$ . Promotrimo neprekidnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ,  $f := g|_{\Omega}$ . Tada je  $f|_K = 1$  i  $f(x) = 0$  za sve  $x \in \Omega \setminus V$  pa je  $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \subseteq \bar{V} \subseteq U$ . Uzimanjem zatvarača zaključujemo  $\text{supp } f \subseteq \bar{V} \subseteq U$ .

- (ii) Postoji pretkompaktan otvoren skup  $V \subseteq \Omega$  takav da je  $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ . Prema klasičnom Tietzeovom teoremu primijenjenom na CH prostor  $\bar{V}$ , postoji  $g : \bar{V} \rightarrow [0, 1]$  neprekidna takva da je  $g|_K = f$ . Prema (i) postoji neprekidna funkcija  $\phi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $\phi|_K = 1$  i  $\text{supp } \phi \subseteq V$ . Definiramo  $F : \Omega \rightarrow [0, 1]$  kao

$$F(x) = \begin{cases} g(x)\phi(x), & \text{ako je } x \in \bar{V} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$F$  je neprekidna prema lemi o uniji jer je  $\phi \equiv 0$  na zatvorenom skupu  $\partial V$ . Nadalje, imamo  $F|_K = f$  i  $\text{supp } F \subseteq \text{supp } g \subseteq \bar{V}$ . □

**Teorem 4.1.3** (Tietzeov teorem o proširenju za LCH prostore). *Neka je  $\Omega$  LCH prostor i  $K \subseteq \Omega$  kompaktan. Ako je  $f \in C(K)$  realna funkcija, tada postoji realna funkcija  $g \in C_c(\Omega)$  koja proširuje  $f$ .*

*Dokaz.* Budući da je  $\langle 0, 1 \rangle$  homeomorfan s  $\mathbb{R}$ , možemo pretpostaviti da je  $f : K \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ . Iz Propozicije 4.1.2 slijedi da postoji neprekidna funkcija  $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$  s kompaktnim nosačem takva da je  $g|_K = f$ . Uočimo da je  $g^{-1}(\{0, 1\})$  zatvoren skup disjunktan s  $K$  pa prema Urysohnovoj lemi za LCH prostore postoji neprekidna funkcija  $\phi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $\phi|_{g^{-1}(\{0, 1\})} = 0$  i  $\phi|_K = 1$ . Definirajmo  $\tilde{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kao  $\tilde{g}(x) = \phi(x)g(x)$  za sve  $x \in \Omega$ . Vidimo da je  $\tilde{g}$  neprekidna, da  $\tilde{g}(\Omega) \subseteq \langle 0, 1 \rangle$  i da  $\tilde{g}|_K = g|_K = f$ . Nadalje,  $\text{supp } \tilde{g} \subseteq \text{supp } g$  pa  $\tilde{g}$  ima kompaktan nosač. □

**Propozicija 4.1.4.** *Neka je  $\Omega$  LCH prostor.  $C_0(\Omega)$  je uniformno zatvorena \*-podalgebra od  $C_b(\Omega)$ . Posebno,  $C_0(\Omega)$  je Banachov prostor s obzirom na sup-normu.*

*Dokaz.* Očito je  $C_0(\Omega)$  samoadjungiran u  $C_b(\Omega)$  jer je

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in \Omega : |\bar{f}(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Činjenica da je  $C_0(\Omega)$  potprostor od  $C_b(\Omega)$  slijedi iz

$$\{x \in \Omega : |\lambda f(x)| \geq \varepsilon\} = \left\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right\},$$

$$\{x \in \Omega : |f(x) + g(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in \Omega : |g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Pokažimo da je  $C_0(\Omega)$  zatvoren u  $C_b(\Omega)$ . Neka je  $(f_n)_n$  niz u  $C_0(\Omega)$  koji konvergira uniformno prema  $f \in C_b(\Omega)$ . Neka je  $\varepsilon > 0$ . Uzmimo  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tada vrijedi

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{x \in \Omega : |f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Zaista, ako je  $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  onda je

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Dakle,  $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\}$  je kompaktan. □

**Propozicija 4.1.5.** *Neka je  $\Omega$  LCH prostor.  $C_0(\Omega)$  je uniformni zatvarač od  $C_c(\Omega)$  unutar  $C_b(\Omega)$ .*

*Dokaz.* Zbog

$$\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in \Omega : |f(x)| \neq 0\}$$

vrijedi  $C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega)$  pa zbog zatvorenosti od  $C_0(\Omega)$  slijedi  $\overline{C_c(\Omega)} \subseteq C_0(\Omega)$ .

Preostaje pokazati da se proizvoljna  $f \in C_0(\Omega)$  može aproksimirati funkcijama iz  $C_c(\Omega)$ . Neka je  $\varepsilon > 0$ . Skup  $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$  je kompaktan pa prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija  $\phi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  s kompaktnim nosačem takva da je  $\phi|_{\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}} = 1$ . Definiramo  $h \in C_c(\Omega)$  s  $h = f\phi$ . Ako je  $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$  onda je  $|f(x) - h(x)| = 0$ , a za  $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  imamo

$$|f(x) - h(x)| = |f(x) - f(x)\phi(x)| = |f(x)||1 - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pa je  $\|f - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Dakle  $\overline{C_c(\Omega)} = C_0(\Omega)$ . □

**Propozicija 4.1.6.** *Svaki Banachov prostor  $X$  je izometrički izomorfan zatvorenom potprostoru od  $C(K)$  za neki CH prostor  $K$ .*

*Dokaz.* Prema [Banach-Alaogluovom teoremu](#),  $\text{Ball}(X^*)$  sa slabom-\* topologijom je CH prostor. Definiramo preslikavanje  $\beta : X \rightarrow C(\text{Ball}(X^*))$  formulom

$$\beta(x)(f) = f(x)$$

za  $f \in \text{Ball}(X^*)$  i  $x \in X$ .  $\beta(x)$  je zaista neprekidna funkcija  $\text{Ball}(X^*) \rightarrow \mathbb{C}$ : ako  $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$  onda

$$\beta(x)(f_\lambda) = f_\lambda(x) \rightarrow f(x) = \beta(x)(f)$$

za sve  $x \in X$ .  $\beta$  je linearno preslikavanje:

$$\begin{aligned} \beta(\lambda x + \mu y)(f) &= f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda \beta(x)(f) + \mu \beta(y)(f) \\ &= [\lambda \beta(x) + \mu \beta(y)](f) \end{aligned}$$

$\beta$  je izometrija:

$$\|\beta(x)\|_\infty = \sup_{f \in \text{Ball}(X^*)} |f(x)| = \|x\|.$$

Dakle,  $\text{Im } \beta$  je zatvoren potprostor od  $C(\text{Ball}(X^*))$  i  $\beta : X \rightarrow \text{Im } \beta$  je izometrički izomorfizam.  $\square$

