

# Primjena Niellove funkcije u modelu troposferskog kašnjenja satelitskog signala za određivanje položaja

---

**Gavranić, Valentina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:405829>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Valentina Gavranić

**PRIMJENA NIELLOVE FUNKCIJE U  
MODELU TROPOSFERSKOG  
KAŠNJENJA SATELITSKOG  
SIGNALA ZA ODREĐIVANJE  
POLOŽAJA**

Diplomski rad

Voditelji rada:  
prof.dr.sc. Luka Grubišić i  
prof.dr.sc. Renato Filjar

Zagreb, studeni, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, sestrama i bratu.*

# Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
<b>1 Osnove satelitske navigacije</b>	<b>2</b>
1.1 Satelitski signal . . . . .	3
1.2 Postupak satelitskog određivanja položaja . . . . .	5
1.3 Obilježja troposfere . . . . .	10
1.4 Troposfersko kašnjenje . . . . .	12
<b>2 Model troposferskog kašnjenja</b>	<b>17</b>
2.1 Zenitno hidrostatičko kašnjenje . . . . .	19
2.2 Zenitno nehidrostatičko kašnjenje . . . . .	21
2.3 Hidrostatička i nehidrostatička funkcija . . . . .	23
<b>3 Matematička obilježja Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije</b>	<b>29</b>
3.1 Verižni razlomci . . . . .	29
3.2 Algoritmi za izvrednjavanje verižnih razlomaka . . . . .	34
3.3 Analitička svojstva Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije . . . . .	36
<b>4 Izvedba Niellove funkcije u programskom okruženju R</b>	<b>40</b>
4.1 Uvod u R . . . . .	40
4.2 Struktura programske izvedbe Niellove funkcije . . . . .	44
4.3 Procjena programske izvedbe . . . . .	46
<b>5 Zaključak</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>53</b>
<b>A Kodovi izvedbe funkcija</b>	<b>59</b>

A.1 Izvedba Niellove funkcije . . . . .	59
A.2 Izvedba Vienna funkcije . . . . .	61
<b>B Sadržaj datoteke data.txt</b>	<b>63</b>
<b>C Grafovi Niellove i Vienna funkcije</b>	<b>64</b>
C.1 Grafovi hidrostaticke Niellove i Vienna funkcije . . . . .	64
C.2 Grafovi nehidrostaticke Niellove i Vienna funkcije . . . . .	69

# Uvod

Određivanje položaja, vremena i brzine objekata bilo gdje na i oko površine Zemlje u bilo kojem trenutku osnovna je zadaća svih globalnih navigacijskih satelitskih sustava (engl. Global Navigation Satellite Systems (GNSS)). Prvi GNSS, nazvan globalni sustav za određivanje položaja (engl. Global Positioning System (GPS)), nastao je i osmišljen prema potrebama američke vojske za sustavom koji pruža veliku preciznost određivanja položaja, globalnu pokrivenost, neograničen broj korisnika, visok stupanj zaštite od ometanja i interferencije i dr. GPS je proglašen potpuno operativnim 1995. godine i još uvijek predstavlja najpoznatiji i najrašireniji globalni navigacijski satelitski sustav. Osim GPS-a, potpuno operativnim je proglašen i ruski GLONASS 2011. godine. Postoje i dva GNSS-a u razvoju: europski Galileo i kineski BeiDou [9].

Globalni navigacijski satelitski sustavi rade na principu mjerenja udaljenosti od satelita u trenutku odašiljanja signala do prijemnika u trenutku primanja signala. Satelitski navigacijski prijemnik mjeri vrijeme propagacije satelitskog signala od satelitske do prijemnikove antene kako bi odredio udaljenost do satelita. Zbog pretpostavke o konstantoj brzini širenja satelitskog signala jednakoj brzini svjetlosti u vakuumu, mjerenje vremena propagacije satelitskog signala od satelitske do prijemnikove antene ekvivalentno je mjerenju njihove udaljenosti. U stvarnom svijetu, zbog grešaka nastalih u satelitu, prijemniku i medijima kroz koje se signal širi, navedeni uvjeti nikada nisu ispunjeni. Posljedica toga je da izmjerena udaljenost ne predstavlja stvarnu udaljenost od satelita do prijemnika, nego udaljenost kojoj su pribrojane sve nastale greške. Jedan od medija koji uzrokuje greške u mjerenju udaljenosti je troposfera. Troposfera, najniži dio atmosfere, smanjuje brzinu širenja signala i uzrokuje savijanje puta signala. Navedeni utjecaji troposfere nisu zanemarivi jer mogu uzrokovati grešku u mjerenju udaljenosti i do 50 m. U jednofrekvencijskim prijemnicima za civilnu upotrebu najčešći način ispravka troposferskog utjecaja je modeliranjem.

