SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Andrea Filić

KLASIČNI FRAKTALI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Matija Kazalicki, izv. prof. dr. sc.

Zagreb, studeni 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu cilj je upoznati se s klasičnim fraktalima. Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje dijelove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena kopija cjeline. Takvi se likovi nazivaju samosličnima. Pojam fraktala uveo je američki matematičar poljskog podrijetla Benoit Mandelbrot (1924. - 2010.), a potječe od latinske riječi *fractus*, što znači *slomljen*. Mandelbrot je svoje spoznaje o fraktalima objedinio i objavio 1975. godine u knjizi *Les objets fractals: Forme, hasard et dimension* (*Fraktalni objekti: oblik, slučajnost i dimenzija*), a potom i 1982. godine u knjizi *The fractal geometry od nature* (*Fraktalna geometrija prirode*). Osim što su izlomljeni, za fraktale je karakteristično da se isti oblik stalno ponavlja. Ako se neki dio fraktala uveća, izgledat će kao cijeli. Zašto su fraktali tako čudesni? Zato jer ih nalazimo posvuda oko nas i viđamo ih svaki dan, a da ih ni ne primjećujemo. Možemo ih vidjeti na jednoj običnoj cvjetači, brokuli, ali i u planinskim lancima i deltama rijeka.
U prvom poglavlju ćemo najprije definirati fraktale, navesti njihovu podjelu te iznijeti definicije različitih dimenzija koje su potrebne da bismo definirali fraktal. Za definiciju fraktala potrebno je poznavati topološku dimenziju i Hausdorffovu dimenziju. No dimenzija koju ćemo najviše spominjati jest dimenzija samosličnosti koju ćemo računati samosličnim fraktalima u narednom poglavlju.
U drugom poglavlju su opisani klasični fraktali. Počinjemo Cantorovim skupom i njegovim višedimenzionalnim analogonima. Potom trokut i tepih Sierpiñskog te Pascalov trokut kod kojeg je uočena fraktalna struktura koja podsjeća na trokut Sierpiñskog. Slijede zanimljivosti o Kochovoj krivulji i pahuljici te Pitagorino stablo o čemu bi i mladi matematičari u školama imali što pričati i promatrati. Naposljetku ćemo promatrati impresivne Juliaove skupove i Mandelbrotov skup koji svojim izgledima nikog ne ostavljaju ravnodušnima.
U trećem poglavlju ćemo navesti i nekoliko primjena fraktala u svakodnevnom životu. Prva koja je opisana je Mandelbrotova primjena teorije fraktala na Richardosonov problem mjerenja duljina britanske obale. Mandelbrot je uočio da je linija obale samoslična odnosno da se mjera njene razvedenosti ne mijenja bez obzira na mjerilo u kojem je promatramo. Upoznat ćemo još i primjenu fraktala u tehnologiji, astronomiji i medicini.

Poglavlje 1

Fraktali

1.1 Dimenzija

Pojam dimenzije

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s pojmovima koji će nam omogućiti uvođenje definicije fraktala.
Oduvijek se pojam dimenzije intuitivno upotrebljavao u matematici, posebno u geometriji, te je točka shvaćena kao objekt dimenzije nula, pravci i krivulje kad objekti dimenzije jedan, odnosno jednodimenzionalni, ravnine i plohe kao dvodimenzionalni, a tijela u prostoru kao trodimenzionalni. Temeljem toga mnogi dimenziju definiraju kao minimalan broj parametara (koordinata) potrebnih da se jednoznačno opiše položaj točke u prostoru ili objektu.
Mnogi intuitivni koncepti kao što su određivanje površine i volumena zahtijevaju točne i precizne definicije stoga ćemo odrediti koji uvjeti moraju biti zadovoljeni za određivanje dimenzije proizvoljnog skupa (promatrat ćemo podskupove n-dimenzionalnog Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$).
Za proizvoljan skup $X \subset \mathbb{R}^n$ zahtijevamo da dimenzija skupa X, u oznaci $dim(X)$, zadovoljava sljedeća svojstva:

(1) Za jednočlani skup p je $dim(p)$=0, za jedinični interval I^1 je $dim(I^1)$=1 i općenito za m-dimenzionalnu hiperkocku I^m je $dim(I^m) = m$.

(2) (Monotonost) Ako je $X \subseteq Y$ onda je

$$dim(X) \leq dim(Y).$$

(3) (Prebrojiva stabilnost) Ako je X_y niz zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}^n$ onda je

$$dim\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right) = \sup_{j\geq 1} dim(X_j).$$

(4) (Invarijantnost) Za proizvoljni homeomorfizam ψ s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$ vrijedi

$$dim(\psi(X)) = dim(X).$$

Unatoč brojnim različitim definicijama dimenzije, za definiciju fraktala su nam važne topološka dimenzija i Hausdorffova dimenzija stoga slijede definicije istih.

Topološka dimenzija

Topološka dimenzija intuitivno je slična našem poimanju dimenzije euklidskog prostora gdje su dimenzije cjelobrojne veličine. Možemo ju shvatiti kao broj smjerova u kojima možemo ići unutar određenog objekta. Primjerice, dužina je jednodimenzionalna jer imamo samo jedan ”stupanj slobode kretanja” (lijevo - desno), dok kod plohe imamo dva ”stupnja slobode” (lijevo - desno i gore - dolje) te je ona dvodimenzionalna.
Postoje tri uobičajene definicije topoške dimenzije, mala induktivna dimenzija, velika induktivna dimenzija i Lebesgueova dimenzija pokrivanja. Lebesgueova dimenzija definirana je u terminima skupova pokrivača stoga se još naziva i dimenzija pokrivača.
Prije same definicije upoznajmo se s pojmovima koji se u njoj spominju.

Definicija 1.1.1. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sa Kartezijevog kvadrata nepraznog skupa X u skup $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva kažemo da je *metrika* (na skupu X) ako ona zadovoljava slijedeća četiri uvjeta za bilo kakav izbor elemenata a, b, i c iz skupa X.

(i) $d(a, b) \geq 0$.

(ii) $d(a, b) = 0$ ako i samo ako je $a = b$.

(iii) $d(a, b) = d(b, a)$.

(iv) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Definicija 1.1.2. Uređeni par (X, d) koji se sastoji od nepraznog skupa X i na njemu definirane metrike d nazivamo *metrički prostor*, a pri tom elemente skupa X zovemo *točke* metričkog prostora.

Definicija 1.1.3. Neka je (X, d) metrički prostor, te $A \subseteq X$. *Otvoreni pokrivač* od A je konačan skup $U_j : 1 \leq j \leq r$ otvorenih podskupova od X takav da

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} U_j.$$

Red pokrivača je najveći prirodni broj n takav da postoji *n+1* članova pokrivača takvih da im je presjek neprazan. Pokrivač β je *profinjenje* pokrivača α ako je svaki član od β sadržan u nekom članu od α.

Lebesgueova dimenzija pokrivanja $dim(X)$ temelji se na maksimalnom broju istodobno presjecajućih skupova u profinjenima otvorenih pokrivača skupa X.

Definicija 1.1.4. (Dimenzija pokrivanja) Skup $A \subseteq X$ ima $dim(A) \leq n$ ako svaki pokrivač do A ima profinjenje reda manjeg ili jednakog n. Skup A ima $dim(A) = n$ ako $dim(A) \leq n$ i ne vrijedi $\dim(A) \leq n - 1$.

Topološku dimenziju skupa X označavamo $dim_T X$ i vrijednosti koje može poprimiti su $-1, 0, 1, 2, 3, ...$

Ostale definicije i teoremi nalaze se u skripti [5].

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija definirana je samo za metričke prostore, čime prirodno povezuje dimenziju i mjeru i time ima veliko značenje. Naziv je dobila po njemačkom matematičaru Felixu Hausdorffu i još je poznata pod nazivom Hausdorff - Besicovith dimenzija. Kako bismo u potpunosti razumjeli pojam Hausdorffove dimenzije potrebno je definirati Hausdorffovu mjeru. Prisjetimo se najprije što je to mjera.

Definicija 1.1.5. Kažemo da je μ *mjera* na $\mathbb{R}^{\kappa}$ ako ona svakom podskupu od $\mathbb{R}^{\kappa}$ dodjeljuje nenegativan broj tako da vrijedi:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) μ (A) $\leq \mu$(B) ako je $A \subseteq B$,

(3) Ako je A_n niz skupova (ne nužno konačan) onda je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Upoznali smo se pojmom mjere te prije definiranja Hausdorffove dimenzije treba naglasiti da ćemo se ograničiti na definiciju za skupove A koji se nalaze u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Definirajmo stoga funkciju udaljenosti $d(x, y)$, odnosno Euklidsku udaljenost za proizvoljne x i y iz $\mathbb{R}^{\ltimes}$:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ako je $U \neq \emptyset$ podskup od $\mathbb{R}^{\ltimes}$, dijametar od U definiramo kao

$$diam(U) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}.$$

Još nam preostaje reći kada za skup kažemo da je otvoren.

Definicija 1.1.6. Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ njegova točka i $r > 0$ realan broj. Pod *otvorenom kuglom* u prostoru X sa središtem u x_0 i radijusom r podrazumijevamo skup $K(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$. Neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U *otvoren* skup u prostoru X ako se može prikazati kao unija otvorenih kugli iz tog prostora. Prazan skup $\emptyset$ je otvoren po definiciji.

Definicija 1.1.7. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^{\ltimes}$ i neka su s i r nenegativni realni brojevi. Tada definiramo

$$\mathcal{H}_r^s = \inf\{\sum_{i=0}^{\infty} diam(U_i)^s\}$$

gdje je $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ otvoren pokrivač skupa A tako da vrijedi $diam(U_i) < r$, odnosno $\{U_i\}$ je r - pokrivač skupa A. Možemo pisati

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{r \to 0} \mathcal{H}_r^s(A).$$

Ovaj limes postoji za svaki podskup A od $\mathbb{R}^n$. Za svaki $s > 0$ vrijednosti su mu u $[0, \infty]$ i najčešće su upravo 0 ili ∞. $\mathcal{H}^s(A)$ zovemo *s - dimenzionalna Hausdorffova mjera od A*.

Radi boljeg razumijevanja navest ćemo neke primjere.
Hausdorffova mjera nekog trodimenzionalnog objekta, na primjer kocke, je 3 i ona predstavlja njezin volumen. Za neki geometrijski lik, na primjer krug, dvodimenzionalna Hausdorffova dimenzija predstavlja njegovu površinu. Ona nam zapravo govori o veličini promatranog objekta. S druge strane, dvodimenzionalna Hausdorffova mjera za kocku bi

bila beskonačno, a trodiomenzionalna mjera za krug bi bila nula.
Hausdorff je pokazao da postoji broj d za koji vrijedi

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} \infty & s<d \\ 0 & s>d \end{cases}.$$

Broj d u oznaci $dim_H A$ je definiran kao Hausdorffova dimenzija

$$dim_H A = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Nakon što smo se upoznali s dvije nove dimenzije, naglasit ćemo ono najvažnije, a to je da za bilo koji skup X vrijedi nejednakost

$$dim_T X \leq dim_H X,$$

odnosno, vrijedi da je Hausdorffova dimenzija uvijek veća ili jednaka od topološke.

1.2 Definicija i podjela fraktala

Poznavajući topološku i Hausdorffovu dimenziju možemo definirati fraktale onako kako ih je definirao i sam otac fraktalne geometrija, poljsko-francuski matematičar Benoti Mandelbrot (1924. - 2010.).

Definicija 1.2.1. Kažemo da je skup X *fraktal* ako je $dim_T X < dim_H X$.