**Propozicija 4.1.7.** *Neka je  $\Omega$  LCH prostor. Tada  $\text{Ball}(C_0(\Omega))$  ima barem jednu ekstremnu točku ako i samo ako je  $\Omega$  kompaktan.*

*Dokaz.* Neka je  $\Omega$  kompaktan. Tada je bilo koja  $f \in C(\Omega)$  takva da je  $|f(x)| = 1, \forall x \in \Omega$  ekstremna točka od  $\text{Ball}(C_0(\Omega))$ . Zaista, pretpostavimo  $f = (1-t)g + th$  za neke  $t \in (0, 1)$ ,  $g, h \in \text{Ball}(C_0(\Omega))$ . Za fiksni  $x \in \Omega$  imamo

$$1 = |f(x)| = |(1-t)g(x) + th(x)| \leq (1-t)|g(x)| + t|h(x)| \leq (1-t) + t = 1$$

pa vrijedi  $|g(x)| = |h(x)| = 1$  i jednakost u nejednakosti trokuta povlači da postoji  $\lambda > 0$  takav da je  $h(x) = \lambda g(x)$ . Odavde dobivamo  $1 = (1-t)|g(x)| + t|h(x)| = (1-t) + t\lambda$  pa je  $\lambda = 1$ . Dakle  $g(x) = h(x) = f(x)$ .

Obratno, neka  $\Omega$  nije kompaktan. Pretpostavimo da je  $f \in \text{Ball}(C_0(\Omega))$  ekstremna točka. Tada je  $\|f\|_\infty = 1$  i  $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq 1\} \neq \Omega$  pa postoji  $\varepsilon > 0$  takav da je  $U = \{x \in \Omega : |f(x)| < 1 - \varepsilon\} \neq \emptyset$ . Neka je  $u \in U$  proizvoljan. Prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija  $\phi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $\phi(u) = 0$  i  $\text{supp } \phi \subseteq U$  kompaktan. Uočimo da vrijedi

$$f = \frac{1}{2}(f + \varepsilon\phi) + \frac{1}{2}(f - \varepsilon\phi)$$

i  $\|f \pm \varepsilon\phi\|_\infty \leq 1$ . Zaista, za  $x \notin U$  je  $|(f \pm \varepsilon\phi)(x)| = |f(x)| \leq 1$ , a za  $x \in U$  je

$$|(f \pm \varepsilon\phi)(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon|\phi(x)| < (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 1.$$

Vrijedi  $(f \pm \varepsilon\phi)(u) = f(u) \pm \varepsilon$  pa  $f$  nije ekstremna točka, što je kontradikcija.  $\square$

**Propozicija 4.1.8.** *Neka je  $\Omega$  LCH prostor. Tada za svaku mrežu  $(t_i)_{i \in I}$  u  $\Omega$  vrijedi*

$$t_i \rightarrow t_0 \iff f(t_i) \rightarrow f(t_0), \forall f \in C_0(\Omega).$$

*Dokaz.* Implikacija  $\implies$  je jasna iz neprekidnosti. Obratno, pretpostavimo  $t_0 \not\rightarrow t_0$ . Tada postoji otvorena okolina  $U \ni t_0$  i  $i_0 \in I$  takav da za svaki  $i \geq i_0$  postoji  $j \geq i$  takav da  $t_j \notin U$ . Prema Urysohnovoj lemi postoji  $f \in C_c(\Omega)$ ,  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$  takva da je  $f(t_0) = 1$  i  $\text{supp } f \subseteq U$ . Tada za svaki  $i \geq i_0$  postoji  $j \geq i$  takav da  $f(t_j) = 0$  pa  $(f(t_i))_{i \in I}$  ne može konvergirati prema  $f(t_0) = 1$ .  $\square$

## 4.2 Lokalno konveksni topološki vektorski prostori

**Definicija 4.2.1.** Za vektorski prostor  $X$  kažemo da je **topološki vektorski prostor** ako je snabdjeven Hausdorffovom topologijom s obzirom na koju su operacije zbrajanja  $+: X \times X \rightarrow X$  i množenja skalarom  $\cdot: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$  neprekidne.

Neka je  $X$  vektorski prostor i neka je na  $X$  zadana separirajuća familija polunormi  $\mathcal{P}$ , tj. takva da iz  $\|x\| = 0, \forall \|\cdot\| \in \mathcal{P}$  slijedi  $x = 0$ . Tada  $\mathcal{P}$  inducira prirodnu topologiju  $\tau$  na  $X$  kao slabu topologiju generiranu preslikavanjima  $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x - x_0\|$  za  $x_0 \in X$  i  $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ . Znamo da je tada  $\tau$  jedinstvena topologija na  $X$  sa svojstvom da za svaku mrežu  $(x_i)_i$  u  $X$  i  $x_0 \in X$  imamo

$$x_j \xrightarrow{\tau} x_0 \iff \|x_j - x_0\| \rightarrow 0, \quad \text{za svaku } \|\cdot\| \in \mathcal{P}.$$

Bazu okolina točke  $x_0 \in X$  u topologiji  $\tau$  čine skupovi oblina

$$U(x_0, \|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\|_1 < \varepsilon, \dots, \|x - x_0\|_n < \varepsilon\} = \bigcap_{k=1}^n B_{\|\cdot\|_k}(x_0, \varepsilon)$$

za  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n \in \mathcal{P}$  i  $\varepsilon > 0$ .

Lako se pokaže da su operacije zbrajanja i množenja skalarom neprekidne s obzirom na topologiju  $\tau$ . Naime, za mrežu  $((x_i, y_i))_i$  u  $X \times X$  koja konvergira prema  $(x, y) \in X \times X$  u produktnoj topologiji  $\tau$  imamo  $x_i \xrightarrow{\tau} x$  i  $y_i \xrightarrow{\tau} y$  pa imamo

$$\|(x + y) - (x_i + y_i)\| \leq \|x - x_i\| + \|y - y_i\| \rightarrow 0$$

za svaku  $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$  odakle slijedi  $x_i + y_i \xrightarrow{\tau} x + y$  pa je operacija  $+$  neprekidna. Slično, za mrežu  $((\lambda_i, x_i))_i$  u  $\mathbb{C} \times X$  koja konvergira prema  $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times X$  u produktu standardne topologije na  $\mathbb{C}$  i topologije  $\tau$  imamo  $\lambda_i \rightarrow \lambda$  u  $\mathbb{C}$  i  $x_i \xrightarrow{\tau} x$ . Stoga

$$\|\lambda x - \lambda_i x_i\| \leq |\lambda_i| \|x - x_i\| + |\lambda - \lambda_i| \|x\| \rightarrow 0$$

za svaku  $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$  jer su mreže  $(\lambda_i)_i$  i  $(\|x_i\|)_i$  ograničene za dovoljno veliki indeks  $i$ . Zaključujemo  $\lambda_i x_i \xrightarrow{\tau} \lambda x$  pa je operacija množenja skalarom neprekidna.

