SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Zaplatić

UPRAVLJANJE TRŽIŠNIM RIZIKOM U BANKARSKOM SEKTORU PRIMJENOM MODERNE TEORIJE PORTFELJA I CAPM MODELA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Ilko Vrankić

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojim roditeljima, bratu, Andriji i prijateljima na ukazanoj podršci tijekom cijelog studija. Veliko hvala mentoru na povjerenju i pomoći tijekom pisanja ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu ćemo predstaviti modernu teoriju portfelja i model vrednovanja kapitalne imovine te kako ih možemo primjeniti u bankarskom sektoru kod upravljanja tržišnim rizikom.
U prvom dijelu rada opisujemo modernu teoriju portfelju koju je započeo H.M. Markowitz objavom članka *Portfolio Selection*. Ideja modela je odabrati portfelj koji će imati najveći prinos uz najmanji rizik. Takav portfelj nazvati ćemo efikasnim portfeljem. Definirati ćemo pretpostavke modela koje je postavio Markowitz te optimizacijski problem koji će služiti za razvoj modela. Razvoj modela započeti ćemo definiranjem prinosa i varijance portfelja. Očekivani prinos portelja modelirati ćemo statističkim očekivanjem dok će se rizik modelirati standardnom devijacijom prinosa. Sadržaj efikasnog portfelja razdvojit ćemo u dva slučaja: prvo kada portfelj sadrži sve rizične instrumenti i drugi slučaj kada će uz rizične imati jedan nerizičan instrument. Vidjeti ćemo kako se u ta dva slučaja razlikuju efikasne granice portfelja. Detaljnije ćemo proučavati optimalan pravac alokacije kapitala te vidjeti koliko je taj pravac značajan kod investitora. Sadržaj prvog dijela rada pretežno prati reference [4] i [7].
U drugom poglavlju detaljnije se proučava model vrednovanja kapitalne imovine, kraće CAPM model. Ovaj model pokazuje kako rizik ulaganja treba utjecati na njegov očekivani povrat. U CAPM modelu promatrati ćemo tržišni portfelj, portfelj koji sadrži sve investicijske instrumente kojima se trguje na tržištu. Defitinirati ćemo pojam Sharpeov omjer i beta indeks i vidjeti koliko su oni bitni u CAPM modelu. Također ćemo proučavati njegovu korisnost i vidjeti u primjeru kako možemo analizirati diskontirani novčani tok. Sadržaj ovog dijela prati referencu [5].
Sljedeća dva poglavlja prate referencu [1]. U trećem poglavlju primjenjivati ćemo prethodne modele na modeliranje aktivnosti banaka prilikom upravljanja tržišnim rizikom. Proučavati će se tržišni rizici koji utječu na portfelje utržive imovine kod banaka. Banku ćemo asimilirati kao upravitelj portfelja koji kontrolira portfelj vrijednosnih papira. Ti vrijednosni papiri predstavljaju svu imovinu i obveze banke. Opisati će se primjena modela na ponašanje banaka kod solventnosti i vjerojatnosti neuspjeha banke. U četvrom poglavlju prikazati ćemo jedan primjer korištenja CAPM modela u bankarskom sektoru.
Posljednje poglavlje služi za zaključak i osvrt na cjelokupni rad.

Poglavlje 1

Moderna teorija portfelja

Ovo poglavlje započinjemo sa samom definicijom portfelja.

Definicija 1.0.1. *Portfelj predstavlja skup financijske imovine određenih ili sličnih obilježja u vlasništvu pojedinca. Definira se kao linearna kombinacija ulagačkih financijskih instrumenata.*

Pod ulagačke financijske instrumente smatramo novac (gotovina, depoziti), vrijednosne papire (dionice,obveznice) te investicijske projekte. U današnje vrijeme pojam portfelj se uglavnom odnosi na upravljanje vrijednosnicama.

Temelje moderne teorije portfelja postavio je Harry M. Markowitz 1952. godine objavom članka *Portfolio Selection*. Objavljeni članak predstavlja jedan od najvažnijih dokumenata u suvremenoj analizi vrijednosnica i upravljanja portfeljem. Markowitzev model temelji se na pronalasku optimalnog odnosa između prinosa i rizika. Osnovna ideja modela je diversifikacija portfelja, prema kojoj sredstva namijenjena ulaganjima u rizičnu imovinu ne treba ulagati u samo jedan investicijski instrument, nego u više njih. Markowitzeva ideja bila je naći ravnotežu između rizika i prinosa, tj. odabrati portfelj koji će uz najmanji mogući rizik donijeti najveći mogući prinos. Takav model danas nazivamo *Mean-variance model*. Portfelj dobiven ovim modelom, portfelj koji za zadanu stopu prihoda ima minimalan rizik, Markowitz je nazvao efikasnim portfeljem.

1.1 Pretpostavke Markowitz modela

Markowitz je sa svojim modelom postavio osnove moderne teorije portfelja otkrićem da je varijanca očekivane stope prinosa adekvatna mjera rizika koji prati taj prinos. Izvođenjem izraza za varijancu portfelja, pokazao je kako se može kreirati portfelj kojim se nesistemski rizik može reducirati.

Markowitzov model ima nekoliko osnovnih pretpostavki:

1. Prinosi na vrijednosnice su normalno distribuirani
2. Investitori žele maksimizirati svoju ekonomsku korist
3. Investitori su racionalni i imaju averziju prema riziku
4. Investitori su dobro obavješteni o svim relavantnim činjenicama potrebnima za donošenje investicijske odluke
5. Nema transakcijskih i poreznih troškova
6. Vrijednosnice su savršeno djeljive

Pretpostavljeno je i da investitor ima izbor od N rizičnih vrijednosnica s poznatim očekivanim prinosom i varijancom te i matricom njihovih varijanci i kovarijanci. Markowitz očekivani prinos modelira sa statističkim očekivanjem, dok se rizik modelira standardnom devijacijom prinosa. Pretpostavka o averziji prema riziku je razumljiva; ako je osoba suočena s izborom između dva investicijska instrumenta koji imaju isti očekivani prinos, odabrat će onog s manjim rizikom. Osoba će biti voljna preuzeti veći rizik, ako to nadoknadi premijom rizika, tj. većim očekivanim prinosom. Stoga, ako se bira između više opcija s jednakim očekivanim prinosom, u kontekstu moderne teorije portfelja, odabire se ona koja ima najmanju standardnu devijaciju prinosa.

1.2 Razvoj moderne teorije portfelja

U Markowitzevoj teoriji portfelja kreće se od definicije prinosa i varijance portfelja.

Definicija 1.2.1. *Neka se portfelj sastoji od N ulagačkih instrumenata koji nisu nužno nekorelirani, tada očekivani prinos i varijanca (σ^2) portfelja iznose:*

$$\mathbb{E}(R_P) = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}(R_i) \tag{1.1}$$

$$Var(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{1.2}$$

gdje su
$\mathbb{E}$=*statističko očekivanje*

R_P=*prinos portfelja,*
R_i=*prinos i-tog instrumenta ,*
w_i, w_j=*težinski faktori i-tog, odnosno j-tog instrumenta,*
σ_p=*standardna devijacija portfelja,*
σ_i, σ_j= *standardne devijacije i-tog, odnosno j-tog instrumenta,*
ρ_{ij}= *koeficijent korelacije i-tog i j-tog instrumenta,*
N=*broj instrumenata u portfelju.*

Prije nego što nastavimo s razvojem moderne teorije portfelja, definiramo pojmove koji se nalaze u definiciji očekivanog prinosa i varijance portfelja.

Definicija 1.2.2. *Neka su R i S dvije slučajne varijable i neka su sa $\mathbb{E}(R)$ i $\mathbb{E}(S)$ označena njihova očekivanja. Tada kovarijancu između slučajnih varijabli R i S označavamo sa $cov(R, S)$ ili $\sigma_{R,S}$, a definiramo je formulom*

$$cov(R, S) = \sigma_{R,S} = \mathbb{E}[(R - \mathbb{E}(R))(S - \mathbb{E}(S))]. \tag{1.3}$$

Matricu kovarijanci dviju slučajnih varijabli R i S označavamo s Ω, a definiramo

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_R^2 & cov(R, S) \\ cov(R, S) & \sigma_S^2 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Korelaciju između slučajnih varijabli R i S označavamo s $\rho_{R,S}$, a definiramo je formulom.

$$\rho_{R,S} = \frac{\sigma_{R,S}}{\sigma_R \sigma_S}. \tag{1.5}$$

Definicija 1.2.3. *Težinski faktor w_i predstavlja relativni udio vrijednosti uložene u neki i-ti instrument u odnosu na zbroj vrijednosti uložene u sve instrumente portfelj.*

Iznos težinskih faktora kreće se između 0 i 1. Predznak tih faktora može biti pozitivan ili negativan. Ako smo kupili instrument i platili ga, tada je predznak pozitivan, a ako smo prodali instrument i za njega dobili novac, predznak je negativan. Suma svih težinskih faktora mora iznositi 1 ($\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$).

Izraz za varijancu portfelja, jednadžba (1.2), može se rastaviti na dva dijela:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1 j \neq i}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}. \tag{1.6}$$

Prva suma sastoji se od varijanci individualnih instrumenata, a druga suma sadrži varijance kombinacija instrumenata. Idealan slučaj bi bio kada bi koeficijenti korelacije ρ_{ij}

bili jednaki nuli. To znači da su svi instrumenti međusobno potpuno nezavisni. Tada bi varijanca portfelja bila minimizirana.
Kako se portfelji biraju po kriteriju minimalne varijance i kakav očekivani prinos imaju, potrebno je razmotriti optimizaciju izbora portelja kada se očekuje određena razina njegovog povrata.

Za potrebu optimizacije izbora portfelja, navodimo pretpostavke Markowitz modela efikasnog portfelja koji ne sadrži niti jedan instrument bez rizika(svi instrumenti su rizični).

1. Portfelj se sastoji od N rizičnih investicijskih instrumenata, pri čemu očekivani prinos i-tog instrumenta označavamo $\mathbb{E}(R_i)$, kraće E_i. Varijancu portfelja označujemo sa σ_p^2, kraće σ^2.
2. Kovarijancu prinosa i-tog i j-tog instrumenta označimo s σ_{ij}. Pretpostavljamo da su svi instrumenti rizični,tj. $\sigma_i^2 > 0, \forall i$, i da se ni jedan instrument ne može izraziti kao linearna kombinacija bilo kojih drugih instrumenata. Uz te pretpostavke vrijedi da matrica kovarijanci, $\Omega = [\sigma_{ij}]$, nije singularna, tj. $\det \Omega \neq 0$ (iz jednadžbe (1.5) slijedi da je $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$).
3. Efikasna granica svih portfelja dobivenih linearnom kombinacijom N instrumenata definirana je kao subjekt svih onih portfelja koji su ostvarivi, a imaju najmanju varijancu za neki dani iznos očekivanog prinosa portfelja.