Dakle, prema Mandelbrotu fraktale opisujemo kao geometrijske objekte čija je fraktalna, odnosno Hausdorffova, dimenzija veća od topološke. Fraktalna dimenzija je broj koji nam govori u kojoj mjeri fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi te opisuje ”izlomljenost” ili ”hrapavost” objekta. Fraktalne dimenzije d ne moraju biti cjelobrojne veličine za razliku od topoloških dimenzija.
Za fraktale možemo reći da su to objekti koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo, što bi značilo da fraktal možemo beskonačno mnogo puta uvećavati, a da se pri svakom novom povećanju vide neki detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi, no količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka i slična cjelini, to jest čitavom fraktalu.
Fraktali su kao oblici presloženi da bi se mogli opisati običnom Euklidskom geometrijom pa se radi njih počela razvijati potpuno nova grana u geometriji nazvana *fraktalna geometrija*. Povod za razvoj fraktalne geometrije i proučavanje fraktala bila je činjenica da se mnoge stvari u prirodi ne mogu opisati običnom geometrijom. Mnoge stvari u prirodi zapravo su fraktali, na primjer biljke, građa živih bića i tako dalje.

Podjela fraktala

Osim fraktalne dimenzije, jedno od najvažnijeg svojstva fraktala jest svojstvo samosličnosti. Upravo je to svojstvo koje omogućava da svaki dio fraktala sliči čitavom fraktalu. Samosličan objekt je točno ili aproksimativno sličan dijelu sebe, to jest cjelina ima isti oblik kao jedan ili više dijelova. To je svojstvo objekta da je sličan sam sebi, odnosno da u sebi sadrži kopije samog sebe.
Obzirom na svojstvo samosličnosti, fraktale dijelimo na:

(1) **Potpuno samoslične fraktale** - fraktali koji se sastoje od kopija koje su identične cijelom fraktalu. Imaju najjači oblik samosličnosti jer su jednaki na svim razinama uvećanja, odnosno bez obzira koji dio uvećamo, uvijek dobijemo sliku koja je identična početnoj. Nazivamo ih još i geometrijski fraktali. Ovoj skupini pripadaju Cantorov skup, trokut Sierpiñskog, Kochova krivulja i tako dalje. Samosličnim fraktalima prirodno je određivati dimenziju samosličnosti, a računamo je po sljedećoj formuli (preuzeto iz [7]):

$$d = \frac{\log N}{\log r},$$

gdje je N broj kopija koje prekrivaju skup, a svaki uvećan s omjerom $\frac{1}{r}$. Drugim riječima, ako je N broj novonastalnih kopija u svakoj iteraciji, a $\frac{1}{r}$ duljina svake kopije $\frac{1}{r}$, onda je $N = r^d$. Logaritmiranjem dobijemo d.

(2) **Kvazi-samoslične fraktale** - poznatiji još kao algebarski fraktali. Karakterizira ih slabiji oblik samosličnosti u kojem fraktal sadrži male kopije sebe koje nisu slične cijelom fraktalu već se pojavljuju u iskrivljenom obliku, no približno su slični na svim razinama uvećanja. Primjeri su Julija skup i Mandelbrotov skup.

(3) **Statistički samoslične ili stohastične fraktale** - fraktali koji posjeduju najmanje stupanj samosličnosti pri čemu fraktal ne sadrži kopije samog sebe, ali neke njegove osobine poput fraktalne dimenzije ostaju iste pri različitim mjerenjima. Neki od primjera su Lorenzov atraktor, Perlinov šum i Brownovo gibanje.

Sljedeća podjela fraktala temelji se na načinu nastanka te ih dijelimo u tri skupine:

(1) **Iterativni fraktali**

   (a) Iteriranjem generatora - fraktal nastaje tako da počinjemo oblikom koji se naziva baza, a potom svaki dio početnog oblika zamijenimo s drugim oblikom koji se naziva motiv ili generator. Dobivši novi oblik, opet svaki njegov dio zamjenjujemo motivom.

(b) IFS (iterated function system, odnosno sustav iteriranih funkcija) - fraktali nastaju unijom kopija sebe koje su transformirane funkcijom. Funkcije koje koristimo nazivamo afinim preslikavanjem i u njih ubrajamo rotaciju, translaciju, kontrakciju (homotetija za $k \in \langle 0, 1 \rangle$) te zrcaljenje (simetriju).

(2) **Rekurzivni fraktali** - fraktali koji su određeni rekurzivnom formulom koja određuje pripada li određena točka prostora nekom skupu ili ne.

(3) **Slučajni fraktali** - fraktali nastali crtanjem grafova nekih stohastičkih procesa i najčešće ih nalazimo u prirodi (rub morske obale, oblik planina, oblaka, munje, svemira, paprati te mnogih drugih biljaka).

Zanimljivo da podjele daju iste rezultate, odnosno fraktali nastali iterativno su potpuno samoslični, rekurzivno su kvazi-samoslični dok su slučajni fraktali statistički samoslični fraktali.
Na slici 1.1 vidimo primjer fraktala u prirodi.
Više o podjeli fraktala i njihovom nastanku može se pročitati u [1].

Slika 1.1: U ovoj brokuli jasno se vidi fraktalna struktura.

Poglavlje 2

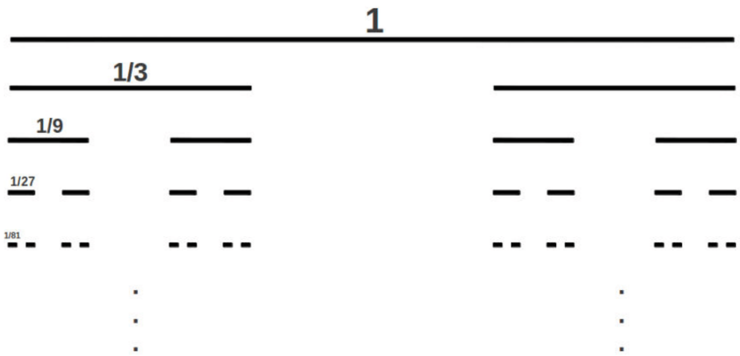
Klasični fraktali

Poljsko-francuskog matematičara Benoita Mandelbrota smatramo ocem fraktalne geometrije te ćemo upoznati matematičare koji su igrali veliku ulogu u stvaranju njegovog koncepta nove geometrije, fraktalne geometrije. Upoznat ćemo fraktale koji se nazivaju i klasični fraktali.

2.1 Cantorov skup

Među prvim poznatim fraktalima je Cantorov skup C kojeg je 1883. predstavio njemački matematičar Georg Cantor (1845. - 1918.) zaslužan za razvoj teorije skupova. Cantorov skup igra važnu ulogu u mnogim granama matematike, u dinamičkim sustavi te je model po kojem su nastali neki drugi fraktali poput Julija skupa. Cantorov skup također nosi naziv i Cantorov trijadski skup što ćemo objasniti malo kasnije. Skup C je beskonačni skup točaka koje pripadaju segmentu $[0,1]$, odnosno skup određenih brojeva, poput $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, ...$ Kako bismo lakše zamislili što je zapravo Cantorov skup, prikazat ćemo njegovu klasičnu konstrukciju.
Konstrukciju Cantorova skupa započinjemo jediničnim segmentom $[0,1]$. Početni segment podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$. Preostala su nam dva segmenta $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ od kojih je svaki duljine $\frac{1}{3}$. Potom svakog od njih opet podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval. Dobijemo segmente $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ i $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ duljine $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ svaki. Ponovimo postupak. U početku imamo jedan segment, nakon prvog koraka imamo dva, nakon drugog četiri, nakon trećeg osam segme-

nata i tako dalje. Nakon n-tog koraka imamo 2^n disjunktnih segmenata duljine $\frac{1}{3^n}$.
Na slici 2.1 prikazano je nekoliko početnih koraka konstrukcije Cantorova skupa.



Slika 2.1: Konstrukcija Cantorova skupa

Obzirom da rubne točke svakog podsegmenta pripadaju Cantorovom skupu, zaključujemo da je on neprazan. No, osim te činjenice, uočimo i da je on potpuno nepovezan. Za svake dvije točke $x, y \in C$ postoji točka $z \notin C$ koja leži između x i y. Ako za x uzmemo da je $\frac{1}{3}$, za $y = \frac{2}{3}$ i $z = \frac{1}{2}$ vidimo da se z nalazi između x i y, ali nije iz C. Točka z nalazi se unutar intervala $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$ koji je izbačen u prvom koraku.
Primjetimo da točke za koje smo dosad naveli da se nalaze u Cantorovom skupu imaju nešto zajedničko - sve su povezane nekom od potencija broja tri, točnije potencijom broja $\frac{1}{3}$. To nas dovodi do drugog naziva Cantorova skupa, a on je, kao što je ranije navedeno, Cantorov trijadski skup. Taj naziv dolazi od činjenice da se Cantorov skup može opisati koristeći zapis brojeva iz segmenta $[0, 1]$ u njihovom trijadskom obliku. Trijadski brojevi su brojevi za čiji zapis se koristi baza 3, odnosno znamenke 0, 1 i 2. Drugim riječima, bilo koji broj x iz segmenta $[0, 1]$ može se prikazati kao:

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + a_4 \cdot 3^{-4} + ...$$

gdje su brojevi $a_1, a_2, a_3, a_4, ... \in \{0, 1, 2\}$.
Na primjer, $\frac{1}{3} = 1 \cdot 3^{-1}$, odnosno 0.1 u trijadskom zapisu, $\frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1} = 0.2$, $\frac{1}{9} = 0.01$, $\frac{2}{9} = 0.02$ i tako dalje. Kako ovo vrijedi za svaku točku iz Cantorova skupa, može se pokazati dada je Cantorov skup C je skup svih točaka iz segmenta $[0, 1]$ čiji zapis u trijadskoj

bazi ne sadrži znamenku 1. Upravo nam takva definicija Cantorova skupa pomaže u provjeravanju samosličnosti. Uzmemo jedan segment iz C koji se nalazi unutar $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i njega možemo smatrati smanjenim dijelom cijelog skupa.
Uočavamo da brojevi $\frac{2}{3}$ i $\frac{2}{9}$ zaista pripadaju Cantorovom skupu definiranom po prethodnoj tvdnji. No, postavlja se pitanje istinitosti tvrdnje obzirom da brojevi $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{9}$ su u kontradikciji s tvrdnjom jer se u njihovom trijadskom zapisu nalazi znamenka 1. Ali obzirom na dvosmislenost zapisa broja, uočavamo da broj $\frac{1}{3}$ možemo zapisati u obliku $0.02222\overline{2}$ te time očito pripada Cantorovom skupu.
Uzimajući u obzir istu navedenu tvrdnju, svaku točku $\xi \in C$ možemo prikazati u obliku

$$\xi = \alpha_1 \cdot 3^{-1} + \alpha_2 \cdot 3^{-2} + \alpha_3 \cdot 3^{-3} + \alpha_4 \cdot 3^{-4} + ...,$$

(gdje je $\alpha_i \in \{0, 2\}, \forall i$) i pronaći odgovarajuću točku u segmentu $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ tako da ξ podijelimo s 3, to jest

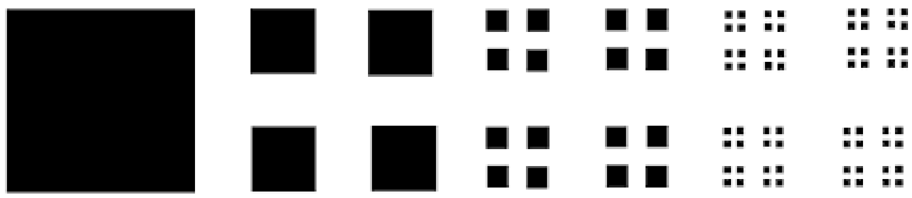
$$\frac{\xi}{3} = \cdot 3^{-1} + \alpha_1 \cdot 3^{-2} + \alpha_2 \cdot 3^{-3} + \alpha_3 \cdot 3^{-4} + ...$$

