Matematička čitanka iz 1947.

Vojvodić, Ivanka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivanka Vojvodić

MATEMATIČKA ČITANKA IZ 1947.

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Mirko Polonijo

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik

2. ____________________________, član

3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________

2. ____________________________

3. ____________________________

Sadržaj

1. Pojava i namjera *Matematičke čitanke*

Godine 1947. u Zagrebu je objavljena *Matematička čitanka* u redakciji prof. Milenka Sevdića. Nakon što je tekst knjige odobrilo Ministarstvo prosvjete Narodne Republike Hrvatske kao *pomoćnu školsku knjigu* 28. siječnja 1947. godine, Nakladni zavod Hrvatske ju je tiskao u zavidnih 10000 primjeraka, unutar svojih školskih i pedagoških izdanja.

Urednik u *Predgovoru,* koji je napisao uoči 1. svibnja 1946. godine, ističe da je izdavanje knjige pokrenulo i omogućilo Ministarstvo prosvjete nakon što se uvidjelo da matematička literatura oskudijeva knjigama koje mogu, uz obvezne udžbenike, poslužiti učenicima kao dodatni izvor za učenje matematike. Osnovni cilj izlaženja *Matematičke čitanke* bio je popularizacija matematike među mladima jer se na tome do tada jako malo učinilo. Knjiga je bila ponajprije namijenjena srednjoškolcima, ali i njihovim nastavnicima jer se slično gradivo moglo pronaći jedino u stranoj literaturi koja je u to vrijeme bila nedostupna većini učenika i nastavnika.

Velikom dijelu učenika matematika nije omiljen predmet jer je za stjecanje znanja iz matematike potreban dugotrajan i naporan umni rad. Najčešće se ne razumije njezin značaj i uska povezanost sa svakidašnjim životom, kao ni njezina ljepota. Zadatak *Matematičke čitanke* bio je pružiti drukčiju sliku o matematici, njezinom razvoju i značaju, a također i potaknuti učenike na rad.

Cijeneći da je predgovor *Čitanci* zanimljiv i poučan na razne načine, ovdje ga prenosimo u cijelosti:

„Da bi se olakšala nastava u matematici, pokrenuto je sa strane Ministarstva prosvjete, a evo i omogućeno, izlaženje *Matematičke čitanke*. Izdavanje ove čitanke treba smatrati kao izraz opravdanog nastojanja i pokušaja, da se našoj srednjoškolskoj omladini dade u ruke jedan pomoćni udžbenik matematike. To je novost u našoj srednjoškolskoj matematičkoj literaturi; jer je činjenica, da naša ne samo srednjoškolska matematička literatura, nego i naša matematička literatura uopće oskudijeva u knjigama ove vrste.

Učenik u svim školskim predmetima, osim matematike, nije upućen samo na nastavnikova predavanja, nego može posegnuti i za drugim djelima i člancima (naročito onima u popularnom obliku), dok kao jedini izvori za matematiku preostaju učeniku udžbenici i nastavnikova predavanja, kojima je opseg propisan uglavnom nastavnim programom. Stoga je i razumljivo, da eventualni interes za matematiku nije mogao biti onako zadovoljen, kao što je to bilo moguće, recimo, kod drugih prirodnih nauka (astronomije, kemije, fizike i t. d.), koje su i kod nas već dosta popularizirane. Postoje mnogi članci i knjige naših popularizatora, koje su i prije olakšavale i doprinosile, a i danas to čine, širenju tih nauka u redove naše omladine. U populariziranju matematike je međutim kod nas vrlo malo učinjeno. Osim onog neznatnog broja članaka, koje se razbacano moglo naći u nekim časopisima, za naše srednjoškolce izdano je samo još nekoliko zbirki formula i zadataka. Zato ova *Matematička čitanka* treba da pridonese barem donekle popunjavanju praznine u našoj domaćoj literaturi u ovom području, a i populariziranju ovog ne baš tako jako omiljenog predmeta.

Knjiga je namijenjena u prvom redu srednjoškolskoj omladini, ali će dobro doći i nastavnicima u njihovu radu, jer će baš za samostalni rad omladine u kružocima i seminarima moći nastavnik da dade potreban materijal, koji mnogi od njih do sada nije imao pri ruci. Ako je nastavnik htio što pružiti učenicima baš u pogledu gradiva, obrađenog u *Čitanci*, morao se služiti knjigama na stranim jezicima, koje su bile nepristupačne i mnogim nastavnicima, a pogotovu đacima.

Ovdje treba uočiti jednu važnu činjenicu. Matematika ne pruža većini učenika nikakav užitak, već upravo naprezanje i muku. Ali baš ovakav teži umni rad, kao što je u matematici, dovodi do odgajanja za rad i privikavanja na rad. Loše mišljenje o matematici dolazi zbog neshvaćanja i nerazumijevanja matematike, a i odatle, što bi mnogi htio da na lak i brz način dođe do matematičkih spoznaja. Onom istočnom vladaru, koji je od velikog Euklida tražio laki *kraljevski* put za spoznavanje matematičkih istina, odgovorio je Euklid, da ne postoji u matematici kraljevski put, nego samo jedan put, jednak i prav za sve.

Interes za matematiku i njeno shvaćanje sigurno će se ostvariti, ako se bude znalo što je matematika, u čemu je njen sadržaj i u čemu je njen značaj. Korist od matematike je u tome, što se učenjem matematike i rješavanjem postavljenih zadataka razvija um, razvija se logičko mišljenje. Time je matematika jedan od najvažnijih predmeta, koji djeluje i odgojno, u smislu odgajanja voljnih funkcija čovjeka.

Rekosmo, da rješavanje matematičkih zadataka razvija umne sposobnosti, a matematička pravila i poučci svojom vezom i proizlaženjem jednih iz drugih uče nas pravilnom logičkom mišljenju. No to samo još nije dovoljno, da nam objasni sadržaj matematičkih nauka, a još manje se iz toga može osjetiti sav onaj značaj, koji ima matematika u odgajanju, u životu i kulturi čovječanstva.

Matematika je usko vezana sa svakidašnjim životom i potrebna je za uspješno vođenje svakog posla. Kada u naše doba željeza, pare, elektriciteta i atomske energije bacimo pogled ma kuda, vidjet ćemo, da je matematika svagdje imala znatnog udjela. Kad na pr. sjedimo kod radioaparata i kad samo jednim okretom dugmeta možemo čuti daleku glazbu, slušati predavanja i najnovije vijesti iz najudaljenijih krajeva svijeta, i na taj način uživati blagodati te kulturne tekovine čovječanstva, tada obično i ne pomišljamo na onu ulogu, koju je odigrala matematika kao pomoćno sredstvo fizici i tehnici, da bi se stvorio radio.

Znamo, da je matematika s početka bila nauka o računanju i mjerenju i da je kao i sve druge nauke postala iz potreba svakidašnjeg života. Pojam broja i geometrijskog lika uzet je iz vanjskog svijeta, a nije ga stvorilo čisto mišljenje. Apstrakcijom iz čisto empirijskih podataka, odvajajući sadržinu kao beznačajnu, dobivamo čiste oblike i odnose, koji dolaze u matematici kao teoretskoj nauci.

Dakle ne smijemo pomišljati na to, da se u matematici razum bavi samo svojim vlastitim tvorevinama. *Kao i sve druge nauke, i matematika je nastala iz čovjekovih potreba; izvođenja matematičkih veličina jednih iz drugih nije dokaz za njihovo aprioristično porijeklo, već samo za njihovu racionalnu vezu.* (Engels).

Spomenuli smo, da je matematika nastala iz računanja i mjerenja. Kasnije je život postao složeniji, a kulturne potrebe sve veće. Time su se stavljali sve veći zadaci i zahtjevi na matematiku. Ti su zadaci bili uzrokom, da se matematičko znanje sve više razvijalo. Izvjesne se pojave podvrgavaju mjerenju i računu, a to drugim riječima znači, da se one izučavaju matematičkim putem. Matematika pomaže i sređivanju drugih nauka (astronomije, fizike, kemije, i t. d.). Često rezultati matematičkog proučavanja pojava dovode do izražavanja određenih i utvrđenih zavisnosti među veličinama. Na taj se način stvaraju za te pojave zakoni u matematičkom obliku. Tako i danas još najrazličitija pitanja života – prirode, čovjeka i društva – mogu da dadu materijal za matematičke nauke. To je bio razlog, da je radi rješavanja različitih pitanja i problema, koje je postavljao život, matematika bila prisiljena da neprestano usavršava svoje metode; obrnuto, tako usavršene metode matematike i rezultati njezina razvoja omogućivali su opet bolje i brže rješavanje nametnutih problema.

Matematička čitanka treba da pruži donekle sliku o matematici, njezinu razvoju, zadacima i značaju. Sadržaj pojedinih članaka ove čitanke treba da našim srednjoškolcima prikaže matematiku u svijetlu različitom od onog, na koji su navikli učenjem propisanog školskog gradiva. Čitanka treba da bude pomagač u radu, a istodobno da daje i pobude za rad. Ona sadrži lakših i težih stvari, tako da će biti zadovoljeni različiti interesi.

Jasno je, da se ova čitanka ne može smatrati potpunim i kompletnim djelom, koje bi odjednom davalo sve obilje materijala, koji može ući u knjigu ove vrste. Ovo je prvi pokušaj, pa će svaka objektivna kritika dobro doći. Bude li matematička čitanka naišla na odziv i budu li se svojim prilozima javili i novi saradnici, onda bi se eventualno pristupilo i izdavanju novog suplementa, gdje bi se usvojili stvarni prijedlozi kritike, a i želje samih učenika u svrhu poboljšanja same čitanke, kako u pogledu sadržaja, tako i u pogledu obrade materijala – sve u težnji, da *Matematička čitanka* bude što bolja, da bude na potrebnoj visini.

U Zagrebu, uoči 1. maja 1946.“

Premda je naklada *Matematičke čitanke* bila zavidno visoka, pet godina kasnije, 1952. godine, nailazimo na informaciju čiji autor ukazuje na nedovoljan odaziv čitateljstva. Naime, u prvom broju časopisa *Nastava matematike i fizike u srednjoj školi*, unutar rubrike *Prikazi i* *beleške,* nakon prikaza prva dva sveska prijevoda Euklidovih *Elemenata* (prevoditelj Anton Bilimović, izdanje Matematički institut SAN 1949, 1950), na str. 62 – 64 dan je opširni osvrt na *Matematičku čitanku*. Oba su prikaza potpisana inicijalima I. B. a za koje s velikom sigurnošću možemo pretpostaviti da se odnose na glavnog i odgovornog urednika Ivana Bandića, profesora Više pedagoške škole u Beogradu. Zbog zanimljivosti prikaza *Čitanke,* prenosimo ga u cijelosti:

„ *Matematička čitanka* u redakciji prof. Sevdića, Zagreb, 1947, str 319, cena 45 din.

Ovaj originalan pokušaj, jedinstven u našoj matematičkoj literaturi, izgleda da nije naišao na onaj odziv, koji po svojem značaju za matematičku nastavu u srednjoj školi zaslužuje. Ne može se, naime, verovati da *Matematička čitanka* nije došla do ruku i najšireg kruga naših nastavnika, pošto se zna da je štampana u dovoljnom broju primeraka i da je distribucija izvršena pravilno. Zbog toga je prosto neshvatljivo da joj ni u stručnoj i pedagoškoj štampi, a isto tako ni na sastancima raznih stručnih kolektiva, nije poklonjena skoro nikakva pažnja.

Ovaj kratki prikaz ima za cilj da ponovo skrene pažnju stručnjaka i školskih radnika na pomenuti zbornik prof. Sevdića i da ukaže na mogućnosti njegove primene i u praktičnom školskom radu.

Među piscima pojedinih članaka nalazimo imena, takoreći, svih matematičara Zagreba, počevši od nastavnika-praktičara pa do istaknutih naučnih radnika, što predstavlja jedinstven i vrlo poučan primer saradnje velikog broja stručnjaka.

Cilj *Čitanke* jasno je istaknut u predgovoru, gde se, između ostalog, kaže:

Knjiga je namijenjena u prvom redu srednjoškolskoj omladini, ali će dobro doći i nastavnicima u njihovom radu, jer će baš za samostalni rad omladine u kružocima i seminarima moći nastavniku da dade potreban materijal, koji mnogi od njih do sada nije imao pri ruci. Ako je nastavnik htio što pružiti učenicima baš u pogledu gradiva obrađenog u Čitanci, morao se služiti knjigama na stranim jezicima, koje su bile nepristupačne i mnogim nastavnicima, a pogotovo učenicima.

Može se slobodno reći da je postavljeni cilj u punoj meri postignut. Mada su pojedinim člancima obuhvaćena najraznovrsnija područja elementarne matematike, ipak se njima hoće da postigne isti cilj: da pruže jednu opštu sliku *o matematici, njezinu razvoju, zadacima i značaju* i *da našim srednjoškolcima prikažu matematiku u svijetlu različitom od onoga, na koji su navikli učenjem propisanog školskog gradiva*.

Sa tog stanovišta je izvršen i izbor pojedinih tema. *Čitanka* sadrži ukupno 60 članaka koji su raspoređeni u 14 poglavlja prema problematici koja se u njima obrađuje. Njima su obuhvaćena sva područja *školske* matematike, od aritmetike pa sve do diferencijalnog i integralnog računa.

Razumljivo je da se u ovakvom kratkom prikazu ne može izložiti sadržina svih tih članaka. Međutim, smatramo da su među njima od najvećeg interesa za nastavu oni članci u kojima su uz same postavljene probleme, dati i bitni momenti iz njihovog istoriskog razvoja. Od tih članaka treba svakako izdvojiti one u kojima su iznesena postignuća naših naučnika. To se u prvom redu odnosi na radove Boškovića i Getaldića, čiji život i rad je prikazan u dva posebna članka.

Prvi put je u našoj literaturi iscrpno prikazan i čitav niz poznatih klasičnih problema, kojih se nastavnik na časovima, inače, tek letimično dotiče. Među ovim člancima od neposrednog interesa za nastavu su *Arhimedova kvadratura parabole*, *Pojam integrala kod Njutna*, *Kvadratura kruga*, *Nekoliko dokaza Pitagorina poučka*, *Apolonijev problem*, *Malfatijev problem*, *Problem paralela* i dr.

Ni primena matematike na srodna naučna područja nije zapostavljena mada bi u eventualnom drugom izdanju trebalo dati više takvog materijala. Takvi su, naprimer, članci *Problem loma svjetla po Ferma-u*, *Jedan primer iz pomorske taktike*, *Problem jedra*, *Pčelino saće kao matematički problem*, *Keplerovi zakoni*, *Pupinov kalem* i dr.

Čitanka sadrži i niz matematičkih „zanimljivosti, zabava i šala“, koje su vrlo dobro odabrane i, ako se pravilno upotrebe u nastavi, mogu da budu pedagoški vrlo korisne.

Vodilo se računa i o učenicima koji pokazuju specijalne sposobnosti i interesovanje za matematiku. Njima je namenjen izvestan broj članaka u kojima je i nivo izlaganja na višem stupnju, kao što su, naprimer, i članci iz glave XIV.

Kao što se iz ovog kratkog pregleda sadržaja vidi, *Čitanka* sadrži dosta materijala kako za vanškolski rad sa učenicima tako i za neposrednu primenu u nastavi. Međutim, pisci smatraju ovo svoje delo tek kao prvi pokušaj i o svom eventualnom daljem radu u predgovoru kažu: *Jasno je da se ova Čitanka ne može smatrati potpunim i kompletnim djelom, koje bi odjednom davalo sve obilje materijala, koji može ući u knjigu ove vrste. Ovo je prvi pokušaj, pa će svaka objektivna kritika dobro doći. Bude li Matematička čitanka naišla na odziv i budu li se svojim prilozima javili i novi saradnici, onda bi se eventualno pristupilo i izdavanju novog suplementa, gde bi se usvojili stvarni prijedlozi kritike, a i želje samih učenika, u svrhu poboljšanja Čitanke, kako u pogledu sadržaja tako i u pogledu obrade materijala*.