Efikasni portfelj ćemo označit kao $E(R_p)$ ili kraće, E.

Rješenje optimizacijskog problema biti će neki skup točaka u koordinatnom sustavu $\sigma^2 - E$. Krivulju čine parovi vrijednosti (σ^2, E), a oni su rješenja optimizacijskog problema s ograničenjima danog s:

$$\min \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 \right\}; \tag{1.7}$$

uz ograničenja:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij};$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} w_i E_i;$$

$$1 = \sum_{i=1}^{N} w_i.$$

Metodom Lagrangeovih multiplikatora rješavamo ovaj optimizacijski problem. Prvo minimiziramo sljedeću Lagrangeovu funkciju:

$$\min\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_iw_j\sigma_{ij}+\lambda_1\left(E-\sum_{i=1}^{N}w_iE_i\right)+\lambda_2\left(1-\sum_{i=1}^{N}w_i\right)\right\} \tag{1.8}$$

gdje nam λ_1 i λ_2 predstavljaju Lagrangeove multiplikatore. Sada radimo parcijalne derivacije izraza (1.8) po varijablama w_i i po multiplikatorima λ_1 i λ_2 te nam te derivacije moraju biti jednake nuli, tj. radimo nužne uvjete prvog reda:

$$\sum_{j=1}^{N}w_j\sigma_{ij}-\lambda_1E_i-\lambda_2=0,\quad i=1,2,...,N;$$

$$E-\sum_{i=1}^{N}w_iE_i=0;$$

$$1-\sum_{i=1}^{N}w_i=0.$$

Zbog nesingularnosti matrice kovarijanci Ω, skup rješenja $w=[w_i]$ koji zadovoljava ovaj sustav jednadžbi jedinstven je i on minimizira varijancu portfelja σ^2. Pošto je taj sustav linearan po varijablama w_i, množimo s Ω^{-1} čime dobivamo

$$w_k=\lambda_1\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}E_j+\lambda_2\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj},\quad k=1,2,...,N; \tag{1.9}$$

gdje su sa ν označeni elementi inverzne matrice kovarijanci, $\Omega^{-1}=[\nu_{ij}]$. Pomnožimo izraz (1.9) s E_k i sumiramo po indeksu k:

$$\sum_{k=1}^{N}w_kE_k=\lambda_1\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}E_jE_k+\lambda_2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}E_k, \tag{1.10}$$

te zbrajanje tog izraza po k daje:

$$\sum_{k=1}^{N}w_k=\lambda_1\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}E_j+\lambda_2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}. \tag{1.11}$$

Kako bi imali jednostavniji zapis, definiramo sljedeće supstitucije:

$$A=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}E_j;\quad B=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}E_jE_k;\quad C=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{kj}.$$

Korišteći prethodna dva izraza (1.10) i (1.11) i navedena dva uvjeta na parcijalne derivacije po Lagrangeovim multiplikatorima λ_1 i λ_2, dobivamo jednostavan linearan sustav s dvije jednadžbe:

$$E = B\lambda_1 + A\lambda_2$$

$$1 = A\lambda_1 + C\lambda_2,$$

iz čega slijede rješenja tog sustava:

$$\lambda_1 = (CE - A)/D$$

$$\lambda_2 = (B - AE)/D,$$

gdje je $D = BC - A^2$.
Sada uvrstimo Lagrangeove multiplikatore u prethodne izraze i sređivanjem dobivamo sljedeću ovisnost varijance portfelja i očekivanog prinosa na efikasnoj granici:

$$\sigma^2 = \frac{CE^2 - 2AE + B}{D}. \tag{1.12}$$

Ovisnost varijance i očekivanja ($\sigma^2 - E$) ima oblik parabole s minimumom σ_0 u točki $E_0 = A/C$. Kako je standardna devijacija jednaka korijenu varijance, slijedi:

$$\sigma = \sqrt{\frac{CE^2 - 2AE + B}{D}}. \tag{1.13}$$

Prema tome, ovisnost standardne devijacije i očekivanja ($\sigma - E$) ima geometrijski oblik hiperbole s asimptotama koje imaju jednadžbe:

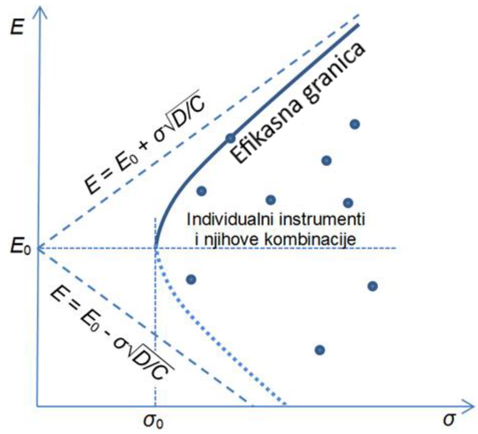
$$E = E_0 \pm \sigma\sqrt{D/C}.$$

Hiperbola efikasne granice prikazana je na slici 1.1[1].

Na samoj hiperboli nalaze se efikasni portfelji kod kojih je uz danu razinu očekivanog prinosa minimizirana varijanca, dok se desno od hiperbole nalazi svi individualnu instrumenti od kojih je načinjen portfelj i sve njihove moguće linearne kombinacije.

Mogućih portfelja ima beskonačno mnogo jer ima i beskonačno mnogo mogućih linearnih kombinacija individualnih portfelja. Samo gornja linija hiperbole smatra se efikasnom granicom zbog toga što na donjoj liniji hiperbole porast standardne devijacije vodi k smanjenju očekivanog prinosa portfelja. To znači, da na donjoj liniji hiperbole veći rizik donosi

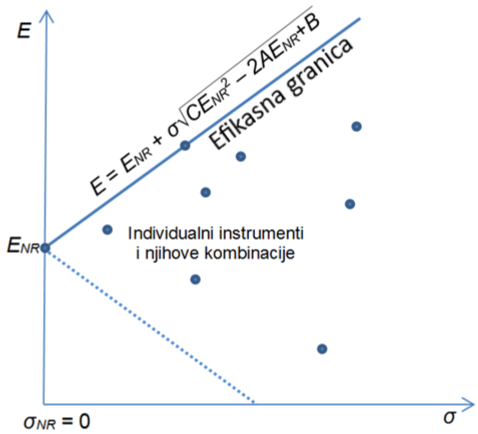
[1] Slika 1.1 je iz reference [7] str. 235



Slika 1.1: Hiperbola efikasne granice

manju očekivani dobit portfelja.

Neka sada portfelj sadrži jedan nerizičan investicijski instrument (R_{NR}) i N rizičnih. Tada se efikasna granica mijenja iz hiperbole u dva polupravca koji se sijeku na ordinatnoj osi ($\sigma = 0$). Ta točka zapravo odgovara očekivanom povratu nerizičnog instrumenta.



Slika 1.2: Polupravci efikasne granice

Jednadžbe polupravaca glase:

$$E = E_{NR} \pm \sigma \sqrt{CE_{NR}^2 - 2AE_{NR} + B},$$

gdje je $E_{NR} = \mathbb{E}(R_{NR})$ očekivana stopa povrata nerizičnog investicijskog instrumenta.
Slika 1.2 [2] prikazuje nam efikasnu granicu kad postoji jedan nerizičan investicijski instrument.
I u ovom slučaju se donja linija, tj. donji polupravac, odbacuje jer na njoj porast rizika portfelja vodi k smanjenju očekivanog prinosa.
Ovo cjelokupno matematičko modeliranje efikasne granice minimizacijom varijance portfelja ima za posljedicu jedan važan teorem, kojeg ćemo navesti bez dokazivanja.

Teorem 1.1. *Bilo koji portfelj koji je lociran na efikasnoj granici može se izvesti kao linearna kombinacija bilo koja dva druga portfelja koji se nalaze na toj istoj granici. Drugim riječima, svaki efikasan portfelj može se izvesti pomoću bilo koja druga dva efikasna portfelja.*

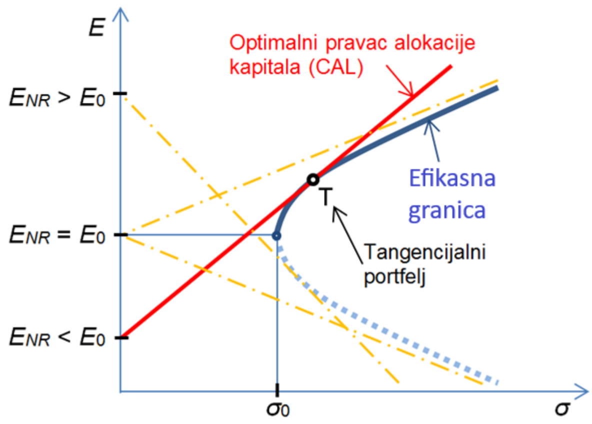
Ovaj teorem vrijedi za sve portfelje, te i za one koji sadrže jedan nerizični instrument. Kod slučaja s nerizičnim instrumentom potreban je dodatan nužni uvjet, a to je da očekivani prinos nerizičnog instrumenta, E_{NR}, bude manji od E_0 u vrhu hiperbole efikasne granice.

1.3 Optimalan pravac alokacije kapitala

Pretpostavimo da se investicijski portfelj sastoji od N rizičnih instrumenata te dodamo tom portfelju jedan nerizičan instrument, čiji je očekivani prinos E_{NR}. Na slici 1.3 [3] prikazan je koncept pravca alokacije kapitala i uveden je pojam optimalnog pravca alokacije kapitala. Također, na slici se nalazi hiperbola efikasne granice portfelja. Stacionarna točka te hiperbole ima koordinate (σ_0, E_0). Iz prethodnog odjeljka znamo da efikasna granica portfelja, koji u sebi sadrži nerizičan instrument, ima oblik rastućeg polupravca koji kreće od nule $(0, E_{NR})$. U tom se slučaju svaki portfelj na efikasnoj granici može izvesti kao linearna kombinacija dvaju drugih portfelja na toj granici, pri čemu mora vrijediti $E_{NR} < E_0$.