Uistinu, ako je $x = 0.200220...$ i pomnožimo ga s $\frac{1}{3} = 0.1$ zapravo samo radimo pomak znamenki za jedno mjesto u desno i dobijemo 0.02002200... što je opet u C. Iz ovoga možemo vidjeti da je dio Cantorova skupa koji se nalazi unutar segmenta $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ smanjena kopija cijelog skupa skaliran za faktor $\frac{1}{3}$. Za dio skupa C koji leži u segmentu $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ dolazimo do istog zaključka samo još moramo dodati $\frac{2}{3} = 0.2$. Na isti način, bilo koji podsegment unutar Cantorova skupa sadrži cijeli skup C smanjen za odgovarajući faktor $\frac{1}{3^n}$. Drugim riječima, Cantorov skup možemo promatrati kao kolekciju proizvoljno mnogo malih dijelova od kojih je svaki dio umanjeni Cantorov skup. Ovo podrazumijevamo kad kažemo da je Cantorov skup samosličan. Uočimo da smo u diskusiji o samosličnosti izbjegli geometrijski model Cantorova skupa. Primjetimo još svojstvo skaliranja Cantorova skupa za koje vrijedi da ako uzmemo bilo koju točku iz C i pomnožimo ju s $\frac{1}{3}$, rezultat će ponvono biti u C. Isto vrijedi i ako prvo pomnožimo s $\frac{1}{3}$ i onda dodamo $\frac{2}{3}$.
Očito je topološka dimenzija Cantorova skupa jednaka je nuli jer je Cantorov skup nepovezan. Broj kopija samog sebe koje promatramo nakon uvećanja je 2, a faktor uvećanja je

$\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$, dakle $r = 3$. Time dobivamo da je fraktalna dimenzija Cantorova skupa približno

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309.$$

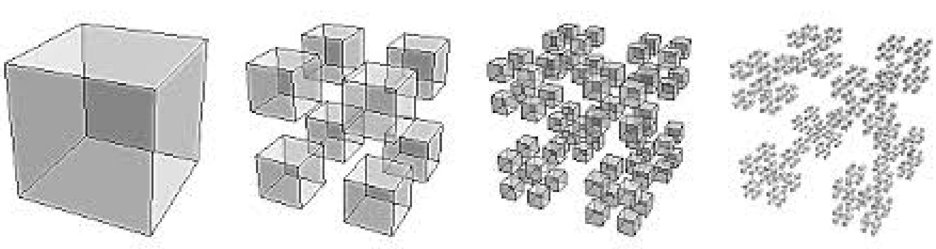
Cantorova prašina i Cantorov oblak su višedimenzionalni analogoni Cantorova skupa. Cantorova prašina nastaje tako da se jedinični kvadrat podijeli na devet sukladnih kvadrata od kojih se izbace oni koji ne sadrže vrhove početnog. Odnosno, izbaci se pet kvadrata koji formiraju znak plus. Postupak se ponavlja s preostala četiri kvadrata beskonačno mnogo puta.



Slika 2.2: Cantorova prašina

Pri svakom koraku konstrukcije Cantorove prašine, duljina stranice kvadrata koji je samosličan početnom kvadratu smanji se tri put, te u tom istom koraku nastanu četiri nova kvadrata. Iz toga zaključujemo da fraktalna dimenzija za Cantorovu prašinu iznosi

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619$$

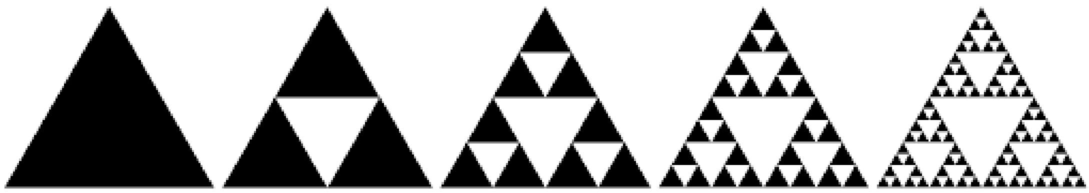


Slika 2.3: Cantorov oblak

Cantorov oblak (slika 2.3) je trodimenzionalni analogon Cantorova skupa i kreće se od kocke koja se podijeli na dvadeset sedam sukladnih kocki. Izbace se one kocke koje ne sadrže vrhove, odnosno ostavi se osam kocki koje sadrže dijelove triju bridova početne kocke. Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta s preostalim kockama.

2.2 Trokut i tepih Sierpiñskog

Sierpiñskijev trokut je fraktal kojeg je opisao poljski matematičar Waclaw Franciszek Sierpiñski (1882. - 1969.) 1916. godine, a primjer je jednog od najjednostavnijih fraktala. Može se reći da je postao simbolom fraktala. Sierpiñski je bio jedan od najutjecajnijih matematičara svog vremena u Poljskoj te je stekao i svjetsku reputaciju. Zanimljivo je da u njegovu čast jedan mjesečev krater je nazvan po njemu.
Konstrukcija Sierpiñskijevog trokuta kreće od ispunjenog jednakostraničnog trokut kojemu odredimo polovišta stranica te ih spojimo dužinama. Nastala su četiri sukladna jednakostranična trokuta od kojih izbacujemo onaj čiji su vrhovi polovišta stranica početnog trokuta. Time je završen prvi korak konstrukcije. Na preostala tri trokuta, čija je duljina stranica dvostruko manja od duljine stranica početnog trokuta, ponovimo postupak. Nakon drugog koraka preostaju $9 = 3^2$ trokuta, nakon trećeg $27 = 3^3$ trokuta i tako dalje. Odnosno, nakon n-tog koraka imamo 3^n trokuta.



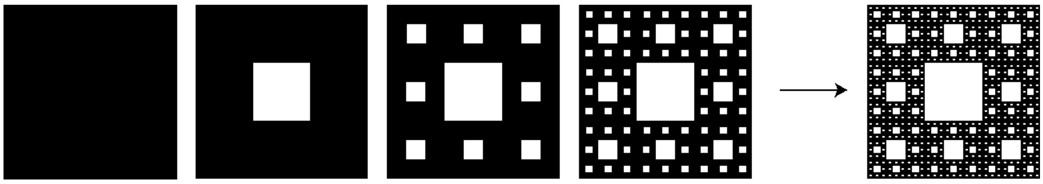
Slika 2.4: Prva četiri koraka konstrukcije trokuta Sierpiñskog

Svojstvo samosličnosti ovog fraktala očituje se u njegovoj konstrukciji. Svaki od tri preostala dijela u n-tom koraku je umanjena kopija cjelokupne strukture iz prethodnog koraka, umanjena faktorom dva. Primjetimo da nakon prvog koraka konstrukcije ostaju stranice početnog trokuta, nakon drugog koraka ostaju stranice triju manjih trokuta te će nakon beskonačno mnogo koraka preostati samo stranice trokuta kojih je sve više svakim korakom. Iz toga proizlazi da će zbroj duljina svih stranica unutar Sierpiñskijevog trokuta, odnosno opseg, biti beskonačno velik, dok će mu površina biti nula.
Izračunajmo fraktalnu dimeziju Sierpiñskijevog trokuta. Broj kopija samog sebe pri faktoru umanjenja 2 jest 3, iz čega dobivamo

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5849$$

Još zanimljivosti o trokutu Sierpiñskog te računanje njegovog opsega i površine može se pročitati u [2].

Waclaw Sierpiñski je dodao još jedan objekt u galeriju fraktala, a radi se o tepihu Sierpiñskog koji je zapravo varijacija na temu njegovog već upoznatog fraktala. U ovom slučaju konstrukciju započinjemo ispunjenim kvadratom kojeg podijelimo na devet sukladnih kvadrata i izbacimo središnji kvadrat. Time je završen prvi korak konstrukcije. Dalje nastavljamo istim postupkom, dakle preostalih osam ispunjenih kvadrata dijelimo na devet sukladnih kvadrata i u svakom izbacujemo onaj središnji. Time nam preostaju šezdeset četiri ispunjena kvadrata, a nakon n-tog koraka imamo 8^n kvadrata.

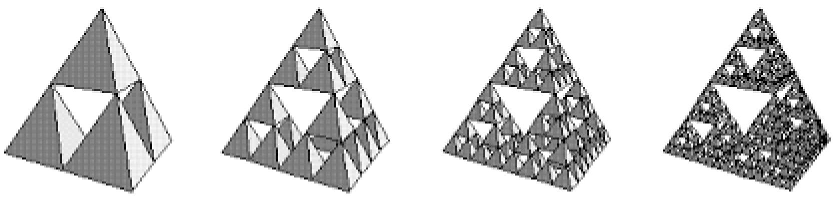


Slika 2.5: Prva četiri koraka konstrukcije tepiha Sierpiñskog

Dakle, imamo faktor umanjenja 3, a broj kopija samog objekta 8, te fraktalna dimenzija približno iznosi

$$d = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.8928$$

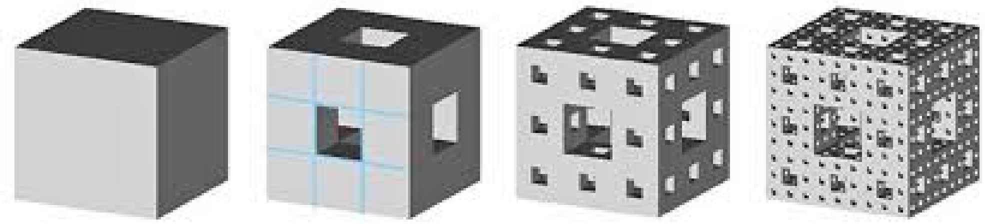
Kao kod Cantorova skupa, višedimenzionalne analogone imamo i kod Sierpiñskijevog trokuta i tepiha.
Zamijenimo li trokute tetraedrima, dobivamo tetraedar Sierpiñskog. No, prilikom konstrukcije se ne oduzima jedan tetraedar iz sredine, već se ostavljaju četiri tetraedra i sve ostalo oduzima. Pri svakom koraku konstrukcije nastaju četiri manja tetraedra s dvostruko kraćim duljinama stranica.



Slika 2.6: Prva četiri koraka konstrukcije tetraedra Sierpiñskog

Trodimenzionalni analogon tepiha Sierpiñskog je Mengerova spužva. To je fraktal kojeg je 1926. opisao austrijski matematičar Karl Menger prema kojem je i dobio ime. Često se naziva i Sierpiñski-Mengerovom spužvom. Svaka strana Mengerove spužve je Sierpiñskijev tepih, a dijagonala Cantorov skup. Dobiva se na sličan način kao i tepih Sierpiñskog samo što umjesto kvadrata uzmemo kocku koju podijelimo na dvadeset sedam kocki čije su duljine stranica $\frac{1}{3}$ početne. Nakon toga oduzmemo sedam kocki, odnosno središnju i šest kocki koje se nalaze u središtima strana početne kocke. Postupak ponavljamo na preostalim kockama i s povećanjem broja koraka dobivamo sve krhkiju, gotovo potpuno šuplju konstrukciju. Faktor smanjenja je tri, a broj novonastalih kopija je $27 - 7 = 20$. Fraktalna dimenzija Mengerove spužve približno iznosi

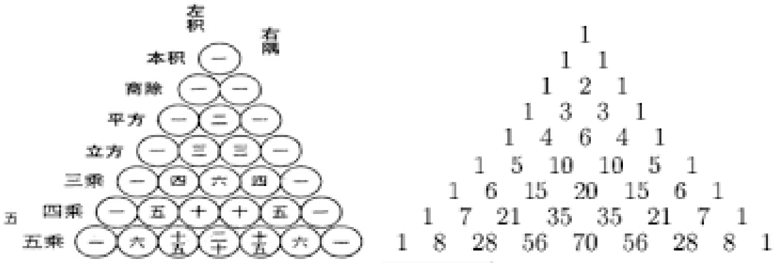
$$d = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.7268$$



Slika 2.7: Prva četiri koraka konstrukcije Mengerove spužve

2.3 Pascalov trokut

Pascalov trokut je trokutasta shema brojeva raspoređenih po nekim zakonitostima. Pascalov (aritmetički) trokut otkriven je u staroj Kini (10. - 13. stoljeće), a nazvan je po Blaiseu Pascalu, francuskom matematičaru i fizičaru iz 17. stoljeća, koji bio prvi koji ga je proučio i otkrio njegovu primjenu (postavio temelje teorije vjerojatnosti).