Kao što se iz ovoga citata vidi, pisci *Čitanke* očekuju mišljenje nastavnika koji rade u srednjoj školi, a koji su već primenjivali materijal iznesen u *Čitanci*. Nije nam poznato da li je ovaj apel našao odziva u redovima nastavnika, no sigurno je da bi takva dokumentovana mišljenja znatno doprinela i rešavanju večito aktualnog pitanja literature za naučne grupe učenika.“

2. Tekstovi priloga *Matematičke čitanke*

Matematička čitanka na 324 stranice i kroz 59 priloga različita opsega obrađuje različita matematička područja. Podijeljena je u sljedećih 14 poglavlja:

I. O matematici uopće
II. O brojevima
III. Iz geometrije i geometrijskih konstrukcija
IV. Iz analitičke geometrije
V. Iz diferencijalnog i integralnog računa
VI. Iz računa vjerojatnosti
VII. Matematika u prirodi
VIII. Neki glasoviti problemi i poučci
IX. Iz astronomije
X. Razni članci
XI. Dva stara matematičara – Dubrovčanina
XII. Žena u matematici
XIII. Zanimljivosti, zabava, šala itd.
XIV. Dodatak.

Autori većine članaka su potpisani imenom i prezimenom, neki su naznačeni inicijalima (većinom prepoznatljivi), nekoliko kraćih članaka je nepotpisano, a kod pojedinih članaka navedena je napomena da su prema nečem složeni.

Knjiga obuhvaća rad 23 autora: Milenko Sevdić, Ivan Supek, Mihailo Petrović, Ignacije Smolec, Đuro Kurepa, Dragutin Šuljak, Vladimir Jirasek, Vladimir Varićak, Lav Rajčić, Stanko Bilinski, Juraj Majcen, Vladimir Orlić, Vladimir Vranić, Mira Hercigonja, Mira Erega, Milena Varićak, Charles Nordmann, Mihajlo Pupin, Zora Bakarić, Branko Pavlović, Stjepan Škarica, Vilko Niče i Željko Marković.

Milenko Sevdić je autor dvanaest članaka.

I. O matematici uopće

Ovo poglavlje sadrži ukupno pet priloga. Prvi prilog, pod nazivom ***Kalinjin o matematici***, preuzet je iz Kalinjinove knjige *O komunističkom odgoju,* str. 113.-114. Kalinjin je bio na nizu najvažnijih položaja u Sovjetskom savezu, sve do svoje smrti. U svojim je javnim nastupima isticao potrebu učenja matematike kao važne odgojne komponente i jednog od temeljnih predmeta koji *disciplinira um i uči logičkom mišljenju*, a čije je područje primjene ogromno.

Jasno je da je početak knjige ovim tekstom Kalinjina uobičajeni ustupak vremenu nastanka knjige.

U članku **Ivana Supeka** (preuzet je iz knjige *Od antičke filozofije do moderne nauke*) ***Razvitak geometrije*** govori se o važnosti promatranja geometrijskih oblika i odnosa u kontekstu povijesnog razvitka i ističe utjecaj praktičnih potreba na nastanak geometrije.

U članku ***Matematički simboli*** **Milenko Sevdić** piše o *savršenoj simbolici* kao karakterističnom svojstvu matematike, s posebnim osvrtom na povijesni razvoj *cifara* i *algebarskog načina izražavanja*. Autor ističe da se *matematički simboli moraju odlikovati kratkoćom i jednostavnošću, preglednošću i praktičnošću, konstantnošću i preciznošću, jednoznačnošću, da se mogu proširiti od pojedinačnog na općenito i obrnuto*.

Želimo naglasiti sljedeću autorovu misao:

„Matematiku karakterišu mnoga svojstva. Jedno od njih je upravo i njena savršena simbolika. Matematika je jedina od svih nauka, koja ima do krajnjih granica razvijenu simboliku s kojom je u stanju da obuhvati sva pitanja i probleme svojih opširnih područja. Samo pri tome ne smijemo miješati njenu suštinu s njenim simbolima, jer simboli sami za sebe nisu matematika, nego matematiku sačinjavaju oni pojmovi i one operacije, koje ti simboli predočuju. U tom pogledu postoji sličnost između matematike i muzike. Ni note nisu muzika, iako su danas jedno neophodno sredstvo, da se muzička zamisao sačuva i drugima preda.“

Članak završava ovim tekstom:

„Na koncu još par riječi. Iako nam danas simboli izgledaju kao nešto petrificirano, okamenjeno, ipak se matematika i danas razvija. Laici često na osnovu površnog poznavanja suštine simbola misle, da je matematika danas jedna mrtva nauka. Ovo je međutim potpuno kriva slika o situaciji koja stvarno postoji. Ima samo nekoliko drugih naučnih područja, koja se nalaze u fazi tako intenzivnog razvoja kao što je to slučaj kod matematike. Taj razvoj je vanredno mnogostruk. Matematika proširuje svoje područje u svim mogućim smjerovima: ona raste u visinu, razliva se u širinu, ponire u dubinu. Ona raste u visinu, jer pored njenih starih teorija, čiji je razvoj trajao stoljećima i stoljećima, stalno iskrsavaju novi problemi, stalno se postižu precizniji i potpuniji rezultati. Razliva se u širinu, jer njene metode prožimaju i druga naučna područja. U njen opseg istraživanja dolaze sve opširniji regioni pojava i stalno se sve nove i nove teorije uvode u veliki krug matematičkih disciplina. I konačno ona ponire u dubinu, jer se njeni temelji sve više učvršćuju, njezine metode, koje se primjenjuju pri njenoj izgradnji, sve su savršenije, a njeni principi dobijaju u svojoj trajnosti.“

Iz časopisa *Rad JAZU*, knj. 204, prenesen je dio članka **Mihajla Petrovića** *Apsolutne i restriktivne matematičke nemogućnosti*, sada pod naslovom ***Matematičke nemogućnosti***. U njemu se govori o jednoj odlici *moderne matematičke analize* da se shvatilo i dokazalo kako su rješenja pojedinih matematičkih problema *apsolutno nemoguća,* dok se prije smatralo da svaki problem mora imati i svoje rješenje. Autor napominje da postoje i nemogućnosti koje se takvima smatraju samo zato što ih nitko nije uspio riješiti.

Milenko Sevdić autor je i članka ***Kako se i u matematici griješi***. U uvodnom dijelu članka autor podsjeća na pojavu grešaka kod velikih matematičara, kao što su: Newton, Fermat, Laplace, Descartes i dr. Stoga je za autora *posve razumljivo da i učenici čine pogreške*. *Kod učenika ima pogrešaka, koje spadaju u grupu tzv. tipiziranih pogrešaka*, kao što je vađenje korijena na ovaj način:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b\,, \quad \text{dok je ispravno}$$

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = a+b$$

ili *nedopušteno skraćivanje kod razlomaka*:

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$

Ima i grupa sugeriranih pogrešaka, kod kojih se *sugestivnim pitanjem navodi nekoga da pogriješi*, kao kod sljedećeg problema:

„U hotel su svratila tri putnika da prenoće. U jutro je svaki platio 100 dinara za prenoćište s primjedbom, da je to preskupo. Hotelier stoga vrati po sobaru od primljenih 300 *Din* 50 *Din*. Sobar međutim zadrži za sebe 20 dinara, a svakom putniku vrati po 10 dinara. I sada zaključujemo ovako: Svaki putnik platio je 90 dinara, što ukupno iznosi 90 *Din* · 3 = 270 *Din*. Kod sobara je 20 *Din*. To je onda skupa 290 dinara. Gdje je onda onih 10 dinara, kojih nedostaje do 300 dinara. Što je tu pogrešno? Mi smo sugestivno zbrojili onih 20 dinara sa 270, i ako te dvije sume ne spadaju skupa. Kako su putnici platili 270 *Din* to se onih 250 *Din* nalaze kod hoteliera, a 20 kod sobara.“

Autor nadalje na primjerima objašnjava različite slučajeve pogrešaka.

I. Pogrešan postupak, a rezultat ipak točan.

Kao jedan od primjera navodi sljedeće:

$$\log(x-7) = \log 3 \;\mid\; : \log$$

$$x-7=3$$

$$x=10$$

Učenik je prilikom rješavanja ove jednadžbe pogrešno postupio kada je *cijelu jednadžbu podijelio s log*, a log nije faktor u jednadžbi, nego funkcija. Trebalo je zaključiti sljedeće: *kako su logaritmi (istih baza) jednaki, moraju biti jednaki i numerusi* pa tek onda napisati

$$x-7=3.$$

II. Točno, a izgleda pogrešno.

Kao kod ovog primjera:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$$

$$\sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$$

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{7}} \qquad \sqrt[4]{4\frac{4}{63}} = 4\sqrt[4]{\frac{4}{63}}$$

III. Pogrešno, a čini se točno.

U ovom se odjeljku daju četiri primjera, a kao prvi poznati primjer, da je $64 = 65$.

U trećem primjeru autor upozorava na sljedeću pogrešku:

$16 - 36 = 25 - 45$ dodamo li $\frac{81}{4}$ na obje strane, dobivamo

$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$ što se može napisati kao

$(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2$ ne vodeći računa o dvoznačnosti korijena, dobiva se

$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$ i oduzimajući $\frac{9}{2}$ s obje strane

$$4 = 5$$

II. O brojevima

Ovo poglavlje sadrži najveći broj priloga (ukupno deset). U prvom prilogu ***Kako su nastali brojevi*** **Ignacije Smolec** upoznaje čitatelja s načinima brojenja kod naroda koji nisu znali pisati i nisu poznavali pojam broja. Oni su se u tu svrhu uglavnom služili prstima ruku i nogu ili pojedinim dijelovima tijela.

Prilog ***Prosti ili prim brojevi*** prenijet je iz časopisa *Priroda – God. XXXII, str. 129.-130.* i potpisan inicijalima **Đ. K.** (najvjerojatnije su to inicijali Đure Kurepe).

Dragutin Šuljak autor je članka ***Da li je ispravno:* 3 + 2 = 11 *i* 3 · 2 = 12*?*** Odmah na početku autor odgovara da je račun *potpuno ispravan,* a zatim objašnjava kako *se jedna te ista množina može pisati na razne načine, bilo s kojom temeljnom množinom, što dokazuje da su svi sistemi ravnopravni, a da naš sistem, s našim prstima, nije nikakvi jedini i ničim privilegiran, nego dogovorom odabran, jer imamo svi istu množinu prstiju na raspolaganju.*

Nakon toga članka slijede dva nepotpisana kratka članka u kojima se ističe mogućnost uporabe prstiju kao računskih pomagala: ***Prsti i dijadni sistem*** (govori o tome kako pomoću prstiju možemo predočiti brojeve u binarnom sustavu) i ***Tablica množenja pomoću prsta***, u kojem se govori o tome kako možemo uz pomoć savinutih i uzdignutih prstiju izračunati umnoške brojeva od 5 do 9.

Zanimljivu priču o *otkrićima gimnazijalca Ivice* napisao je **Ignacije Smolec** pod naslovom ***Nekoliko zanimljivosti iz odnosa brojeva i numeričkog računanja***. Ivica je kao učenik prvog razreda gimnazije poslije podne čuvao krave. Jednog kišnog dana pastira Ivicu je kiša spriječila u čitanju pa je morao zaklopiti svoju knjigu. Hodajući pod kišobranom za kravama, Ivica je zadavao sebi zadatke i napamet ih rješavao. Između ostalog, uočio je da su razlike među produktima koji se dobiju kada se brojevi pomnože sami sa sobom *jednake redom neparnim brojevima:* 1 – 0 = 1, 4 – 1 = 3, 9 – 4 = 5, 16 – 9 = 7, itd. Tako je započeo Ivičin put otkrivanja *zanimljivih osobina brojeva* (Ivica je kasnije postao i profesor matematike).

Naprimjer:

1. $1^3 = 1^2$

   $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$

   $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$

   $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$ itd.

2.

$1 \cdot 9 + 2 = 11$	$1 \cdot 8 + 1 = 9$
$12 \cdot 9 + 3 = 111$	$12 \cdot 8 + 2 = 98$
$123 \cdot 9 + 4 = 1111$	$123 \cdot 8 + 3 = 987$
$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$ itd.	$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$ itd.
$9 \cdot 9 + 7 = 88$	$11 \cdot 11 = 121$
$98 \cdot 9 + 6 = 888$	$111 \cdot 111 = 12321$
$987 \cdot 9 + 5 = 8888$	$1111 \cdot 1111 = 1234321$
$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$ itd.	$11111 \cdot 11111 = 123454321$ itd.

Ignacije Smolec autor je još jednog zanimljivog priloga ***Razgovor dvaju brojeva***. U međusobnom *razgovoru* brojevi 12345679 i 142857 otkrivaju čitav niz svojih osobina.

Tako npr. broj 12345679 pomnožen s 36 (= 4 · 9) daje 444 444 444 *(znamenka* 4 *ponavlja se* 9 *puta),* pomnožen s 54 (= 6 · 9) daje 666 666 666 *(znamenka* 6 *ponavlja se* 9 *puta).*

Broj 142857 pomnožen s 2, 3, 4, 5 ili 6 daje brojeve koji se sastoje od svih njegovih *znamenaka u istom poretku samo što broj počinje svaki puta s drugom znamenkom (prve znamenke rezultata poredane su po veličini)*:

142857 · 2 = **2**85714

142857 · 3 = **4**28571

142857 · 4 = **5**71428

142857 · 5 = **7**14285

142857 · 6 = **8**57142

Članak ***Još neke zanimljivosti brojeva*** donosi prikaz jedanaest zanimljivosti o brojevima. U potpisu ovoga članka stoje inicijali **M. S.** (najvjerojatnije se radi o Milenku Sevdiću). Evo nekih od tih zanimljivosti:

Broj 100 *se može napisati s 5 jednakih cifara:*

$100 = 111 - 11$

$100 = 3 \cdot 33 + \frac{3}{3}$

$100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$

$100 = (5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$

Broj 100 *se može napisati na nekoliko načina s devet osnovnih cifara:*

$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$

$100 = 74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18}$

$100 = 91\frac{5742}{638}$

$100 = 94\frac{1578}{263}$

$100 = 96\frac{1752}{438}$

Jednu grupu zanimljivosti čine svojstva produkata: *Ako obrnemo red cifara u faktorima, onda dobijemo i u novom produktu obrnuti red cifara staroga produkta:*

$41 \cdot 2 = 82$ $\qquad$ $14 \cdot 2 = 28$

$32 \cdot 21 = 672$ $\qquad$ $23 \cdot 12 = 276$

$312 \cdot 221 = 68952$ $\qquad$ $213 \cdot 122 = 25986$

Također se upućuje na mogućnost sljedećih *pravilnosti*:

a) $4^2 = 16$

$34^2 = 1156$

$334^2 = 111556$

$3334^2 = 11115556$

$33334^2 = 1111155556$ itd.

b) $7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

c) $\mathbf{5}^2 = 2\mathbf{5}$

$\mathbf{25}^2 = 6\mathbf{25}$

$\mathbf{625}^2 = 390\mathbf{625}$

$\mathbf{90625}^2 = 82128\mathbf{90625}$

$\mathbf{890625}^2 = 793212\mathbf{890625}$ itd.

d) $\mathbf{6}^2 = 3\mathbf{6}$

$\mathbf{76}^2 = 577\mathbf{76}$

$\mathbf{376}^2 = 141\mathbf{376}$

$\mathbf{9376}^2 = 87909\mathbf{376}$ itd.

e) $(8+1)^2 = 81$

$(5+1+2)^3 = 512$

$(4+9+1+3)^3 = 4913$

$(5+8+3+2)^3 = 5832$

$(1+7+5+7+6)^3 = 17576$

$(1+9+6+8+3)^3 = 19683$

f) $(2+4+0+1)^4 = 2401$

$$(2+3+4+2+5+6)^4 = 234256$$
$$(3+9+0+6+2+5)^4 = 390625$$
$$(6+1+4+6+5+6)^4 = 614656$$
$$(1+7+2+1+0+3+6+8)^5 = 17210368$$
$$(3+4+0+1+2+2+2+4)^6 = 34012224$$
$$(6+1+2+2+2+0+0+3+2)^7 = 612220032$$

Vladimir Jirasek autor je priloga ***Da li sam mogao brže računati?*** u kojem upućuje čitatelja kako na različite načine može postići da njegovo računanje bude *brzo, točno i ekonomično (sa što manje pisanja brojeva)*.