Slijedi da je  $(X, \tau)$  topološki vektorski prostor, kojeg nazivamo **lokalno konveksan topološki vektorski prostor** generiran separirajućom familijom polunormi  $\mathcal{P}$ .

Ime lokalno konveksan dolazi od toga što nulvektor  $0 \in X$  ima konveksnu bazu okolina (naime, lako se pokaže da su bazni otvoreni skupovi konveksni). Nadalje, i svaka točka  $x_0 \in X$  ima konveksnu bazu okolina jer je translacija  $x \mapsto x_0 + x$  homeomorfizam.

Štoviše, može se pokazati ([5, Teorem 1.2.2.]) da je svaki topološki vektorski prostor sa svojstvom da nulvektor ima konveksnu bazu okolina u stvari lokalno konveksan topološki vektorski prostor čija je topologija generirana nekom separirajućom familijom polunormi.

Skup svih neprekidnih linearnih funkcionala lokalno konveksnog prostora  $X$  označavamo s  $X^*$  i zovemo **dual** od  $X$ . Lako vidimo da je linearan funkcional  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidan ako i samo ako je neprekidan u 0, tj. ako za svaku mrežu  $x_i \xrightarrow{\tau} 0$  vrijedi  $\varphi(x_i) \rightarrow 0$ .

Kao i kod normiranih prostora, linearni funkcionali su neprekidni ako i samo ako su ograničeni u sljedećem smislu:

**Teorem 4.2.2.** *Neka je  $X$  lokalno konveksan prostor čija je topologija generirana familijom polunormi  $\mathcal{P}$ . Neka je  $\varphi$  linearan funkcional na  $X$ . Ekvivalentno je:*

(i)  $\varphi$  je neprekidan.

(ii) Postoji konačno mnogo polunormi  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n \in \mathcal{P}$  i konstanta  $C > 0$  tako da za sve  $x \in X$  vrijedi

$$|\varphi(x)| \leq C \max\{\|x\|_1, \dots, \|x\|_n\}.$$

*Dokaz.* (i)  $\implies$  (ii). Neka je  $\varphi$  neprekidan. Tada je  $B(0, 1) \subseteq \mathbb{C}$  otvorena okolina 0 u  $\mathbb{C}$  pa postoji bazna otvorena okolina  $U = \bigcap_{i=1}^n B_i(0, \varepsilon)$  takva da je  $\varphi(U) \subseteq B(0, 1)$ . Tvrdimo da vrijedi

$$|\varphi(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} \max\{\|x\|_1, \dots, \|x\|_n\}$$

za svaki  $x \in X$ .

Zaista, ako je  $\|x\|_1 = \|x\|_2 = \dots = \|x\|_n = 0$  za proizvoljan  $k \in \mathbb{N}$  imamo  $kx \in U$  pa je  $k\varphi(x) = \varphi(kx) \in B(0, 1)$ , odakle slijedi  $\varphi(x) = 0$  pa nejednakost vrijedi. U suprotnom, uočimo da je

$$\frac{\varepsilon}{2 \max\{\|x\|_1, \dots, \|x\|_n\}} x \in U$$

pa je

$$|\varphi(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} \max\{\|x\|_1, \dots, \|x\|_n\}.$$

(ii)  $\implies$  (i). Pretpostavimo da je

$$|\varphi(x)| \leq C \max\{\|x\|_1, \dots, \|x\|_n\}, \quad \text{za svaki } x \in X.$$

Neka je  $\varepsilon > 0$ . Tada za  $U = \bigcap_{i=1}^n B_i(0, \frac{\varepsilon}{C})$  vrijedi  $\varphi(U) \subseteq B(0, \varepsilon)$ . Dakle,  $\varphi$  je neprekidan u 0 pa je i neprekidan.  $\square$

Topologija lokalno konveksnog prostora općenito nije metrizabilna. Imamo sljedeći kriterij metrizabilnosti:

**Propozicija 4.2.3.** *Lokalno konveksan prostor  $X$  je metrizabilan ako i samo ako je njegova topologija generirana prebrojivom separirajućom familijom polunormi na  $X$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je topologija od  $X$  generirana s prebrojivom familijom polunormi  $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Tada definiramo metriku  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  formulom

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x - y\|_n}{1 + \|x - y\|_n}.$$

Tvrdimo da je topologija od  $X$  generirana metrikom  $d$ , tj.  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ . Prema pretpostavci znamo da  $X$  zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Neka je  $(x_n)_n$  niz u  $X$  takav da  $x_n \xrightarrow{d} x_0$ . Tada

$$\frac{\|x - x_0\|_i}{1 + \|x - x_0\|_i} \leq 2^i d(x, x_0)$$

pa  $\|x - x_0\|_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  za sve  $i \in \mathbb{N}$ . Dakle,  $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} x_0$  pa zaključujemo  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}_d$ . Alternativno, neka je  $\bigcap_{i=1}^n B_i(x_0, r)$  bazni otvoreni skup u  $X$ . Za  $\delta = \frac{1}{2^n} \min\{r, 1\}$  imamo

$$d(x, x_0) < \delta \implies \frac{\|x - x_0\|_i}{1 + \|x - x_0\|_i} < 2^i \delta \implies \|x - x_0\|_i < \frac{2^i \delta}{1 - 2^i \delta} \leq 2^i \delta < r$$

pa je  $B_d(x_0, \delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i(x_0, r)$ . Za proizvoljan  $y \in \bigcap_{i=1}^n B_i(x_0, r)$  postoji bazni skup  $B = \bigcap_{i=1}^m B_i(y, r')$  takav da je  $y \in B \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i(x_0, r)$  pa prema upravo dokazanom

možemo upisati  $d$ -kuglu oko  $y$  u  $B$ . Zaključujemo da je  $\bigcap_{i=1}^n B_i(x_0, r) \in \mathcal{T}_d$  pa je  $\mathcal{T}_P \subseteq \mathcal{T}_d$ .

Obratno, neka je  $B_d(x_0, r)$  za  $r < 2$ . Neka je  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$ . Tada za  $\delta = \frac{r}{2-r}$  vrijedi da  $\|x - x_0\|_i < \delta$  povlači