Slika 2.8: Aritmetički trokut u Kini (lijevo) i danas (desno)

Niz brojeva u aritmetičkom trokutu je zapravo niz koeficijenata iz raspisa polinoma $(x+1)^n$. Ovdje n kreće od nule i označava broj retka. Primijetimo kako n-ti redak ima $n+1$ članova. Na primjer, za $n = 6$ polinom glasi

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

Postoje dva načina za određivanje koeficijenta. Prvi način je da ih odredimo pomoću članova prethodno izračunatog reda. Pretpostavimo da su koeficijenti $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ iz n-tog retka zadani:

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + ...a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

i koeficijenti $b_0, b_1, ..., b_n, b_{n+1}$ su traženi koeficijenti sljedećeg retka:

$$(1+x)^{n+1} = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1}.$$

Oni su direktno povezani s poznatim koeficijentima $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &= (a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n)(1+x)\\ &= a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + a_0 x + a_1 x^2 + ... + a_{n-1}x^n + a_n x^{n+1}\\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + ... + (a_{n-1} + a_n)x^n + a_n x^{n+1}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Uspoređivanjem koeficijenata dobijemo rezultat

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0,\\ b_k &= a_{k-1} + a_k \quad za \quad k = 1, 2, ..., n-1, n,\\ b_{n+1} &= a_n.\end{aligned}$$

Ukoliko znamo kako izgleda redak ispred nama traženog retka, ovaj način je jako jednostavan. Prvi i zadnji koeficijent samo prepišemo, oni su uvijek jedan, a preostale koeficijente dobijemo kao zbroj dva koeficijenta iz prethodnog retka. Međutim, većinom ne znamo kako izgleda prethodni redak pa je korisno imati direktan pristup. Upravo na tome se temelji drugi način za određivanje koeficijenata koji koristi binomni poučak:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k.$$

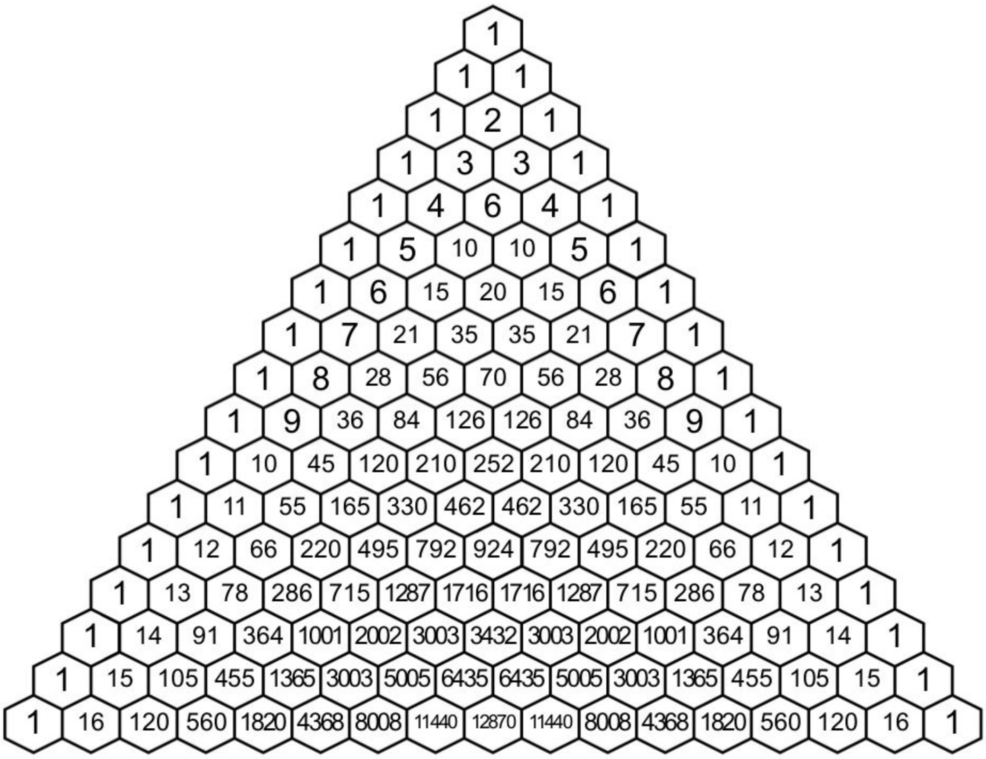
Koeficijenti u raspisu polinoma nazivaju se binomni koeficijenti. Koristeći binomni poučak možemo odmah izračunati k-ti koeficijent b_k n-tog reda Pascalovog trokuta

$$b_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k}.$$

Na primjer, koeficijent za $k = 5$ i $n = 8$ je

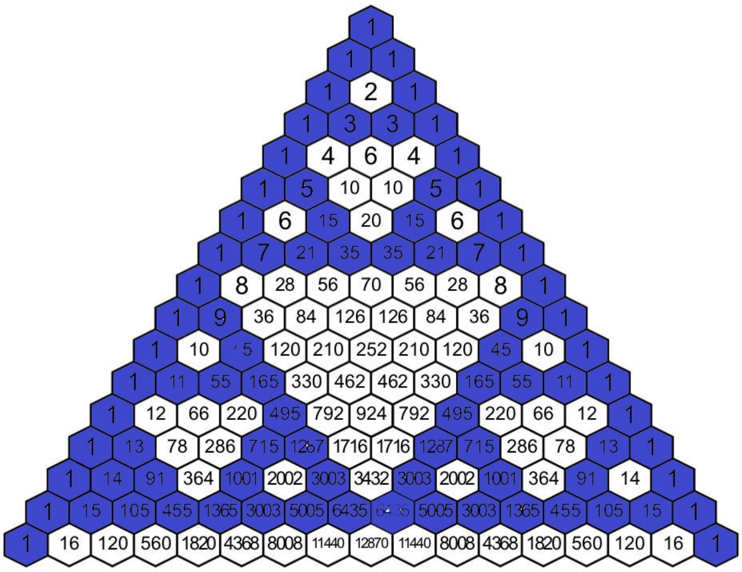
$$b_4 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56.$$

Ako u binomnu fomulu stavimo $x = y = 1$, zaključujemo da je suma svih koeficijenata u n-tom retku Pascalovog trokuta 2^n.
Postavimo svaki broj Pascalovog trokuta u pravilne šesterokute kao na slici 2.9 kako bismo postigli bolju preglednost.

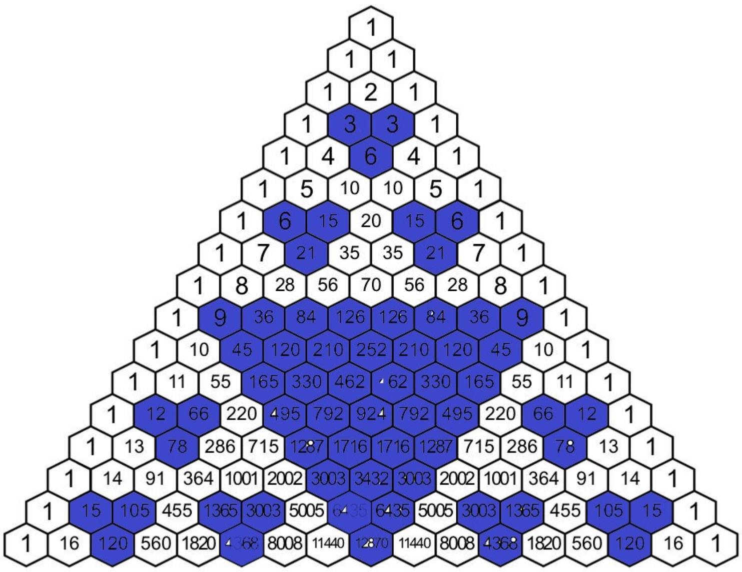


Slika 2.9: Brojevi Pascalovog trokuta u pravilnim šesterokutima

Bojanjem pravilnih šesterokuta po nekom pravilu, Pascalov trokut će početi dobivati fraktalni izgled.
Obojimo plavom bojom šesterokute u kojima se nalaze neparni brojevi kao što je prikazano na slici 2.10. Možemo uočiti da ovakva obojana struktura podsjeća na trokut Sierpiñskog. Obojimo li plavom bojom šesterokute u kojima se nalaze brojevi djeljivi s tri, dobit ćemo novi neobični i jako zanimljivi izgled ovakve strukture Pascalova trokuta (slika 2.11).



Slika 2.10: Pascalov trokut mod 2 sa 17 redova

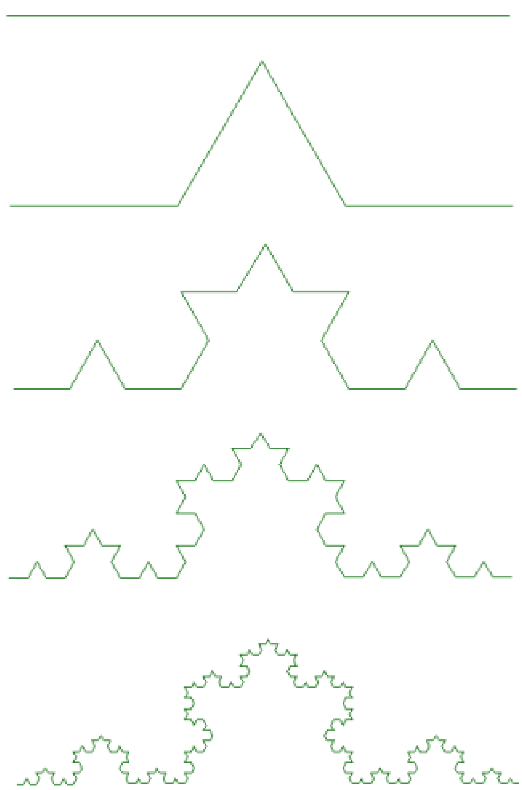


Slika 2.11: Pascalov trokut mod 3 sa 17 redaka

Analognim postupcima na ovakvoj strukturi možemo dobiti još prekrasnih slika [4].

2.4 Kochova krivulja i pahuljica

Jedan od najjednostavnijih fraktala koji se često koristi kao reprezentativni primjer je Kochova krivulja. Kochova krivulja i Kochova pahuljica jedne su od prvih opisanih fraktalnih krivulja, a predstavio ih je švedski matematičar Niels Fabian Helge von Koch (1870. - 1924.).
Kochovu krivulju je jednostavno geometrijski konstruirati. Počinjemo sa segmentom koji podijelimo na tri jednaka dijela. Nad srednjim dijelom konstruiramo jednakostranični trokut, a potom uklonimo srednji podsegment. Prvi korak konstrukcije završava s četiri sukladna podsegmenta čija je duljina jednaka $\frac{1}{3}$ duljine početnog segmenta. Postupak se nastavlja dalje na isti način. Svaki od četiri podsegmenta dijelimo na tri jednaka dijela, nad srednjim dijelom konstruiramo jednakostranični trokut, a potom ga uklonimo Iterativni postupak ponovimo beskonačno puta i dobijemo Kochovu krivulju.

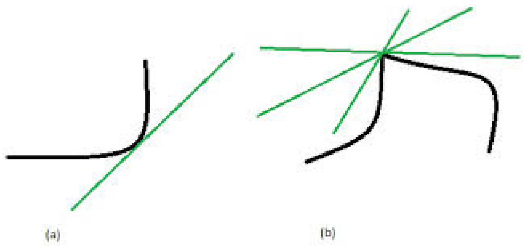


Slika 2.12: Prva četiri koraka konstrukcije Kochove krivulje

Samosličnost Kochove krivulje očitava se u njenoj konstrukciji. Uočimo da smo početnu krivulju skalirali faktorom tri te su nastale četiri kopije početne krivulje, čime dolazimo do fraktalne dimenzije koja približno iznosi

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619.$$

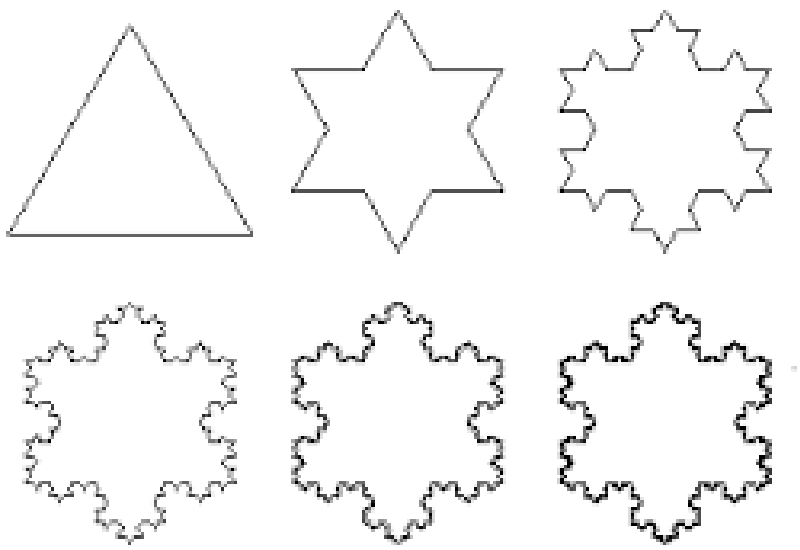
Obzirom da u nazivu stoji da se kod ovog fraktala radi o krivulji, uočavamo njegovu kompleksnost, čime ga je možda teže shvatiti nego Cantorov skup ili trokut SIerpiñskog. Helge von Koch je htio pružiti primjer neprekinute funkcije koja nije derivabilna, odnosno koja nema jedinstvenu tangentu ni u jednoj točki. Problem tangente je sljedeći: ako funkcija ima šiljak, onda ne postoji jedinstvena tangenta.