Savjete o načinima kontroliranja provedenih računskih operacija daje **Dragutin Šuljak** u članku ***Kontroliranje svih računa*** tako da *kontrola bude čim jednostavnija i ne smije teći istim, nego drugim sasvim novim putem*. U tu svrhu pokazuje *dvije metode kontrole* koje se temelje na postupku *stezanja broja odnosno zbrajanja njegovih znamenaka*.

III. Iz geometrije i geometrijskih konstrukcija

U ovom se poglavlju čitatelju nude četiri priloga iz geometrije. U prilogu ***Površina trokuta kao funkcija triju strana*** (uočimo da se u prilogu umjesto današnjeg naziva stranica koristi naziv *strana*) **Milenko Sevdić** donosi prikaz pet različitih izvođenja formule za površinu trokuta pomoću duljina njegovih stranica: *Heronovo izvođenje, Izvođenje trojice braće Arapa, Klasično izvođenje, Izvođenje Newtonovo i Eulerovo izvođenje*.

Boškovićevo izvođenje Heronove formule preuzeto je iz članka **Vladimira Varićaka** *„Matematički rad Boškovićev"* (Rad JAZU, knj. 181, str. 119-126). U tom prilogu čitatelja se upoznaje s postupkom izvođenja Heronove formule tako da se *iz tri stranice trokuta odrede kutovi, pa polumjer upisanog kruga i površina trokuta*.

Lav Rajčić u uvodnom dijelu članka ***Mascheronijeve konstrukcije u vezi s pravilnim mnogokutima*** donosi najprije kratak povijesni pregled izvođenja geometrijskih konstrukcija *pomoću ravnala i šestila*. Izvođenje geometrijskih konstrukcija samo pomoću šestara među prvima je *razvio i ispitivao talijanski matematičar Mascheroni*. Autor u članku iznosi Mascheronijeve konstrukcije pravilnih mnogokuta, ako im je zadan polumjer opisane kružnice, ili ako im je zadana stranica. Tako čitatelj može tu pronaći načine konstruiranja, kao i dokaze samih konstrukcija: *istostranog* trokuta, kvadrata, pravilnog peterokuta, pravilnog šesterokuta, pravilnog osmerokuta, pravilnog deseterokuta i pravilnog dvanaesterokuta.

Posljednji članak u ovom poglavlju je članak **Stanka Bilinskog** pod nazivom ***Problem parketiranja*** u kojemu autor objašnjava sljedeće: „Težnja da se zidovi i podovi građevina pravilno ukrase geometrijskim figurama stvorila je i problem parketiranja, tj. problem, kako se može ravnina razdijeliti na poligone, koji bi je potpuno i jednostruko prekrivali, ali uz neke određene uvjete, koji traže stanovite pravilnosti s obzirom oblik, vrstu i poređaj poligona.“

S obzirom da se mogu postaviti različiti uvjeti koje bi *parketiranje* trebalo zadovoljavati, postoji zapravo niz različitih problema te stoga i niz različitih rješenja. Autor u članku pokazuje kako se problem može postaviti i kako se na jednostavan način mogu pronaći sva moguća rješenja. U tu svrhu donosi nekoliko definicija: „Točku ravnine u kojoj se sastaju vrhovi susjednih poligona zvat ćemo *čvorištem*. Ako su svi kutovi, koji se u jednom čvorištu sastaju, međusobno jednaki, zvat ćemo to čvorište *pravilnim*. Dva su čvorišta sukladna, ako je slijed kutova koji se u njemu sastaju isti, tj. ako su dva po dva kuta u oba čvorišta međusobno jednaka i ako su oni oko čvorišta poredani istim ili obrnutim redom.“

Autor zatim postavlja sljedeći zadatak: *naći sve moguće razdiobe ravnine u pravilne poligone, koji mogu imati različit broj stranica, no sve stranice neka su međusobno jednake, a sva čvorišta neka su međusobno sukladna*.

U rješavanju postavljenog zadatka autor utvrđuje da *se u pronalaženju rješenja ovoga zadatka namiče prvi uvjet – koji svakako mora kod moguće razdiobe ravnine biti ispunjen – taj, da zbroj svih kutova, koji se sastaju u jednom čvorištu, iznosi* 360˚. Neka se u svakom čvorištu sastane *k n*-terokuta. Tada se *postavljeni uvjet može izraziti jednadžbom*:

$$k \cdot \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 360°$$

Skrati li se ova jednadžba sa 180˚, a zatim još sa $2k$, dobit ćemo diofantsku jednadžbu

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$$

S obzirom da iz uvjeta zadataka slijedi da $k \geq 3$ i $n \geq 3$, rješenja ove diofantske jednadžbe su:

$$n = 3, 4, 6$$

$$k = 6, 4, 3$$

Autor stoga zaključuje: „Ova nam rješenja kazuju već poznatu činjenicu, da se ravnina dade razdijeliti na istostrane trokute, na kvadrate i na pravilne šesterokute, i to tako da ih se u jednom čvorištu sastane po šest, po četiri odnosno po tri, ali da su to ujedno jedine mogućnosti razdiobe ravnine na istovrsne pravilne poligone.“

Ako se ravnina želi prekriti s više vrsta poligona, kao što se traži u postavljenom zadatku, *u jednoj takvoj razdiobi ravnine ne može biti više od tri različite vrste* poligona *(zbroj po jednog kuta pravilnog trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta iznosi* 378˚ *- dakle premašuje* 360˚*).* Postavljanjem odgovarajućih diofantskih jednadžbi:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1-2)\cdot 180°}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2-2)\cdot 180°}{n_2} + k_3 \cdot \frac{(n_3-2)\cdot 180°}{n_3} = 360° \text{ odnosno nakon sređivanja}$$

$$k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right) + k_3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_3}\right) = 1 \text{ uz uvjete: } k_1+k_2+k_3 \geq 3;\ n_{1,2,3} \geq 3$$

dolazi se do ukupno 17 mogućih rješenja koja autor daje u sljedećoj tablici:

n_1	k_1	n_2	k_2	n_3	k_3
3	6	-	-	-	-
4	4	-	-	-	-
6	3	-	-	-	-
3	1	12	2	-	-
4	1	8	2	-	-
5	2	10	1	-	-
3	2	6	2	-	-
3	4	6	1	-	-

3	3	4	2	-	-
3	1	7	1	42	1
3	1	8	1	24	1
3	1	9	1	18	1
3	1	10	1	15	1
4	1	6	1	12	1
4	1	5	1	20	1
3	2	4	1	12	1
3	1	4	2	6	1

Svako od tih rješenja ispunjava uvjet da se poligone mogu poredati u ravnini oko jedne točke tako da njihovi kutovi zajedno čine puni kut. Međutim, nastavi li se daljnje popločavanje ravnine tim poligonima, pokazat će se da je ono moguće samo kod 11 rješenja, a to su: (3, 3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (6, 6, 6), (3, 12, 12), (4, 8, 8), (3, 6, 3, 6), (3, 3, 3, 3, 6) (3, 3, 4, 3, 4), (3, 3, 3, 4, 4), (4, 6, 12) i (3, 4, 6, 4). Autor poziva čitatelja da sam pokuša nacrtati dana rješenja.

Na kraju članka autor ukazuje na još jedan mogući način postavljanja problema (uz uvjet da su *čvorišta pravilna, poligoni sukladni i tangentni*) i njegovog rješavanja, *tako da se ucrtaju okomice iz središta upisanih kružnica poligona na sve njegove stranice*. Tako će se dobiti nova razdioba ravnine. Ponovi li se isti postupak na toj novoj razdiobi, dobit će se slika početne razdiobe.

IV. Iz analitičke geometrije

U ovom poglavlju čitatelju se nude tri članka. Prilog ***Getaldićeva konstrukcija parabole*** **Juraja Majcena** preuzet je iz *Spisa Marina Getaldića Dubrovčanina o paraboli i paraboličnim zrcalima* (Rad JAZU, s223, 1920.). U uvodnom dijelu članka ističe se da je ova *Getaldićeva konstrukcija izvedena bez direktrise, a sam dokaz je bez sumnje originalan*.

Slijedi ***Descartesovo izvođenje jednadžbe hiperbole*** koje se nalazi u njegovom djelu *Géométrie*. Ovaj članak nije potpisan. Može se pretpostaviti da je većinu nepotpisanih članaka urednik *Matematičke čitanke* preuzeo ili preveo iz drugih izvora. U uvodnom dijelu priloga čitatelja se upoznaje sa životom i djelom tog glasovitog matematičara i filozofa, koji je u svom djelu *Géométrie*, tiskanom 1637. godine, *dao prve i osnovne pojmove analitičke geometrije u ravnini*. Zatim se pokazuje kako *Descartes izvodi analitički jednadžbu jednog geometrijskog mjesta, da bi na kraju rekao da se radi o hiperboli.*

Slijedi prilog ***O jednadžbi pravca i hiperbole kod Fermata*** u čijem uvodnom dijelu autor **Stanko Bilinski** iznosi podatke o ulozi Francuza Pierre de Fermata (*velikog teoretičara brojeva*) u otkriću analitičke geometrije, a zatim izlaže dio Fermatovog rada koji je tiskan 1679. godine pod naslovom *Ad locos planos et solidos Isagoge*.

V. Iz diferencijalnog i integralnog računa

Ukupno šest priloga iz ovoga poglavlja odnosi se najvećim dijelom na primjenu diferencijalnog i integralnog računa u rješavanju različitih problema.

Prilog ***Arhimedova kvadratura parabole*** ima sedam stranica, a nije potpisan. U njemu se daje prikaz Arhimedove metode za izračun kvadrature parabole. U uvodnom dijelu članka govori se o Arhimedu kojemu je *dvije tisuće godina prije otkrića integralnog računa pošlo za rukom da nađe kvadraturu parabole služeći se tzv. „ekshaustionom metodom“ (pod tom metodom treba razumjeti ono što označujemo riječju integracija u smislu granične vrijednosti jedne sume).*

Zatim slijedi kratki prilog ***Pojam integrala kod Newtona*** iz *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, 1711.

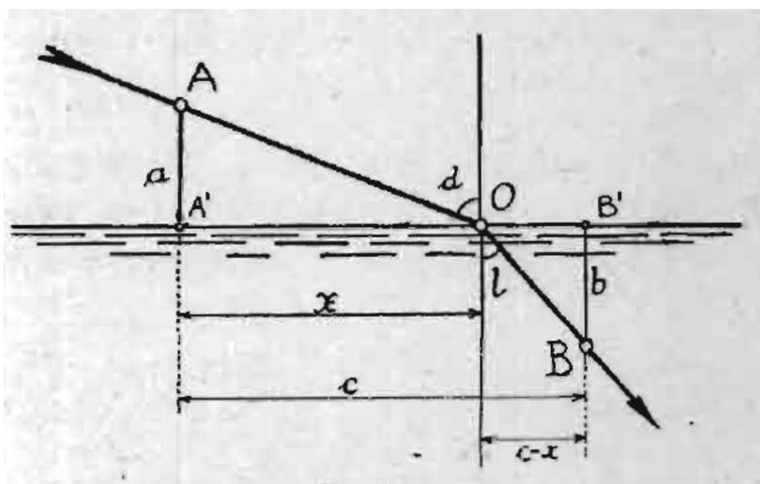
Nadalje, **Lav Rajčić** u uvodnom dijelu članka ***Problem loma svjetlosti po Fermatu*** upoznaje čitatelja sa životom i djelom francuskog matematičara Fermata koji je *prvi riješio zadaću da se odrede one vrijednosti funkcije za koje se njena prva derivacija poništava*. *Problem loma svjetlosti, riješen po Fermatu, tumači ispravno Descartesov zakon loma svjetlosti (kojega je*

Descartes dokazivao pogrešnim hipotezama, jer je krivo pretpostavljao da se svjetlo širi brže u gušćem nego u rjeđem sredstvu):

$$\frac{\sin d}{\sin l} = K.$$

Prilikom rješavanja problema promatra se zraka svjetla koja dolazi od točke *A* do površine vode, *kod točke O ulazi u vodu, lomeći se produžuje pravocrtno dalje prema točki B* (slika 5.1). Što bi se dogodilo da zraka svjetla stigne od točke *A* do točke *B* pravocrtno (jer je gibanje po pravcu najkraće)? Kako se *svjetlo u vodi širi polaganije nego u zraku, zraka svjetla bi slijedeći najkraći put utrošila više vremena*, odnosno *lomeći se, zraka stigne najbrže na cilj*. U rješavanju problema Fermat je najprije odredio funkciju, koja pokazuje kako vrijeme ovisi o putu, *po kojem stiže zraka svjetla od točke A do točke B*:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}$$



Slika 5.1.

Priroda uvijek slijedi zakone minimuma pa će svjetlo izabrati put kojim će najbrže stići od točke *A* do točke *B*. Kako bi se odredilo matematičke uvjete kojima bi se to postiglo, potrebno je *odrediti onu vrijednost veličine x, za koju će funkcija T imati minimum*. U tu svrhu je potrebno izračunati prvu derivaciju funkcije i izjednačiti je s nulom.

$$T' = \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \frac{x}{u \cdot \overline{AO}} - \frac{c - x}{v \cdot \overline{OB}} = 0$$

Tako je Fermat pokazao *da će svjetlo doći iz točke A do točke B u najkraćem vremenu samo onda, ako bude zadovoljen uvjet:*

$$\frac{\sin d}{\sin l} = \frac{u}{v} = K$$

Slijedi ***Problem konzerve*** (*Stari zadatak u proširenom obliku*) u kojem **Vladimir Orlić** izlaže još jednu primjenu diferencijalnog računa odgovarajući na praktično pitanje: *Kako napraviti valjkastu limenku za konzerve traženog obujma tako da utrošak lima bude što manji?* Na kraju članka Orlić zaključuje da se primjenom matematike u proizvodnji ove ambalaže mogu postići značajne uštede te je iz toga primjera vidljivo da je i *prividne sitnice korisno podvrgnuti matematičkom izračunu.*

Zatim u ovom poglavlju slijedi nepotpisan članak ***Jedan primjer iz pomorske taktike*** kojim se primjenom diferencijalnog računa odgovara na sljedeće pitanje:

„Brod ***L***, koji ima najveću brzinu ***v km*** na sat, opazio je pod kutom α nadesno od pravca jug-sjever u daljini *d km* neprijateljski brod *B* poznate brzine *u,* koja je veća od *v*. Konfiguracija obale prisiljava neprijateljski brod, da stalno zadržava uzeti smjer pod kutom β prema pravcu sjever-jug. Koji kurs mora uzeti ***L*** da bi dospio u najveću blizinu *y* bržemu neprijateljskom brodu *B*? Još se pita kolika je ta najmanja daljina i za koje će vrijeme ona biti postignuta."