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \frac{\|x - x_0\|_i}{1 + \|x - x_0\|_i} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \frac{r}{2} < \frac{r}{2}$$

pa slijedi  $d(x, x_0) < r$ . Dakle,  $\bigcap_{k=1}^n B_k(x_0, \delta) \subseteq B_d(x_0, r)$ . Za proizvoljan  $y \in B_d(x_0, r)$  nađemo  $d$ -kuglu centriranu u  $y$  sadržanu u  $B_d(x_0, r)$  pa ponovimo postupak. Zaključujemo da je  $B_d(x_0, r) \in \mathcal{T}_P$  pa je  $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_P$ . Za obrat, pretpostavimo da je topologija od  $X$  metrizable s metrikom  $\rho$ . Promotrimo skupove  $U_n = \{x \in X : \rho(x, 0) < \frac{1}{n}\}$ .  $U_n$  je otvorena okolina 0 pa postoji bazna okolina  $\bigcap_{j=1}^k B_j(0, \varepsilon) \subseteq U_n$ . Definiramo polunormu

$$p_n = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \|\cdot\|_j.$$

Tvrdimo da je topologija  $\mathcal{T}_P$  generirana s  $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jednaka topologiji  $\mathcal{T}_\rho$ . Objekti topologije zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti pa je dovoljno promatrati nizove. Uočimo da su  $p_n$  neprekidne s obzirom na  $\rho$  i da  $p_n(x) < 1$  povlači  $x \in U_n$ . Pretpostavimo da  $x_j \xrightarrow{\rho} x_0$ . Tada zbog neprekidnosti  $p_n(x_j - x_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \forall n \in \mathbb{N}$  pa zaključujemo  $\mathcal{T}_P \subseteq \mathcal{T}_\rho$ . Obratno, pretpostavimo da  $p_n(x_j - x_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Fiksirajmo  $\varepsilon > 0$  i uzmimo  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Zbog  $p_n(x_j - x_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  postoji  $j_0 \in \mathbb{N}$  takav da  $p(x_j - x_0) < 1, \forall j \geq j_0$ . Dakle za  $j \geq j_0$  imamo

$$p(x_j - x_0) < 1 \implies x_j \in U_n \implies \rho(x_j, 0) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pa  $x_j \xrightarrow{\rho} 0$ . Dakle  $\mathcal{T}_\rho \subseteq \mathcal{T}_P$ . □

Kao i u normiranim prostorima, linearni funkcionali separiraju kompaktne konveksne skupove:

**Teorem 4.2.4** (Hahn-Banachov teorem separacije, [2, Theorem IV.3.13.]). *Neka je  $X$  lokalno konveksan prostor i neka su  $S$  i  $K$  dva disjunktna konveksna podskupa od  $X$ . Ako je  $K$  kompaktan, tada postoje  $\varphi \in X^*, \alpha \in \mathbb{R}$  i  $\varepsilon > 0$  takvi da za sve  $x \in S$  i  $y \in K$  imamo*

$$\operatorname{Re} \varphi(x) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq \operatorname{Re} \varphi(y).$$

Iz Hahn-Banachovog teorema separacije direktno slijede neke tvrdnje čiji su analogni za normirane prostore posljedica klasičnog Hahn-Banachovog teorema:

**Korolar 4.2.5.** *Neka je  $S$  konveksan podskup lokalno konveksnog prostora  $X$ . Točka  $x_0 \in X$  pripada zatvaraču od  $S$  ako i samo ako postoji mreža  $(x_i)_i$  u  $S$  takva da vrijedi  $\varphi(x_i) \rightarrow \varphi(x_0)$  za sve  $\varphi \in X^*$ .*

**Korolar 4.2.6.** *Neka je  $X$  lokalno konveksan prostor i  $Y$  njegov zatvoren potprostor. Tada za svaku točku  $x_0 \in X \setminus Y$  postoji  $\varphi \in X^*$  takav da je  $\varphi(x_0) = 1$  i  $\varphi|_Y = 0$ .*

Odavde direktno slijedi da je dual netrivialnog lokalno konveksnog prostora netrivialan.

**Primjer 4.2.7.** Neka je  $X$  lokalno konveksan prostor.

- Svaki funkcional  $\varphi \in X^*$  definira polunormu  $x \mapsto |\varphi(x)|$  na  $X$ . Familija  $\{|\varphi(\cdot)|\}_{\varphi \in X^*}$  je separirajuća prema Korolaru 4.2.6. Topologija  $w$  koju ona inducira zove se **slaba topologija** na  $X$ . U terminima mreža imamo

$$x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff \varphi(x_i) \rightarrow \varphi(x_0), \forall \varphi \in X^*.$$

- Svaki vektor  $x \in X$  definira polunormu  $\|\varphi\|_x := |\varphi(x)|$  na  $X^*$ .  $\{\|\cdot\|_x\}_{x \in X}$  je očito separirajuća. Topologija  $w^*$  koju onda inducira zove se **slaba-\* topologija** na  $X^*$  i odgovara konvergenciji ograničenih funkcionala po točkama:

$$\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi_0 \iff \varphi_i(x) \rightarrow \varphi_0(x), \forall x \in X.$$

**Propozicija 4.2.8.** *Neka je  $X$  lokalno konveksan prostor i neka je  $S \subseteq X$  konveksan. Tada je  $\overline{S} = \overline{S}^w$ .*

*Dokaz.* Korolar 4.2.5 povlači:

$$\begin{aligned} x \in \overline{S} &\iff \text{postoji mreža } (x_j)_j \text{ u } S \text{ takav da } x_j \rightarrow x \\ &\iff \text{postoji mreža } (x_j)_j \text{ u } S \text{ takav da } \varphi(x_j) \rightarrow \varphi(x), \forall \varphi \in X^* \\ &\iff \text{postoji mreža } (x_j)_j \text{ u } S \text{ takav da } x_j \xrightarrow{w} x \\ &\iff x \in \overline{S}^w. \end{aligned}$$

□

Sada ćemo dokazati Krein-Milmanov teorem (preuzeto iz [2, Theorem V.7.4.]). Dokaz tvrdnje da je skup ekstremnih točaka neprazan je elementaran, a dokaz druge tvrdnje se temelji na Hahn-Banachovom teoremu separacije.



*Dokaz Teorema 2.4.20.* Lako se pokaže da je  $a \in \text{ext } S$  ako i samo ako je  $S \setminus \{a\}$  relativno otvoren konveksan skup u  $S$ .

Stoga neka je  $\mathcal{U}$  familija svih relativno otvorenih konveksnih pravih podskupova od  $S$  uređena inkluzijom. Zbog toga što je  $X$  lokalno konveksan prostor i  $S \neq \emptyset$  (i možemo pretpostaviti da  $S$  ima barem dvije točke) slijedi  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ . Neka je  $\mathcal{U}_0$  lanac u  $\mathcal{U}$  i stavimo  $U_0 = \bigcup \mathcal{U}_0$ . Očito je  $U_0$  otvoren konveksan skup. Kad bi bilo  $U_0 = S$ , tada bi zbog kompaktnosti od  $S$  postojao  $U \in \mathcal{U}$ , takav da je  $U = S$ , što je u kontradikciji s činjenicom da je  $U$  pravi podskup od  $S$ . Dakle,  $U_0 \in \mathcal{U}$ . Prema Zornovoj lemi,  $\mathcal{U}$  ima maksimalan element  $U$ .

Za  $x \in S$  i  $\lambda \in [0, 1]$  definiramo preslikavanje

$$T_{x,\lambda} : S \rightarrow S, \quad T_{x,\lambda}(y) = \lambda y + (1 - \lambda)x, \quad \text{za sve } y \in S$$

za koje lako pokažemo da je neprekidno i afino, tj. da

$$T \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T y_j$$

za sve  $y_1, \dots, y_n \in S$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$  takve da je  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ .

Za  $x \in U$  i  $\lambda \in [0, 1)$  imamo  $T_{x,\lambda}(U) \subseteq U$ . Dakle,  $U \subseteq T_{x,\lambda}^{-1}(U)$  i  $T_{x,\lambda}^{-1}(U)$  je otvoren konveksan podskup od  $K$ . Za  $y \in \overline{U} \setminus U$  imamo  $T_{x,\lambda}(y) \subseteq [x, y] \subseteq U^1$ . Stoga  $\overline{U} \subseteq T_{x,\lambda}^{-1}(U)$  pa maksimalnost od  $U$  povlači  $T_{x,\lambda}^{-1}(U) = S$ . Dakle,

$$T_{x,\lambda}(S) \subseteq U, \quad \text{za } x \in U \text{ i } \lambda \in [0, 1). \quad (4.1)$$

Tada uočimo da za proizvoljan otvoren konveksan podskup  $V$  od  $S$  imamo  $V \cup U = U$  ili  $V \cup U = S$ . Zaista, iz (4.1) slijedi da je  $V \cup U$  konveksan otvoren podskup od  $S$  pa tvrdnja slijedi iz maksimalnosti  $U$ .

Sada uočimo da ovo povlači da je  $S \setminus U$  jednočlan. Zaista, pretpostavimo  $a, b \in S \setminus U$ ,  $a \neq b$ . Neka su  $V_a, V_b$  disjunktni otvoreni konveksni podskupovi od  $K$  takvi da

<sup>1</sup>Općenito ako je  $A$  konveksan podskup lokalno konveksnog prostora  $X$ ,  $a \in \text{Int } A$  i  $b \in \overline{A}$ , tada je  $[a, b] \subseteq \text{Int } A$ . Zaista, neka je  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  i  $c = tb + (1-t)a$ . Budući da je translacija homeomorfizam, postoji otvorena okolina  $V$  od  $0$  u  $X$  takva da je  $a + V \subseteq A$ . Tada za svaki  $d \in A$  imamo

$$A \supseteq td + (1-t)(a + V) = t(d - b) + tb + (1-t)(a + V) = [t(d - b) + (1-t)V] + c$$

Postoji  $d \in A$  takav da je  $0 \in U := t(d - b) + (1-t)V$ . (Zaista,

$$0 \in t(d - b) + (1-t)V \iff 0 \in t^{-1}(1-t)V + (d - b) \iff d \in b - t^{-1}(1-t)V$$

Međutim,  $0 \in t^{-1}(1-t)V$  i ovaj skup je otvoren) Stoga je  $c + U \subseteq A$  i  $U$  je otvorena okolina  $0$  pa je  $c \in \text{Int } A$ .

je  $a \in V_a, b \in V_b$ . Zbog  $a \notin U$  imamo  $V_a \cup U = S$ , ali to je kontradikcija s  $b \notin V_a \cup U$ . Stoga  $S \setminus U = \{a\}$  i zaključujemo  $a \in \text{ext } S$ .

U stvari vrijedi sljedeće: ako je  $V$  otvoren konveksan podskup od  $X$  takav da je  $\text{ext } S \subseteq V$ , tada je i  $S \subseteq V$ . Zaista, pretpostavimo suprotno tj. da  $V \cap S \neq S$ . Tada je  $V \cap S \in \mathcal{U}$  pa je sadržan u maksimalnom elementu  $U \in \mathcal{U}$ . Ovo je kontradikcija s činjenicom da je  $S \setminus U = \{a\}$  za neki  $a \in \text{ext } S$ .

Konačno, neka je  $E = \overline{\text{co}}(\text{ext } S)$  zatvorena konveksna ljuska od  $\text{ext } S$ . Ako za neki  $\varphi \in X^*$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$  vrijedi  $E \subseteq V := \{x \in X : \text{Re } \varphi(x) < \alpha\}$ , tada prema prethodnoj tvrdnji slijedi i  $S \subseteq V$ . [Hahn-Banachov teorem separacije](#) sada povlači  $E = S$ .  $\square$

### 4.3 Von Neumannove algebre

Promotrimo  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  za neki Hilbertov prostor  $\mathcal{H}$ . Uočimo da je jaka operatorska topologija (kraće SOT) na  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ , u kontekstu prethodnog poglavlja, generirana separirajućom familjom polunormi  $\{\|A(\cdot)\|\}_{A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})}$  pa je  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  opremljen jakom operatorskom topologijom lokalno konveksan prostor. Posebno, operacije zbrajanja i množenja skalarom su SOT-neprekidne. To općenito nije slučaj za operacije množenja (tj. kompozicije) i involucije.

**Teorem 4.3.1** (Vigier). *Neka je  $(A_\lambda)_\lambda$  mreža hermitskih operatora na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$ . Tada je  $(A_\lambda)_\lambda$  SOT-konvergentan ako je rastuć i ograničen odozgo, ili ako je padajuć i ograničen odozdo.*

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati tvrdnju za rastuću mrežu jer inače pomnožimo sve operatore s  $-1$ .

Pretpostavimo stoga da je mreža  $(A_\lambda)_\lambda$  rastuća i ograničena odozgo. Promatrajući odrezanu mrežu  $(A_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$  možemo pretpostaviti da je  $(A_\lambda)_\lambda$  ograničena i odozdo. Slično, zbog translacije možemo pretpostaviti da su svi  $A_\lambda \geq 0$ .

Dakle, postoji konstanta  $M > 0$  takva da je  $\|A_\lambda\| \leq M$  za sve indekse  $\lambda$ . Slijedi da je za  $x \in \mathcal{H}$  rastuća mreža  $(\langle A_\lambda x, x \rangle)_\lambda$  u  $\mathbb{R}$  ograničena odozdo (s  $M\|x\|^2$ ) pa ova mreža konvergira. Koristeći polarizaciju, slijedi da je  $(\langle A_\lambda x, y \rangle)_\lambda$  konvergentna mreža za sve  $x, y \in \mathcal{H}$ . Stavivši  $\sigma(x, y) = \lim_\lambda \langle A_\lambda x, y \rangle$ , lako se provjeri da je

$$\sigma : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \sigma(x, y)$$

seskvilinearna forma na  $\mathcal{H}$ .  $\sigma$  je i ograničena zbog

$$|\sigma(x, y)| = \lim_\lambda |\langle A_\lambda x, y \rangle| \leq M\|x\|\|y\|$$

pa postoji  $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$  takav da je  $\langle Ax, y \rangle = \sigma(x, y)$  za sve  $x, y \in \mathcal{H}$ . Lako se vidi da je  $\|A\| \leq M$  da je  $A$  hermitski, i da  $A_\lambda \leq A$  za sve indekse  $\lambda$ . Također za svaki  $x \in \mathcal{H}$  imamo

$$\begin{aligned} \|Ax - A_\lambda x\|^2 &= \|(A - A_\lambda)^{\frac{1}{2}}(A - A_\lambda)^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\ &\leq \|A - A_\lambda\| \|(A - A_\lambda)^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\ &\leq 2M \langle (A - A_\lambda)x, x \rangle \\ &\xrightarrow{\lambda} 0 \end{aligned}$$

pa  $A_\lambda x \rightarrow Ax$ . Slijedi  $A_\lambda \xrightarrow{SOT} A$ . □

Lako vidimo da ako mreža ortogonalnih projektora  $(P_\lambda)_\lambda$  jako konvergira k operatoru  $P$ , tada je i  $P$  ortogonalni projektor.