Efikasna granica portfelja sa i bez nerizičnog instrumenta su u međusobnoj vezi. Efikasnu granicu portfelja s nerizičnim instrumentom možemo konstruirati tako da se iz točke $(0, E_{NR})$ povuče tangenta na hiperbolu efikasne granice bez nerizičnog instrumenta. S T je označeno dirałište te tangente. Portfelj u toj točki je efikasan i sastavljen samo od N rizičnih investicijskih instrumenata, dok portfelj u točki $(0, E_{NR})$ sadrži samo nerizičan instrument.

[2] Slika 1.2 je iz reference [7] str. 236
[3] Slika1.3 je iz reference [7] str. 238



Slika 1.3: Koncept pravca alokacije kapitala

Između te točke i točke T na ravnoj liniji nalaze se efikasni portfelji koji su dobiveni kao linearna kombinacija nerizičnog instrumenta i tangencijalnog portfelja. Portfelji na istom polupravcu desno od točke T su portfelji sa polugom. To su portfelji koji su mogući jedino kada je težinski faktor nerizičnog instrumenta negativan, što znači da je investitor posudio novac po nerizičnoj stopi kako bi mogao uložiti u više rizičnih investicijskih instrumenta. Ulaganje bez poluge podrazumijeva da se investitor ne zadužuje kako bi kupio više investicijskih instrumenta.

Ako bi polupravac koji prolazi kroz točku T bio manje nagnut, sjekao bi hiperbolu u dvije ili jednoj točki. Tada bi prolazio desno od hiperbole efikasne granice, a tamo se nalaze portfelji koji nisu efikasni. Ako bi polupravac bio više nagnut, uopće nebi sjekao hiperbolu i efikasne kombinacije portfelja rizične imovine s nerizičnom bile bi nemoguće. Jedini polupravac koji ima najveći nagib i koji je pogodan kao efikasna granica portfelja s nerizičnom komponentom jest upravo tangenta na hiperbolu kroz točku T koja ordinatnu os siječe na razini prinosa nerizičnog instrumenta. Taj polupravac nazivamo optimalnim pravcem alokacije kapitala (CAL).

Na slici 1.3 prikazano je još nekoliko polupravaca. Polupravac koji polazi iz točke $(0, E_{NR})$ u kojoj je $E_{NR} > E_0$ predstavlja tangentu hiperbole efikasne granice, ali na donjoj liniji hiperbole koja nije efikasna granica. Kada je nerizični povrat veći od E_0, ne vrijedi teorem (1.1), tako da taj polupravac ne predstavlja CAL pravac. Kako su iz točke $E_{NR} = E_0$ povučene asimptote hiperbole efikasne granice, nije moguće povući tangentu na hiperbolu. To znači da ti plupravci ne mogu biti optimalni pravci alokacije kapitala.

Optimalan pravac alokacije kapitala ima važno značenje. Investitori mogu poboljšati svoje ulaganjem, tj. smanjiti rizik uz istu razinu očekivanog prinosa, tako da kombiniraju rizični portfelj s nerizičnim. Koju kombinaciju jednog i drugog će odabrati, ovisi o sklonosti prema riziku. Oni koji su skloni k manjem riziku, većinu sredstava ulagati će u nerizičan instrument i kretati će se po CAL liniji na lijevo. Oni koji su spremni preuzeti veći rizik, pomicati će se po CAL liniji na desno i to će im donijeti veći očekivani povrat na ulaganje. Svi portfelji na CAL liniji imaju manju standardnu devijaciju prinosa uz isti očekivani prinos u odnosu na hiperbolu efikasne granice koja opisuje portfelje sastavljene samo od rizičnih instrumenata. Stoga, ako investitori odaberu bilo koji kombinaciju portfelja na CAL liniji, biti će na dobitku u odnosu na ulaganje bez nerizične komponente.

Na kraju ovog dijela, smisleni zaključak je da CAL linija uvijek polazi od E_{NR} koji je manji od E_0. Kada bismo slagali portfelj od rizične financijske imovine i nerizičnog instrumenta s velikom prinosom, tada bismo pokvarili karakteristike čistog nerizočnog investiranja. Preuzimanjem dodatnog rizika kroz diverzifikaciju prema rizičnim instrumentima smanjilo bi očekivani prinos, umjesto da se poveća, što ni jedan racionalan ulagač nebi htio.

Poglavlje 2

Model vrednovanja kapitalne imovine

Model vrednovanja kapitalne imovine (Capital Asset Princing Model) prvi je dao odgovor na pitanje kako rizik ulaganja treba utjecati na njegov očekivani povrat. Temelji se na ideji da svi rizici nebi trebali utjecati na cijene imovine te nam govori kako je rizik povezan s povratom.

Model vrednovanja kapitalne imovine bavi se i cijenama imovine u ravnoteži. U ravnoteži sva sredstva mora netko držati. Da bi tržište bilo u ravnoteži, očekivani povrat svake imovine mora biti takav da se investitori kolektivno odluče zadržati dionice imovine. CAPM model će nam reći kako investitori određuju očekivane povrate, a time i cijene imovine, kao funkciju rizika.

2.1 Razvoj CAPM modela

Dobivanje modela vrednovanja kapitalne imovine počinjemo s četiri pretpostavke:

1. investitori ne prihvaćaju rizik i između različitih portfelja biraju portfelje samo na osnovi očekivane vrijednosti i varijance povrata

2. tržišta kapitala su savršena u nekoliko točaka; imovina je beskonačno djeljiva; nema transakcijskih troškova i poreza; informacije su besplatne i dostupne svima; svi investitori na tržištu mogu uzeti ili dati pozajmnicu po određenoj nerizičnoj kamatnoj stopi

3. svi investitori imaju pristup istim mogućnostima ulaganja

4. svi investitori imaju jednake stavove o distribuciji vjerojatnosti svih povrata.

Ove pretpostavke predstavljaju vrlo pojednostavljeni i idealizirani svijet, ali su potrebne za dobivanje CAPM modela u osnovnom obliku. Model je proširen na mnogo načina za prilagodbu kod složenijih stvari u stvarnom svijetu. Ali pod ovim pretpostavkama, svi će investitori odrediti isti omjer Sharpea za portfelj rizične imovine.

Definicija 2.1.1. *Omjer Sharpea je mjera rizika, tj. omjer povrata u odnosu na rizik. To je standardna mjera u upravljanju portfeljem koja pokazuje odnos između ostvarenog povrata na neku investiciju u odnosu na pretpostavljeni rizik i prinos nerizične investicije. Omjer Sharpea (S) je dan ovom fromulom:*

$$S = \frac{(E_H - r_f)}{\sigma_H} \tag{2.1}$$

gdje je
$E_H = \mathbb{E}[R_H]$=*očekivani prinos rizične imovine H,*
r_f=*stopa povrata od rizika,*
$\sigma_H = \sigma(R_H)$=*standardna devijacija imovine H.*

Ovisno o toleranciji na rizik, svaki investitor uložiti će dio svog bogatstva u ovaj optimalni portfelj, a ostatak će pridružiti za bezrizično pozajmljivanje ili zaduživanje. Svi investitori će rizičnu imovinu držati u relativno istim omjerima. Da bi tržište bilo u ravnoteži, očekivani povrat svake imovine mora biti takav da se investitori kolektivno odluče zadržati dionice imovine. Ako svi investitori imaju rizičnu imovinu u jednakim omjerima, ti omjeri moraju biti omjeri u kojima se rizična imovina drži u tržišnom portfelju. Tržišni portfelj je portfelj koji se sastoji od svih raspoloživih udjela svake rizične imovine. U ravnoteži, portfelj rizične imovine s najvišim Sharpeovim omjerom mora biti tržišni portfelj.

Ako tržišni portfelj ima najviši dostignuti Sharpeov omjer, ne postoji način da se dobije viši Sharpeov omjer držanjem više ili manje bilo koje imovine. Primjenjujući pravilo poboljšanja portfelja slijedi da premija na rizik svake imovine mora zadovoljavati

$$E_S - r_f = \beta(E_M - r_f), \tag{2.2}$$

gdje su
$E_S = \mathbb{E}[R_S]$=očekivani prinos imovine S,
$E_M = \mathbb{E}[R_M]$=očekivani prinos tržišnog portfelja M,
β=osjetljivost prinosa imovine na povrat u tržišnom portfelju, tj $\beta = \rho\sigma_S/\sigma_M$ gdje je ρ korelacija između povrata na imovinu S i tržišnog portfelj M).
Razliku $E_S - r_f$ nazivamo premija rizika.

Pravilo poboljšanja portfelja nam kaže:

1. Ako dodamo udio dionica u portfelj, poveća se omjer Sharpea ako premija na rizik zadovoljava
$$E_S - r_f > \beta(E_M - r_f)$$
2. Ako prodamo udjele dionica, povećati će se Sharpeaov omjer ako je
$$E_S - r_f < \beta(E_M - r_f)$$
3. Portfelj će imati najviši mogući omjer Sharpea ako vrijedi jednadžba (2.2) za svaku dionicu.

Pomoću pravila poboljšanja portfelja uspostavili smo model vrednovanja kapitalne imovine kod kojeg je očekivani prinos imovine u ravnoteži zadan s

$$E_S = r_f + \beta(E_M - r_f). \tag{2.3}$$

Ova formula daje odnos između očekivanog povrata i rizika koji je u skladu s ponašanjem investitora prema propisima teorije portfelja. Ako se ovo pravilo ne pridržava, investitori će moći nadmašiti tržište (u smislu dobivanjem višeg Sharpeovog omjera) primjenom pravila o poboljšanju portfelja, a ako to učini dovoljno mnogo investitora, cijene dionica prilagoditi će se do točke u kojoj CAPM postaje istinit.

CAPM jednadžbu možemo izraziti na drugačiji način:

$$S_S = \rho * S_M \tag{2.4}$$

gdje S_S predstavlja Sharpeov omjer imovine S, a S_M predstavlja Sharpeov omjer tržišnog portfelja M. Koristeći činjenicu da je

$$\beta = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_M},$$

$$S_S = \frac{(E_S - r_f)}{\sigma_S},$$

$$S_M = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M}$$

jednadžba (2.4) se može preurediti tako da se dobije

$$\frac{(E_S - r_f)}{\sigma_S} = \rho \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M}. \tag{2.5}$$

Pomnožimo jednadžbu (2.5) sa σ_S

$$E_S - r_f = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_M}(E_M - r_f)$$

čime smo dobili izraz (2.3).