Nadalje, u prilogu ***Problem jedra*** autori **Sevdić i Bilinski** odgovaraju na pitanje *kako treba namjestiti jedro da bi se maksimalno iskoristio učinak vjetra prilikom jedrenja*. Uporabom diferencijalnog računa dolaze do traženog odgovora, odnosno zaključuju *da jedro treba namjestiti tako da raspolavlja kut što ga zatvara smjer vjetra sa smjerom osi broda*. Na kraju priloga autori pokazuju kako se do istog rezultata može doći bez uporabe derivacije.

VI. Iz računa vjerojatnosti

Bertrandov paradoks jedini je prilog u ovom poglavlju. Autor **Vladimir Jirasek** počinje prilog konkretnim primjerom, a zatim definira pojam matematičke vjerojatnosti za zbivanje nekog događaja kao *kvocijenta između svih povoljnih slučajeva i svih mogućih slučajeva za* *taj događaj*. Nakon toga uvodi pojam *diskontinuirane i kontinuirane vjerojatnosti* te izlaže problem iz vjerojatnosti, koji je po francuskom matematičaru Josephu Bertrandu nazvan „Bertrandov paradoks“. J. Bertrand je u svom znamenitom djelu o računu vjerojatnosti *Calcul des probabilités* (1888. godine) kritizirao *teoriju kontinuirane vjerojatnosti i na temelju svojih netočnih dedukcija* zaključio *da su ti problemi obične matematičke igrarije bez ikakove realne podloge*. U tu svrhu je naveo primjer koji ima tri različita rješenja.

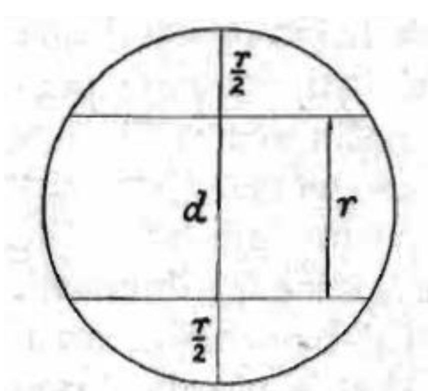
„Problem glasi:

U krugu polumjera ***r*** povučemo **po volji** tetivu. Kolika je vjerojatnost da će njena duljina biti veća od duljine stranice ***a*** u taj krug upisanog istostraničnog trokuta?“

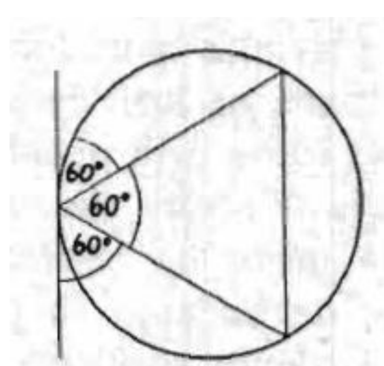
Prvo rješenje:

Ako zadamo **smjer** *tetive, tada će središte svih tetiva ležati na promjeru, okomitom na smjer tetive* (slika 6.1.). *Kako središte stranice* ***a*** *istostraničnog trokuta, upisanog u krug, leži u točki, koja raspolavlja polumjer kružnice, to će sve one tetive, čija središta leže bliže od te točke središtu kruga, biti veće od stranice* ***a****. Time se promjer raspada na* 3 *dijela: dva leže simetrično obzirom na središte kruga i svaki ima duljinu* $\frac{r}{2}$*; srednji dio kojim prolaze tetive veće od stranice* ***a*** *ima duljinu* $r = \frac{d}{2}$*, ako sa* ***d*** *označimo dužinu promjera; dakle će vjerojatnost biti:*

$$v = \frac{p}{m} = \frac{d}{2} \div d = \frac{1}{2} = 0.50$$



Slika 6.1.



Slika 6.2.

Drugo rješenje:

Ako zadamo jednu krajnju točku tetive na kružnici, tada tangenta u toj točki, s dvije stranice upisanog istostraničnog trokuta zatvara tri kuta po 60˚ (slika 6.2.). Da bi tetiva bila dulja od stranice trokuta, *mora prolaziti srednjim od ta tri kuta* pa će vjerojatnost biti

$$v = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Treće rješenje:

*Ako zadamo središte tetive, tada je tim središtem veličina tetive potpuno određena. Padne li tada to središte unutar kruga, čiji je polumjer jednak polovici polumjera r, bit će tetiva veća od stranice **a** upisanog istostraničnog trokuta (jer stranice upisanog trokuta tangiraju kružnicu s polumjerom duljine* $\frac{r}{2}$ *). Kako je površina manjeg kruga jednaka* $\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi$*, a zadanog kruga* $r^2\pi$*, vjerojatnost će biti izražena omjerom između mjernog broja točaka u malom i velikom krugu:*

$$v = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi \div r^2\pi = \frac{1}{4} = 0.25$$

„Bertrand dolazi do zaključka: Nijedno od rješenja nije neispravno, ali nijedno nije ni ispravno: pitanje je krivo postavljeno. Do tog zaključka dolazi on upravo na osnovu činjenice, da taj po izgledu jednostavan problem dovodi do **tri** rješenja. No upravo u Bertrandovoj tvrdnji, da je *pitanje krivo postavljeno* leži u biti razrješenje prividne paradoksalnosti njegova problema: radi se samo o tome, **na koji** ćemo način *po volji* povući tetivu u krugu. Kao i kod svih problema geometrijske vjerojatnosti radi se i ovdje o tome, da se *uzimanje po volji* ovog ili onog elementa može na različite načine protumačiti.“

Na kraju članka autor zaključuje: *Svakako postoji neizmjerno velik broj tetiva, koje su manje od stranice istostraničnog trokuta, upisanog u kružnicu. Isto je tako neizmjerno velik broj tetiva, koje su opet veće. Prema tome bi bio rezultat u smislu definicije vjerojatnosti:*

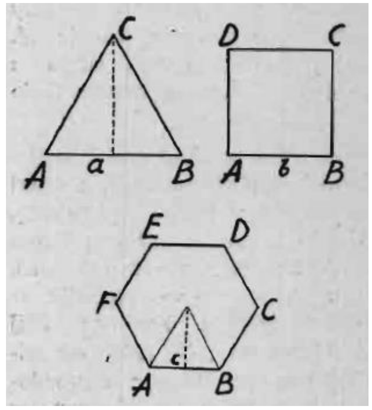
$$\frac{\infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

VII. Matematika u prirodi

U uvodnom dijelu jedinog članka ovog poglavlja, ***Pčelino saće kao matematički problem***, autor **Milenko Sevdić** ističe jedinstvenost načina života pčele koju naziva *čudesnim lakokrilim bićem*, kao i njezinih *voštanih dvora* – čudesnog djela marljivih radilica *koje se odlikuje geometrijskom pravilnošću*. *Zbog te odlike pčele se od davnina nazivaju geometrima*. Pčelu u raznim njezinim fazama i djelovanjima proučavao je dugi niz godina Maurice Maeterlinck, a svoja zapažanja iznio je u djelu *Život pčela*. O remek djelu pčele, šesterostranoj stanici, Maeterlinck je zapisao:

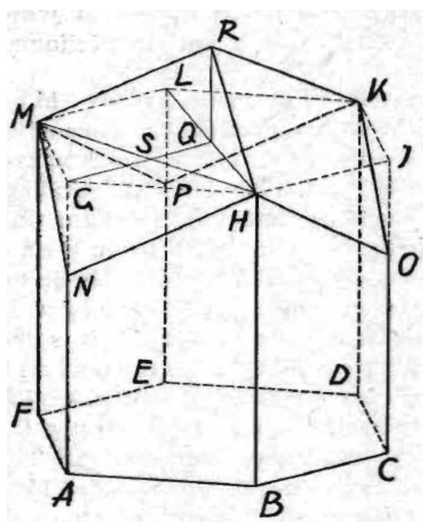
„Svi geniji zajedno ne bi mogli ništa u njoj da poprave. Ni jedno živo biće, ni sam čovjek nije stvorio toga u svojoj sferi, što su u svojoj stvorile pčele. Pa kad bi kakav um izvan zemaljske kugle pitao što li je na Zemlji najsavršenije stvorila životna logika, tada bi mu trebalo pokazati medeno saće.“

Sam prilog podijeljen je u tri dijela. U prvom dijelu pod naslovom *Oblik stanice i saća* Sevdić objašnjava oblik i građu saća: „Pčele za svoje potrebe grade četiri vrste stanica. Mi ćemo ovdje promatrati samo pravilne, t. j. trutovske i radiličke stanice, jer su njihove dimenzije tako stalne, a način izgradnje tako proračunat i precizan da nas baš stoga zanimaju sa stanovišta matematike. Stanica je dio šesterostranog prizmatičnog prostora, gore omeđenog sa tri romba koji su takvog oblika da se zadani volumen obuhvati najmanjom površinom. I njen oblik pravilnog šesterokuta ima geometrijsko značenje. Već su Pitagorejci znali: ako hoćemo da ravninu potpuno prekrijemo kongruentnim pravilnim likovima, to je moguće samo ili istostraničnim trokutima, ili kvadratima ili pravilnim šesterokutima (slika 7.1.). Ali još je jedna odlika šestrerokuta, jer od ova tri lika istoga opsega zatvara šesterokut najveću površinu.“



Slika 7.1.

Autor nastavlja daljnjim objašnjenjima: „Kako je dno stranice završeno s tri romba, koji čine trostranu piramidu, imaju pobočne plohe oblik trapeza (slika 7.2.). Od osobite su važnosti veličine kuteva u rombima i trapezima, jer će o njima baš ovisiti, kao što ćemo vidjeti, da li će se uštediti voska pri izgradnji.“ Zanimljivo je i kako pčele slažu stanice odnosno tvore saće: „Piramidalno dno jedne stanice prednjeg sloja, koje se sastoji iz tri romba, služi kao dio dna triju stanica drugoga sloja.“ Osim uštede voska, *ovaj raspored u slojevima ima i prednost u pogledu čvrstoće gradnje*.



Slika 7.2.

U dijelu priloga s podnaslovom *Nešto iz povijesti problema* autor upoznaje čitatelja sa znanstvenicima i matematičarima koji su proučavali stanice saća. *Oblik stanice potanko* *tumači Reaumur u svome djelu o insektima. Proučavanjem stanice pozabavili su se među prvima Maraldi i Cassini* koji su mjerenjem utvrdili da veći kut u rombu iznosi 109˚28', a manji 70˚32'. „Reaumur je uočio da bi se tu moglo raditi o uštedi voska pa je svoju zamisao izložio matematičaru Koenigu u obliku problema: Između svih šesterostranih stanica s piramidalnom osnovom, koja se sastoji od tri jednaka romba, neka se odredi ona koja se može izgraditi s najmanje voska.“

Koenig je riješio problem i utvrdio da kutovi u rombu iznose 109˚26' i 70˚34'. Tim problemom su se bavili i Leo Lalaune, Mac Laurin, Ruđer Bošković i Gleischer. *Bošković je prvi primijetio važnu činjenicu da se sve ravnine, od kojih je stanica izgrađena, sastaju pod kutom od* 120˚. Darwin je naglasio *da o tom kutu zavisi čvrstoća, koja je veća nego li da je taj kut pravi.*

U *Rješenju problema* autor izlaže matematičko rješenje. Najprije promatranjem piramidalnog dna stanice izvodi zaključak *da je volumen stanice koja završava s tri romba jednak volumenu stanica koja bi završavala šesterokutom, pa ma kakav bio položaj onih romba. Kako je volumen uvijek stalan, treba odrediti položaj romba* tako da se radi o minimalnoj površini. *Položaj romba zavisi od veličine njegova kuta, pa će se na taj način minimum površine izraziti, ako se nađu pripadni kutovi.*

Najprije se izračuna *površina* cijele stanice (izračuna se površina šest trapeza i tri romba) koja iznosi:

$$P = 6ab - 3ax + 3\sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}$$

Nakon što se prva derivacija ove funkcije izjednači s nulom

$$P' = -3a + \frac{3 \cdot 6a^2x}{2\sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}} = 0$$

nalazi se da je

$$x^2 = \frac{3a^4}{4 \cdot 6a^2} = \frac{a^2}{8} \text{ ili } x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Pomoću dobivene vrijednosti za *x* izvodi se daljnji zaključak *da je kvadrat kraće diagonale u rombu jednak polovini kvadrata duže diagonale*. Iz tog uvjeta koji moraju zadovoljavati *diagonale romba* izračuna se da veći kut u rombu iznosi 109˚28'16", odnosno manji kut kao njegov suplement 70˚31'44".

Autor na kraju iznosi još jedan primjer iz prirode (osa gradi slično saće kao pčela, ali ono ipak nije tako savršeno jer osa ne iskorištava jedno dno kao zajedničko za više stanica) te zaključuje da *čovjek u prirodi nalazi svu silu problema* koji mogu biti poticaj za promatranje i s matematičkog gledišta.

VIII. Neki glasoviti problemi i poučci

Ovo je najveće poglavlje u knjizi, a sadrži ukupno sedam priloga. Prvi prilog ***Kvadratura kruga*** autora **Vladimira Vranića** donosi čitatelju najprije osnovne informacije o tri starogrčka problema: *trisekciji kuta, podvostručenju kocke i kvadraturi kruga*. Želeći objasniti zbog čega su problemi nerješivi, autor najprije definira elementarne geometrijske konstrukcije, algebarske jednadžbe, algebarske i transcendentne brojeve, a zatim se osvrće na problem kvadrature kruga koji se *svodi na konstrukciju broja π*. Davno su pronađena *aproksimativna rješenja problema* (*Papyrus Rhind*, Arhimed, Ptolomej), a brojni su ga *veliki umovi* pokušavali riješiti, pa i umjetnik Leonardo da Vinci. *On je taj problem riješio mehanički, uzevši valjak, koji ima visinu jednaku polovici polumjera njegove osnovke* (površina plašta, koji je kad se rastvori, pravokutnik, jednaka je površini osnovke – kruga). Tisućljećima su brojni matematičari nastojali izračunati broj *π* i *to je postao najglasovitiji problem u matematici*. Problem je riješen tek 1882. godine kada je *Lindemann dokazao da je π transcendentan broj*. Nadalje, autor izlaže kako se dolazi do broja *e* te također o njegovoj povezanosti s brojem π (*iz transcendentnosti broja e slijedi da je i π transcendentan broj*). Svoj prilog zaključuje isticanjem *doprinosa tri klasična problema razvoju geometrije i matematike uopće*. Ogromni napori, uloženi u rješavanje tih problema, obogatili su

matematiku brojnim novim spoznajama i ukazali na važnost matematičke teorije u rješavanju praktičnih problema.
Članak završava riječima:
„Još na jednu okolnost htjeli bismo upozoriti. Često nam se pričinja, da su izvjesne matematske teorije posve apstraktne i bez ikakove veze s realnošću. Kad su naučenjaci počeli da se bave transcendentnim brojevima, izgledalo je to sve kao zanimljiva igra bez ikakvog cilja. I bilo je tako, a eto jednog dana spustili smo se iz tog apstraktnog područja u posve realno i opipljivo područje, egzistencija transcendentnih brojeva dovela nas je do vrlo realnog zaključka, da kvadratura kruga nije moguća. Dokaz za to uspio je tek onda, kad se pokazalo, da postoje transcendentni brojevi i da je π takav broj.
I kada na taj način u matematici nakon toliko napora dolazimo do rješenja, pa makar ono bilo i negativno, onda shvaćamo i svu ljepotu i čar te nauke."
Slijedi prilog **Mire Hercigonje *Fermatov problem i njegovi rješavatelji***. U njegovom prvom dijelu s podnaslovom *Pitagorini brojevi* autorica donosi formule za izračunavanje Pitagorinih brojeva. To su prirodni brojevi *x*, *y*, *z* koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Matematičar L. Kronecker dokazao je 1901. godine da su formulama

$$x = 2pqt, y = t(p^2 - q^2), z = t(p^2 + q^2)$$

gdje za prirodne brojeve *p*, *q*, *t* vrijedi

$$t > 0,\ p > q > 0,$$

dani svi slučajevi bez izuzetka i bez ponavljanja za rješenje jednadžbe

$$x^2 + y^2 = z^2$$

u prirodnim brojevima, te da su tim formulama dani svi Pitagorini brojevi.
U drugom dijelu priloga s podnaslovom *Fermatov poučak* autorica izlaže o Diofantu (250. – 350.), grčkom matematičaru, koji je među prvima sustavno obradio algebru, a zatim i Fermatu (1601. – 1665.) koji je, između ostalog, jako puno pridonio razvoju teorije brojeva (dio aritmetike u kojem se istražuju svojstva cijelih brojeva). Fermat je svojim poučcima i

zadatcima, koje je zadavao svojim suvremenicima, dao veliki poticaj za istraživanje teorije brojeva. Svoj *zadnji teorem Fermat je izrekao oko 1637. godine*, a on glasi:
Nemoguće je naći tri prirodna broja x, y, z koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^n + y^n = z^n \text{ za } n > 2.$$