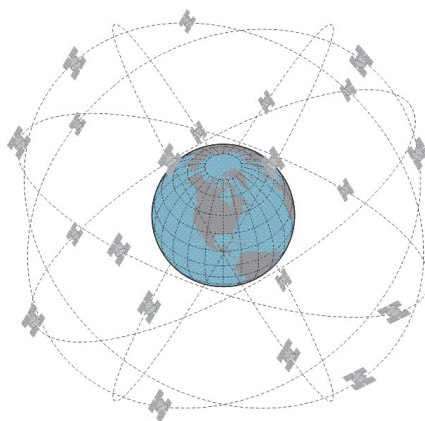
U ovom radu analizira se utjecaj troposfere na preciznost određivanja položaja i opisuju postojeći modeli za njegovo ublažavanje. Posebna pozornost posvećena je primjeni Niellove funkcije u razvoju modela, razmatranju njezine numeričke stabilnosti i programskoj izvedbi u okruženju za statističko računarstvo R.

# Poglavlje 1

## Osnove satelitske navigacije

GPS sateliti su smješteni u srednjoj Zemljinoj orbiti (engl. Medium Earth Orbit) na visini od oko 20 200 km. 24 satelita su raspoređena u 6 orbitalnih ravnina, svaka s nagibom od  $55^\circ$  u odnosu na ekvatorijalnu ravninu, na način da se u svakoj orbitalnoj ravnini nalazi najmanje 4 satelita (slika 1.1)[9]. Odabrana visina na kojoj sateliti kruže i njihov raspored unutar orbitalnih ravnina omogućavaju da se s relativno malim brojem satelita pokrije cijela Zemljina površina i da su u svakom trenutku iznad svake točke na Zemljinoj površini dostupna barem 4 satelita pri evalaciji većoj od  $15^\circ$  [5]. U kasnijem tekstu vidjet ćemo da su navedeni uvjeti nužni za određivanje položaja i njegovu preciznost. Sateliti čine *svemirski segment GPS sustava* (slika 1.2).

Za kontroliranje i održavanje ispravnog rada satelita zadužen je *kontrolni seg-*



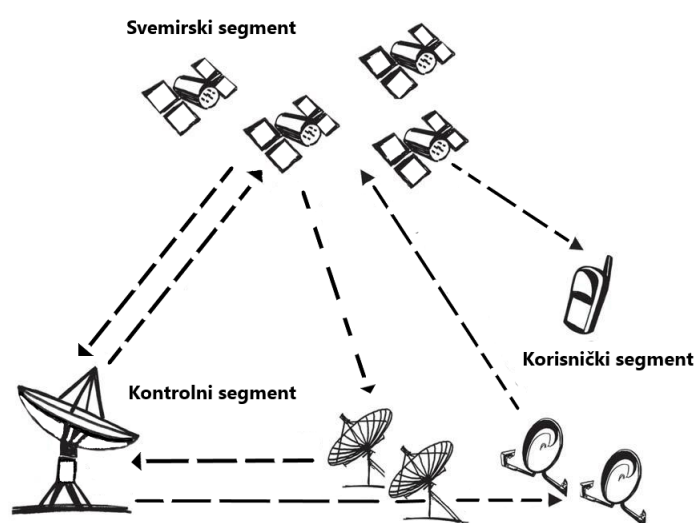
Slika 1.1: GPS satelitska konstelacija

*ment GPS sustava*. Sastoji se od glavne kontrolne stanice (eng. Master Control



Station), stanica za praćenje satelita (engl. Monitor Stations) i zemaljskih antena (engl. Ground Antennas). Stanice za praćenje, pomoću ugrađenih GPS prijemnika, neprekidno prikupljaju podatke o svim satelitima na obzoru i šalju ih glavnoj kontrolnoj stanici. Kontrolna stanica obradom prikupljenih podataka procjenjuje satelitske orbite (efemeride), računa korekcije satelitskih satova i ostale parametre te ih šalje u jednu od zemaljskih antena. Zemaljske antene ih radio signalima prosljeđuju satelitima.

Postoji i *korisnički segment GPS sustava* kojeg čine prijemnici za autorizirane



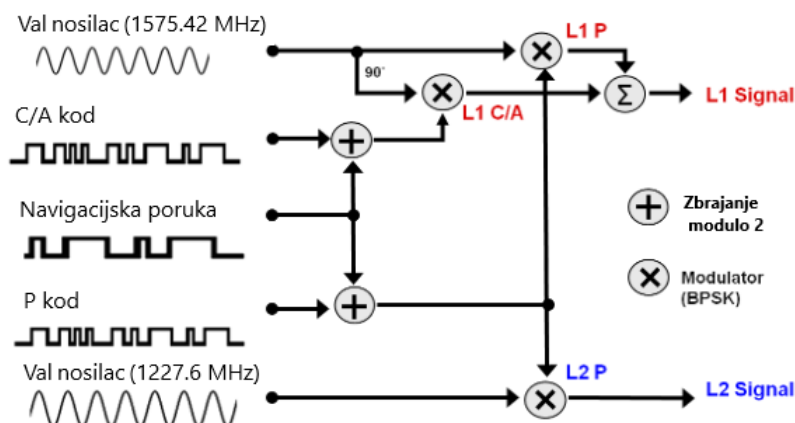
Slika 1.2: GPS segmenti

i neautorizirane korisnike. Autoriziranim korisnicima (američka vojska i posebne državne službe) je omogućeno određivanje položaja s višom razinom točnosti (engl. Precise Positioning Service (PPS)), dok je za neautorizirane korisnike (ostali civilni korisnici) omogućeno određivanje položaja sa standardnom razinom točnosti (engl. Standard Positioning Service (SSP))[9, 25].