Drugim riječima, u ravnoteži Sharpeov omjer bilo koje imovine nije veći od Sharpeovo omjera tržišnog portfelja (pošto je $\rho \leq 1$). Nadalje, imovina koja ima istu korelaciju s tržišnim portfeljem imati će isti omjer Sharpea.

Model vrednovanja kapitalne imovine govori da za izračunavanje očekivanog prinosa dionica investitori trebaju znati dvije stvari: premiju rizika cjelokupnog kapitala na tržištu kapitala $E_M - r_f$ (uz pretpostavku da su dionice jedina rizična imovina) i beta indeks u odnosu na tržište. Premija na rizik dionica određena je komponentom prinosa koja je savršeno povezana s tržištem. Komponenta povrata dionica koja nije povezana s tržištem može se ukloniti i ne određuje premiju na rizik.

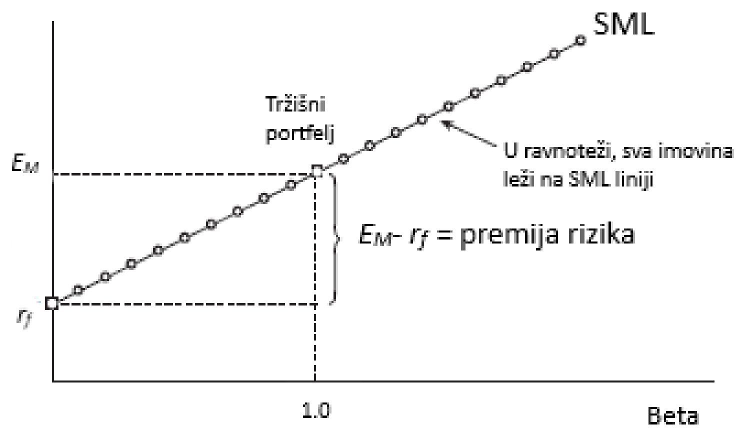
2.2 Implikacije CAPM modela

CAPM model ima niz važnih implikacija.

1. Očekivani povrat dionica ne ovisi o njezinom samostalnom riziku. Dionica s visokim beta indeksom imati će visoki samostalni rizik, ali dionica ne mora imati visoki beta indeks da bi imala visoki samostalni rizik. Dionice s visokim samostalnim rizikom imati će samo visoki očekivani povrat.

2. Beta indeks nudi metodu za mjerenje rizika imovine. Svaka mjera rizika za utvrđivanje očekivanog prinosa trebala bi zadovoljiti da je rizik portfelja prosjek svih rizika udjela koji se nalaze u tom portfelju. Beta indeks to zadovoljava. U sljedećem primjeru pokazati ćemo značaj beta indeksa.

   Primjer 2.1. *Ako dvije dionice imaju tržišni beta indeks 0.8, odnosno 1.4, tada je tržišni beta portfelja od 50/50 ovih dionica 1.1,tj. prosjek beta indeksa ovih dionica. Beta indeks tržišnog portfelja je jednak 1.0 ($\beta = 1.0$).*
   Kada je $\beta > 1$ govori nam kako je prinos dionice veći od prinosa tržišnog portfelja, te da je opterećen više sustavnim rizikom od tržišnog portfelja.
   U slučaju $\beta < 1$ dionica je manje opterećena sustavnim rizikom nego tržišni portfelj, ali i daje manji prinos od prinosa tržišnog portfelja.



Slika 2.1: Linija tržišta vrijednosnica -SML

Na grafu gdje je rizik imovine mjeren beta indeksom na vodoravnoj osi, a povrat na okomitoj osi, svi vrijednosni papiri leže u jednoj liniji - Liniji tržišta vrijednosnica prikazanoj na slici 2.1 [1]. *Ako je tržište u ravnoteži, sva imovina mora ležati na SML liniji. Ako ne, investitori će moći poboljšati tržšni portfelj i dobiti veći Sharpeov omjer.*

3. U CAPM modelu očekivani povrat dionica ne ovisi o brzini rasta njegovih budućih novčanih tokova. Stoga, za dobivanje očekivanog povrata dionica tvrtke nije potrebno provesti opsežnu financijsku analizu tvrtke i predvidjeti njene buduće novčane tokove. Prema CAPM-u, o konkretnoj tvrtki dovoljno je znati beta indeks njezinih dionica, parametar koji je mnogo lakše procijeniti od očekivanih budućih novčanih tokova.

2.3 Korisnost CAPM model

Model vrednovanja kapitalne imovine je elegantna teorija s dubokim implikacijama na cijene imovine i ponašanje investitora. No, na pitanje korisnosti modela s obzirom na idealiziran svijet možemo odgovoriti na nekoliko načina.
Prvo, može se ispitati odgovaraju li realne cijene imovine i portfelj investitora predviđanjima

[1] Slika 2.1 je iz reference [5] str. 18

modela. Drugo, čak i ako model ne opisuje sadašnji svijet posebno dobro, mogao bi predvidjeti ponašanje budućih investitora. I treće, CAPM model može poslužiti kao mjerilo razumijevanja pojava na tržištu kapitala zbog kojih cijene imovine i ponašanje investitora odstupaju od propisa modela.
U sljedećem primjeru ćemo pokazati kako pomoću CAPM modela možemo analizirati diskontirani novčani tok.

Primjer 2.2. *Prema CAPM-u, odgovarajuća diskontna stopa za vrednovanje očekivanih budućih novčanih tokova poduzeća ili nekog investicijskog projekta određena je bezrizičnom stopom, premijom na tržišni rizik i beta indeksom u odnosu na tržište tvrtke ili projekta. Točnost procjene ovih parametara je važna za odlučivanje u stvarnom svijetu.*
Beta indeks obično se procijenjuje korištenjem linearne regresijske analize primijenjene na povijesne podatke o prinosu. Može se precizno procijeniti na ovaj način čak i tijekom relativno kratkog vremenskog razdoblja, pod uvjetom da ima dovoljno visokofrekvencijskih podataka. Kada se poduzećem ili projektom, koje se vrednuje, ne trguje javno ili nema povijesti povrata, uobičajno je uzeti beta indeks od usporedivih subjekata čiji se beta indeksi mogu procijeniti. Problemi s mjerenjima mogu se pojaviti čak i ako dostupnost podataka o povratu tržišta nije problem. Na primjer, kada je kovarijanca s tržišta s vremenom promjenjiva.
Najteži od svih parametara za procjenu je obično premija na tržišni rizik. Povijesni podaci premije na rizik procjenjuju se iz prosjeka prošlih povrata i prosječni prinosi su osjetljivi na početnu i završnu razinu cijena dionica. Stoga se premija za rizik mora mjeriti u dužim vremenskim razdobljima.

Nijedno od ovih mjernih pitanja ne predstavlja problem za CAPM model. Premija tržišnog rizika zajednička je svim modelima procjene novčanog toka, a njezinu procjenu potrebno je izvršiti bez obzira na poteškoće zadatka. Beta indeks se također može procijeniti, bez obzira na poteškoće.

Model određivanje kapitalne imovine proširen je na različite načine. Neka od poznatijih proširenja su: omogučavanje heterogenih uvjeta, eliminacija mogućnosti posuđivanja i pozajmljivanja bez rizika, posjedovanje neke imovine bez mogućnosti prodaje, proširenje na međunarodno ulaganje... U većini proširenja CAPM modela niti jedan portfelj rizične imovine nije optimalan za sve. Umjesto toga, investitori različito raspoređuju svoje bogatstvo u nekoliko rizičnih portfelja koje investitori ujedine u tržišni portfelj. Gotovo sve varijante CAPM modela imaju multi-beta izraz za očekivani povrat. Oni su izvedeni iz istih osnovnih pojmova:

1. investitori će imati portfelj koji je optimiziran s obzirom na njihove specifične potrebe, ograničenja i sklonosti riziku;

2. u ravnoteži, cijene imovina sadržavaju te zahtjeve;
3. imovina s visokim očekivanim prinosom je ona koja je povezana s bilo kakvim rizikom kojeg značajna skupina investitora nije uspjela maknuti iz svog portfelja.

Je li osnovni CAPM modela ili neko od njegovih proširenja ispravan model cijena imovine, u konačnici je empirijsko pitanje. No model vrednovanja kapitalne imovine pomaže razumijevanju odrednica cijena imovine. CAPM model kaže nam da vlasništvo nad imovinama raznih investitora smanjuje njihov očekivani povrat i povećava njihove cijene. Kao rezultat modela, sada razmišljamo drugačije o odnosu između očekivanog povrata i rizika i o tome kako investitori trebaju raspodjeliti svoj investicijski portfelj.

Poglavlje 3

Upravljanje tržišnim rizikom

Upravljanje rizicima je glavna aktivnost banaka i drugih finanancijskih posrednika kao što su osiguravajuća društva. Komercijalne banke i investicijski fondovi moraju kontrolirati i odabrati rizike kod upravljanja depozita i kreditnih portfelja vrijednosnih papira.

S obzirom na raznolikost rizika kojima banka mora upravljati, postoji nekoliko klasifikacija. Prema ekonomistima, postoje temeljne razlike između mikroekonomskih rizika, koji se mogu diversificirati kroz zakon velikih brojeva, i makroekonomskih rizika, koji ne mogu. Za razliku od osiguranja imovine i nezgoda poduzeća koja se u osnovi bave mikroekonomskim rizicima, banke i društva za životno osiguranje općenito se moraju nositi s obje vrste rizika.

Još jedna temeljna razlika je razlika između rizika likvidnosti, koji se pojavljuje kada tvrtka nije sigurna da će vratiti svoje vjerovnike na vrijeme, i rizika solventnosti, koji se pojavljuje kada ukupna vrijednost imovine imovine tvrtke padne ispod ukupne vrijednosti svojih obaveza. Kao i svaka tvrtka s ograničenom odgovornošću, banke su predmet obje vrste rizika, ali posljedice tih rizika su mnogo dramatičnije za banke nego za ostale sektore gospodarstva. U ovom poglavlju proučavaju se tržišni rizici koji utječu na portfelje utržive imovine i obveze kod banaka.

3.1 Formulacija moderne teorije portfelja i CAMP modela

Moderna teorija portfelja zanimljiva je za banke, koje često drže velike portfelje utržive imovine. Ova teorija portfelja dovela je do primjera bankarskog ponašanja. Ideja je izjednačiti svu imovinu i obveze banke u vrijednosne papire određene vrste, te da se cijelu banku uzme u obzir kao upravitelj portfelja koji kontrolira ogroman portfelj tih vrijednosnih papira. U ovome pristupu, jedina specifičnost obveze banke je da odgovaraju kratkoročnim pozicijama u portfelju banke.