U daljnjem tekstu autorica daje i kratki pregled pokušaja dokazivanja Fermatovog poučka. Ističe također sljedeće: „Za sve ostale poučke, za koje je Fermat naveo, da ima dokaz, uspjelo je dokaz naći, pa je velika vjerojatnost, da će se i za ovaj zadnji teorem otkriti.“.
Treći dio priloga s podnaslovom *Wolfskehlova zaklada* donosi zanimljive informacije o pokušaju matematičara Wolfskehla da potakne nalaženje rješenja velikog Fermatovog problema osnivanjem zaklade od 100.000 maraka. Wolfskehl je umro 1907. godine. I on je rješavao Fermatov problem te dao dokaz za neke kompleksne brojeve. Zakladu je ostavio kako bi se njome nagradio onaj tko u razdoblju od 1907. do 2007. riješi Fermatov problem. Obećana novčana nagrada izazvala je pravu navalu pokušaja, kako matematičara tako i nematematičara. Za vrijeme Drugog svjetskog rata Zaklada je propala, ali je samo njezino osnivanje nanijelo više štete nego koristi (izvedeni su brojni pogrešni dokazi, a bilo je i onih kandidata koji su zbog neuspjeha završili u bolnicama za psihičke bolesti).
Slijedi prilog **Milenka Sevdića** ***Nekoliko dokaza Pitagorina poučka*** u kojem autor daje prikaz deset različitih dokaza Pitagorinog poučka: *dva koja potječu od Bhaskare (12. stoljeće), jedan koji potječe iz 1766. godine, a ostalih sedam iz 19. stoljeća.*
Kratki nepotpisani prilog ***Kako zapamtiti vrijednost broja π?*** daje savjet kako se stihovi pjesme mogu iskoristiti u svrhu lakšeg pamćenja vrijednosti broja π. Čitatelju se nude stihovi na hrvatskom (*Iz kalendara „Bošković“ – god. 1918.*) i francuskom jeziku. Broj slova u pojedinim riječima znači brojku.
Evo kako glasi stih na hrvatskom jeziku:

Nek	i	sada	i	vazda	slavljeno
3	1	4	1	5	9
Na	zemlji	jeste	ime	onoga	
2	6	5	3	5	

Arhimeda, helenskog mudraca!
8 9 7
Domišljat bje on kao Prometej;
9 3 2 3 8
Svet plamen on podade nama tad,
4 6 2 6 4 3
Kad kružnicu baš on odredio
3 8 3 2 7
Računajuć...
9

U sljedećem prilogu ***Apolonijev problem*** **Mira Erega** iznosi jednu od metoda za rješavanje Apolonijevog problema koji se sastoji u tome da se *konstruira kružnica koja tangira tri zadane kružnice*.

Milena Varićak izlaže u svom članku ***Malfattijev problem***, koji je *postavio talijanski matematičar Malfatti (1731.-1807.): da se u zadanom trokutu upišu tri kružnice, koje se međusobno dotiču, a svaka se dotiče dviju stranica trokuta*. Problem je riješilo više matematičara, a rješenje koje se izlaže u prilogu *objelodanio je Schellbach u 45. svesku Crellovog žurnala*.

Problem paralela preuzeo je **Milenko Sevdić** iz časopisa *Priroda* – 1946., br. 5. U prilogu se najprije govori o djelu velikog antičkog matematičara Euklida koji je u svojim *Elementima* sistematizirao sve tadašnje znanje iz elementarne geometrije. Izgrađujući svoje djelo Euklid je krenuo od 23 definicije, pet aksioma i pet postulata. Njegov peti postulat, koji glasi: *Ako pravac siječe dva pravca i s njima na istoj strani čini kutove, koji su zajedno manji od dva pravca, pa ako ova dva pravca produžimo, onda oni treba da se sijeku na onoj strani, na kojoj leže oni kutovi*, doživio je brojne kritike i potakao istraživanja. Problem su tek nakon 2200 godina riješila dva matematičara: Rus Nikola Ivanović Lobačevski i Mađar Janoš Bolyai. Lobačevski je svoj rad tiskao prije Bolyaia, a njegove su nove predodžbe značile veliku prekretnicu u razvoju matematičke misli i stvorile temelj za razvoj tzv.

neeuklidske geometrije. Iz priloga se može saznati i o životu i djelu Lobačevskog (rođen je 1793. godine), koji je kao mladić zbog svoje živahnosti često dolazio u sukob sa strogim pravilima sveučilišta. S 29 godina postao je redovni profesor na sveučilištu, a s 34 izabran i za rektora. Vršio je i dužnost sveučilišnog bibliotekara. U velikim društvenim previranjima i teškom razdoblju za znanost, Lobačevski je sačuvao neovisnost i nikada nije odustao od svojih znanstvenih zamisli. Umirovljen je 1846. godine, što je za njega bio veliki udarac, a nakon toga je izgubio sina i potpuno oslijepio. Njegove su zasluge pale u zaborav i tvorac nove geometrije umro je tiho i neprimjetno 1856. godine.

IX. Iz astronomije

U ovom poglavlju jedini članak pod naslovom ***Keplerovi zakoni*** napisala je **Milena Varićak**. U njemu se iznose podatci o životu i djelu Johana Keplera (1571. – 1630.). U razvoju astronomije prije Keplera važnu je ulogu odigrao rad Nikole Kopernika (1473. – 1543.) koji je tvrdio sljedeće:

„1. Dnevna vrtnja nebeske sfere samo je prividna, a u istinu rotira Zemlja oko osi koja ide kroz njezino središte.

2. Zemlja je planet i kruži oko Sunca koje miruje.“

Kopernikove su tvrdnje naišle na velik otpor. Između ostalog, *prigovorili su mu da bi zvijezda morala mijenjati prividno svoj položaj, ako se Zemlja zaista okreće oko Sunca*. Danski astronom Tycho de Brahe je *postavio novu teoriju, po kojoj se Sunce i Mjesec okreću oko Zemlje, ali ostali planeti oko Sunca*. Ta njegova hipoteza *nije važna u razvoju astronomije*, ali su njegova dugogodišnja opažanja koristila njegovom učeniku i nasljedniku Kepleru. Kepler je kao asistent kod Tycha dobio zadatak ispitati gibanje Marsa. Tako je pronašao da ne vrijedi Aristotelov aksiom o jednolikom gibanju planeta po kružnicama.

Keplerova prva dva zakona glase:

1. *Svi se planeti gibaju po elipsama, a Sunce je u jednom žarištu te elipse.*
2. *Radij vektori planeta prijeđu u jednakim vremenima jednake površine.*

Svoje je zakone Kepler objavio u znamenitoj knjizi *Astronomia nova seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae martis*, koja je tiskana 1609. godine u Pragu. Kepler je živio u vrijeme vjerskih progona i građanskog rata. Plaća mu nije redovito isplaćivana pa je teško prehranjivao sebe i svoju obitelj. No, unatoč svim teškoćama nije odustao i uspio je dovršiti svoje djelo. Treći Keplerov zakon, koji je objavio deset godina kasnije u knjizi *Harmonices mundi*, glasi:

3. Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.

Pomoću ovoga Keplerovog zakona može se izračunati srednja brzina planeta, koja je manja što je veća njegova udaljenost od Sunca. *Kepler je već znao, da Sunce nije samo geometrijsko već fizikalno središte gibanja planeta,* odnosno *da je ono sjedište sila, koje su uzrok tom gibanju.* Kako je prvi uvidio usku povezanost fizike i astronomije, naziva ga se i utemeljiteljem nebeske mehanike, o kojoj je napisao knjigu *Astronomia nova*.

Njegovo djelo je završio Isaac Newton koji je otkrio da se Sunce i planete međusobno privlače prema zakonu gravitacije:

$$P = k\frac{M \cdot m}{r^2}.$$

X. Razni članci

Prilog **Vladimira Varićaka *Boškovićevo mišljenje o nekim osnovnim pitanjima o definiciji pravca*** preuzet je iz *Matematičkog rada Boškovićevog* (Rad JAZU, knj. 181, str. 101.-106.).

Milenko Sevdić autor je priloga ***Kako su postali logaritmi*** u kojem najprije uvodi i definira pojam logaritmiranja kao operaciju koja je (uz korjenovanje) inverzna operaciji potenciranja – *logaritmirati znači naći eksponent, kojim treba potencirati bazu da se dobije zadani broj (numerus)*. Logaritmi su otkriveni u 16. i 17. stoljeću zbog potrebe rješavanja praktičnih problema u području astronomije, geodezije i nautike. *Pravim osnivačem logaritama smatra se danas Napier, ali i prije njegova rada postojali su pokušaji ili barem postupci, koji se mogu smatrati predradnjama do konačnog pronalaska logaritama.*

Najstariji trag vodi do Arhimeda (287. – 212.) koji je u svom *Pješčanom računu* dao postupak pridruživanja članova aritmetičkog i geometrijskog niza s kvocijentom 2 sljedećom shemom:

0   1   2   3   4   5   6   7   8   …..

| | |

1   2   4   8   16   32   64   128   256 …..

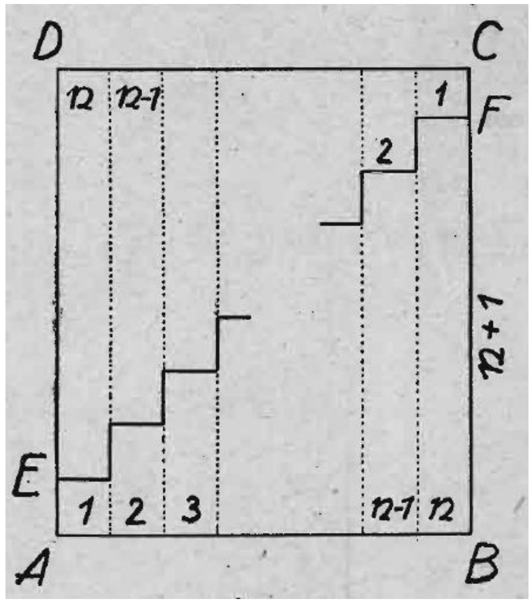
Ako pomnožimo brojeve 4 i 32, kao rezultat ćemo dobiti broj 128 koji je pridružen broju 7, koji se dobije zbrajanjem brojeva 2 i 5. Na taj način, ako želimo pomnožiti dva člana donjega niza, *dovoljno je zbrojiti dva pripadna člana gornjega niza, pa će pod zbrojem tih dvaju članova ležati traženi produkt. Ali Arhimed se zadovoljio samo tim rezultatom i ne naslućujući, da je tu i nesvjesno primijenio pravilo za logaritam produkta.*

Nakon dužeg vremenskog razdoblja bilo je pojava sličnog pridruživanja (liječnik Nicolaus Chuqueta, svećenik Michael Stiefel). Stiefel (1487. – 1567.) je naslutio da se tu radi o *čudesnim svojstvima* brojeva i njegove su spoznaje kasnije iskoristili drugi matematičari. John Napier Merchiston je prvi izradio logaritamske tablice (1614. godine), a nakon njega učinili su to i Henry Briggs, Adriaen Vlacq i Slovenac Vega. Sve do 18. stoljeća prevladavala je praktična strana ovog problema, a teoretsku podlogu logaritmima dao je Euler (1707. – 1783.) i tek tada oni dobivaju svoje pravo tumačenje.

Autor sljedećeg priloga pod nazivom ***Izračunavanje logaritama*** također je **Milenko Sevdić** koji daje prikaz nekoliko načina izračunavanja logaritama brojeva:

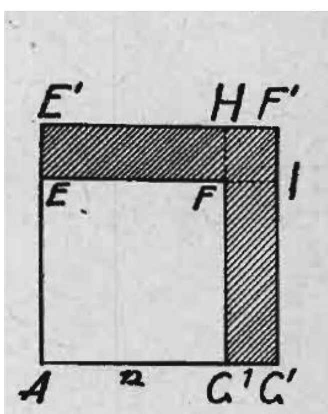
1. *Logaritmi brojeva od 1 do 10*
2. *Izračunavanje nekih logaritama vađenjem korjena*
3. *Točnije određivanje mantise*
4. *Metoda više matematike.*

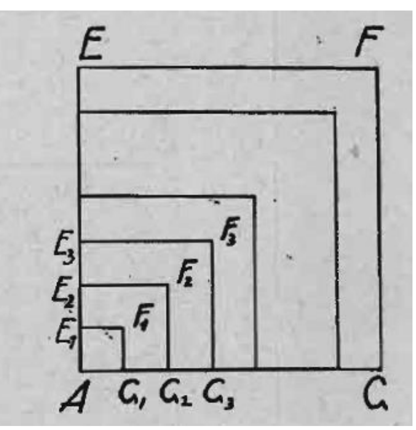
Geometrijski postupak sumiranja nekih redova izlaže **Milenko Sevdić** u članku ***Sumiranje nekih redova***. Najprije je čitatelju dan prikaz postupka sumiranja prvih *n* brojeva (slika 10.1.).



Slika 10.1.

Geometrijski postupak sumiranja prvih *n* neparnih brojeva *potječe od Pitagorejaca* i prikazan je na slici 10.2. i 10.3.





Slika 10.2. Slika 10.3.

Autor u prilogu izlaže i postupak sumiranja reda $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + \ldots + n(n + 1)$, izračunavanja sume kvadrata prvih *n* brojeva i sume kubova prvih *n* brojeva.

Prilog ***Kako je Tales izmjerio visinu Keopsove piramide*** nije potpisan, a u uvodnom dijelu donosi podatke o Talesovom životu koji je postao poznat u svom rodnom gradu kada je *585. godine prije n. e. prorekao i jednu pomrčinu Sunca pa su ga prozvali „Mudracem iz*

Mileta“. Slijedi izvadak iz *Colerusove* knjige *Od Pitagore do Hilberta u kojem je rekonstruiran trenutak izmjere visine Keopsove piramide*:

„Tako on stoji u pustinjskom pijesku podno velike piramide. Jedan od svećenika smješeći se zapita, koliko je visoka piramida kralja Chufu (Keops). Tales malo razmišlja pa odgovara, da on ne će visinu cijeniti od oka, nego će je izmjeriti i to bez ikakvog naročitog pribora, bez svakog pomoćnog sredstva. Legao je u pijesak i odmjerio vlastitu dužinu tijela.