## 1.1 Satelitski signal

Svi sateliti GPS sustava istodobno odašilju signale na dvije frekvencije iz L - opsega. Postupak formiranja signala počinje generiranjem elektromagnetskog vala. Generirani elektromagnetski val prolazi kroz multiplikator u kome se osnovna frekvencija  $f_0 =$

10.23MHz množi s konstantama 154 i 120 čime se dobiju dva vala nosioca  $L_1$  i  $L_2$ , frekvencija  $f_1 = 1575.42MHz$  i  $f_2 = 1227.60MHz$  respektivno.



Slika 1.3: Moduliranje valova nosioca

Zatim se valovi nosioci, tehnikom binarnog faznog kodiranja (engl. Binary Phase Shift Keying - BPSK), moduliraju pomoću dva sinkronizirana PRN-koda:

- *C/A kod* modulira val nosilac  $L_1$ . To je PRN-kod<sup>1</sup> koji sadrži 1023 bita. Kada se generira brzinom od 1.012 Mbit/s ponavlja se svake milisekunde. Svakom satelitu je dodijeljen jedinstven C/A kod. C/A kodovi su dostupni svim prijemnicima, koji ih koriste za razlikovanje satelita i mjerenje vremena širenja signala od satelita do prijemnika.
- *P(Y) kod* modulira oba vala nosioca,  $L_1$  i  $L_2$ . Ovaj PRN-kod sadrži otprilike  $2.25 \cdot 10^{14}$  bita i kada se generira brzinom od 10.23 Mbit/s ponavlja se svakih 266 dana (38 tjedana). Zbog toga je svakom satelitu dodijeljen vlastiti dio P koda, koji se periodički ponavlja svakih 7 dana. Dodjeljivanje jednog određenog tjedna od 38-tjednog P koda svakom satelitu pomaže GPS prijemniku da ih međusobno razlikuje. P kod je namijenjen samo autoriziranim korisnicima. Da bi se onemogućilo njegovo neautorizirano korištenje, šalje se u kriptiranom obliku Y. Budući da i C/A kod i P kod moduliraju val nosilac L1, modulacija C/A koda je fazno šiftana za  $90^\circ$  od modulacije P(Y) koda.

<sup>1</sup>PRN-kodovi su nizovi nula i jedinica, koji imaju neki period ponavljanja. Redoslijed nula i jedinica na prvi pogled izgleda slučajan, zbog čega se još nazivaju i pseudoslučajni kodovi. No, njihov redoslijed je rezultat pažljivo osmišljenog matematičkog algoritma koji omogućuje prijemniku da sve signale primljene na istoj frekvenciji može selektivno izdvojiti.

Prije modulacije s valom nosiocem, kodovi C/A i P(Y) se zbrajaju po modulu 2 s kodom navigacijske poruke [11]. Opisani postupak formiranja signala prikazan je na slici 1.3.

U navigacijskoj poruci su sadržani svi ostali podaci koje satelit šalje prijemniku. Dijelove navigacijske poruke čine: (1) GPS vrijeme odašiljanja signala, (2) podaci potrebni za korigiranje satelitskog sata, (3) podaci potrebni za pretvorbu GPS vremena u UTC vrijeme, (4) procijenjeni položaj satelita, (5) približni položaji ostalih satelita, (6) koeficijenti za modeliranje ionosfere. Navigacijska poruka se sastoji od 25 okvira, od kojih je svaki podijeljen na 5 podokvira. Za slanje cijele navigacijske poruke potrebno je 12.5 min (ako se generira brzinom of 50 bit/s), a za slanje jednog okvira potrebno je 30s [5, 9, 25]. Kako bi se skratilo vrijeme za dobivanje inicijalnog položaja, podaci o položaju satelita i podaci o korekciji satelitskog sata su smješteni u prva tri podokvira svakog okvira. Dakle, signal se sastoji od tri komponente: val nosilac, PRN-kod i navigacijska poruka.

GPS vrijeme je bazirano na jako preciznim atomskim satovima. Također, GPS vremenska skala je uniforma, tj. nisu potrebne nikakve korekcije zbog varijacija u Zemljinoj rotaciji. Definiranje ovakve precizne vremenske skale je potrebno za sustave kao što je GPS, na kojem se ispravnost cijelog sustava temelji na računanju vremena širenja signala od satelita do prijemnika. GPS vrijeme se održava unutar 1 mikrosekunde, najčešće i manje od 25 nanosekundi, u odnosu na UTC vrijeme [9]. Značajna razlika između GPS i UTC vremena ipak postoji, zbog presudnih sekundi koje se dodaju UTC vremenu kako bi ga se držalo sinkroniziranim sa univerzalnim zemaljskim vremenom. Od siječnja 2017. godine GPS vrijeme ja za 18 sekundi ispred UTC vremena.