Ideja ovog pristupa je pojednostaviti opći problem optimalnog odabira portfelja pretpostavljajući da preferencije investitora U ovise samo o prva dva momenta μ i σ^2 (očekivanja i varijance) vrijednosti njihovog portfelja.

Neka W označava početno bogatstvo investitora i neka je x_i $(i = 1, .., N)$ iznos uložen u i-tu rizičnu imovinu. Vektor $x = (x_1, .., x_N)$ predstavlja rizični portfelj kojeg drži investitor. Ostatak bogatstva $(W - \sum_{i=1}^{N} x_i)$ je uložen u rizičnu imovinu povrata R_0. Slučajni povrati $(\widetilde{R}_i)_i$ rizične imovine imaju označene prve i druge momente

$$\mathbb{E}(\widetilde{R}_i) = R_0 + \rho_i, (i = 1, .., N) \tag{3.1}$$

$$cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_j) = \upsilon_{ij}, (i, j = 1, .., N). \tag{3.2}$$

Na kraju razdoblja, bogatstvo investitora je

$$\widetilde{W} = [(W - \sum_{i=1}^{N} x_i)R_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i\widetilde{R}_i]. \tag{3.3}$$

Prva dva momenta ove slučajne varijable su:

$$\mu = \mathbb{E}[\widetilde{W}] = W(R_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i\rho_i), \tag{3.4}$$

$$\sigma^2 = var(\widetilde{W}) = (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \upsilon_{ij}x_ix_j)W^2. \tag{3.5}$$

Pod pretpostavkom očekivanja i varijance, investitor će odabrati rizični portfelj x koji bi maksimizirao njegovu funkciju korisnosti $U(\mu, \sigma^2)$ (gdje je $\partial U/\partial\mu > 0$,$\partial U/\partial\sigma^2 < 0$).

Uvjeti prvog reda za maksimum su:

$$\frac{\partial U}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\sigma^2}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial\mu} \cdot \rho_i + 2\frac{\partial U}{\partial\sigma^2} \sum_{j=1}^{N} \upsilon_{ij}x_j = 0, (i = 1, .., N).$$

Neka $\rho = (\rho_1, ..., \rho_N)$ označava vektor očekivanog viška povrata, a $V = (v_{ij})_{i,j=1,...,N}$ matricu kovarijance rizične imovine, za koju se pretpostavlja da je invertibilna. Uvjeti prvog reda mogu se zapisati u kraćem obliku:

$$-\lambda\rho + Vx = 0, \tag{3.6}$$

gdje je

$$\lambda = \frac{-\partial U/\partial \mu}{2\partial U/\partial \sigma^2},$$

ili

$$x = \lambda V^{-1}\rho. \tag{3.7}$$

Budući da su V i ρ neovisni o investitoru, taj odnos podrazumijeva da će svi investitori izabrati kolinearne rizične portfelje,tj. da svi investitori dobivaju željeni portfelj kombinacijom rizične imovine i fiksnog portfelja, $V^{-1}\rho$, tumačen kao uzajamni fond. Jedina razlika u ponašanju među investitorima je koeficijent λ, a onaj koji je više sklon riziku kupiti će više rizične imovine i manje rizično uzajamnih fondova.

Zanimljiv aspekt CAPM modela sastoji se u pisanju opće formulacije ravnoteže jednadžbe (3.7). Razmotrimo dvije glavne implikacije ovog klasičnog modela. Ako se tržišni portfelj x_M definira kao pridruživanje svih pojedinačnih rizičnih portfelja, jednadžba (3.7) ima dvije važne posljedice:

• Budući da je x_M zbroj pojedinačnih rizičnih portfelja koji su svi međusobno kolinearni, ti pojedini rizični portfelji mogu se smatrati obratno kolinearni prema x_M. Stoga,tržišni portfelj može se koristiti kao prethodno opisani uzajamni fond.

• Očekivani višak povrata bilo koje imovine i u ravnoteži je proporcionalan s regresijskim koeficijentom β_i od $\widetilde{R}_i$. Prisjetimo se iz drugog poglavlja kako je β osjetljivost prinosa imovine i na povrat tržišnog portfelja x_M ($\beta = \rho\sigma_i/\sigma_M$, gdje je ρ korelacije između povrata na imovinu i i tržišnog portfelja x_M). Doista, β je proporcionalna s komponentama vektora Vx_M, koji je prema jednadžbi (3.7) proporcionalan s ρ_i.

Sljedeći odjeljak opisuje primjenu CAPM-a na modeliranje ponašanje banaka.

3.2 Banka kao portfelj

U ovom odjeljku pokazuje se kako mean-variance analiza, to jest moderna teorija portfelja, može poslužiti za modeliranje upravljanja tržišnim rizikom od strane poslovnih banaka. U ovakvom načinu upravljanja tržišnim rizikom pretpostavlja se da su tržišta za imovinu (i obveze) konkurentna i taj je rizik izričito uzet u obzir.

Kao prvi korak ovog pristupa gledamo jednostavan slučaj sa samo dva rizična financijska proizvoda L i D, koji će se kasnije tumačiti kao krediti i depoziti. Banka se asimilira s upraviteljem portfelja, koji mora odlučiti koliko će investirati u ove rizične proizvode x_L i x_D, dok ostatak svog bogatstva investira u pričuve (rizična imovina). Konkurentsko ponašanje znači da banka preuzima prinose $\widetilde{r_L}$, $\widetilde{r_D}$ i r od tih aktivnosti.
Dakle, slučajna dobit banke je

$$\widetilde{\pi} = [\widetilde{r_L} x_L + \widetilde{r_D} x_D + r(W - x_L - x_D)], \tag{3.8}$$

ili

$$\widetilde{\pi} = Wr + (\widetilde{r_L} - r_L)x_L + (\widetilde{r_D} - r_D)x_D. \tag{3.9}$$

Koristeći isti zapis kao i prije, funkcija banke može se izraziti kao

$$\Phi(x) = U(\mathbb{E}(\widetilde{\pi}), var(\widetilde{\pi})). \tag{3.10}$$

Ako x^* maksimizira Φ, uvjet prvog reda, kao i prije, je

$$x^* = \lambda V^{-1} \rho \tag{3.11}$$

gdje je

$$V = \begin{pmatrix} var(\widetilde{r_L}) & cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) \\ cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) & var(\widetilde{r_D}) \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \frac{-\partial U/\partial \mu}{2\partial U/\partial \sigma^2},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \widetilde{r_L} - r \\ \widetilde{r_D} - r \end{pmatrix}$$

Korolar 3.2.1. *Ako je $\widetilde{r_D} < r < \widetilde{r_L}$ i $cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) > 0$, tada je $x_L^* > 0$ i $x_D^* < 0$.*

Ovaj rezultat može se promatrati kao endogeno objašnjenje za djelatnosti posredovanja banaka. Ako su očekivani viškovi povrata na depozite negativni, a na kredite pozitivni, i ako je kovarijanca između tih povrata pozitivna, tada će konkuretni upravitelj portfelja uložiti negativan iznos na depozite (on će izdati takve instrumente) i pozitivan iznos na kredite. Drugim riječima, on bi imao kredite na strani aktive bilance ($L = x_L^*$) i depozite na strani pasive ($D = -x_D^* > 0$). Ako zaključak ne vrijedi, to znači da, ili $x_D^* > 0$ i banka se zadužuje po rizičnoj stopi za ulaganje u dvije vrste kredita, ili $x_L^* < 0$ i banka nudi dvije vrste depozita i ulaže sredstva bez rizika.

Dokaz. Dokaz je izveden iz jednadžbe (3.11):

$$x^* = \begin{pmatrix} x_L^* \\ x_D^* \end{pmatrix} = \lambda V^{-1} \rho = \frac{\lambda}{\Delta} \begin{pmatrix} var(\widetilde{r_D}) & -cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) \\ -cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) & var(\widetilde{r_L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{r_L} - r \\ \widetilde{r_D} - r \end{pmatrix},$$

gdje se za invertiranje matrice 2x2 koristi sljedeća formula:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

i $\Delta = ad - bc$ determinanta od matrice V.

Zbog averzije prema riziku, λ je pozitivan $\left(\frac{\partial U}{\partial \mu} > 0, \frac{\partial U}{\partial \sigma^2} < 0\right)$ te je i Δ pozitivan jer je V pozitivna definitna matrica. Stoga,

$$x_L^* = \frac{\lambda}{\Delta}\Big[\ var(\widetilde{r_D})(\widetilde{r_L} - r) - cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D})(\widetilde{r_D} - r)\ \Big],$$

gdje je

$$var(\widetilde{r_D}) > 0,$$
$$(\widetilde{r_L} - r) > 0,$$
$$cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D} > 0,$$
$$(\widetilde{r_D} - r) < 0$$

i x_L^* je pozitivan.
Slično tome,

$$x_D^* = \frac{\lambda}{\Delta}\Big[\ -cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D})(\widetilde{r_L} - r) + var(\widetilde{r_L})(\widetilde{r_D} - r)\ \Big],$$

gdje je

$$-cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) < 0,$$
$$(\widetilde{r_L} - r) > 0,$$
$$var(\widetilde{r_L}) > 0,$$
$$(\widetilde{r_D} - r) < 0$$

i x_D^* je negativan. □

Primjetimo da nam prethodni Korolar 3.2.1 daje samo zadovoljavajući uvjet. Potrebni uvjet za

$$x_L^* > 0$$

je

$$var(\widetilde{r_D})(\widetilde{r_L} - r) > cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D})(\widetilde{r_D} - r),$$

a za $x_D^* < 0$ je

$$cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D})(\widetilde{r_L} - r) > var(\widetilde{r_L})(\widetilde{r_D} - r).$$

Ako je $\widetilde{r_D} > r$ ili $\widetilde{r_L} < r$, pod uvjetom da je $cov(\widetilde{r_L}, \widetilde{r_D}) > 0$, omogućuje se postojanje financijskih posrednika.

Još jedan zanimljiv rezultat pristupa moderne teorije portfelja je usporedna statistička analiza ponašanja banke. Sljedeći rezultat nam daje odgovor kako utječu promjene očekivanih prinosa ili varijanca prinosa na količine depozite i izdanih kredita.

Korolar 3.2.2. *1. x_L^* je rastuća funkcija od $(\widetilde{r_L} - r)$ i opadajuća funkcija od $(\widetilde{r_D} - r)$ i $var(\widetilde{r_L})$.*

2. $|x_D^*|$ je rastuća funkcija od $(\widetilde{r_L} - r)$ i opadajuća funkcija od $(\widetilde{r_D} - r)$ i $var(\widetilde{r_D})$.