Što li to namjerava? – pitaju se svećenici. *Stat ću jednostavno*, objašnjava on, *na jedan kraj ove izmjerene dužine svoga tijela i čekat ću, dok moja sjena ne bude točno onoliko dugačka, kolika je i dužina moga tijela. U istom trenutku mora i dužina sjene piramide vašega faraona Chufu iznositi točno onoliko koraka, koliko je i piramida visoka.*

Dok je svećenik zabezeknut nevjerojatnom jednostavnošću rješenja još razmišljao da tu nije možda pogrešan zaključak, da se tu možda ne krije kakva smicalica, Tales već dalje govori:

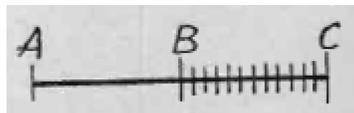
A ako hoćete, da vam ovu visinu izmjerim u ma koje doba dana, tada ću zabosti ovaj štap u pijesak. Gle! – njegova sjena iznosi upravo polovinu štapa. Prema tome mora sada i sjena piramide iznositi polovinu njezine visine. Vi ste inače sposobni, da mjerenja izvodite vrlo točno. Treba samo dužinu štapa usporediti sa dužinom sjene, pa onda – da dobijete visinu piramide – pomnožite duljinu sjene piramide s dobivenim brojem.

Na ovaj je način Tales iz Mileta iznenadio i zadivio Egipćane.“

Iz knjige Charlesa Nordmanna *Einstein i svemir* preuzet je prilog ***Pravci i geodetske linije***, a iz knjige Mihajla Pupina *Sa pašnjaka do naučenjaka* prilog ***Pupinov kalem***.

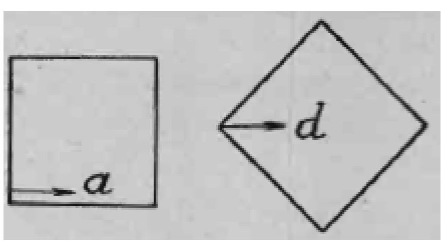
Na kraju ovoga poglavlja je članak ***Optičke obmane*** napisan po dr. M. Borisavljeviću. Čitatelju se najprije objašnjava fenomen *optičke obmane* na primjeru željezničkih tračnica, koje su paralelne, a dok ih mi promatramo, izgleda kao da se tračnice sijeku (što se više tračnice udaljuju od naših očiju, to je sve manji vidni kut). *To što nam izgleda da se sijeku, samo je „obmana“ našeg oka. Smatralo se, da od dva proturječna suda, jedan mora biti pogrešan, a drugi točan.* Ali to je u ovom slučaju netočno, jer su tzv. *„optičke obmane“ prirodni i subjektivno istiniti fenomeni*. Nazivaju se *obmanama* zbog njihovog razlikovanja *od objektivnog svijeta stvari*. U tekstu se zatim daje pregled nekoliko najvažnijih i najzanimljivijih primjera ovoga fenomena.

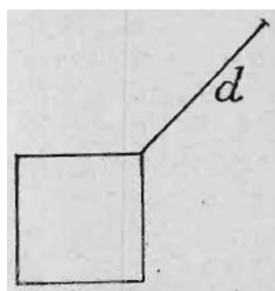
„Ako jednu dužinu (slika 10.4.) objektivno raspolovimo, pa desni dio podijelimo nizom crtica, onda će nam podijeljeni dio izgledati veći od nepodijeljenoga." *Oči sukcesivno gledaju neiscrtkani dio od A do B klizeći po njemu bez prepreke*, dok na dijelu BC oči nailaze na niz prepreka pa su pokreti *diskontinuirani* i zahtijevaju veće vrijeme percepcije.

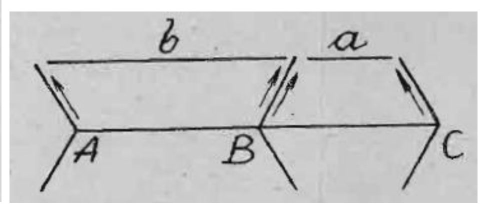


Slika 10.4.

„Jasan dokaz da je naše gledanje sukcesivno i da mi prostor gledamo vremenski imamo na slici 10.5. Lijevi kvadrat nam izgleda manji od desnog. To dolazi odatle što lijevi kvadrat gledamo duž strane *a*, a desni duž dijagonale *d*. Kako je dijagonala veća od strane, to je vrijeme gledanja dijagonale veće od vremena gledanja strane. Još bolje se to vidi na slici 10.6., gdje nam se pričinja da je dužina *d* veća od dijagonale i ako je ona jednaka dijagonali.

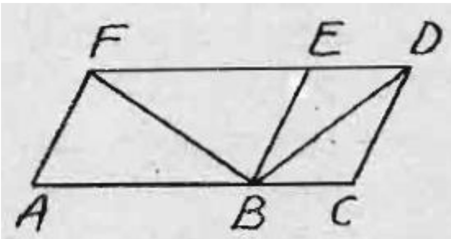


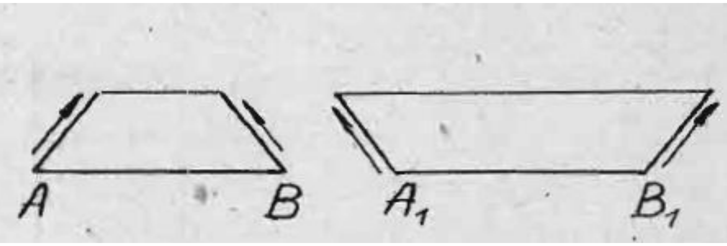




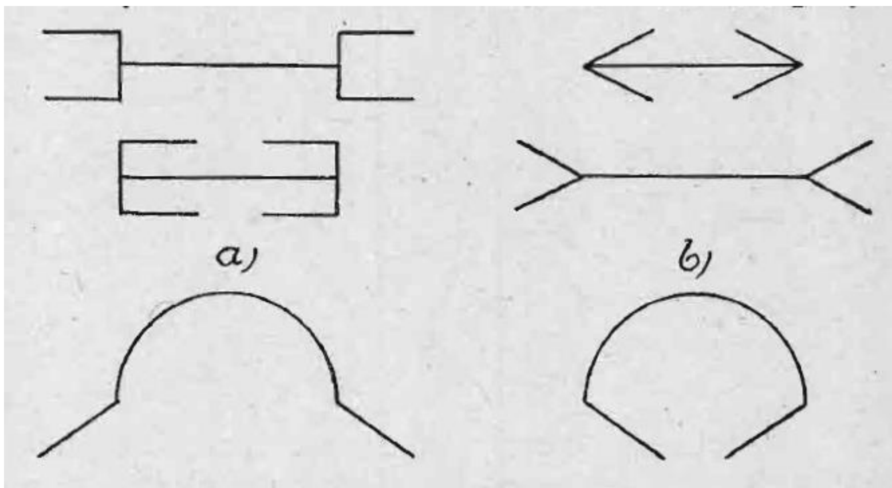
Slika 10.5. Slika 10.6. Slika 10.7.

Na slici 10.7. imamo čuvenu Mǜller-Lyerovu obmanu: Lijeva dužina *AB* izgleda nam veća od dužine *BC*. Tumačenje ovoga fenomena nalazi se također u sukcesivnom gledanju odnosno u konvergentnom i divergentnom pokretu očiju." Promatrajući dužinu *BC pokret očiju se na neki način sužava* pa nam dužina izgleda kraća. Slično se može vidjeti i na slikama 10.8., 10.9. i 10.10.



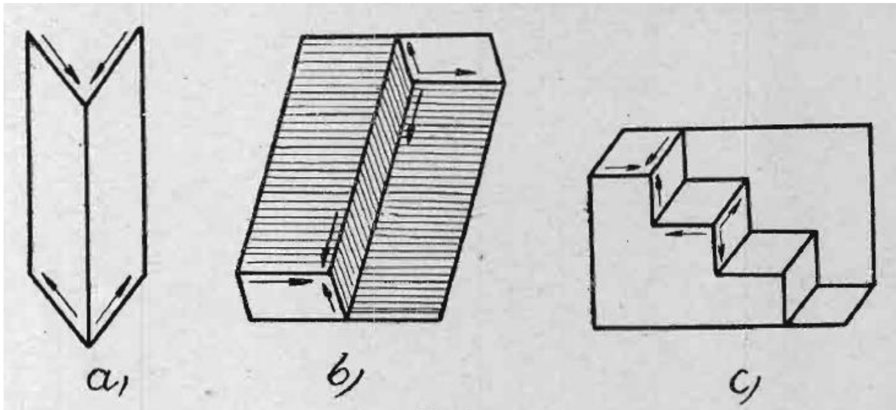


Slika 10.8. Slika 10.9.

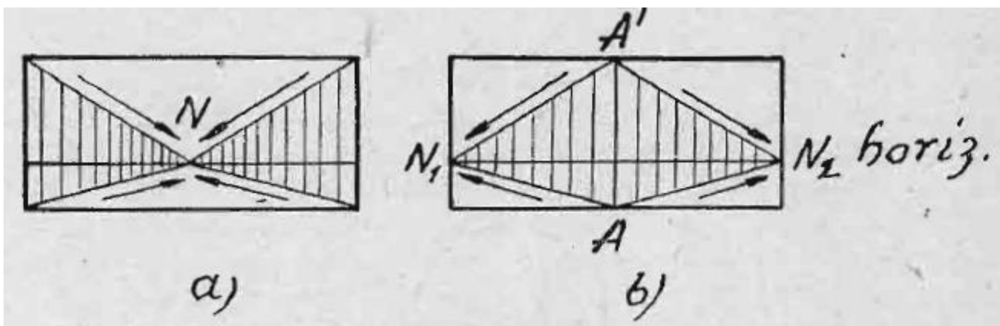


Slika 10.10.

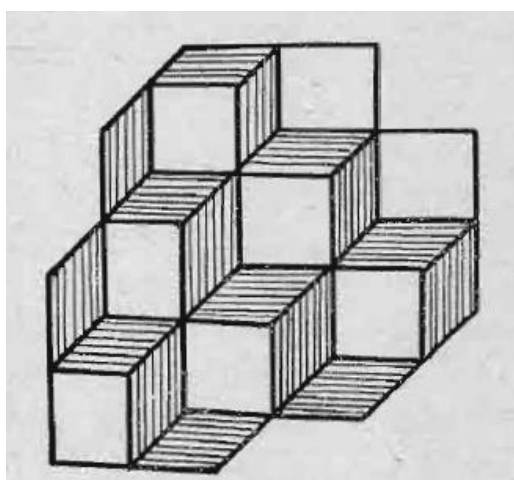
Najzanimljiviji i najvažniji su svakako ***k***_onkavnokonveksni fenomeni_ prikazani na slikama 10.11., 10.12.. i 10.13., gdje *jedna te ista slika izgleda čas konkavna čas konveksna*. „Svi ovi fenomeni se tumače pokretima očiju. Tako ako se oči kreću od jednoga kuta konvergentno imat ćemo utisak udubljenog, a ako se kreću divergentno imat ćemo utisak ispupčenog.“



Slika 10.11.



Slika 10.12.



Slika 10.13.

XI. Dva stara matematičara Dubrovčanina

U ovom se poglavlju čitatelju nude zanimljivi prilozi o životu i djelu dva matematičara iz Dubrovnika: ***Marinu Getaldiću*** i ***Ruđeru Boškoviću***. Autor oba priloga je **Milenko Sevdić**. Za svakoga od ovih matematičara Sevdić donosi niz detalja o njihovom životnom putu, karakteru, naravi, problemima s kojima su se susretali, te njihovim zaslugama na znanstvenom području.

U uvodnom dijelu priloga o Marinu Getaldiću (1566. – 1626.) ističe da u matematici nemamo puno istaknutih imena pa je stoga potrebno sačuvati uspomenu na njih. Učitelji su još u ranoj Getaldićevoj dobi uočili njegov matematički talent pa je poslan u Rim na studij gdje ga je znameniti matematičar Kristof Klavije uveo u matematičku znanost onoga vremena. Kako bi proširio svoje matematičko znanje, Getaldić putuje po Europi. Tu je upoznao Viètea i postao njegov oduševljeni sljedbenik. Nudili su mu mjesto sveučilišnog profesora, ali je to odbio jer je *volio više učiti nego poučavati*. Za života je izdao pet matematičkih djela, a najveće mu je djelo objavljeno poslije njegove smrti. *Čovjek pitome duše, krotkoga srca i izvanredne širine uma* ostao je dosljedan i u odbijanju napada na svoja rješenja nekih problema. Getaldić se uglavnom bavio geometrijom, a u svom radu je spojio geometriju s algebrom i promatrao geometrijske probleme pod utjecajem algebarske metode. Zbog toga se on smatra jednim od najzaslužnijih prethodnika analitičke geometrije.

Prilog o Ruđeru Boškoviću (1711. – 1787.) znanstveniku, pjesniku i diplomatu, sastoji se iz dva dijela. Prvi dio nosi naziv *Biografija,* a drugi *Bošković kao učenjak*. Bošković je rođen u skromnoj obitelji dubrovačkih pučana. U dobi od 15 godina stupio je u Družbu sv. Ignacija te je poslan na studij u Rim. Još za vrijeme teološkog studija počinje predavati matematiku, a također i objavljivati znanstvene rasprave. Nakon što je doktorirao teologiju počinje svoj javni život kao znanstvenik. Sa željom da proširi svoje znanstvene vidike, Bošković je proputovao gotovo cijelu Europu. Njegova *živahna ćud* navela ga je na raznovrstan znanstveni rad. Sve što je radio, radio je s velikom ljubavlju pa je unaprijedio ne samo matematiku, nego i astronomiju, fiziku, geodeziju, meteorologiju i filozofiju.

Dio priloga *Bošković kao učenjak* podijeljen je prema područjima Boškovićevog znanstvenog rada: *Veliki astronom*, *Odličan optičar i inženjer*, *Geodetski radovi*, *Dobar nastavnik i filozof prirode*, *Preteča Einsteina* i *Savršen matematičar*. Iako je Bošković bio profesor matematike i na tom području ostavio iza sebe mnoge radove, bavio se matematikom samo kao pomoćnim sredstvom za istraživanja u drugim područjima. Na kraju članka citira autor prof. Varićaka *koji je naročito proučavao Boškovićev matematički rad*: „I ako je on na pr. u filozofiji um, koji se uzdiže visoko nad prividne pojave, što ih osjetilima zapažamo, u matematici nije on prijatelj spekulacija. Ne izmišlja sam apstraktnih problema i ne gradi matematičkih kula na tankoj grani od oblaka, već se ponajviše trudi oko pitanja, koja su mu se sama i posve prirodno nametnula kod njegovih astronomskih i geodetskih poslova ili kod razmišljanja o fizikalnim problemima."

XII. Žena u matematici

Svoje mjesto u ovoj knjizi našla je i tema žene u matematici. Jedini prilog u ovom poglavlju je prilog ***Sonja Kovalevska*** autorice **Zore Bakarić**.

Autorica na početku ističe probleme koje je *žena imala od najstarijih vremena* jer joj nije bilo dopušteno obrazovanje i bavljenje znanošću. Grčki matematičar Theon je imao kćer Hypatiju, koja je predavala matematiku u Aleksandriji (*kamenovana je 415. godine*). U Rimu nije bilo žena matematičarki, a u srednjem vijeku je znanost bila u rukama svećenstva pa, osim vladarica i plemkinja, žene nisu imale priliku za izobrazbu. U novom vijeku dolazi do promjena i muškarci *više ne poriču ženama sposobnost da se bave naukom*. Pojavljuju se znanstvenice, ali kao suradnice svojih muževa i braće (Marie Margarethe Kirch i Carolina Herschel). U zapadnoj Europi žene se pojavljuju i kao predavači na sveučilištu (Maria Gaetana Agnesi, Laura Bassi i Sophie Germain).