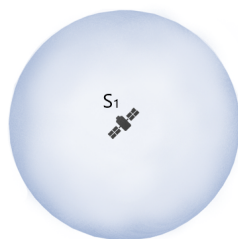
Sateliti, glavna kontrolna stanica i stanice za praćenje su opremljene s nekoliko atomskih satova. Zadaća glavne kontrolne stanice je održavati sve segmente GPS sustava sinkronizirane obzirom na GPS vrijeme. Kao što je već rečeno, glavna kontrolna stanica pomoću stanica za praćenje i zemaljskih antena prikuplja podatke o stanju svakog satelita, korigira ih i nazad šalje satelitu. Satelit po primitku korekcija, ažurira te podatke u navigacijskoj poruci.

## 1.2 Postupak satelitskog određivanja položaja

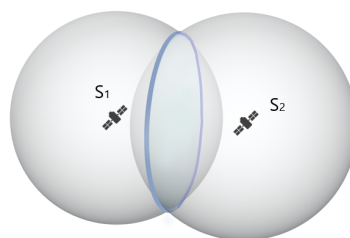
Označimo sa A prijemnik i sa  $S_1$  jedan satelit GPS sustava. Pretpostavimo da je prijemnik A u trenutku  $t$  primio signal odašlan sa satelita  $S_1$ . Označimo s  $(X_1, Y_1, Z_1)$  koordinate satelita  $S_1$  u trenutku odašiljanja signala i s  $d_1$  stvarnu (Euklidsku) uda-

ljenost od satelita  $S_1$  u trenutku odašiljanja signala do prijemnika A u trenutku  $t$ , tj. u trenutku primanja tog signala. Jedino što možemo zaključiti je da se prijemnik nalazi na sferi sa središtem u  $(X_1, Y_1, Z_1)$  i radijusom  $d_1$  (slika 1.4), tj. da koordinate prijemnika A,  $(X, Y, Z)$ , zadovoljavaju sljedeći izraz:

$$d_1^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2. \quad (1.1)$$



Slika 1.4: Sfera na kojoj se nalazi prijemnik



Slika 1.5: Kružnica na kojoj se nalazi prijemnik

Nadalje, kada bi pretpostavili da je u trenutku  $t$  primio i signal odaslan s još jednog satelita, označimo ga sa  $S_2$ , zaključujemo da se koordinate prijemnika nalaze na kružnici koja predstavlja presjek sfere sa središtem u  $(X_1, Y_1, Z_1)$  i radijusom  $d_1$  i sfere sa središtem u  $(X_2, Y_2, Z_2)$  i radijusom  $d_2$  (slika 1.5), odnosno točka  $(X, Y, Z)$  zadovoljava sljedeći sustav jednadžbi:

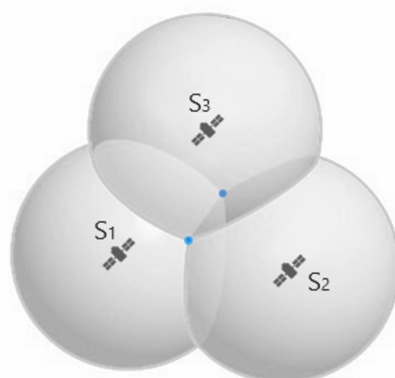
$$\begin{aligned} d_1^2 &= (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2 \\ d_2^2 &= (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + (Z - Z_2)^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Da bi odredili gdje se točno na kružnici nalazi prijemnik potreban je još jedan satelit. Stoga, pretpostavimo da je prijemnik A u trenutku  $t$  primio i signal odaslan sa satelita  $S_3$ . Točka  $(X, Y, Z)$  zadovoljava sljedeći sustav jednadžbi, tj. nalazi se u presjeku triju sfera (slika 1.6):

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + (Z - Z_1)^2 \\ d_2^2 &= (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + (Z - Z_2)^2 \\ d_3^2 &= (X - X_3)^2 + (Y - Y_3)^2 + (Z - Z_3)^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Koordinate  $(X_2, Y_2, Z_2)$  i udaljenost  $d_2$  satelita  $S_2$  te koordinate  $(X_3, Y_3, Z_3)$  i udaljenost  $d_3$  satelita  $S_3$  definiramo analogno kao kod satelita  $S_1$ .

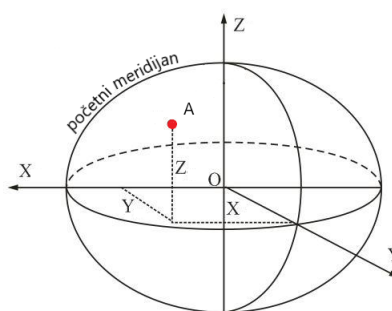
Na slici 1.6 vidimo da presjek triju sfera, sa središtima u koordinatama satelita, čine dvije točke (plavom bojom označene na slici). Jedna od tih točaka je daleko u



Slika 1.6: Potencijalni položaji prijemnika kao rješenja navigacijskog problema

svemiru, a druga je na Zemlji i upravo ona predstavlja koordinate prijemnika A. Uz činjenicu da prijemnik može odrediti koordinate satelita i udaljenosti od njih u trenutcima odašiljanja signala, zaključujemo da su potrebna barem 3 satelita da prijemnik odredi svoj položaj. Navedeni način određivanja položaja mjerenjem udaljenosti do barem 3 satelita naziva se trilateracija. Kasnije ćemo vidjeti da se zbog uvjeta o zajedničkom vremenu sustava ipak postavlja zahtjev na 4 satelita. Naime, uvjeti rada satelitske navigacije su: zajednički prostorni koordinatni sustav, zajednički vremenski okvir i ispunjene pretpostavke o pravocrtnom jednolikom širenju satelitskog signala brzinom svjetlosti u vakuumu. Ostaje još opisati na koji način prijemnik određuje koordinate satelita (1) i udaljenost (2).