**Lema 4.3.2.** *Neka je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor i  $A$  \*-podalgebra od  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  koja sadrži  $1_{\mathcal{H}^\pi}$ . Tada je  $A$  SOT-gust u  $A''$ .*

*Dokaz.* Neka je  $U \in A''$ ,  $x \in \mathcal{H}$  i  $K = \overline{Ax}$ . Tada je  $K$  zatvoren potprostor od  $\mathcal{H}$  koji je  $V$ -invarijantan za svaki  $V \in A$ .  $A$  je samoadjungirana pa  $K$  reducira  $\mathcal{H}$ . Ako je  $P$  ortogonalan projektor na  $K$ , tada  $P \in A'$  pa  $UP = PU$ . Stoga  $Ux \in K$  pa postoji niz  $(V_n)_n$  u  $A$  takav da  $Ux = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n x$ . Za svaki  $n \in \mathbb{N}$  preslikavanje

$$\varphi : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}^n), \quad v \mapsto (\delta_{ij}v)$$

je unitalni \*-homomorfizam pa je  $\varphi(A)$  \*-podalgebra od  $\mathbb{B}(\mathcal{H}^n)$  koja sadrži  $1_{\mathcal{H}^n}$ . Nadalje, imamo  $\varphi(U) \in (\varphi(A))''$ . Zaista, za svaki  $W \in (\varphi(A))'$  i  $V \in A$  imamo  $\varphi(V)W = W\varphi(V)$  odakle slijedi  $VW_{ij} = W_{ij}V$ . Dakle,  $W_{ij} \in A'$  pa  $UW_{ij} = W_{ij}U$  odnosno  $\varphi(U)W = W\varphi(U)$ .

Neka je sada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$ . Po prvom dijelu dokaza postoji niz  $(V_m)_m$  u  $A$  takav da  $\varphi(V_m)x \rightarrow \varphi(U)x$ . Stoga  $V_m x_j \rightarrow Ux_j$  za sve  $j = 1, \dots, n$ .

Ovo povlači da je  $U$  u SOT-zatvaraču od  $A$ . Zaista, ako je  $O$  SOT-okolina od  $U$ , moramo pokazati da je  $O \cap A$  neprazan. Možemo pretpostaviti da je  $O - U$  bazna okolina od 0. Stoga postoje elementi  $x_1, \dots, x_n \in H$  i  $\varepsilon > 0$  takvi da

$$O - U = \{V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|Vx_j\| < \varepsilon, j = 1, \dots, n\}.$$

Dakle, postoji niz  $(V_m)_m$  u  $A$  takav da  $V_m x_j \rightarrow Ux_j$  za sve  $j = 1, \dots, n$ . Odavde slijedi da je  $V_m \in O$  za dovoljno velik indeks  $m$  pa  $O \cap A \neq \emptyset$ . □

**Definicija 4.3.3.** Neka je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor. Za SOT-zatvorenu \*-podalgebru od  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  kažemo da je **von Neumannova algebra** na  $\mathcal{H}$ .

SOT-zatvoren skup je i zatvoren u normi pa je svaka von Neumannova algebra ujedno i  $C^*$ -algebra.

Navedimo da je  $\ell^\infty$  shvaćen kao algebra dijagonalnih operatora u  $\mathbb{B}(\ell^2)$  s obzirom na standardnu ortonormiranu bazu za  $\ell^2$  von Neumannova algebra.

Uočimo da ako je  $\mathcal{H}$  beskonačnodimenzionalan tada  $\mathbb{K}(\mathcal{H})$  nije von Neumannova algebra. Zaista, ako je  $E$  ortonormirana baza za  $\mathcal{H}$ , slijedi da mreža operatora konačnog ranga

$$\left( \sum_{e \in F} e \otimes \bar{e} \right)_{F \subseteq E \text{ neprazan konačan}}$$

SOT-konvergira prema  $1_{\mathcal{H}} \notin \mathbb{K}(\mathcal{H})$ .

Direktno iz prethodne leme slijedi:

**Teorem 4.3.4.** (von Neumannov teorem o bikomutantu) Neka je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor i  $A$   $*$ -podalgebra od  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  koja sadrži  $1_{\mathcal{H}}$ . Tada je  $A$  von Neumannova algebra ako i samo ako  $A'' = A$ .

**Teorem 4.3.5.** Ako je  $A \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$  nenul von Neumannova algebra, tada je  $A$  unitalna.

*Dokaz.* Neka je  $(E_i)_i$  aproksimativna jedinica za  $A$ . Prema Vigierovom teoremu  $(E_i)_i$  SOT-konvergira prema hermitskom operatoru  $P \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ .  $A$  je SOT-zatvorena pa očito  $P \in A$ . Nadalje, za  $x \in \mathcal{H}$  i  $U \in A$  imamo

$$PUx = \lim_i E_i Ux = Ux$$

pa je  $PU = U$ . Iz Propozicije 1.1.7 (i) slijedi da je  $P$  jedinica za  $A$ .  $\square$

Općenito  $P \neq 1_{\mathcal{H}}$ .

## 4.4 Hewitt-Cohenov teorem faktorizacije

Neka je  $A$  normirana algebra i  $X$  normiran prostor. Za  $X$  kažemo da je **lijevi normiran  $A$ -modul** ako je  $X$  lijevi  $A$ -modul i postoji konstanta  $\kappa \geq 1$  takva da

$$\|ax\| \leq \kappa \|a\| \|x\| \quad \text{za sve } a \in A, x \in X$$

Ako je  $X$  još i Banachov prostor tada kažemo da je  $X$  **lijevi Banachov  $A$ -modul**.

Za mrežu  $(e_\beta)_\beta$  u  $A$  kažemo da je **lijeva aproksimativna jedinica** za  $X$  ako  $e_\beta x \rightarrow x$  za sve  $x \in X$ .