Istovremeno, prilike u Rusiji ne dopuštaju ženama studiranje na domaćim sveučilištima pa one pokušavaju otići u inozemstvo na studij. Kako tadašnja apsolutistička vlast teško daje putovnice neudanim studenticama, žene su prisiljene sklapati prividne brakove kako bi otišle u inozemstvo. Tako je u Njemačku na studij došla i Sonja, kćerka ruskog generala Korvin-Krukovskog, te sklopila prividni brak s geologom Valdemarom Kovalevskim. Studira u Heidelbergu pa zatim odlazi u Berlin, gdje postaje učenica profesora Weierstrassa. Nakon što je doktorirala 1879. godine, vraća se u Rusiju i bavi literarnim radom. Na poziv profesora Mittag-Lefflera postaje docentica na sveučilištu u Stockholmu. Tijekom jednog svoga putovanja po Europi oboljela je, ali i dalje drži predavanja ne mareći za bolest. Umrla je ubrzo nakon toga u 41. godini života.

Svoj prilog autorica završava ovako:

„Danas još uvijek ima ljudi koji poriču sposobnost ženama, da mogu dati nešto od sebe, a ima isto tako i država. Tako je na pr. oko 1940. jedna napredna azijska država ukinula baš matematiku na ženskim srednjim školama.

Ali novo vrijeme donosi svoje. Danas naša žena može da se izobrazi na kojem god polju hoće, a tu slobodu donosi novo stanje nastalo poslije naše borbe. Dok u svijetu postoji još uvijek neko čudno držanje prema ženama, dotle toga na pr. u novoj socijalističkoj državi SSSR nema. Žena je ravnopravna. Omogućeno joj je da se bavi i naukom, da sudjeluje aktivno u politici, pa da sjedi ne samo za sveučilišnom katedrom nego i na ministarskoj stolici."

XIII. Zanimljivosti, zabava, šala i t. d.

Ovo poglavlje sadrži ukupno šest priloga iz zabavne matematike nepoznatih autora (potpisan je samo prvi prilog).

Prilog **Branka Pavlovića *Šahovske figure i zlatni rez*** donosi primjer o neočekivanoj povezanosti zlatnog reza i šahovske ploče i figura te otkriva *harmoničnost cjeline* koju čine šahovske figure.

U ***Bachetovom problemu utega*** odgovara se na sljedeće pitanje koje se nalazi u Bachetovoj knjizi *Problémes plaisans et delectables* (1612.): *Koji su utezi potrebni, da bi se s njima mogla izvagati svaka težina do 40 grama uz uvjet da bude što manje tih utega?* Macmahon je poopćio ovaj problem (*na koji način se mogu izvagati težine od* 1 *do n grama*) i izveo formule pomoću kojih se on može riješiti. Prema tim formulama postoji osam mogućnosti za vaganje težine od 40 grama, a jedna od njih je i rješenje Bachetovog problema (1 uteg od 1, 1 od 3, 1 od 9 i 1 od 27 grama).

Slijedi prilog ***Pogađanje brojeva*** koji navodi četiri različita *primjera* pogađanja brojeva:

1. *Pogoditi izbrisanu cifru u rezultatu*
2. *Unaprijed pogoditi rezultat*
3. *Pogađanje zamišljenog broja*
4. *Pogađanje dvaju brojeva.*

Raskinut lanac objašnjava potrebu analize prije donošenja zaključka na posve jednostavnom primjeru raskinutog lanca kojeg je potrebno sastaviti tako da trošak tog posla bude što manji.

Članak ***Nekoliko zanimljivih primjera*** nudi četiri naizgled nerješiva ili besmislena problema i njihova rješenja.

U prvom primjeru otac daje trojici sinova različit broj jaja (15, 50, 85 komada), a zahtijeva od njih da, prodajući jaja po istoj cijeni, donesu kući istu količinu novca. Sinovi su ocu ispunili želju (prodavali su najprije na komad po istoj cijeni, a zatim po tuce).

Drugi primjer govori o jednom Arapinu koji *umirući ostavi* 17 *deva trojici svojih sinova*. *Oni su trebali podijeliti te deve tako da najstariji sin dobije polovinu, srednji trećinu, a najmlađi devetinu deva.* Kako sami nisu mogli pronaći rješenje, sinovi su otišli kadiji. Nakon što je razmislio, kadija je tražio *da mu se dovede jedna njegova deva* pa ih je sad bilo *ukupno* 18. Nakon podjele najstariji sin je dobio 9 deva (polovinu), srednji 6 (trećinu) i najmlađi 2 deve (devetinu), što ukupno iznosi 17 deva. Sinovi su otišli kući zadovoljni podjelom, a *kadiji ostade njegova deva*.

U trećem primjeru treba riješiti problem manjka novca nakon prodaje jabuka. „Djevojka je pošla na trg prodati 60 jabuka, da ih proda i to 3 komada po 2 dinara. Trebala je dakle prodati dinara. Njena susjeda je zamoli da proda i njenih 60 jabuka, ali pošto su bile bolje vrste, tražila je, da ih prodaje 2 komada po 2 dinara.“ Djevojka je odlučila prodavati zajedno 3 svoje i 2 susjedine jabuke odnosno ukupno 5 jabuka po 4 dinara. Prodala je sve jabuke i izračunala da njoj pripada 40 dinara ($20 \cdot 2 = 40$), a da bi susjedi trebala dati 60 dinara ($30 \cdot 2 = 60$). Došavši kući, shvatila je da joj nedostaju 4 dinara (za 120 jabuka dobila je $24 \cdot 4 = 96$ dinara). Problem je nastao zbog toga što je djevojka mogla načiniti samo 20 grupa u kojima su bile 3 njezine i 2 susjedine jabuke ($20 \cdot 5 = 100$, od čega je 60 djevojčinih, a 40 susjedinih). To znači da je 20 susjedinih jabuka prodala za $4 \cdot 4 = 16$ dinara, a trebala ih je prodati za 20 dinara. Tako se stvorio manjak od 4 dinara.

Slijedi nepotpisani prilog **Različiti zadaci** s osam postavljenih zadataka i njihovim rješenjima.

XIV. Dodatak

U ovom poglavlju nude se čitatelju četiri priloga: ***O periodskim decimalnim razlomcima*** autora **Stjepana Škarice**, ***Nešto malo o trokutu*** autora **Vilka Ničea**, ***Princip totalne indukcije*** autora **Đure Kurepe** te ***Problem triju tijela*** autora **Željka Markovića**.

Pretpostavljamo da se ovi tekstovi nalaze u **Dodatku** zbog toga što su kasnili pri slaganju rukopisa.

3. Milenko Sevdić – biografija

Milenko Sevdić, koji je izdavanju *Matematičke čitanke*, osim uredničkog, dao i svoj autorski doprinos s najmanje dvanaest vlastitih priloga, rođen je 10. 12. 1904. godine u Sremskim Karlovcima. U Vinkovcima je završio gimnaziju, a na Filozofskom fakultetu u Zagrebu diplomirao je matematiku 1929. godine. Kao profesor radio je na Gimnaziji u Bihaću, a po završetku Drugog svjetskog rata na Petoj i Partizanskoj gimnaziji u Zagrebu. Bio je i profesor Više pedagoške škole u Zagrebu te Tehničkog odnosno Tehnološkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Iz aktivne službe povukao se 1961. godine zbog bolesti, a kod svojih učenika i studenata ostavio je trajni trag svojim iznimno zanimljivim stilom poučavanja.

Osim istaknutog nastavničkog rada prof. Milenko Sevdić napisao je oko 40 stručno-pedagoških članaka te niz udžbenika i priručnika.

Već je na početku svog nastavničkog rada surađivao u raznim časopisima. Svojim prilozima u *Matematičkoj čitanci* i kompletnom redakcijom knjige, te vlastitim matematičkim knjigama *Zagonetke i pitalice* i *Matematičar na izletu* dao je vrijedan i poseban doprinos popularizaciji matematike. Također je autor *Matematike* u seriji knjiga tzv. *Školskog leksikona*, a koja je doživjela nekoliko izdanja. Prof. Sevdić umro je 18. 8. 1978. godine u Zagrebu.

Nikako se ne smije ispustiti važan podatak da je prof. Milenko Sevdić bio prvi glavni urednik *Matematičko-fizičkog lista* koji je počeo izlaziti 1950. godine.

Povodom njegove smrti, izašao je nepotpisani nekrolog u *Matematičko-fizičkom listu Vol 29 (1978-79), 1/116, str 39*. Za pretpostaviti je da je autor teksta tadašnji glavni urednik Stjepan Škreblin. Upravo je taj tekst, s priloženom fotografijom, glavni izvor biografskih informacija o Milenku Sevdiću. Njegovim kraćenjem nastala je biografska jedinica objavljena u *Matematičko-fizičkom listu Vol 50 (1999-2000), 4/200, str 210,* a i druge.

Ovdje prenosimo taj tekst u cjelini:

„U kolovozu smo se oprostili od dobroga čovjeka i neumornog radnika. Nakon duge i teške bolesti preminuo je jedan od osnivača našeg lista i njegov prvi glavni urednik – profesor Milenko Sevdić.

Pokojnik je rođen 1904. godine u Sremskim Karlovcima. Gimnaziju je završio u Vinkovcima, Diplomirao je matematiku 1929. godine na Filozofskom fakultetu u Zagrebu. Zatim je radio kao profesor na Gimnaziji u Bihaću. Već tada je surađivao u raznim časopisima, među ostalim u predratnom matematičkom sredjoškolskom listu (*Pčelinje saće kao matematički problem*), i publicirao nekoliko knjižica iz povijesti matematike. Ratno zarobljeništvo je pune 4 godine prekinulo njegov rad. Odmah po oslobođenju, punim elanom, svojim znanstvenim, pedagoškim i društvenim radom uključuje se u obnovu i izgradnju. Radio je najprije kao profesor na Petoj i na Partizanskoj gimnaziji u Zagrebu, zatim je bio profesor Više pedagoške škole u Zagrebu. Posljednjih godina je bio docent, pa profesor na Tehnološkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, gdje je jedne godine bio i dekan. Bolest ga je (1961. god.) prerano udaljila iz aktivne službe, gdje je mnogobrojnim svojim učenicima i studentima ostao u sjećanju kao izuzetan metodičar koji ih je osvajao svojim zanimljivim, pristupačnim stilom.

Uz znanstveni i nastavnički rad valja istaći niz njegovih udžbenika i priručnika (*Školski leksikon*) za škole raznih stupnjeva, recenzije, školske inspekcije, referate i predavanja na matematičkim kongresima i seminarima. Bio je vanredni popularizator matematike; spomenimo knjigu *Matematičar na izletu* i prijevod Pereljmanove *Zanimljive matematike* te, posebno, vrlo uspjelu *Matematičku čitanku* koja je 1947. god. izašla u njegovoj redakciji.

Napisao je oko 40 stručno-pedagoških članaka u raznim časopisima. U našem listu naći ćemo niz njegovih lijepih priloga (razni članci iz aritmetike i algebre, o Simpsonovoj formuli, o *Didoninom problemu*, o šatorima i matematici, ...).

Bio je čovjek koji je svakom rado i svesrdno pomagao. Zračio je optimizmom u svakoj svojoj radnoj sredini. Vedrina ga nije napuštala ni u najtežim časovima. Svima koji su ga poznavali, ostat će profesor Sevdić u najljepšoj uspomeni, a njegov svestrani matematički i pedagoški rad ostavlja nam trajne tragove.“

4. Autori priloga

Kao što je iz prethodnog razvidno, mnogi su autori objavili priloge u *Matematičkoj čitanci*. Slijede kratke informacije o nekima od njih.

Ignacije Smolec (1916. – 2005.) rođen je u Brčevcu kraj Vrbovca. Gimnaziju je završio u Novoj Gradiški, a studij u Zagrebu 1941. godine. Radio je na gimnaziji u Križevcima i Zagrebu, bio je asistent na Fizičkom zavodu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, savjetnik za matematiku, a od 1967. do 1979. godine predavao je metodiku nastave matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.
Profesor Smolec je objavio nekoliko desetaka stručnih članaka i kao autor ili suautor 12 knjiga te nekoliko udžbenika za srednju školu. Cijelog svog života radio je na unapređenju nastave matematike i proučavao je iskustva drugih zemalja. Posebno je bio aktivan u promoviranju francuskog sustava učenja matematike koji je zastupao tezu da se početno učenje matematike mora zasnivati na teoriji skupova i matematičkoj logici.
Sudjelovao je u svim aktivnostima koje su se odnosile na učenje matematike svih uzrasta, a bio je i jedan od osnivača natjecanja iz matematike u Hrvatskoj.
U svojoj zadnjoj knjizi *Praksa i filozofija učenja*, koju su izdale *Školske novine*, profesor Smolec predlaže „neka učenici i učitelji izađu iz školskih geta u prirodu, na ulice i trgove i neka tamo uče“, a protivi se frontalnom radu u razredu i pukom memoriranju. Osim toga profesor kritizira ocjenjivanje, a ponavljanje razreda smatra „grijehom protiv mladog čovjeka“.

Vladimir Varićak (1865. – 1942.) rođen je u selu Švica kraj Otočca. U Otočcu i Sisku pohađao je pučku školu, a maturirao je Zagrebu 1883. godine. Školovanje je nastavio na studiju matematike i fizike na Mudroslovnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Profesorski ispit je položio 1888. godine, a nakon toga je predavao na realki u Zemunu, Zagrebu i Osijeku, nautičkoj školi u Bakru te gimnaziji u Zagrebu. Na Sveučilištu se zaposlio 1898.

godine, gdje je 1899. preuzeo sva predavanja Karela Zahradnika i vođenje Matematičkog seminara. Doktorirao je 1891. kao drugi doktorand iz matematike u povijesti zagrebačkog Sveučilišta. Od 1902. do umirovljenja 1936. bio je redoviti profesor na Filozofskom fakultetu u Zagrebu. Nakon toga je nastavio honorarno predavati do kraja života.
Vladimir Varićak je obilježio jedno razdoblje u radu Sveučilišta i odigrao značajnu ulogu u utemeljenju znanstvenog matematičkog rada u Hrvatskoj. Njegov znanstveni rad odnosi se na algebarske krivulje, geometriju Lobačevskog i primjenu te geometrije u specijalnoj teoriji relativnosti. Varićak se istaknuo i kao jedan od najvažnijih istraživača života i rada Ruđera Boškovića pa je 1910. godine objavio opsežan članak pod nazivom *Matematički rad Boškovićev*.

Vladimir Vranić (1896. – 1976.) rođen je u Zagrebu, gdje je završio osnovnu i srednju školu. Studij matematike završio je u Zagrebu, a doktorirao je 1920. godine. Od 1931. radi kao matematičar aktuar u Jadranskom osiguravajućem društvu. Predavao je na Tehničkoj visokoj školi, na I. realnoj gimnaziji u Zagrebu te na Ekonomsko-komercijalnoj školi. Tijekom Drugom svjetskog rata bio je odveden u logor, a nakon toga je prebačen u Italiju. U Zagreb se vratio 1945. godine. Iste godine počinje predavati na Ekonomsko-komercijalnoj školi aktuarsku i financijsku matematiku. Godine 1954. prešao je na Tehnički fakultet. Od 1947. pa sve do 1971. godine predavao je honorarno teoriju vjerojatnosti i statistiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.
Profesor Vranić dobio je 1969. godine nagradu za životno djelo. Napisao je brojne znanstvene i stručne radove, popularne članke te skripte i udžbenike, a za svoj udžbenik *Vjerojatnost i statistika* dobio je i nagradu grada Zagreba.

Stanko Bilinski (1909. – 1998.) rođen je u Našicama. U Vinkovcima i Zagrebu pohađao je klasičnu gimnaziju. Diplomirao je 1932. godine teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Zagrebu, a doktorirao je 1944. godine. Od 1934. do 1940. godine radio je kao gimnazijski profesor u Varaždinu, Skopju i Sušaku, a od 1940. do 1946. kao asistent u

Geofizičkom zavodu. Od 1946. radi u Geometrijskom zavodu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje je dužnost predstojnika obavljao od 1949. do umirovljenja 1978. godine. Profesor Bilinski jedan je od utemeljitelja Društva matematičara i fizičara, kao i jedan od urednika časopisa *Glasnik matematičko-fizički i astronomski*. Bio je dugogodišnji član Jugoslavenske odnosno Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti, a dobitnik je Nagrade *Ruđer Bošković* i državne *Nagrade za životno djelo*.
Okosnicu njegovog znanstvenog djelovanja predstavlja geometrija. Objavio je 47 znanstvenih radova u domaćim i inozemnim publikacijama, a o svojim rezultatima izlagao je i na brojnim međunarodnim kongresima.