(1) U navigacijskoj poruci signala nalaze se podaci o orbitalnoj putanji sa-



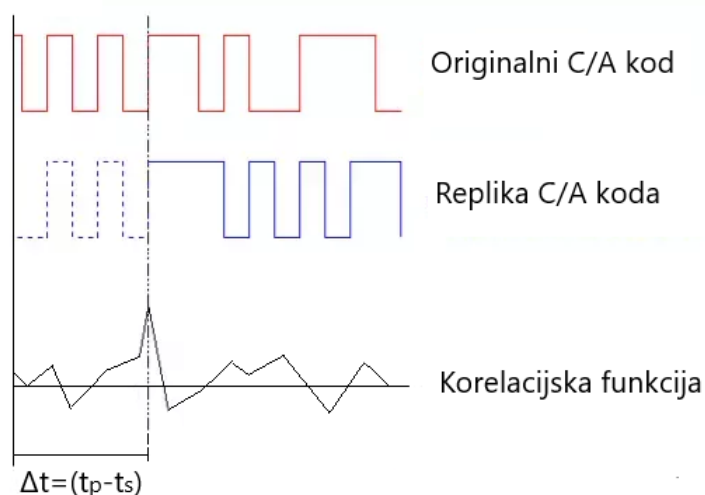
Slika 1.7: WGS84 koordinatni sustav

telita u trenutku odašiljanja signala. Na temelju podataka iz navigacijske poruke, satelitski navigacijski prijemnik određuje koordinate satelita u *WGS84 koordinatnom sustavu*. WGS84 je referentni koordinatni sustav GPS-a s ishodištem u središtu Zemljine mase. Os Z prolazi središtem sjevernog pola, os X definirana je težištem Zemlje i presjecištem ekvatora i nultog meridijana (meridijana koji prolazi gradićem Greenwich u Ujedinjenom Kraljevstvu), a os Y okomita je na osi X i Z i usmjerena je na istok [25].

(2) Neka je  $t_s$  trenutak odašiljanja signala sa satelita, a  $t_p$  trenutak primanja tog istog signala u prijemniku. Udaljenost od satelita u trenutku  $t_s$  i prijemnika u trenutku  $t_p$  prijemnik određuje na sljedeći način:

$$(t_p - t_s) \cdot c, \quad (1.4)$$

gdje je  $c$  brzina širanja signala. Za brzinu širenja signala uzima se brzina svjetlosti u vakuumu,  $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Prijemnik vrijeme širenja signala, tj.  $(t_p - t_s)$ , određuje na način da za svaki primljeni signal generira repliku C/A koda tog signala i vremenski je pomiče u kontroliranim koracima u odnosu na originalni C/A kod, provjeravajući u svakom koraku jednakost dviju kodnih sekvenci pomoću vrijednosti korelacijske funkcije (slika 1.8). Kada korelacijska funkcija dosegne maksimum kodovi su poravnati. Ukupan vremenski pomak do trenutaka poravnanja predstavlja



Slika 1.8: Poravnavanje C/A kodova

vrijeme potrebno signalu da stigne od satelitske do prijemnikove antene.

Označimo sa  $p$  udaljenost dobivenu na gornje opisan način,  $p = (t_p - t_s) \cdot c$ . Udaljenost  $p$  zove se *pseudoudaljenost* jer se ne podudara sa stvarnom udaljenosti od satelita do prijemnika, označimo ju s  $d$ . Odnos između udaljenosti je uvijek:  $d < p$ . Razlog tome je što i najmanja greška u satelitu, prijemniku ili mediju kroz koje se signal širi uzrokuje grešku pri mjerenju udaljenosti od satelita do prijemnika.

Naime, prvi uvjet koji je potreban da bi pseudoudaljenost predstavljala stvarnu udaljenost je savršeno sinkronizirani satovi u satelitu i prijemniku. Ekvivalentno, satovi u satelitu i prijemniku trebaju biti savršeno usklađeni s GPS vremenom. Usklađivanje na zajedničko vrijeme sustava u svemirskoj (satelitskoj) i kontrolnoj komponenti postiže se preciznim i skupim atomskim satovima. Korisnički prijemnici rade s jeftinim, ali netočnim kvarcnim satovima. Problem usklađivanja prijemnika na zajedničko vrijeme sustava rješava se definiranjem (jedinstvene, o satelitu neovisne) pogreške korisničkog sata kao nepoznanice navigacijskog problema  $\delta t_p$ , zajedno s nepoznatim koordinatama položaja. Odstupanje satelitskog sata od zajedničkog vremena sustava je zapisano u navigacijskoj poruci, označimo ga s  $\delta t_p$ . Uzimajući u obzir navedena odstupanja izraz za pseudoudaljenost postaje:

$$p = ((t_p + \delta t_p) - (t_s + \delta t_s)) \cdot c = (t_p - t_s) \cdot c + (\delta t_p - \delta t_s) \cdot c. \quad (1.5)$$

Prijemnik računajući udaljenost do još jednog satelita može ukloniti  $\delta t_p$ . To je razlog zašto se u određivanju položaja prijemnika postavlja zahtjev na 4 satelita.