Dokaz. To je izravna posljedica formula za x_L^* i x_D^* dobivenih u dokazu Korolara 3.2.1 (prisjetimo se da je $x_D^* < 0$). Jedina svojstva koja nisu očita su:

$$\frac{\partial x_L^*}{\partial var(\widetilde{r_L})} = -\frac{x_L^*}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial var(\widetilde{r_L})} < 0$$

i

$$\frac{\partial |x_D^*|}{\partial var(\widetilde{r_D})} = -\frac{|x_D^*|}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial var(\widetilde{r_D})} < 0$$

□

Ova analiza može se proširiti na slučaj proizvoljnog broja imovina i obveza uz dodatna ograničenja. Na primjer, zahtjev za kratkoročnom prodajom može se uvesti ograničavanjem x_i da bude pozitivan ako i pripada aktivi bilance, a negativan ako pripada pasivi bilance. Slično tome, rezerve zahtjeva, pokazatelji likvidnosti i omjeri solventnosti mogu se uvesti kao linearna ograničenja o različitim stavkama bilance banke. Tako se dobiva konkurentna teorija financijskih posrednika u svim stavkama bilance koje se određuju na isti način kao i portfelj pojedinačnog investitora.

Ovaj pristup ima nekoliko problematičnih aspekata. Kao i u CAPM modelu, model predviđa da bi sve banke trebale držati kolinearne rizične portfelje. To nije u skladu s različitim stavkama bankovne bilance u praksi. Ako se kapital banke smatra samo jos jednom obvezom, bogatstvo banke W postaje vlastito. Ni jedna funkcija korisnosti ne može se pretpostaviti jer identitet vlasnike banke postaje nebitan. Jedino ograničenje cijele ravnoteže banke (uključujući i kapital) je ta da je to efikasan portfelj. Još je neodređena i veličina banaka u ravnoteži. Ako je dana bilanca efikasna, tada je i svaki višekratnik te bilance efikasan.
Konačno, ako se uzme u obzir mogućnost bankrota, simetrija između imovine i obveza se prekida. Više nije moguće pretpostaviti da je stopa povrata na kapital koji zahtjevaju investitori (dioničari ili vlasnici duga banke) neovisna o imovini izabrana od strane banke

jer utječe na vjerojatnost neuspjeha banke. U sljedećem odjeljku je ispitan ovaj problem gdje je razvijena primjena modela portfelja na pitanje o koeficijentima solventnosti.

3.3 Utjecaj kapitalnih zahtjeva

Od siječnja 1993. sve poslovne banke podnose zajednički zahtjev solventnosti Europskoj uniji. Prethodno predstavljeni model portfelja istražuje posljedice takvog propisa o ponašanju poslovnih banaka. Model je objašnjen u nastavku.

U trenutku 0 banka odabire sastav svog portfelja imovine i investira iznose $x_0, x_1, ..., x_n$ na (n+) vrijednosnih papira, uzimajući dane slučajne prinose $\widetilde{r_i}$ na te vrijednosne papire. Pretpostavlja se da je sigurnosna nula bez rizika (r_0 je deteriminiran i normaliziran na nulu). Radi jednostavnosti, obveze, depoziti D i temeljni kapital K su fiksni. Depoziti se gledaju po rizičnoj stopi. Na 1. dan banka je likvidna, a dioničari primaju razliku između vrijednosti imovine banke i vrijednosti depozita tako da D nestaje iz ovog izraza:

$$\widetilde{K_1} = K + \sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{r_i}. \tag{3.12}$$

Banka se ponaša kao portfelj i nastoji maksimizirati

$$\Phi(x) = \mathbb{E}[u(\widetilde{K_1})], \tag{3.13}$$

gdje je u konkavna rastuća funkcija korisnosti. Vlasnik banke ponaša se kao da banka snosi punu odgovornost ($\widetilde{K_1}$ može biti negativan). To nije u skladu s glavnim kapitalnim zahtjevima, naime, za sprečavanje bankarskog neuspjeha. Sada se samo fokusiramo na formulaciju koja pokazuje da kapitalni zahtjevi mogu ozbiljno narušiti raspodjelu imovine banaka.

Da bismo mogli primjenjivati modernu teoriju portfelja, pretpostavljamo da je zajednička distribucija povrata normalna, s invertibilnom matricom kovarijance V. ρ označava vektor očekivanog viška prinosa. Pod ovom pretpostavkom, $\widetilde{K_1}$ je normalna slučajna varijabla s očekivanjem

$$\mu = \mathbb{E}(\widetilde{K_1}) = K + \langle x, \rho \rangle, \tag{3.14}$$

(gdje je $\langle a, b \rangle$ skalarni produkt vektora a i b), i varijance

$$\sigma^2 = var(\widetilde{K_1}) = \langle x, Vx \rangle. \tag{3.15}$$

Pretpostavka o normalnosti podrazumijeva da Φ ovisi samo o μ i σ^2:

$$\Phi(x) = U(K + \langle x, \rho \rangle, \langle x, Vx \rangle), \tag{3.16}$$

gdje je U definiran kao:

$$U(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mu + t\sigma) e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{3.17}$$

Ponašanje banaka kod nedostatka regulative solventnosti

Ponašanje banaka s punom odgovornošću kod nedostatka regulative solventnosti dano je rješenjem zadaće

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} \max \Phi(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.18}$$

Rješenje ove zadaće,x_1^* , je

$$x_1^* = \lambda_1 V^{-1} \rho, \tag{3.19}$$

gdje je

$$\lambda_1 = \frac{-\partial U/\partial \mu}{2(\partial U/\partial \sigma^2)} > 0.$$

Već je napomenuto da ova formulacija nije u skladu s prethodnim pretpostavkama, jer banka ne uzima u obzir svoju klauzulu o ograničenoj odgovornosti. Međutim, neuspjeh se događa kada je $\widetilde{K_1} < 0$. Vjerojatnost ovog događaja je lako izračunati, budući da $\widetilde{K_1}$ slijedi Gaussovu distribuciju sa očekivanjem μ i varijancom σ^2. Stoga,

$$\frac{\widetilde{K_1} - \mu}{\sigma}$$

slijedi normalnu Gaussovu distribuciju kumulativne funkcije $N(\cdot)$, i

$$\mathbb{P}[\widetilde{K_1} < 0] = \mathbb{P}\left[\frac{\widetilde{K_1} - \mu}{\sigma} < -\frac{\mu}{\sigma}\right] = N\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right). \tag{3.20}$$

Dakle,vjerojatnost neuspjeha banke da odabere portfelj imovine x^* i da ima početnu netu vrijednost K je

$$\mathbb{P}[\widetilde{K_1} < 0] = N\left[-\frac{K + \langle x^*, \rho \rangle}{(\langle x^*, V x^* \rangle)^{1/2}}\right]. \tag{3.21}$$

Omjer solventnosti obično se izračunava kao omjer razine kapitala podijeljen s pondiranim zbrojem imovine $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^*$ (za težine α_i pretpostavlja se da prikazuju relativnu rizičnost imovine,a posebno je $\alpha_0 = 0$):

$$CR = \frac{K}{\langle \alpha, x^* \rangle}. \tag{3.22}$$

Na ovom omjeru, regulacija solventnosti daje gornju granicu. Ako se banke ponašaju kako je opisano u zadaći (3.18), vjerojatnost neuspjeha biti će opadajuća funkcija omjera kapitala. To je utvrđeno u sljedećem korolaru.

Korolar 3.3.1. *U nedostatku propisa o solventnosti i ako banke ne bi uzele u obzir klauzulu s ograničenom odgovornošću, vjerojatnost neuspjeha banaka je opadajuća funkcija njihovog omjera kapitala, neovisna o negativnim ponderima koji se koriste u računanju omjera.*

Dokaz. Zbog svojstva moderne teorije portfelja, sve banke odabiru kolinearne portfelje. Neka $x_1^*(K)$ označava portfelj kojeg je odabrala banka i čija neto vrijednost iznosi K:

$$x_1^*(K) = \sigma(K) x_M,$$

gdje x_M označava portfelj kolinearan s $V^{-1}\rho$ tako da njegov povrat ima unitaran oblik varijance. $\sigma(K)$ je negativna konstanta, jednaka standardnoj devijaciji od povrata $x_1^*(K)$. Koristeći sličnu notaciju, $\mu(K)$ predstavlja očekivanje od $\widetilde{K_1}$:

$$\mu(K) = K + \langle x_1^*(K), \rho \rangle = K + \sigma(K) \langle x_M, \rho \rangle .$$

Kao posljedica,

$$\mathbb{P}[\widetilde{K_1} < 0] = N\left(-\frac{\mu(K)}{\sigma(K)}\right) = N\left(- \langle x_M, \rho \rangle - \frac{K}{\sigma(K)}\right),$$

dok je

$$CR = \frac{K}{\langle x_M, \alpha \rangle \sigma(K)}.$$

Stoga,

$$\mathbb{P}[\widetilde{K_1} < 0] = N\left(- \langle x_M, \rho \rangle - \langle x_M, \alpha \rangle CR(K)\right).$$

Pošto je $\langle x_M, \rho \rangle$ pozitivno, vjerojatnost neuspjeha je opadajuća funkcija $CR(K)$.

□

Ponašanje banaka nakon uvođenja regulative solventnosti

Budući da je omjer kapitala dobar pokazatelj rizika neuspjeha banke, razumno je nametnuti donju granicu ovog omjera kako bi se ograničio rizik od neuspjeha. Međutim, nakon uvođenja takvog omjera može se promijeniti raspodjela imovine banke, jer je njeno ponašanje okarakterizirano novom zadaćom (u slučaju banke s punom odgovornošću):

$$\mathcal{P}_2 \begin{cases} \max \Phi(x) \\ \langle \alpha, x \rangle \leq K, \end{cases} \tag{3.23}$$

gdje se minimalni omjer kapitala normalizira na 1:,

$$CR = \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} \geq 1 \Leftrightarrow \langle \alpha, x \rangle \leq K. \tag{3.24}$$

Ako ν označava Lagrangeov multiplikator povezan s ovim ograničenjem, uvjet prvog reda od $\mathcal{P}_2$ postaje

$$\nabla\Phi(x_2^*) = \frac{\partial U}{\partial \mu}\rho + 2\frac{\partial U}{\partial \sigma^2} V x_2^* = \nu\alpha. \tag{3.25}$$

Stoga,

$$x_2^* = V^{-1}\left[\lambda_2\rho + \nu_2\alpha\right], \tag{3.26}$$

gdje je

$$\lambda_2 = \frac{-\partial U/\partial \mu}{2(\partial U/\partial \sigma^2)}$$

i

$$\nu_2 = \frac{\nu}{2(\partial U/\partial \sigma^2)}.$$

Time je dokazan sljedeći korolar.