Đuro Kurepa (1907. – 1993.) rođen je u Majskim Poljanama kraj Gline. U Križevcima je završio srednju školu. Diplomirao je teorijsku matematiku i fiziku na Filozofskom fakultetu u Zagrebu 1931. godine, a doktorirao na *Sorbonnei* u Parizu 1935. godine. Do 1965. godine predavao je na Filozofskom i Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a od 1965. do umirovljenja (1977. godine) radi kao redovni profesor na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Beogradu. Osim teorijom skupova, algebrom i teorijom brojeva, bavio se i općom topologijom. Napisao je više od 200 znanstvenih radova i 700 drugih spisa. Dobitnik je brojnih priznanja i nagrada.

Juraj Majcen (1875. – 1924.) rođen je u Zagrebu, gdje je završio srednju školu. Diplomirao je u Beču 1895. matematiku i deskriptivnu geometriju, a doktorirao 1899. godine. Na Mudroslovnom fakultetu u Zagrebu od 1901. godine predavao je mnogobrojne geometrijske kolegije. Osnovao je *Zagrebačku geometrijsku školu* i objavio je niz znanstvenih radova.

Željko Marković (1889. – 1974.) rođen je u Požegi. Osnovnu i srednju školu pohađao je u Zagrebu, matematiku je studirao u Zagrebu, Pragu i Göttingenu. Doktorirao je u Zagrebu 1915. godine. Predavao je na srednjim školama u Zagrebu, a od 1920. godine na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu. Od 1949. godine do umirovljenja predavao je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Bavio se matematičkom analizom, nebeskom mehanikom, poviješću starogrčke matematike i proučavanjem života i djela Ruđera Boškovića.

Vilko Niče (1902. – 1987.) rođen je u Grubišnom Polju. U rodnom mjestu, Karlovcu, Zagrebu i Bjelovaru pohađao je osnovnu i srednju školu, a diplomirao je matematiku u Zagrebu 1926. godine. Cijeli svoj radni vijek proveo je na Tehničkom fakultetu u Zagrebu. Svoj znanstveni interes usmjerio je na projektivnu geometriju.

Milena Varićak (1903. – 1971.) rođena je u Zadru. Diplomirala je matematiku i fiziku 1928. godine i doktorirala 1957. na Sveučilištu u Zagrebu. Nakon završetka studija predavala je na gimnazijama u Sušaku i Zagrebu, a od 1949. pa sve do smrti radila je u Fizičkom zavodu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Bila je i vanjska suradnica na Institutu „Ruđer Bošković". Milena Varićak je bila poznata kao vrsna profesorica koja je odgojila niz generacija srednjoškolaca. Područje njezinog znanstvenog rada bila je fizika čvrstog stanja, a naročito je istraživala električne osobine poluvodiča.

Mihailo Petrović (1868. – 1943.) rođen je u Beogradu gdje je završio osnovnu i srednju školu. Studij je završio 1889. u Beogradu. Nakon toga je nastavio školovanje u Parizu gdje je 1891. diplomirao matematiku, 1893. fiziku, a doktorirao je 1894. godine. U Beograd se vratio 1894. godine i počeo raditi u Velikoj školi koja je 1905. prerasla u Univerzitet. Kao profesor Univerziteta radio je do umirovljenja 1938. godine. Volio je nastavnički poziv i njegova su se predavanja odlikovala jednostavnošću. Objavio je velik broj pronalazaka, znanstvenih radova i udžbenika. Područje njegovog znanstvenog interesa bile su diferencijalne jednadžbe, teorija funkcija, algebra i računarstvo. Bavio se i kriptografijom. Svirao je violinu, bio je strastveni ribolovac i putopisac. Mihailo Petrović je bio izuzetan matematičar, a skroman i jednostavan čovjek.

Ivan Supek (1915. – 2007.), znanstvenik i književnik, rođen je u Zagrebu gdje je započeo studij fizike i filozofije, a nastavio u Zὺrichu i Leipzigu. U Leipzigu je doktorirao 1940. godine. Bio je prvi profesor teorijske fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Osnovao je 1950. Institut Ruđer Bošković i Institut za filozofiju, znanost i mir 1960. godine. Bavio se problemima supravodljivosti i kvantne elektrodinamike, teorijom metala na niskim temperaturama i dr. Pisao je udžbenike, stručne knjige, drame, povijesne romane. Dobitnik je Nagrade *Ruđer Bošković* i *Nagrade za životno djelo*.

5. Uloga i značenje *Matematičke čitanke* u popularizaciji matematike

Pojava *Matematičke čitanke*, čiji su tekstovi bili napisani i odabrani, ako ne svi, a ono sigurno većina (da ne bi nešto krivo „promaklo“), a također predgovor uoči (očigledno namjerno istaknutog) 1. svibnja 1946. godine, dakle Praznika rada, govori da se odmah, neposredno nakon Drugog svjetskog rata, velika važnost pridavala obrazovanju i odgovarajućoj literaturi. Sigurno da su udžbenici bili na prvom mjestu važnosti i brige. No, problem je trebalo rješavati šire, pa kad je o matematici riječ, valjalo je ponuditi tekstove koji će matematiku popularizirati, učiniti atraktivnijom i zabavnijom od one školske.

Sevdićeva *Matematička čitanka*, kao skup raznorodnih članaka, po tematici, duljini, dubini, težini odlično je odgovorila postavljenom zadatku, a urednik je odlično i izbalansirano okupio tekstove raznih autora, tadašnjih, ali „posudio“ i od prošlih.

I mada *Čitanka* nije doživjela drugo izdanje, vjerojatno zbog izrazito visoke naklade, daleki odjek, tj. koncepcijski utjecaj možemo prepoznati u dvjema kasnijim knjigama, autora akademika Vladimira Devidea i gimnazijskog profesora Branimira Dakića.

Matematička čitanka, 1991.

Nekoliko desetljeća kasnije, 1991. godine, u izdanju Školske knjige objavljena je *Matematička čitanka* autora Vladimira Devidéa, u kojoj su čitateljima ponuđeni tekstovi koji ističu ljepotu matematike i koji razlažu problematiku o kojoj postoje različita mišljenja matematičara. Knjiga je namijenjena učenicima srednjih škola i njihovim nastavnicima.

Tekstove je u ovoj knjizi autor podijelio u tri skupine. Prvu skupinu čine prikazi matematičkih problema i metoda, kao što su: matematička indukcija, zrcaljenje na jediničnoj kružnici, konveksni likovi, problem o vaganju, elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima, mogućnosti pogrešnog zaključivanja i dr. Drugu skupinu čine skice izgradnje matematičkih teorija o skupovima, grupama, algebri logike i vektorskim prostorima. Treća skupina tekstova, pod naslovom *Što je i kakva matematika*, odnosi se na diskusiju načelne problematike u matematici. Tako tu možemo naći članke o matematici u Hrvatskoj, o značenju i mjestu suvremene matematike u modernoj znanstvenoj misli, o problemima suvremene nastave matematike, o tome je li u matematici sve sigurno i sl.

Matematički panoptikum, 1995.

1995. godine u izdanju Školske knjige objavljena je u Zagrebu knjiga gimnazijskog profesora Branimira Dakića *Matematički panoptikum*. Branimir Dakić zapisao je u toj knjizi osamnaest priča koje je pričao učenicima tijekom svojih predavanja. Iako su te priče izlazile iz programskih okvira, profesor je uočio da su one kod učenika pobuđivale veći interes nego samo gradivo. Cilj izdavanja knjige je također bio da čitatelji upoznaju i jednu drugu stranu matematike.

U *Matematičkom panoptikumu* objašnjavaju se brojevi i površina, kao i njihova svojstva, obrađuju se problemi najkraćeg puta i određivanja zbroja niza, tumače se indukcija, analogija, metoda koordinata, demonstriraju se postupci izvođenja poopćenja Pitagorinog poučka, trokut-tetraedar i povezuju naizgled nepovezani matematički sadržaji.

Tiskanje Sevdićeve *Matematičke čitanke* uslijedilo je netom nakon sveopćeg ljudskog i materijalnog razaranja u Drugom svjetskom ratu. Ministarstvo prosvjete je prepoznalo potrebu popularizacije matematike kako bi se pridonijelo kvaliteti poučavanja matematike zbog njezinog značaja u razvoju svakog društva. Objavljivanjem *Matematičke čitanke* nastojalo se mladima pokazati lijepu i korisnu stranu matematike te tako pridonijeti razvijanju interesa prema njoj, odnosno njezinoj popularizaciji.

Činjenica da *Matematička čitanka* donosi velik broj priloga široke tematike te da se radi o člancima dvadesetak poznatih profesora i akademika, govori o tome da se ostvarenju zadanog cilja pristupilo izuzetno ozbiljno.

Zanimljivo je da je izdavanje sličnog naslova uslijedilo tek 1991. godine, odnosno 44 godine kasnije. Stoga svi koji su pokrenuli i proveli u djelo objavljivanje *Matematičke čitanke* zaslužuju svojevrsno priznanje za razvijanje drukčijeg pogleda na matematiku kao sveprisutnu znanost i važan dio života svakog čovjeka.

Matematička čitanka se i danas nalazi u knjižnom fondu nekih knjižnica, naprimjer:

- Gradske knjižnice u Zagrebu, Osijeku i Vinkovcima (1 primjerak)
- Školske knjižnice u gimnazijama i srednjim školama: I. gimnazija Zagreb, III. gimnazija Split, Gimnazija Gospić (1 primjerak), Gimnazija u Bjelovaru i Virovitici (2 primjerka), Strojarska škola u Rijeci i Graditeljska tehnička škola u Splitu (1 primjerak)
- Školske knjižnice u osnovnim školama u Virju (2 primjerka), Garešnici, Grubišnom Polju (1 primjerak).

Stoga se može pretpostaviti da je Ministarstvo prosvjete *Matematičku čitanku* distribuiralo diljem Hrvatske te tako omogućilo njezinu uporabu u školama.

Literatura

1. Dakić, Branimir, *Matematički panoptikum*. Školska knjiga, Zagreb,1995.
2. Devidé, Vladimir, *Matematička čitanka*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
3. *Matematička čitanka*, Ur. Milenko Sevdić, Zagreb, 1947.
4. *Stanko Bilinski (1909. – 1998.),* HAZU, Zagreb,1999.
5. Bandić, Ivan, *Prikazi i beleške,* Nastava matematike i fizike u srednjoj školi 1 (1952), 62-64.
6. Dakić, Branimir, *Ignacije Smolec (1916.-2005.)*, Matematika i škola God.6 (2005), br. 29, 183-184.
7. Valent, Anđa; Vuković, Ivica, *Vladimir Varićak*, Poučak God.19 (2018), br. 76, 6-13.
8. *Prof. Milenko Sevdić,* Matematičko-fizički list 29 (1978./79), br. 1/116, 39.
9. Mardešić, Sibe, *Matematika u Hrvatskoj poslije 1874. godine*. http://public.carnet.hr/zuh/od1874/pznan/Matemak.htm#5 (pristupljeno 20. veljače 2014.).
10. Smontara, Ana, *Milena Varićak,* https://www.bib.irb.hr/74190?&rad=74190 (pristupljeno 20. veljače 2014.).
11. *Mihailo Petrović Alas (1868-1943),* http://www.riznicasrpska.net/ponossrpstva/index.php?action=print... (pristupljeno 12. veljače 2014.).
12. *Supek, Ivan,* Hrvatska enciklopedija, http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=58811 (pristupljeno 13. kolovoza 2019.).
13. *Vranić, Vladimir,* Židovski biografski leksikon, http://zbl.lzmk.hr/?p=2690 (pristupljeno 7. kolovoza 2019.).

Sažetak

U Zagrebu je 1947. godine izašla knjiga, točnije zbornik članaka pod naslovom *Matematička čitanka*, koji je uredio i autorski obogatio profesor Milenko Sevdić. Tiskana je u velikoj nakladi od 10000 primjeraka. *Matematička čitanka* ima 324 stranice, sadrži 59 priloga različita opsega. Različita područja matematike „obrađuje" kroz 14 poglavlja: O matematici uopće, O brojevima, Iz geometrije i geometrijskih konstrukcija, Iz analitičke geometrije, Iz diferencijalnog i integralnog računa, Iz računa vjerojatnosti, Matematika u prirodi, Neki glasoviti problemi i poučci, Iz astronomije, Razni članci, Dva stara matematičara – Dubrovčanina, Žena u matematici, Zanimljivosti, zabava, šala itd., Dodatak.

Uloga i značenje *Matematičke čitanke* u popularizaciji matematike, u vrijeme kad takve literature na našem jeziku nije bilo, knjige koja se nesumnjivo koristila dugi niz godina, kako u Hrvatskoj, tako i šire, u tadašnjoj Jugoslaviji, nesumnjivo su i sigurno važni i veliki.

Summary

Matematička čitanka (*Mathematical Reader*) was first published in Zagreb in 1947. It is a collection of 59 articles, on 324 pages. The book was edited by Croatian mathematician and university professor Milenko Sevdić. He authored several papers in the book, as well a few other textbooks and math books. *Mathematical Reader* was published in 10,000 copies. The book covers different aspects of mathematics: history, numbers, geometry, geometric constructions, analytic geometry, differential and integral calculus, probability, math in nature, famous problems and theorems, astronomy, women in math, math curiosities and puzzles.

The role and importance of *Mathematical Reader* in popularization of math in Croatia (as well as former Yugoslavia) is essential, significant and major, and its impact was long-lasting.

Životopis

Rođena sam 8. listopada 1965. u Širokoj Kuli od oca Mile i majke Ane. Osnovnu školu pohađala sam u Širokoj Kuli i Ličkom Osiku. Nakon toga sam u Centru odgoja i usmjerenog obrazovanja „Nikola Tesla“ završila dvije godine pripremnog obrazovanja u Ličkom Osiku, a dvije godine matematičko-informatičkog usmjerenja u Gospiću. Kao treći student u obitelji skromnih materijalnih mogućnosti, upisala sam 1984. redovni studij matematike, profesorski smjer, na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Rad zbog financijske situacije i pomaganje roditeljima otežavali su redovito izvršavanje obveza na zahtjevnom studiju pa sam, nažalost, morala privremeno odustati od studija matematike. Prešla sam na Ekonomski fakultet u Zagrebu, gdje sam 1994. godine stekla stručnu spremu šestog stupnja i stručni naziv ekonomist.

Moje rodno mjesto Široka Kula okupirano je 1991. godine, a obitelj je doživjela velika stradanja. U jesen 1992. došla sam u Gospić, koji je prolazio teško ratno razdoblje, i odmah počela raditi u Srednjoj školi. Nakon oslobođenja Ličkog Osika započela je 1997. godine s radom osnovna škola pa sam prešla raditi u Lički Osik kao tajnica i voditeljica računovodstva.

Uslijedio je i rad na obnovi spaljenog ognjišta i život u opustjeloj i problemima opterećenoj Širokoj Kuli. Zapušteno poljoprivredno zemljište godinama nastojim dovesti u funkciju pa se bavim i uzgojem ovaca.

Od 2008. godine obavljam samo poslove tajnice škole. Iste godine ponovo sam upisala studij matematike, nastavnički smjer, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Zbog ozbiljno narušenog zdravlja, tek sada studij privodim kraju.