**Teorem 4.4.1** (Hewitt-Cohen). *Neka je  $A$  Banachova algebra i  $X$  lijevi Banachov  $A$ -modul s konstantom  $\kappa \geq 1$ . Pretpostavimo da  $A$  ima lijevu aproksimativnu jedinicu  $(e_\beta)_\beta$  ograničenu nekom konstantom  $\delta \geq 1$  koja je ujedno i lijeva aproksimativna jedinica za  $X$ . Tada za svaki  $x_0 \in X$  i  $\varepsilon > 0$  postoji  $a \in A$  i  $x \in \overline{Ax_0}$  takvi da je  $x_0 = ax$ ,  $\|a\| \leq \delta$  i  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ . Štoviše, ako  $(e_\beta)_\beta$  pripada nekom zatvorenom konveksnom podskupu  $C \subseteq A$ , tada se i  $a$  može odabrati da bude element od  $C$ .*

*Dokaz.* Ako je  $A^1$  unitizacija od  $A$ , lako se provjeri da je  $X$  lijevi Banachov- $A^1$  modul ograničen s  $\kappa$  ako je djelovanje definirano kao

$$(a + \lambda 1)x = ax + \lambda x, \quad \text{za } x \in X, a \in A \text{ i } \lambda \in \mathbb{C}$$

Za  $\gamma = \frac{1}{2\delta+1}$  stavimo  $E_\beta := (1 - \gamma)1 + \gamma e_\beta$  za svaki indeks  $\beta$ . Tada imamo

$$\|E_\beta x - x\| = \gamma \|e_\beta x - x\| \rightarrow 0, \quad \text{za sve } x \in X$$

pa je  $(E_\beta)_\beta$  lijeva aproksimativna jedinica za  $A$  i za  $X$ . Štoviše, imamo

$$\|1 - E_\beta\| = \gamma \|1 - e_\beta\| = \gamma(\|e_\beta\| + 1) \leq \gamma(\delta + 1) < 1$$

pa je prema Propoziciji 1.1.12  $E_\beta$  invertibilan u  $A^1$  i  $\|E_\beta^{-1}\| \leq \Delta := \frac{1}{1-\gamma(\delta+1)}$ . Stoga imamo

$$\|E_\beta^{-1}x - x\| = \|E_\beta^{-1}x - E_\beta^{-1}E_\beta x\| = \|E_\beta^{-1}\| \|x - E_\beta x\| \rightarrow 0, \quad \text{za sve } x \in X$$

pa je  $(E_\beta^{-1})_\beta$  također ograničena lijeva aproksimativna jedinica za  $A$  i za  $X$ .

Neka su sada  $x_0 \in X$  i  $\varepsilon > 0$ . Indukcijom pokazujemo da postoji niz  $(e_n)_n$  u  $A$  koji zadovoljava

- (i)  $\|e_n\| \leq \delta$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $F_n := \sum_{i=1}^n (1 - \gamma)^{i-1} \gamma e_i + (1 - \gamma)^n 1$  je invertibilan u  $A^1$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (iii)  $\|F_1^{-1}x_0 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  i  $\|F_n^{-1}x_0 - F_{n-1}^{-1}x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$  za  $n \geq 2$ .

Iz već dokazanog slijedi da možemo staviti  $e_1 := E_\beta$  za dovoljno veliki indeks  $\beta$ . Pretpostavimo da smo odabrali  $e_1, \dots, e_n \in A$  takve da zadovoljavaju (i)-(iii). Za proizvoljne  $\eta_1, \eta_2 > 0$  postoji indeks  $\beta$  takav da  $\|E_\beta^{-1}e_i - e_i\| \leq \eta_1$  i  $\|E_\beta^{-1}x_0 - x_0\| \leq \eta_2$  za sve  $i = 1, \dots, n$ . Definiramo

$$F := \sum_{i=1}^n (1 - \gamma)^{i-1} \gamma E_\beta^{-1} e_i + (1 - \gamma)^n 1.$$

Tada je

$$F - F_n = \sum_{i=1}^n (1 - \gamma)^{i-1} \gamma (E_\beta^{-1} e_i - e_i).$$

Ako  $\eta_1 \leq \|F_n^{-1}\|^{-1}$  i  $G \in A$  zadovoljava  $\|G - F_n\| < \eta_1$ , tada je  $G$  invertibilan i

$$\|G^{-1} - F_n^{-1}\| \leq \|F_n^{-1}\| \|F_n - G\| \|G^{-1}\| \leq 2 \|F_n^{-1}\|^2 \eta_1.$$

Stoga ako zahtijevamo  $\eta_1 < n^{-1} \|F_n^{-1}\|^{-1}$ ,  $F$  će biti invertibilan. Stavmo  $e_{n+1} := e_\beta$  pa je

$$F_{n+1} = E_\beta F = \sum_{i=1}^{n+1} (1 - \gamma)^{i-1} \gamma e_i + (1 - \gamma)^{n+1} e_i$$

invertibilan i imamo

$$\begin{aligned} \|F_{n+1}^{-1} x_0 - F_n^{-1} x_0\| &\leq \|F_n^{-1} E_\beta^{-1} x_0 - F_n^{-1} x_0\| \\ &\leq \|(F^{-1} - F_n^{-1}) E_\beta^{-1} x_0\| + \|F_n^{-1} (E_\beta^{-1} x_0 - x_0)\| \\ &\leq \kappa (2 \|F_n\|^{-1} \Delta \|x_0\| \eta_1 + \|F_n^{-1}\| \eta_2). \end{aligned}$$

Odabravši  $\eta_1$  i  $\eta_2$  dovoljno malene, dobivamo tražena svojstva. Sada za  $n > m \geq 1$  imamo

$$\|F_n^{-1} x_0 - F_m^{-1} x_0\| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$$

pa  $F_n^{-1} x_0 \rightarrow x$  za neki  $x \in X$  takav da  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ . Štoviše, zbog  $x_0 \in \overline{Ax_0}$  (zbog postojanja lijeve aproksimativne jedinice) slijedi  $F_n^{-1} x_0 \in \overline{Ax_0}$  i zatim  $x \in \overline{Ax_0}$ .

Ako definiramo  $a_n := \sum_{i=1}^n (1 - \gamma)^{i-1} \gamma e_i \in A$  tada  $a_n \rightarrow a$  za neki  $a \in A$  takav da je

$$\|a\| \leq \gamma \delta \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \gamma)^i \leq \delta.$$

Zbog  $F_n = a_n + (1 - \gamma)^n 1$  i  $(1 - \gamma)^n \rightarrow 0$  imamo  $F_n \rightarrow a$  i  $ax = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n (F_n^{-1} x_0) = x_0$ .

Konačno, svi  $e_n$  su odabrani kao elementi aproksimativne jedinice  $(e_\beta)_\beta$  pa ako  $(e_\beta)_\beta$  pripada zatvorenom konveksnom skupu  $C$ , imamo  $1 \in C$  i

$$(1 - (1 - \gamma)^n) \sum_{i=1}^n (1 - \gamma)^{i-1} \gamma e_i \in C$$

za sve  $n \in \mathbb{N}$ . Puštanjem  $n \rightarrow \infty$  dobivamo  $a \in C$ . □

Sljedeći korolar pokazuje da u definiciji esencijalnog potprostora nedegenerirane reprezentacije  $C^*$ -algebre ne trebamo koristiti niti linearnu ljusku niti zatvarač.