Korolar 3.3.2. *Ako x nije kolinearno s ρ i ako je ograničenje solventnosti obvezujuće, banka će odabrati nefikasan portfelj; tj. x_2^* neće biti kolinearan s $V^{-1}\rho$.*

Općenito, ako α nije kolinearan s ρ, uvođenje regulacije solventnosti podrazumijeva neefikasno bankovno dodjeljivanje sredstava. Ukupni volumen njihovih rizičnih portfelja će se smanjivati, ali njegov sastav će ići više smjeru rizičnih imovina. Kim i Santomero (vidi [3]) pokazali su primjer u kojem vjerojatnost neuspjeha raste nakon uvođenja omjera kapitala.

Primjer 3.1. [1] *Nesolventnost banke definira se kao događaj u kojem je temeljni kapital banke potpuno eliminiran, tj. $\mu \leq -1$, gdje nam μ predstavlja očekivanu vrijednost kapitala. Iako u stvarnosti knjigovodstvene vrijednosti važne za regulatore i predviđanja mogu spriječiti zatvaranje, za trenutnu analizu koristimo utvrđivanje tržišne vrijednosti insolventnosti.*

Kada je povrat na kapital normalno distribuiran, vjerojatnost nesolventnosti , označena s p, može se odrediti za bilo koji (μ, σ) i zadovoljit će

$$\mathbb{P}[\mu \leq -1] = \mathbb{P}\left[\frac{\mu - \mu}{\sigma} \leq \frac{-1 - \mu}{\sigma}\right] = p. \tag{3.27}$$

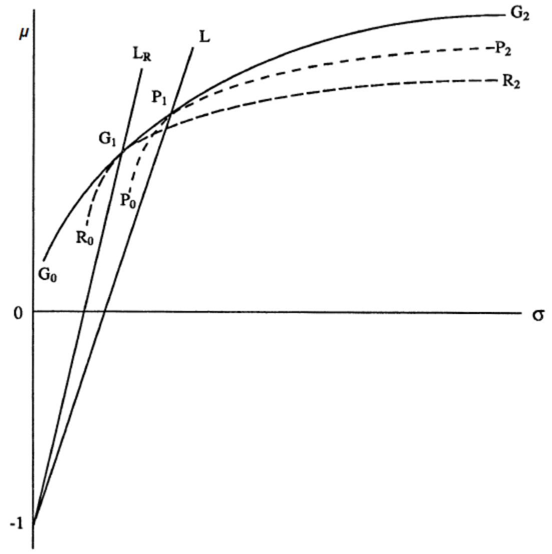
[1] Primjer iz reference [3]

Stoga je,

$$\mu = -1 - \Phi(p) * \sigma \ \ i \ \ -\Phi(p) = \frac{\mu + 1}{\sigma} \tag{3.28}$$

gdje je $\Phi(\cdot)$ *inverz kumulativne funkcije standardne normalne distribucije. Vrijednost* $\Phi(\cdot)$ *je uvijek negativna jer vjerojatnost neuspjeha uzima u obzir samo donji kraj distribucije. Veća apsolutna vrijednost od* $\Phi(\cdot)$ *odgovara nižem riziku nesolventnosti za odabrani portfelj (ako je vjerojatnost bankrota* 2.5%*,* $\Phi(p = 0.0025)$ *je* -1.96*, dok je* $\Phi(0.001) = -3.1$*). Na primjer, rizik nesolventnosti portfelja* P_1*,* (μ^*, σ^*) *je* β *koji zadovoljava*

$$-\Phi(\beta) = (\mu^* + 1)/\sigma^*.$$



Slika 3.1: Učinak regulacije kapitala na vjerojatnost nesolventnosti

Jednadžba (3.28) *daje prikladan način za grafičku usporedbu rizika različitih portfelja. Predstavlja liniju* $\mu = -1$ *i odabrani portfelj* (μ, σ) *s nagibom od*

$$-\Phi(p) = (\mu + 1)/\sigma.$$

Dakle, ako samo jedan portfelj čini strmiju liniju od drugog, prvi ima niži rizik nesolventnosti nego drugi. Na slici 3.1[2]*,bilo koji portfelj koji se nalazi s lijeve strane od linije L*

$$L : \mu = -1 - \Phi(p) * \sigma = -1 - [(\mu^* + 1)/\sigma^*] * \sigma$$

[2] Slika 3.1 je iz reference [3] str. 1223

ima strmiji nagib od P_1, dakle, i niži rizik od nesolventnosti od β. Prema tome, portfelj koji leži desno od linije L ima veći rizik nesolventnosti od β. Vjerojatnost nesolventnosti je konstatna pri β duž linije L.

Razmotrimo sada gdje regulatori žele postaviti standard solventnosti. Oni žele kontrolirati vjerojatnost bankrota postavljanjem gornje granice α na $\mathbb{P}[\mu \leq -1]$. Uz pretpostavku normalnosti, ispitivanje standarda solventnosti $\mathbb{P}[\mu \leq -1] \leq \alpha$ pretvara se u

$$\mu \geq -1 - \Phi(\alpha) * \sigma. \tag{3.29}$$

Jednadžba (3.29) *predstavlja preferenciju regulatora, što ovisi o vjerojatnosti bankrota. Na slici* 3.1, *samo portfelji lijevo od L_R*

$$L_R : \mu = -1 - \Phi(\alpha) * \sigma = -1 - [(\mu^R + 1)/\sigma^R] * \sigma$$

prihvatljivi su prema standardu solventnosti regulatora i klasificirane su kao sigurne banke. No, portfelj P_1 ne zadovolja standard jer linija L ima ravniji nagib od referentne linije regulatora, L_R ($-\Phi(\alpha)$ je manji od $-\Phi(\beta)$). Stoga će se banka klasificirati kao rizična.

Kako bi postigli standard solventnosti, regulatori provode zahtjev omjera kapitala. Budući da granica s omjerom kapitala k^R,$R_0G_1R_2$ dotiče globalnu granicu $G_0G_1G_2$ na G_1, (μ^R, σ^R), regulatori prisiljavaju banke da rade s omjerom kapitala i imovine na najmanje k^R. Radeći to, nadaju se da će, kada je $k \geq k^R$ obvezujući, banka odabrati G_1 umjesto onih portfelja na G_1G_2, kao što je P_1. Međutim, rizična banka možda neće preći na G_1 u pokušaju da zadovolji $k \geq k^R$. Na slici 3.1, *zahtjev $k \geq k^R$ čini područje između G_1G_2 i G_1R_2 neizvedivim. Nova ograničena efikasna granica nije ograničena samo na G_0G_1, što regulatori žele dobiti regulacijom omjera kapitala. I dalje ostavlja izvediv portfelj na G_1R_2. Kada banke odabere portfelj na G_1R_2, ona zadovoljava zahtjev omjera kapitala, ali ne i standard solventnosti. Takve banke preusmjeravaju imovine u rizičnije (povečavaju poslovni rizik) kako bi kompenzirale utjecaj prisilne niže poluge (niži financijski rizik) tako da regulatori ne uspiju vezati rizik za α.*

Ovisnost izbora portfelja o individualnoj (rizičnoj) preferenciji banke smanjuje efikasnost regulatora da smanje rizik nesolventnosti regulacijom omjera kapitala. Kako se svaka banka može suočiti s različitim profilom rizika, ujednačena regulacija omjera kapitala teško može biti efikasan način ograničiti rizik nesolventnosti.

Međutim, postoji jednostavan način (u teoriji) suzbijanja ovog štetnog efetka rekompozicije.

Korolar 3.3.3. *Ako su težine α_i korišteni u omjeru kapitala proporcionalni sa sustavnim rizikom β, na rizičnu imovinu, regulacija solventnosti postaje efikasna. Sve banke izabiru efikasne portfelje i njihova vjerojatnost neuspjeha pada.*

Dokaz. Ako je α kolinearno s β (ili s ρ, jer CAPM model podrazumijeva da su vektori β i ρ međusobno kolinearni), uvjet prvog reda od $\mathcal{P}_2$ postaje

$$x_2^* = (\lambda_2 + \nu_2)\, V^{-1}\rho.$$

Stoga je x_2^* efikasan. Štoviše, vjerojatnost neuspjeha je opadajuća funkcija omjera kapitala, CR (kao i u $\mathcal{P}_1$). To znači da je nametanje omjera kapitala (s točnim težinama, odnosno, proporcionalno tržišnoj procjeni rizika od β_i^*) ključno za ograničavanje rizika neuspjeha banaka. $\square$

Zaključak ove rasprave o modelu portfelja primijenjenom na koeficijente solventnosti banaka nas vraća na pitanje, što se događa kada banka uzima u obzir opciju s ograničenom odgovornošću? Rochet je proučavao to pitanje (vidi [6]). On pokazuje da moderna teorija portfelja još uvijek može biti korisna, ali da inidirektna funkcija korisnosti banke ima drugačiji izraz, $U_{LL}(\mu, \sigma^2)$. Zadaća odluke banke postaje

$$\mathcal{P}_3 \begin{cases} \max \Phi(x) \\ \langle \alpha, x \rangle \le K, \end{cases} \tag{3.30}$$

gdje je

$$\Phi(x) = U_{LL}\left(K + \langle \mu, x \rangle \langle x, Vx \rangle\right), \tag{3.31}$$

i

$$U_{LL}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mu/\sigma}^{+\infty} u(\mu + t\sigma) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{3.32}$$

U_{LL} je indirektna funkcija korisnosti pod ograničenom odgovornošću. Rochet pokazuje da funkcija U_{LL} nije uvijek opadajuća s σ^2. Za niske razine K, banka odabire portfelj s maksimalnim rizikom i minimalnom diverzifikacijom. Kao rezultat toga, regulacija solventosti (čak i s pravilnim težinama) nije dovoljna za brigu o moralnom hazardu. Rochet sugerira uvođenje dodatne regulacije, tipa minimalnog nivoa kapitala koji je neovisan o veličini imovine banke.

Poglavlje 4

Korištenje CAPM modela za cijene zajma

U ovom dijelu ćemo vidjeti jedan primjer korištenja CAPM modela u bankarskom sektoru.