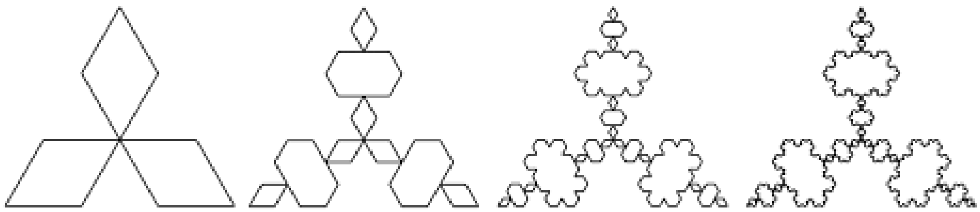
Slika 2.13: Problem tangente: jedinstvena (a); nije jedinstvena (b)

Kochova krivulja je baš takva funkcija koja je napravljena od šiljaka. Ponavljajući korake konstrukcije Kochove krivulje prema beskonačnosti, golim okom se slika same krivulje iskrivljava te imamo dojam da se zaista radi o glatkoj krivulji. No, ako bismo pogledali mikroskopom na krivulju u određenoj iteraciji, uvidjeli bismo da se radi o krivulji sa šiljcima koja nije derivabilna.
Odredimo duljinu Kochove krivulje. Nakon prvog koraka konstrukcije imamo krivulju koja se sastoji od četiri sukladna podsegmenta, nakon drugog imamo $4 \cdot 4$ podsegmenta jednake duljine, nakon trećeg $4 \cdot 4 \cdot 4$ sukladna posegmenta i tako dalje. Ako je duljina početnog segmenta a, onda je nakon prvog koraka svaki podsegment duljine $\frac{1}{3}a$, nakon drugog $\frac{1}{3^2}a$, zatim $\frac{1}{3^3}$ i tako dalje. Stoga imamo da je nakon prvog koraka duljina krivulje $4 \cdot \frac{1}{3}a$, onda je $4^2 \cdot \frac{1}{3^2}a$ te bi nakon n-tog koraka iznosila $\frac{4^n}{3^n}a$. Primjećujemo da se nakon svakog koraka duljina poveća za faktor $\frac{4}{3}$. Dakle, Kochova krivulja ima beskonačnu duljinu.

Spojimo li tri odgovarajuće rotirane kopije Kochove krivulje dobit ćemo Kochovu pahuljicu. Razlika između Kochove krivulje i Kochove pahuljice je u tome što se kod krivulje počinje s dužinom, a kod pahuljice s jednakostraničnim trokutom. Za konstrukciju uzmemo jednakostraničan trokut kojemu svaku stranicu podijelimo na tri jednaka dijela te nad svakim srednjim dijelom stranica trokuta konstruiramo jednakostranične trokute, a potom uklonimo te srednje dijelove. Postupak ponovimo na svim novim dužinama. Ukoliko se nad srednjim dijelom svake stranice konstruira jednakostranični trokut čije se dvije stranice nalaze izvan početnog trokuta, dobili smo Kochovu pahuljicu. Ukoliko se taj isti trokut nalazi unutar početnog trokuta, tada dobivamo Kochovu antipahuljicu. Još raznih varijacija na temu Kochove pahuljice možemo vidjeti u članku [3].



Slika 2.14: Prvih pet koraka konstrukcije Kochove pahuljice



Slika 2.15: Prva četiri koraka konstrukcije Kochove antipahuljice

Neka je N_n broj stranica, l_n je duljina jedne stranice, o_n je opseg te A_n površina Kochove pahuljice nakon n ponavljanja. Nadalje, označimo s A_0 površinu početnog trokuta, a duljina početne stranice neka bude jedan. Tada je $N_n = 3 \cdot 4^n$ jer svakim korakom dobijemo četiri nove sukladne dužine, što još množimo s tri jer krećemo od trokuta, te $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ jer je $\frac{1}{3}$ faktor uvećanja. Iz to ga slijedi da je opseg Kochove pahuljice u n-tom koraku

$$o_n = N_n l_n = 3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

i primjećujemo da ako pustimo n u beskonačno, da će opseg biti beskonačan.
Uočimo također da je njena fraktalna dimenzija

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619$$

što je jednako fraktalnoj dimenziji Kochove krivulje.

Odredimo sada površinu Kochove pahuljice kad n teži u beskonačno, pri čemu je n broj koraka konstrukcije. Duljina stranice početnog trokuta jednaka je jedan, te njegova površina A_0 iznosi

$$A_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{2.2}$$

Površina $A_n{}'$ svakog novog trokuta u pojedinom koraku jest

$$A_n{}^1 = \frac{l_n{}^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot A_0.$$

Obzirom da u svakom novom koraku nastane onoliko trokuta koliko je bilo stranica u prethodnom koraku onda je zbroj površina svih trokuta koji nastanu u n-tom koraku

$$\begin{aligned} A_n' &= N_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot A_0 \\ &= 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot A_0 \\ &= \frac{3 \cdot 4^{-1} \cdot 4^n}{3^{2n}} \cdot A_0 \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot A_0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Površina Kochove pahuljice u n-tom koraku iznosi

$$A_n = A_0 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot A_0$$

te ako n pustimo u beskonačno, onda je površina

$$\begin{aligned}
A_\infty &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot A_0 \\
&= A_0 + \frac{3}{4} \cdot A_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= A_0 + \frac{3}{4} \cdot A_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \\
&= A_0 + \frac{3}{4} \cdot A_0 \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} \\
&= A_0 + \frac{3}{4} \cdot A_0 \cdot \frac{4}{5} \\
&= A_0 + \frac{3}{5} \cdot A_0 \\
&= \frac{8}{5} \cdot A_0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

odnosno, površina Kochove pahuljice iznosi $\frac{8}{5}$ površine početnog trokuta.

2.5 Pitagorino stablo

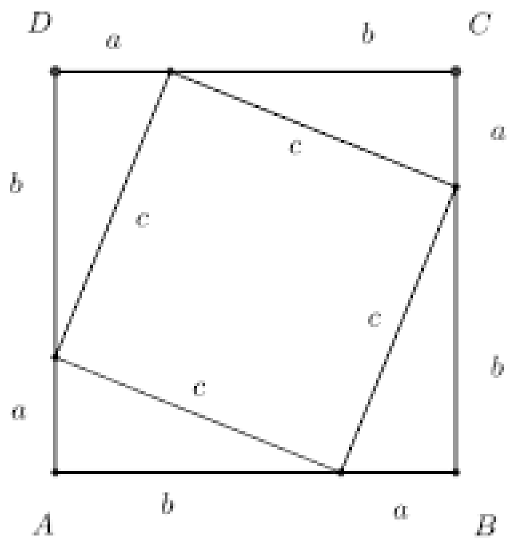
Već u samom naslovu ovog odjeljka možemo pretpostaviti da će se raditi o fraktalu kojemu se konstrukcija bazira na Pitagorinom poučku.
Pitagora iz Samosa je bio grčki matematičar i filozof, osnivač Pitagorejske škole koji je živito u petom stoljeću prije Krista. Njegova Pitagorejska škola dala je veliki doprinos u matematici. Matematičare koji su djelovali u školi nazivamo Pitagorejci. Oni su od svega najviše radili na tajnosti i zajedništvu te se ponekad smatra pogrešnim kad kažu da je Pitagora otkrio Pitaogorin teorem. Pretpostavka je da su ga otkrili Pitagorejci te ga pripisali Pitagori. No sami teorem, ne u istom zapisu, poznavali su već i stari Egipćani i Indijci.

Slijede iskaz i dokaz Pitagorina teorema.

Teorem 2.5.1. (Pitagorin teorem) Površina kvadrata na hipotenuzom c nekog trokuta ABC jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama a i b tog trokuta.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dokaz: Teorem ćemo dokazati *dokazom bez riječi*:

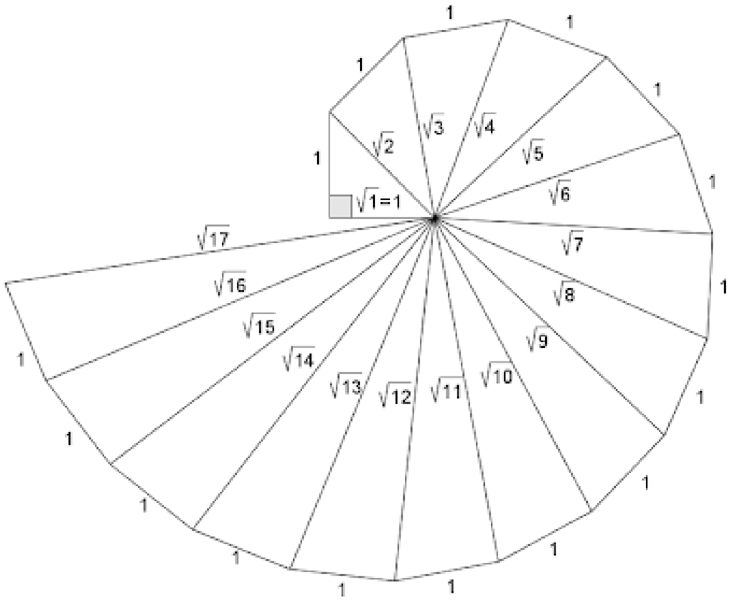


Slika 2.16: Skica uz dokaz

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

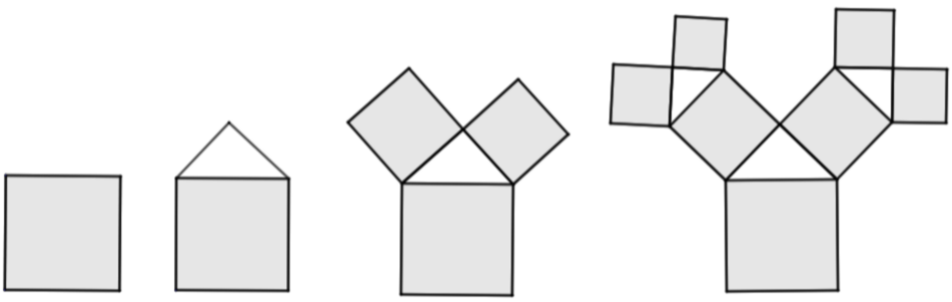
□

Važno otkriće pripisano Pitagori, odnosno njegovoj školi, jest nesumjerljivost duljine stranice kvadrata i duljine njegove dijagonale, to jest da omjer duljine stranice kvadrata i duljine njegove dijagonale nije omjer dvaju prirodnih brojeva. Računanje drugog korijena je problem povezan s tim i inspirirao je mnoge matematičare da otkriju neke prekrasne geometrijske konstrukcije. Jedan od njih nam omogućuje konstrukciju $\sqrt{n}$ za bilo koji pozitivni cijeli broj n. Na slici 2.17 vidimo konstrukciju spirale drugog korijena. Počinjemo s jednakokračnim pravokutnim trokutom čije su katete duljine 1. Tada je hipotenuza duljine $\sqrt{2}$. Nastavljamo tako da konstruiramo novi pravokutni trokut tako da jedna kateta bude kude duljine $\sqrt{2}$ (već konstruirana dužina), a druga duljine 1. Hipotenuza tog trokuta je duljine $\sqrt{3}$ i tako dalje.