**Korolar 4.4.2.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$  nedegenerirana reprezentacija od  $A$  na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$ . Tada za svaki  $\xi \in \mathcal{H}$  i  $\varepsilon > 0$  postoje  $a \in A$  i  $\eta \in \text{ess } \pi$  takvi da je  $\xi = \pi(a)\eta$  i  $\|\xi - \eta\| < \varepsilon$ . Specijalno, imamo  $\pi(A)\mathcal{H} = \text{ess } \pi = \mathcal{H}$ .*

*Dokaz.*  $\pi$  je kontrakcija pa  $\mathcal{H}$  ima strukturu lijevog Banachovog  $A$ -modula s djelovanjem definiranim kao  $a\xi := \pi(a)\xi$  za sve  $a \in A, \xi \in \mathcal{H}$ . Zbog nedegeneriranosti od  $\pi$  je svaka aproksimativna jedinica za  $A$  ujedno i aproksimativna jedinica za  $\mathcal{H}$  (Propozicija 2.4.3 (ii)). Sada rezultat slijedi iz Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije.  $\square$

Analogni argument pokazuje da je  $\overline{\text{span}} \pi(A)\xi = \pi(A)\xi$  za  $\xi \in \mathcal{H}$ .

**Primjer 4.4.3.** Na algebri

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

se ne može definirati  $C^*$ -struktura. Zaista, kad bi  $A$  bila  $C^*$ -algebra, tada bi  $A$  ograničeno djelovala sama na sebe lijevim množenjem pa bi prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije svaki element  $a \in A$  bio produkt neka dva elementa iz  $A$ . Međutim, produkt bilo koja dva elementa iz  $A$  je 0.

**Propozicija 4.4.4.** *Neka je  $A$   $C^*$ -algebra i  $J$  zatvoren ideal u  $A$ . Tada je  $J \cap Z(A) = Z(J)$ . Specijalno,  $Z(J)$  je ideal u  $Z(A)$ .*

*Dokaz.* Očito je  $J \cap Z(A) \subseteq Z(J)$ . Obratno, neka je  $z \in Z(J)$ .  $Z(J)$  je  $C^*$ -algebra pa  $z$  možemo faktorizirati kao  $z = uv$  za neke  $u, v \in Z(J)$ . Sada za  $a \in A$  imamo

$$za = (uv)a = u(va) = (va)u = v(au) = (au)v = a(uv) = az$$

jer su  $va, au \in J$ . Dakle,  $z \in Z(A)$ .  $\square$

# Bibliografija

- [1] R. S. Bryder, *Cohen's factorization theorem*, <http://math.ananas.nu/korn/017.pdf>, Sølvkorn 17, rukopis (rujan 2019.).
- [2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2. izd., Springer-Verlag, 1990.
- [3] I. Gogić, *Dauns-Hofmannov teorem i neke njegove posljedice*, 2009., rukopis (rujan 2019.).
- [4] I. Gogić, *Potpuno ograničeni operatori i subhomogene  $C^*$ -algebre*, Disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2010., <https://web.math.pmf.unizg.hr/%7Eilja/thesis.pdf>.
- [5] I. Gogić, *Odabrana poglavlja teorije operatorskih algebre*, PMF-MO, Zagreb, 2017., interna skripta.
- [6] I. Kaplansky, *Normed algebras*, Duke Math J. **16** (1949.), 399–418.
- [7] H. Kraljević, *Operatorske algebre*, PMF-MO, Zagreb, 2011., [https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/Op\\_alg.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/Op_alg.pdf), interna skripta.
- [8] Y. Misonou, *On a weakly central operator algebra*, Tohoku Math. J. **4** (1952.), 194–202.
- [9] G. J. Murphy,  *$C^*$ -algebras and operator theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.
- [10] I. Raeburn i D. P. Williams, *Morita equivalence and continuous trace  $C^*$ -algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, sv. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [11] J. Vesterstrøm, *On the homomorphic image of the center of a  $C^*$ -algebra*, Math. Scand. **29** (1971.), 134–136, [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN35397434X\\_0029?tify={%22pages%22:\[134\],%22panX%22:0.627,%22panY%22:0.575,%22view%22:%22info%22,%22zoom%22:0.566}](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN35397434X_0029?tify={%22pages%22:[134],%22panX%22:0.627,%22panY%22:0.575,%22view%22:%22info%22,%22zoom%22:0.566}.).



- [12] K. Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1993.

# Sažetak

Neka su  $A$  i  $B$  unitalne  $C^*$ -algebre s centrima  $Z(A)$  i  $Z(B)$  i neka je  $\phi : A \rightarrow B$  \*-epimorfizam. Tada svakako vrijedi  $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$ . U ovom diplomskom radu izložimo Vesterstrømov teorem iz 1971. koji daje nužan i dovoljan uvjet na unitalnu  $C^*$ -algebru  $A$  takvu da za svaku  $C^*$ -algebru  $B$  i \*-epimorfizam  $\phi : A \rightarrow B$  vrijedi jednakost  $\phi(Z(A)) = Z(B)$ .

Za dokaz ovog teorema uvodimo pojmove spektra  $C^*$ -algebre i prostora primitivnih ideala s pripadnim topologijama, te klase centralnih i slabo centralnih unitalnih  $C^*$ -algebri. Konačno, dajemo neke značajnije primjere  $C^*$ -algebri koje zadovoljavaju gornje svojstvo.

# Summary

Let  $A$  and  $B$  be unital  $C^*$ -algebras with centers  $Z(A)$  and  $Z(B)$ , and let  $\phi : A \rightarrow B$  be a  $*$ -epimorphism. Then we certainly have  $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$ . In this master thesis we present Vesterstrøm's theorem from 1971 which provides necessary and sufficient conditions on a unital  $C^*$ -algebra  $A$  such that for every  $C^*$ -algebra  $B$  and  $*$ -epimorphism  $\phi : A \rightarrow B$  we have the equality  $\phi(Z(A)) = Z(B)$ .

To prove this theorem we introduce the spectrum of a  $C^*$ -algebra and the primitive ideal space equipped with respective topologies, along with two classes of  $C^*$ -algebras: central and weakly central. To finalize we give some notable examples of  $C^*$ -algebras satisfying the above property.

# Životopis

Rođen sam 11. lipnja 1995. u Zagrebu gdje sam pohađao osnovnu školu te kasnije V. gimnaziju. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na državnim natjecanjima iz matematike, logike, fizike i kemije te na Međunarodnoj kemijskoj olimpijadi 2014.

2014. sam upisao preddiplomski studij *Matematika* na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Paralelno sam slušao i neke kolegije na Fizičkom odsjeku te na Fakultetu elektrotehnike i računarstva. 2017. upisao sam diplomski studij *Teorijska matematika*, također na Matematičkom odsjeku.

Tijekom studija bio sam demonstrator iz kolegija Linearna algebra 1 i 2, Diskretna matematika te Mjera i integral. Po završetku oba studija nagrađen sam za izniman uspjeh od Vijeća Matematičkog odsjeka.