Sljedeći uvjet koji treba biti ispunjen je pravocrtno širenje signala konstantnom brzinom  $c$ . Signal se od satelitske do prijemnikove antene 95% vremena nalazi u uvjetima vakuuma, a ostalih 5% širi se Zemljinom atmosferom [12]. Signali se u vakuumu šire pravocrtno brzinom  $c$ , no u atmosferi to nije slučaj. Atmosferu obzirom na utjecaj na širenje signala dijelimo na ionosferu i troposferu. Pod utjecajem ionosfere i troposfere signal se širi zakrivljenom putanjom s varijabilnom brzinom širenja, što uzrokuje greške pri računanju pseudoudaljenosti. Označimo da  $d_{trop}$  grešku nastalu pod utjecajem troposfere, a sa  $d_{ion}$  grešku nastalu pod utjecajem ionosfere. Uzimajući u obzir i ove greške te greške nastale zbog šuma prijemnika  $d_M$  i refleksije signala od objekte u blizini prijemnika  $d_N$  (engl. multipath), konačan izraz za pseudoudaljenost postaje:

$$p = (t_p - t_s) \cdot c + (\delta t_p - \delta t_s) \cdot c + d_{trop} + d_{ion} + d_M + d_N. \quad (1.6)$$

Neke od navedenih grešaka moguće je u potpunosti, a neke samo djelomično ukloniti. Grešku izazvanu troposferom nije moguće u potpunosti ukloniti zbog nepredvidivog sastava troposfere. U nastavku poglavlja opisuju se svojstva troposfere i način na koji troposfera utječe na širenje signala.

### 1.3 Obilježja troposfere

Najniži sloj atmosfere koji se proteže od Zemljine površine pa sve do otprilike 16 km nadmorske visine na ekvatoru i 8 km na polovima, zove se troposfera.<sup>2</sup> Zbog gravitacije koja drži većinu molekula zraka blizu Zemljine površine, troposfera je i najgušći od svih slojeva, sadržeći 75% atmosferske mase [23]. Troposfera se sastoji od suhog zraka i vodene pare.

Suhi zrak je mješavina plinova koji su jednoliko izmiješani. Volumni udjeli nekih plinova suhog zraka mogu se vidjeti u tablici 1.1.

Tablica 1.1: Sastav suhog zraka

Plin	Molarna masa (kg/mol)	Volumni udio (%)
Dušik	28.0134	78.084
Kisik	31.9988	20.9476
Argon	39.948	0.934
Ugljikov dioksid	44.00995	0.0314
Metan	20.183	0.0001818
Kripton	83.30	0.000114
Ksenon	131.30	0.0000087

Za razliku od suhog zraka, vodena para varira i prostorno i vremenski. Koncentracija vodene pare čini manje od 1% volumena zraka u polarnim i velikim pustinjanskim područjima, dok u područjima tropskih kišnih šuma može činiti i preko 4% volumena zraka [29]. Većina vodene pare se nalazi u najnižih 2 km troposfere [10].

Međunarodna standardna atmosfera (engl. International Standard Atmosphere) idealiziran je model atmosfere koji prikazuje srednje vrijednosti pritiska, temperature, gustoće i drugih parametara dobivene dugogodišnjim mjerenjima, od razine mora pa sve do neke određene nadmorske visine. Zadnji model je objavljen 1969. godine. Pretpostavljene vrijednosti parametara na razini mora prikazane su u tablici 1.2:

<sup>2</sup>Granice troposfere se razlikuju od područja do područja i nije ih moguće točno odrediti. Navedene visine se najčešće pojavljuju u literaturi.



Tablica 1.2: Vrijednost parametara na razini mora

Parametar	Pretpostavljena vrijednost
Temperatura	288.15 °K (15°C)
Tlak	1013.25 hPa
Gustoća	1.225 kg/m <sup>3</sup>
Brzina zvuka	340.294 m/s
Gravitacijska akceleracija	9.80665 m/s <sup>2</sup>

### Temperatura

Na slici 1.9 (lijevo) prikazana je promjena temperature s visinom u standardnoj atmosferi. Slika pokazuje da sve do tropopauze temperatura pada gotovo linearno, prosječno 6.5 °C po km. Na vrhu troposfere temperatura može dosegnuti i do 80 °C ispod nule. Tropopauza je prijelazni sloj između troposfere i stratosfere. Debljina tropopauze je različita od područja do područja, a kreće se između dvije stotine metara i nekoliko kilometara. U njoj se temperatura održava konstantnom. U stratosferi dolazi do blagog rasta temperature, otprilike 1°C po km.