Banka izračunava nominalnu kamatnu stopu r_L po kojoj naplaćuje određenu vrstu zajma slijedećom formulom:

$$\frac{(1-\delta)(1+r_L)-\gamma_L-(1-\alpha)(1+r)}{\alpha}=1+r+\pi \tag{4.1}$$

gdje je
δ= udio zajma koji ne ispunjavaju uvjete, pretpostavljajući da su prihodi od zajma koji ne ispunjavaju uvjeti nula,
γ_L=trošak upravljanja po jedinici zajma,
r= međubankarska kamatna stopa, uzeta kao stopa bez rizika,
π= premija za riziki koju traže dioničari,
α= koeficijent kapitala koji je potreban za ovu vrstu zajma.

Primjer 4.1. *1. Izračunajte očekivani povrat kredita i pokažite da je prethodna formula cijene usko povezana s CAPM pristupom.*

2. Ako pretpostavimo da banka ima monopol na kreditnoj strani, ali da je suočena s konkuretnim tržištem na strani obveza, izračunajte koja bi trebala biti modificirana formula, za δ i β, kao funkcija elastičnosti potražnje za kreditima.

3. Kako treba izmjeniti formulu ako se banka suoči s porezom na dobit po stopi t?

Dokaz. 1. Bruto očekivani povrat kredita je

$$\mathbb{E}(1+\widetilde{\rho})=(1-\delta)(1+r_L)-\gamma_L.$$

Stoga je predložena formula cijena ekvivalentna

$$\mathbb{E}(\widetilde{\rho}) - r = \alpha\pi.$$

CAPM pristup zahtjeva

$$\mathbb{E}(\widetilde{\rho}) - r = \beta\pi.$$

Te dvije formule su jednake samo po uvjetom da je

$$\beta = \alpha.$$

2. Program monopolističke banke je

$$\max_{r_L} \left[(1-\delta)(1+r_L) - \gamma_L + (1-\alpha)(1+r) + \alpha(1+r+\pi)\right] L(r_L),$$

gdje je $L = L(r_L)$ funkcija potražnje za kreditima. Uvjet prvog reda podrazumijeva da je

$$\frac{(1-\delta)(1+(1/\epsilon)r_L) - \gamma_L - (1-\alpha)(1+r)}{\alpha} = 1 + r + \pi,$$

gdje je

$$\epsilon_L = -\frac{r_L L'(r_L)}{L(r_L)}$$

elastičnost potražnje za kreditima. Pretpostavlja se da je uvjet drugog reda zadovoljen.

3. Zamijenimo $r + \pi$ s $(r+\pi)/(1-\tau)$ u formuli (4.1) te dobimo

$$\frac{(1-\delta)(1+r_L) - \gamma_L - (1-\alpha)(1+r)}{\alpha} = 1 + \frac{r+\pi}{1-\tau}.$$

□

Poglavlje 5

Osvrt i zaključak

1952. godine Harry M. Markowitz je objavom članka *Portfolio selection* započeo razvoj moderne teorije portfelja. U svojem članku postavio je jednostavan model koji predstavlja povezanost rizika i prinosa portfelja. Radi te jednostavnosti taj model je najčešće korišten model u istraživanju portfelja i vrijednosnih papira. Pomoću modela definiran je efikasni portfelj, to jest portfelj koji za zadanu stopu prinosa ima minimalan rizik. Nadalje, važan pojam vezan za efikasni portfelj je efikasna granica koja sadrži sve efikasne portfelje koji imaju minimiziranu varijancu portfelja uz neki dani iznos očekivanog iznosa portfelja. Ako portfelj sadrži sve rizične financijske instrumente, efikasna granica ima oblik hiperbole te se efikasni portfelji nalaze samo na gornjoj liniji hiperbole. Ako portfelju dodamo jedan nerizičan instrument, efikasna granica mijenja se iz hiperbole u dva polupravca koji se sijeku na ordinatnoj osi, to jest u točki koja odgovara očekivanom povratu nerizičnog instrumenta. Izbor između portfelja na efikasnoj granici ovisi koliko investitor ima averziju prema riziku. Optimalan pravac alokacije kapitala koji je proizašao koristeći prethodno navedena dva slučaja efikasnih granica ima vrlo važno značenje. Ako investitori odaberu bilo koji kombinaciju portfelja na CAL liniji, mogu poboljšati svoje ulaganje. Kombinacijom rizičnih instrumenata s neričnim smanjiti će rizik uz istu razinu očekivanog prinosa, tj. biti će na dobitku u odnosu na ulaganje bez nerizične komponente.

Na Markowitz model nastavlja se model vrednovanja kapitalne imovine. Ovaj model je važan u kontektstu da daje odgovore kako rizik ulaganja utječe na njegov očekivani povrat. Kako pretpostavke modela predstavljaju pojednostavljeno i idealizirano tržište, upitna je korisnost modela. Usprkos tome postoje područja u kojima se ovaj model koristi. Pomoću njega može se procijeniti trošak kapitala tvtke i uspješnost upravljanja portfeljem. Također, mogu se predvidjeti ponašanja budućih investitora i koristiti u izračunu očekivanog povrata kredita.

Kako je upravljanje rizicima glavna aktivnost banaka, razumljivo je prethodna dva modela proučavati u bankarskom sektoru. Banka se gleda kao upravitelj portfelja koji kontrolira ogroman portfelj vrijednosnih papira (imovina i obveze banke). Kako izvedeni model pomoću moderne teorije portfelaj i CAPM modela predviđa da bi sve banke trebale držati kolinearne rizične portfelje, to baš i nije slučaj u praksi. Idealan slučaj bi bio kada bi bila riječ o efikasnim portfeljima. Ako se uzme u obzir i mogućnost bankrota više nije moguće pretpostaviti da je stopa povrata na kapital neovisna o imovini od strane banaka. To utječe na vjerojatnost neuspjeha banke. Rješenje tog problema je računanje omjera kapitala koji se pokazao kao dobar pokazatelj rizika neuspjeha banke. Kod nedostatka regulative solventnosti vjerojatnost neuspjeha biti će opadajuća funkcija omjera kapitala. Suprotno tome, nakon uvođenja regulative solventnosti, korištenjem omjera kapitala može se promijeniti raspodjela imovine banke te vjerojatnost neuspjeha raste. Ako regulacija solventnosti postaje efikasna, sve banke izabiru efikasne portfelje i njihova vjerojatnost neuspjeha pada. Zaključno tome nametanje omjera kapitala ključno je za ograničavanje rizika neuspjeha banke.

Bibliografija

[1] X. Engel i J.C.Rochet, *Microeconomics of banking*, 2. izdanje, The MIR Press,London, 2008.

[2] M Jerončić i Z. Aljinović *Formiranje optimalnog portfelja pomoću Markowitzevog modela uz sektorsku podjelu kompanija*, Ekonomski pregled (2011.), 583-606.

[3] D. Kim i A.Santomero, *Risk in banking and Capital Regulation*, Journal of Finance (1988.),1219-1233.

[4] H. Markowitz, *Portfolio Selection*,Journal of Finance (1952.),77-91.

[5] A.F. Perold, *The Capital Asset Princing model*, Journal of Economic Perspectives (2004.), 3-24.

[6] J.C.Rochet, *Capital requirements and the behaviour of commercial banks*,European Economic Review(1992.),1137-1170.

[7] D. Sabolić, *Uvod u mikroekonomiku-odabrane teme* `http://bib.irb.hr/datoteka/690008.Sabolic_Uvod_u_mikroekonomiku.pdf`, 22.08.2019.

Sažetak

U ovom radu analizirana je moderna teoriju portfelja i model vrednovanja kapitalne imovine i pokazana je njihova primjena u bankarskom sektoru pri upravljanju tržišnim rizikom. Model moderne teorije portfelja počinje s pretpostavkama modela koje je postavio Markowitz 1952. godine. On je sa svojim modelom postavio osnove moderne teorije portfelja. Najbitnije stavke modela su prinos portfelja i rizik. Model je postavljen tako što je očekivani prinos portfelja modeliran statističkim očekivanjem, a rizik standardnom devijacijom prinosa. Nakon što je definiran optimizacijski problem i riješen metodom Lagrangeovim multiplikatorima, proučavane su efikasne granice portfelja i optimalan pravac alokacije kapitala.
Sljedeći korak je bio proučavanje modela vrednovanja kapitalne imovine. Definiran je Sharpeov omjer i pravilo poboljšanja portfelja pomoću kojih je uspostavljen model vrednovanja kapiralne imovine. U tom modelu je bitan i beta indeks. Njegov značaj u modelu pokazan je u primjeru. Na kraju poglavlja proučavana je korisnost CAPM modela te je navedeno nekoliko njegovih proširenja.
Ta dva modela primjenjeni su na modeliranje aktivnosti banaka prilikom upravljanja tržišnim rizikom. Modeli su formulirani kako bi banku izjednačili s upraviteljem portfelja. Praćeno je ponašanje banaka kod nedostatka regulativne solventnosti i nakon uvođenja regulative solventnosti. Uveden je omjer kapitala koji se pokazao kao dobar pokazatelj rizika neuspjeha banke.

Summary

In this paper modern portfolio theory and the capital asset pricing model are analyzed. Furthermore, their application in managing market risk in the banking sector is demonstrated. The model of modern portfolio theory starts with theories which Markowitz wrote in 1952. His model laid the foundations of modern portfolio theory. Key components of this model are portfolio return and risk. The model is set so that the expected portfolio return is modeled by statistical expectations and the risk is modeled by the standard deviation of return. After the optimization problem is defined and solved with the method of Lagrange multipliers, the efficient portfolio frontier and the optimum capital allocation line is studied.
The next step is to study the capital asset pricing model (CAPM). The Sharpe ratio and the portfolio improvement rule are defined in order to explain their role in the development capital asset pricing model. A beta index has a major role in this model as well, and there is an example which verifies its importance. At the end of the chapter, the benefits of the CAPM are examined and several additions to the model are listed.
The two models are used to model activities of banks in managing market risk. The models are created in order to equalize a bank with a portfolio manager. The activity of a bank in the absence of solvency regulations and after the same regulations are introduced is monitored. A capital ratio, which has proved to be a good indicator of the risk of bank failure, is introduced.

Životopis

Rođena sam 20. ožujka 1994. godine u Zaboku. Nakon završene Osnovne škole Ljudevit Gaj u Krapini upisala sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Krapina. 2013. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te završila 2017. godine i stekla titulu sveučilišne prvostupnice matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.