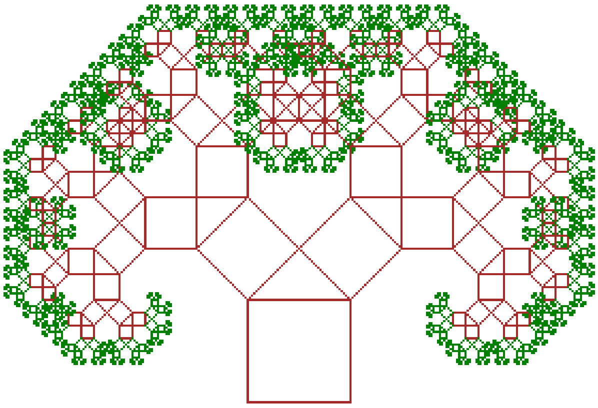


Slika 2.17: Spirala drugog korijena

Konstrukcija Pitagorina stabla povezana je s konstrukcijom spirale drugog korijena. Počinjemo od kvadrata. Potom na jednoj stranici kvadrata konstruiramo jednakokračni pravokutni trokut. Nad katetama tog trokuta konstruiramo nova dva kvadrata. Potom isti postupak ponavljamo na tim kvadratima - nad stranicom nasuprot onoj koja ujedno čini hipotenuzu prethodnog trokuta konstruiramo novi jednakokračni pravokutni trokut, a nad katetama tog trokuta ponovno konstruiramo kvadrate.

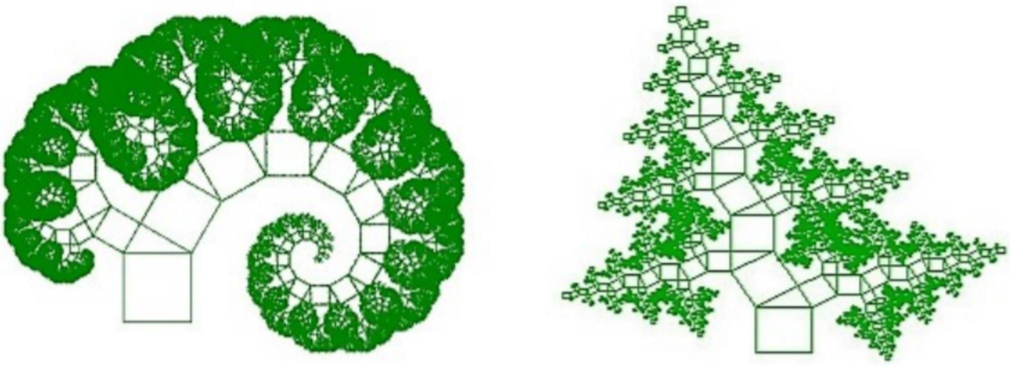


Slika 2.18: Konstrukcija Pitagorina stabla



Slika 2.19: Pitagorino stablo - jednakokračni pravokutni trokut

Kad razumijemo osnovnu konstrukciju, možemo modificirati konstrukciju. Na primjer, pravokutni trokut koji konsturiramo nad stranicom kvadrata ne mora biti jednakokračan, već bilo koji raznostranični pravokutni trokut. Također, on može biti konstruiran nad stranicama kvadrata tako da ima uvijek istu orijentaciju ili možemo nakon svakog koraka mijenjati orijentaciju. Pogledajmo sliku 2.20.



Slika 2.20: Pitagorina stabla

Na njoj imamo prvih pedeset koraka konstrukcije Pitagorinih stabala. Veoma je interesantno da jedino što smo mijenjali u konstrukciji jest orijentacija raznostraničnih pravokutnih trokuta, ali i njihova veličina. Na konstrukciji lijevo je orijentacija trokuta ostala nepromijenjena. Izgleda strukture podsjeća na spiralni list, mogli bismo reći, dok konstrukcija desno podsjeća na bor. No kod obje konstrukcije uočavamo jedno fraktalno svojstvo - samosličnost. Struktura se najprije dijeli na dvije glavne grane, te dvije ponovno na nove dvije i tako dalje. Svaka od tih grana je umanjena verzija čitave strukture.

2.6 Juliaov skup

Juliaovi skupovi spadaju u algebarske fraktale, a dobili su ime po francuskom matematiačaru Gastonu Juliau (1893. - 1978.) koji ih je opisao početkom dvadesetog stoljeća. Julia je svoju popularnost stekao objavom djela *Mémoire sur l'itération des fonctios rationnelles* u dvadeset petoj godini života. Kasnije je postao profesor na *École Polytechnique* u Parizu.

Kao što je već spomenuto, Juliaovi skupovi pripadaju skupini algebarskih fraktala i ne možemo ih razumjeti bez poznavanja kompleksnih brojeva. Kompleksni brojevi su proširenje skupa realnih brojeva. Kompleksni broj $z = x+iy$ sastoji se od realnog i imaginarnog dijela, $Rez = x$ i $Imz = y$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, a $i = \sqrt{-1}$ je imaginarna jedinica. Sve aritmetičke operacije koje vrijede za realne brojeve vrijede i za kompleksne. Realni brojevi su smješteni na brojevnom pravcu dok su kompleksni brojevi smješteni u ravnini. Takvu ravninu nazivamo kompleksan ili Gaussova ravnina i sastoji se od realne i imaginarne osi.
Juliaovi skupovi nalaze se u kompleksnoj ravnini i određeni su rekurzivnom funkcijom $f_c(z) = z^2 + c$ gdje je c fiksan kompleksni broj, a z proizvoljan. Dakle, za fiksan broj c generiramo niz kompleksnih brojeva

$$z \to z^2 + c \to (z^2 + c)^2 + c \to ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \to ...$$

Taj niz ima jedno od sljedeća dva svojstva:

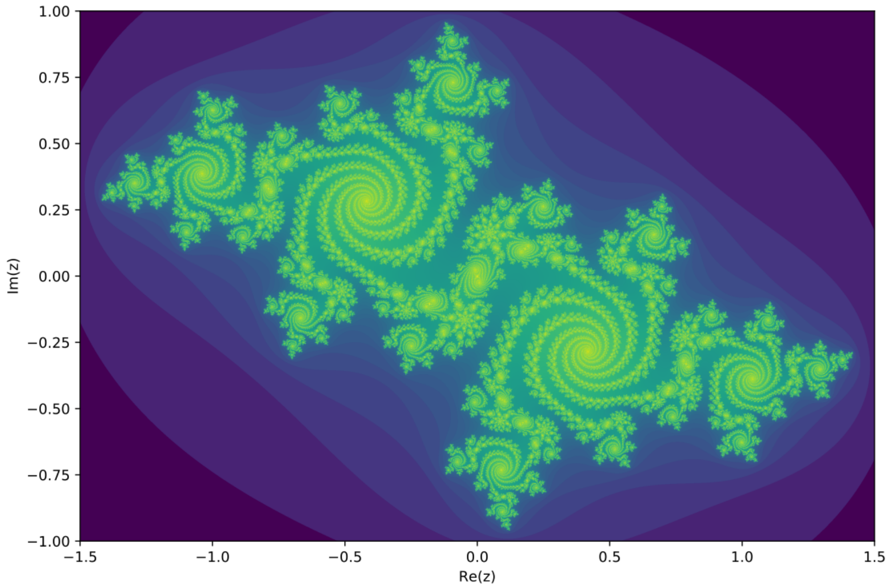
(i) ograničen je - postoji krug oko ishodišta kojeg niz nikada ne napušta

(ii) neograničen je - članovi niza napuštaju bilo koji krug oko ishodišta.

Skup točaka z koje zadovoljavaju prvo svojstvo zovemo *zatvarajući skup* J_c za c, a skup točaka koje zadovoljavaju drugo svojstvo je *odbijajući skup* E_c za c. Oba skupa su neprazna. Na primjer, za dani c i jako veliki x, broj $x^2 + c$ je veći od x, te uočavamo da skup E_c nije prazan (sadrži sve točke x koje su velike). S druge strane, uzmemo li x takav da je $x = x^2 + c$, onda dobijemo stacionaran niz $x, x, x, ...$ iz čega zaključujemo da je i skup J_c neprazan. Oba skupa pokrivaju jedan dio kompleksne ravnine i jedan je komplement drugoga. Granica zatvarajućeg skupa je istovremeno granica odbijajućeg skupa i upravo je to Julijin skup.

Rad Gastona Juliae s godinama je počeo padati u zaborav sve dok ga sedamdesetih godina Mandelbrot nije vratio na svjetlo te pokazao svijetu da je Julijin rad izvor najljepših ikad viđenih fraktala. Julijino djelo je bilo puno klasičnih fraktala koji su čekali dodir računalne grafike kako bi svijetu pokazao svoju ljepotu. Juliaovi skupovi su zahtjevniji za iscrtavanje jer je za svaki točku ravnine potrebno provjeriti konvergentnost jednog niza kompleksnih

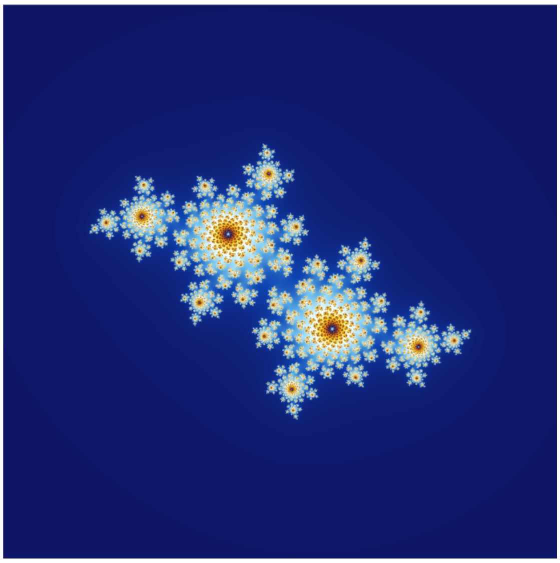
brojeva, a taj posao je praktički nemoguće obaviti bez računala. Zato je pojava računala dala novi zamah fraktalnoj geometriji.
Jedan od primjera vidimo na slici 2.21.



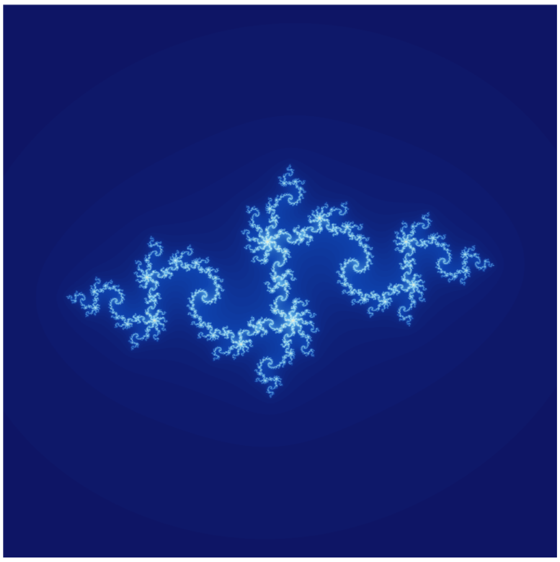
Slika 2.21: Juliaov skup

Pogledamo li manje dijelove Juliaova skupa možemo primijetiti kopije koje izgledom podsjećaju na čitavu strukturu, ali nisu identične. One su nastale nelinearnim transformacijama i iskrivljena su verzija početne te iz toga vidimo kvazi-samosličnost Juliaova skupa. Ovisno o vrijednosti broja c on je povezan ili nepovezan. Na slici 2.22 vidimo primjer nepovezanog Juliaovog skupa, a na slici 2.23 primjer povezanog Juliaovog skupa.

Za kreiranje Juliaovih skupova koristan je program *Galerija ULTIMATE* koji je pisan u programskom jeziku *C* za čiji je rad potreban .NET framework. Koristan je i već gotov program poput *Fractint*. To je odličan i besplatan program te nezaobilazan za sve one koji se ozbiljnije žele pozabaviti fraktalima. Zanimljiva je i stranica naslova *Fractal of the day* gdje se svaki dan prikazuje fraktal dana. Još programa prikladnih i za školu može se pronaći u članku [6].