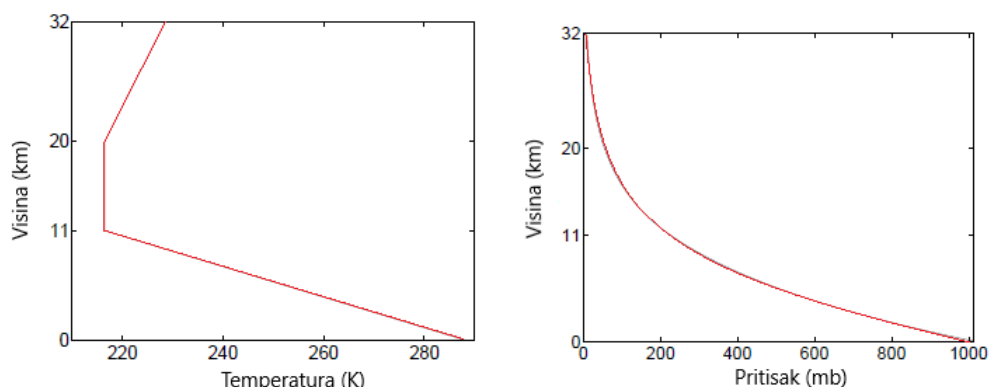
Po modelu standardne atmosfere [2] temperatura se može opisati sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 T_1(h) &= T_0 - 6.5 \cdot h, & 0 < h \leq 11 \\
 T_2(h) &= T_1(11), & 11 < h \leq 20 \\
 T_3(h) &= T_2(20) + h - 20, & 20 < h < 32
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

gdje je  $T_0$  temperatura zraka na razini mora [°C],  $h$  visina [km].

### Tlak zraka

Na slici 1.9 (desno) je prikazana promjena tlaka s visinom. U troposferi dolazi do naglog pada tlaka zraka, na visini tropopauze tlak zraka iznosi samo 300 mb. Iznad troposfere dolazi do blagog pada tlaka s visinom.



Slika 1.9: Promjena temperature i tlaka s visinom

Po modelu standardne atmosfere i tlak se može opisati sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 p_1(h) &= p_0 \left( \frac{T_0}{T_1(h)} \right)^{\frac{-g_0}{R_d * 6.5}}, & 0 < h \leq 11 \\
 p_2(h) &= p_1(11) e^{\frac{-g_0}{R_d T_1(11)}(h-11)}, & 11 < h \leq 20 \\
 p_3(h) &= p_2(20) \left( \frac{T_2(20)}{T_3(h)} \right)^{\frac{g_0}{R_d}}, & 20 < h < 32
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

gdje je  $p_0$  tlak na razini mora [hPa],  $h$  visina [km],  $g_0$  gravitacijska akceleracija na razini mora [ $m s^{-2}$ ],  $R_d = 287.06 \pm 0.001 m^2 s^{-2} K^{-1}$  specifična plinska konstanta suhog zraka.

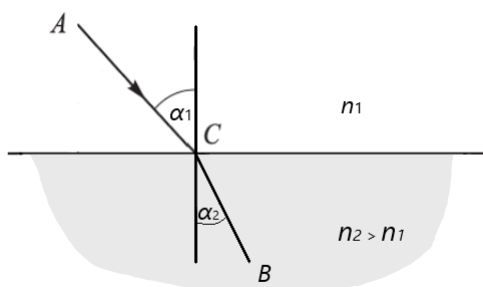
## 1.4 Troposfersko kašnjenje

Elektromagnetski valovi u vakuumu se šire pravocrtno brzinom svjetlosti  $c$ . No, u drugim medijima širenje elektromagnetskog vala se ne mora ponašati na opisan način. Općenito, širenje elektromagnetskog vala u promatranom mediju može se opisati indexom refrakcije.

*Index refrakcije*  $n$  je omjer brzine širenja vala u vakuumu i brzine širenja vala u promatranom mediju:

$$n = \frac{c}{v}, \tag{1.9}$$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti u vakuumu,  $v$  brzina širenja vala u promatranom mediju. Očito, ako je u promatranom mediju  $n = 1$  val se širi pravocrtno brzinom svjetlosti  $c$ , a ako je  $n > 1$  val se širi brzinom manjom od brzine svjetlosti  $c$ . Varijacija indexa refrakcije u promatranom mediju uzrokuje savijanje putanje signala. Širenje elektromagnetskog vala u medijima podliježe zakonima koji su posljedica Fermatovog principa. Fermatov princip glasi (1650): *Svjetlost (ili bilo koji drugi elektromagnetski val) koja se lomi ili reflektira giba se između dvije točke putanjom koja zahtjeva najkraće vrijeme* [13]. Iz Fermatovog principa odmah slijedi da se u homogenom sustavu ( $n$  je konstantan), val širi pravocrtno. Također, ako val prelazi iz medija indexa refrakcije  $n_1$  u medij indexa refrakcije  $n_2$  izabire takvu točku  $C$  da mu za put od točke  $A$  do točke  $B$  treba najmanje vremena (slika 1.10).