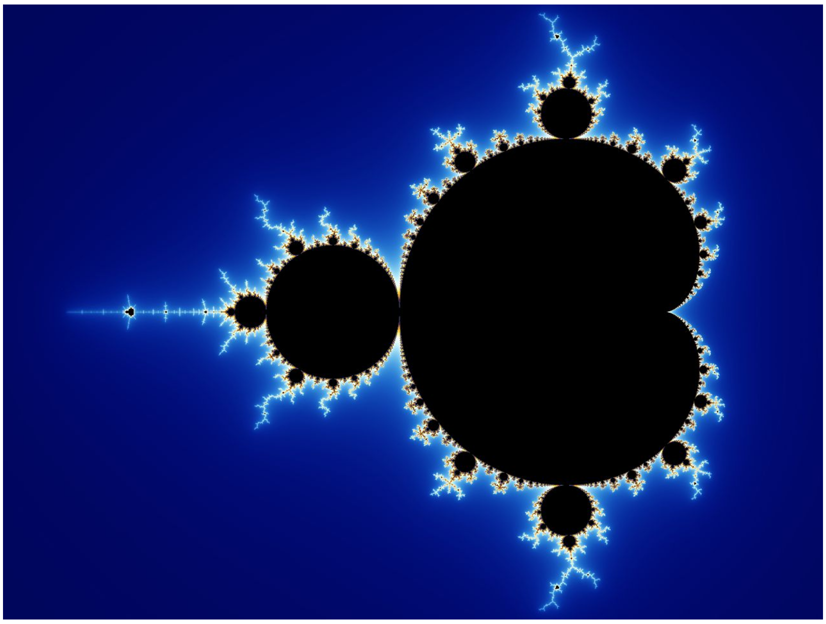
Slika 2.22: Juliaov skup za $c = -0.4 + 0.6i$



Slika 2.23: Juliaov skup za $c = -0.835 - 0.2321i$

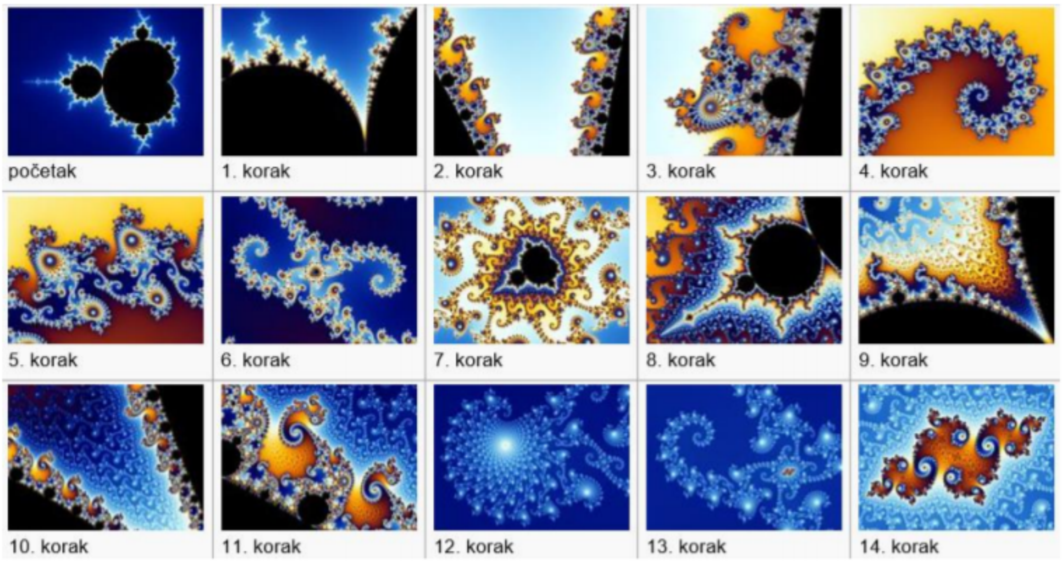
2.7 Mandelbrotov skup

Otac fraktalne geometrije, Benoit Mandelbrot, francuski je matematičar koji je proučavao rekurzivnu funkciju na kojoj se temelje Julijini skupovi, $f_c(z) = z^2 + c$ te je došao na ideju da napravi kartu ponašanja broja c u kompleksnoj ravnini. Odnosno, za odabranu vrijednost kompleksnog broja c i fiksnu početnu vrijednost $z_0 = 0$ promatrao je hoće li dobiveni Julijin skup biti povezan ili nepovezan. I time je nastao Mandelbrotov skup. Skup je otkriven 1979. godine te je i najpoznatiji i po mnogima najljepši fraktalni oblik.



Slika 2.24: Mandelbrotov skup

Ako je beskonačni niz $f_c(z) = z^2 + c$ ograničen, točka c pripada Mandelbrotovu skupu i crta se crnom bojom, a ako se taj niz kreće prema beskonačnom, točka ne pripada Mandelbrotovom skupu i crta se bijelom bojom. Otkud onda šarenilo? U praksi, računalni programi provjeravaju kojoj vrijednosti konvergira svaka točka nakon beskonačno iteracija te ovisno i vrijednosti boja zadanom bojom područje. Na taj način nastaje fascinantno lijepa okolina skupa.
Prekrasna okolina skupa Mandelbrotova skupa fascinirala je i samog Mandelbrota, gdje je na samoj granici skupa uočio oblike koji su izgledali kao sićušne kopije izvornog skupa. Što je više uvećavao granicu skupa, u njoj je uočavao i nove oblike koji su bili slični polaznom, ali svaki put drugačiji. Iz toga zaključujemo da je Mandelbrotov skup kvazi-samosličan fraktal. Fascinantno je da s uvećanjima Mandelbrotova skupa možemo ići do u beskonačnost. Neki tvrde i da je Mandelbrotov skup najsloženiji objekt u matematici te da nije dovoljna ni vječnost da ga se cijelog pregleda.



Slika 2.25: Mandelbrotov skup - uvećanja

Ovime završavamo priču o klasičnim fraktalima. Njihovu primjenu vidjet ćemo u sljedećem poglavlju. Programom nastave matematike u Republici Hrvatskoj nije obuhvaćena geometrija fraktala. U srednjoj školi bi trebalo bar naznačiti njeno postojanje, radi opisivanja stvarnih prirodnih pojava i oblika. Također, kroz dvije teme u nastavnom programu matematike srednje škole može se izravno govoriti o geometriji fraktala - kompleksni brojevi (konstrukcija Mandelbrotova skupa) i geometrijski red (pitanje površine Kochove pahuljice). Vjerujemo da čak ni djeca ne bi ostala ravnodušna kad bi ugledali prizore prekrasnog Mandelbrotova skupa. Te zadivljujuće slike mogle bi kod njih pobuditi zainteresiranost za matematiku.

Poglavlje 3

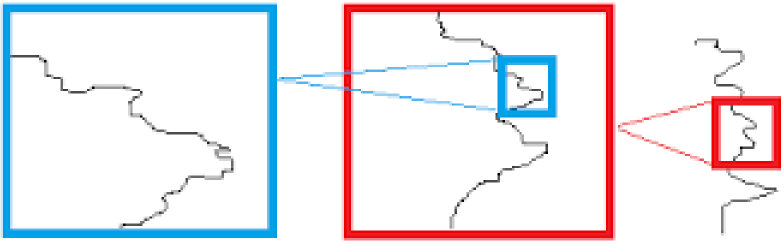
Primjena fraktala

Točke, dužine, pravci, trokuti, kružncie, geometrijska tijela i tako dalje, sve su to savršeni oblici koji su poznati bili i u staroj Grčkoj. Iako su mnogi poučki starogrčke matematike u današnjem tehničkom svijetu itekako korisni i primjenljivim činjenica je da se prirodne pojave i oblici mogu samo približno opisivati euklidskim objektima. Na primjer, naša Zemlja samo je približno kugla. Biljarska kuglica bi možda bila hrapavija od naše planete kad bismo ju "sveli" na istu veličinu. Površinu ispod zakrivljenem, ali savršeno glatke krivulje parabole možemo izračunati Arhimedovom metodom niza pravokutnika, ali da bismo izračunali fascinantno veliku površinu čovjekovih pluća, treba pozvati u pomoć fraktalnu geometriju.

3.1 Duljina obale Velike Britanije

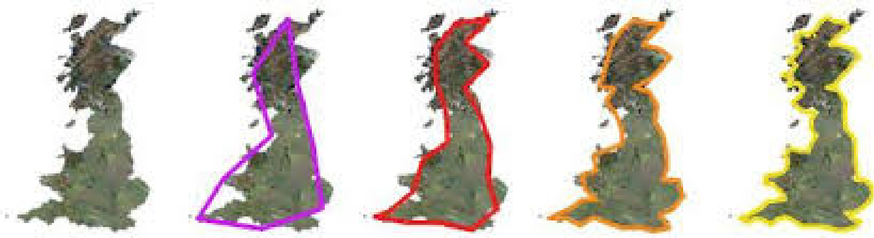
Otkrićem i definicijom fraktala je i sam Mandelbroj nastojao fraktale učiniti primjenjivima pri rješavanju svakodnevnih problema. Godine 1967. objavio je rad pod nazivom *How long is the coast od Britain?*, u prijevodu *Kolika je duljina obale Velike Britanije?*. Pitanje u sebi krije temelje samosličnosti i fraktalne geometrije. Iz raznih izvora imamo različite informacije o duljini britanske obale. Podatci obično variraju između vrijednosti 7440 km i 8000 km. Mandelbrot je tvrdio da je to zbog samosličnosti obale. Problem je što ne postoji jedinstvena formula kojom bi se to računalo, a mjerenjem metrom bi bila preskupa investicija. Oblik obale je nastajao milijunima godinama raznima tektonskim aktivnostima, erozijama i sedimentnim procesima koji traju i danas. Mjerenje obala i granica u praksi se vrše na geografskim kartama. Geografske karte na sebi imaju mjerilo, na primjer $1 : 100000$ nam govori da jedan milimetar na karti predstavlja sto tisuća milimetara u stvarnosti (također vrijedi i da je jedan centimetar na karti jednak sto tisuća centimetara u prirodi). Zatim crtamo dužine određene duljine oko obale i množimo s mjerilom te dobijemo ukupnu duljinu obale. Pogledamo li neki zaljev ili poluotok na karti s mjerilo

1 : 100000 te istu tu kartu prikažemo s mjerilom 1 : 10000, postaju vidljivi novi zaljevi i uvale. Promatrajući istu kartu, ali s mjerilom 1 : 1000, opet ćemo otkriti nove zaljeve i uvale i tako dalje.



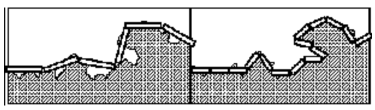
Slika 3.1: Samosličnost obale

U tome uočavamo samosličnost obala, iako to nije savršena samosličnost kao kod fraktala opisanih u prethodnom poglavlju, već je približna, statistička samosličnost. Svaki novi zaljev, uvala ili poluotok svojom duljinom utječu na ukupnu duljinu obale.
Pogledajmo na crtežu primjer mjerenja duljine obale Velike Britanije.



Slika 3.2: Aproksimacija duljine obale Velike Britanije

Uočavamo da promjenom mjerne jedinice, odnosno "duljine štapa", mijenja se i duljina britanske obale. Na prvoj aproksimaciji smo uzeli štapove koje ne možemo posložiti tako da savršeno prate obris obale pa će samim time i aproksimacija duljine biti dosta neprecizna. Na svakoj sljedećoj slici smo uzimali sve manje i manje "štapove" kako bismo što savršenije pratili obris obale i time dobivali sve bolju aproksimaciju duljine obale.

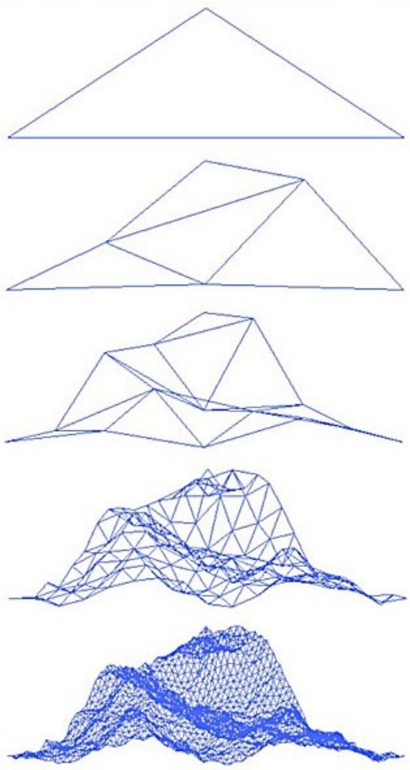


Slika 3.3: Manji "štapovi" bolje prate obris obale

Temeljem primjera mjerenja duljine obale Velike Britanije Mandelbrot nam je ponudio dobar način za aproksimaciju duljina grafova funkcija, duljina granica, obala, rijeka i tako dalje.

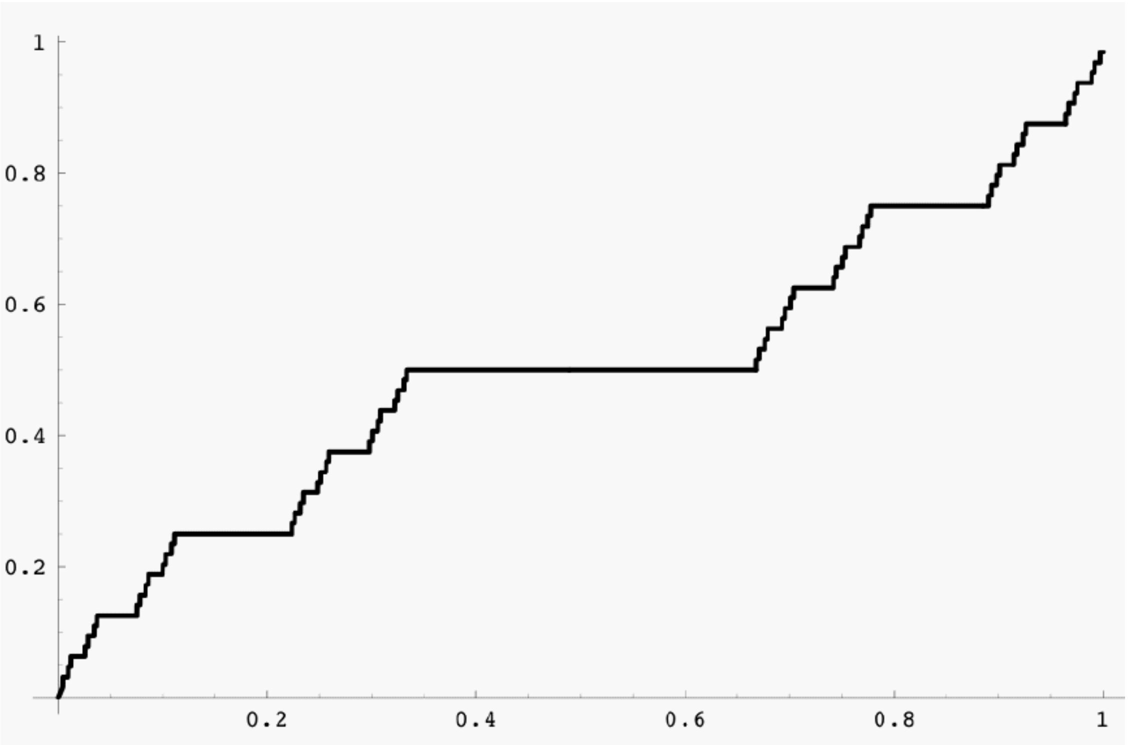
3.2 Tehnologija

Već smo se upoznali da su fraktali svoj samisao dobili razvojem računalne grafike te se u tom području najviše i primjenjuju fraktali. Najjednostavniji primjeri su modeliranje terena, posebno planina ili raslinja, grmlja, drveća i trava.
Planine se mogu crtati tako da se horiontalno položenom trokutu svaki vrh povisi ili snizi na neku vrijednost. Tako dobivenom trokutu odredimo polovišta stranica koja potom spojimo dužinama. Svaku od točaka polovišta, odnosno vrhova novog srednjeg trokuta, povisujemo ili snizujemo kao i kod početnog trokuta. Taj postupak ponavljamo na svakom sljedećem trokute te možemo usporediti ovu konstrukciju s konstrukcijom trokuta Sierpiñskog. Navedenu konstrukciju možemo vidjeti na slici 3.4.



Slika 3.4: Izrada planine koristeći fraktale

U računalnoj tehnologiji fraktale koristimo i za kreiranje računalnih igrica. Najpoznatija je izrada terena za dvodimenzionalne igrice koristeći fraktal *đavolje stube* koji je ništa drugo nego Cantorov skup koji se konsturira na kvadratu stranice duljine jedan. Stranicu kvadrata podijelimo na tri jednaka dijela te izbacimo srednji dio i na njegovo mjesto stavimo pravokutnik širine kao i duljina dijela kojeg smo izbacili i neke određene visine. Taj postupak nastavljamo na svakom preostalom dijelu te iste stranice početnog kvadrata. Fraktal naposljetku ima izgleda stuba.



Slika 3.5: Đavolje stube

Da su fraktali doveli do mnogobrojnih znanstvenih otkrića na području tehnologije najbolje nam prikazuje primjer antene u mobitelima. Budući da mobitel mora komunicirati s raznim uređajima, trebalo bi mu više običnih antena jer sa svim uređajima ne može komunicirati na istoj frekvenciji. Tada su znanstvenici otkrili zapanjujuću stvar: kada se antena napravi u obliku fraktala, ona može primati veliki raspon frekvencija pa mobitel može normalno funkcionirati samo s jednom antenom. Ti fraktali imaju oblik uobičajenih fraktala poput tepiha Sierpiñskog ili Kochove krivulje. Osim za mobilne telefone, fraktalne antene se mnogo koriste u uređajima za vojnu komunikaciju.

Slika 3.6: Model kućne fraktalne antene

3.3 Astronomija

Olbersov paradoks ili paradoks tamnog neba opisao je 1826. njemački astronom Heinrich Olbers prema kojem je i dobio ime. Paradoks je vezan uz pitanje beskonačnosti svemira i kaže ako ima beskonačno mnogo zvijezda, zašto nebo noću ne svijetli kao sunce već je crno. Uobičajeno objašnjenje u duhu Velikog praksa jest da ne bliješti jer se svemir širi i svjetlost iz svake točke ne stiže do nas odjednom, u istom trenutku. Mandelbrot je dao svoje alternativno rješenje ovom paradoksu. Njegova teorija sugerira da su zvijezde i galaksije u svemiru raspoređene u ponavljajućim uzorcima čiji se broj povećava s udaljenošću, a zasniva se na ovome - u svemiru imamo skup galaksija, u tom skupu galaksije unutar kojih se nalaze grupe zvijezda unutar kojih se nalaze zvijezde. Odnosno, pretpostavio je da su zvijezde u svemiru fraktalno raspoređene poput višedimenzionalnog Cantorova skupa i da ih ima beskonačno mnogo, ali se ne nalaze u svakoj točki svemira i zato nebo ne svijetli.

3.4 Medicina

U medicini se fraktali koriste za mjerenje kompleksnosti bioloških struktura kao što su tkiva i individualne stanice i njene organele. Fraktalna analiza se koristi za procjenu finih strukturnih promjena u stanici koji se ne mogu detektirati standardnom optičkom ili elektronskom mikroskopijom. Uspješno je primijenjena za opisivanje tumorskih stanica,

varijabilnosti srčanog ritma te za dijagnosticiranje nekih oftalmoloških oboljenja.
Činjenica da se površina stanica raka sastoji od pregiba i nabora koji imaju fraktalna svojstva i koja se mijenjaju ovisno o stadiju rada mnogo koristi za rano otkrivanje stanica raka u tijelu. Utvrđeno je da veće vrijednosti fraktalne dimenzije odgovaraju kasnijem stadiju razvoja raka, odnosno da stadij raka ovisi o veličini samih stanica.
Koštani prijelomi se također definiraju kao fraktalni. I sam izgleda kostiju u kojima se nalaze mjehurići zraka otkrivaj fraktalnu strukturu.
Kao što je već spomenuto, fraktalne strukture otkrivamo i u otkucajima ljudskog srca, što je jako važno u kardiologiji. To se najbolje vidi kad se detaljnije prouče njihovi vremenski redoslijedi. Otkucaji srca nisu pravilni i uvijek se nailaze na sitne varijacije, ali srčana bolest se može otkriti uz pomoć ekstremnog i aritmičnog fraktalnog ponašanja.

Bibliografija

[1] J. Delač-Klepac, *Red, kaos i još ponešto o fraktalima*, Matka **26** (2017.), br. 101, 6–11.

[2] J. Šikić, *Trokut Sierpiñkskog*, Matka **23** (2014.), br. 89, 13–15.

[3] I. Katalenac, *Fraktali - Koch*, Matka **24** (2015.), br. 94, 134–139.

[4] H. Peitgen, H. Jürgens i D. Saupe, *Fractals for the classroom, Part one: Introduction to fractals and chaos*, Springer, 1992.

[5] M. Polonijo, *Euklidski prostori*, Sveučilište u Zagrebu, Matematički odsjek PMF-a, Zagreb 2012.

[6] Š. Šuljić, *Čudesne slike fraktala*, Matematika i miš **2** (2000.), br. 7, 91–94.

[7] A. Vrdoljak i K. Miletić, *Načela fraktalne geometrije i primjene u arhitekturi i građevinarstvu*, e-Zbornik: Elektronički zbornik radova građevinskog fakulteta **9** (2019.), br. 17, 41–52.

Sažetak

Točke, pravci, geometrijski likovi i tijela su savršeni oblici i njima je prirodu ponekad nemoguće opisati. Dosta oblika u prirodi je nepravilno, neravno, rekli bismo, kaotično, stoga se u takvim slučajevima koristi fraktalna geometrija. Ova grana matematike razvila se tek krajem dvadesetog stoljeća i našla primjenu u znanosti, tehnologiji, medicini pa čak u astronomiji. U ovom radu je obrađen pojam fraktala te nekoliko klasičnih fraktala - Cantorov skup, trokut i tepih Sierpiñskog, Kochova krivulja i pahuljica, Pitagorino stablo, Juliaov skup i Mandelbrotov skup. Svakom od njih opisano je njihovo svojstvo samosličnosti te izračunata dimenzija samosličnosti koja se razlikuje od pojma dimenzije kakvu poznajemo u euklidskoj matematici.

Ključne riječi: fraktal, fraktalna geometrija, samosličnost, dimenzija samosličnosti, fraktalna dimenzija, Mandelbrot

Summary

Points, lines, polygons and solids are perfect shapes and the nature sometimes cannot be described by them. Many shapes in nature are irregular, rugged, or we could say, chaotic, so in these cases we use fractal geometry. This part od mathematics began to develop at the end of twentieth century and found its application in science, technology, medicine, even in astronomy. This paper presents fractals and describes some classical fractals - the Cantor set, the Sierpiñski triangle and carpet, the Koch curve and snowflake, Pythagorean tree, the Julia set and the Mandelbrot set. For every of them is described their feature of self-similarity and is calculated their self-similarity dimension that differs from term of dimension we know.

Keywords: fractal, fractal geometry, self-similarity, self-similarity dimension, fractal dimension, Mandelbrot

Životopis

Rođena sam 13. lipnja 1993. godine u Ludwigsburgu u Saveznoj Republici Njemačkoj. Odrasla sam u Zadru gdje sam pohađala Osnovnu školu Smiljevac i Gimnaziju Jurja Barakovića. Svoje srednješkolsko obrazovanje završila sam 2012. godine te sam iste godine upisala Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, nastavnički smjer Matematičkog odsjeka. Akademski naziv sveučilišne prvostupnice (baccalaureus) edukacije matematike stekla sam 2016. godine.