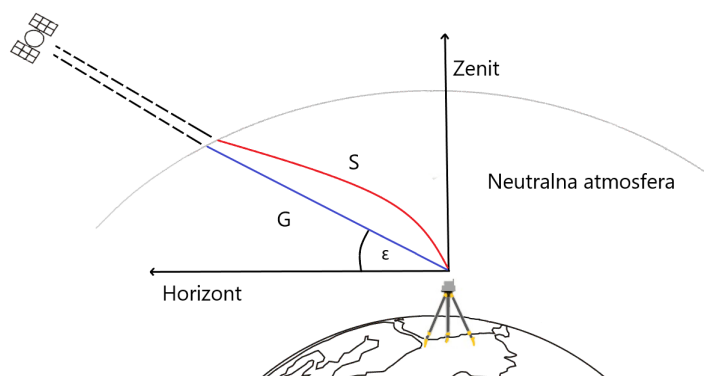


Slika 1.10: Refrakcija elektromagnetskog vala

Signal (elektromagnetski val) se 95% svog puta od satelita do prijemnika nalazi u uvjetima vakuuma, a ostalih 5% pogođen je različitim svojstima pojedinih dijelova atmosfere [12]. Atmosferu obzirom na širenje elektromagnetskog vala dijelimo na neutralnu atmosferu i ionosferu. U ionosferi kašnjenje signala nastaje zbog prisutnosti ioniziranih molekula plina. Ionosfera je disperzivan medij, što znači da index refrakcije ovisi o frekvenciji signala. Dvofrekvencijski GPS prijemnici kašnjenje uzrokovano ionosferom mogu izračunati mjereći vrlo male razlike u vremenu prijema na dvije različite frekvencije, a jednofrekvencijski na temelju koeficijenata za ionosfersko modeliranje sadržanih u navigacijskoj poruci signala. Za razliku od ionosfere, neutralna atmosfera nije disperzivna za frekvencije ispod  $30\text{MHz}$ . Posljedica toga je da su svi GPS signali u neutralnoj atmosferi jednako usporeni. Neutralna atmosfera sadrži troposferu, stratosferu i dio mezosfere. Kašnjenje u širenju signala kroz neutralnu atmosferu većinom je uzrokovano utjecajima troposfere. Stoga se u GPS terminologiji neutralna atmosfera često zamjenjuje s troposferom. Index refrakcije u troposferi ovisi o temperaturi, tlaku i vlažnosti. Vrijednost indexa refrakcije opada s

visinom i iznosi skoro 1 na visinama oko 40 km.

Pogledajmo sliku 1.11 Na slici su označene dvije putanje S i G. Putanja S predstavlja stvarnu putanju širenja signala kroz troposferu, tj. pod utjecajem promjenjivog indexa refrakcije, dok put G prikazuje put kojim bi se signal širio da je u troposferi index refrakcije  $n=1$ , tj. da su uvjeti u troposferi kao u vakuumu.



Slika 1.11: Širenje signala kroz neutralnu atmosferu

Neka je  $t_S$  vrijeme širenja signala duž zakrivljene putanje S, a  $t_G$  vrijeme širenja signala duž pravocrtne putanje G. Dodatno vrijeme širenja signala nastalo pod utjecajem troposfere iznosi:

$$t_{trop} = t_S - t_G. \quad (1.10)$$

Vrijeme širenja duž putanje S iznosi:

$$t_S = \int_S \frac{ds}{v(s)} = \frac{1}{c} \int_S n(s) ds, \quad (1.11)$$

a vrijeme širenja duž putanje G:

$$t_G = \frac{1}{c} \int_G dg. \quad (1.12)$$

Uvrštavajući u formulu 1.10 izraz za vrijeme širenja signala duž putanje S i G dobivamo:

$$t_{trop} = t_S - t_G = \frac{1}{c} \int_S n(s) ds - \frac{1}{c} \int_G dg. \quad (1.13)$$

Ekvivalentno, pogreška pri izračunu pseudoudaljenosti uzrokovana utjecajem troposfere na širenje signala iznosi:

$$d_{trop} = c \cdot t_{trop} = \int_S n(s) ds - \int_G dg. \quad (1.14)$$

Dodavanjem i oduzimanjem izraza  $\int_S ds$  desnoj strani formule 1.14 dobivamo:

$$\begin{aligned} d_{trop} &= \int_S n(s) ds - \int_G dg + \int_S ds - \int_S ds \\ &= \int_S (n(s) - 1) ds + \left[ \int_S ds - \int_G dg \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Prvi izraz s desne strane formule 1.15 je greška u mjerenju pseudoudaljenosti nastala zbog smanjenja brzine širenja signala kroz troposferu, a drugi izraz (u uglatim zgradama) je greška nastala zbog savijanja putanje širenja signala. Obje greške zajedničim imenom zovu se **troposfersko kašnjenje** ili troposferska refrakcija. Izraz u uglatim zgradama poznat je pod nazivom *geometrijska greška*. Označimo ga sa  $d_{geom}$ . Geometrijska greška ima značajan utjecaj tek za signale emitirane sa satelita pod elevacijskim kutom manjim od  $15^\circ$ . Može dosegnuti i do 50 cm za satelite s elevacijskim kutom manjim od  $3^\circ$ . Prema Mendesu [15] geometrijska greška može se aproksimirati izrazom koji ovisi samo o elevacijskom kutu satelita  $\epsilon$ :  $d_{geom} = a \exp(-\epsilon/b)$ , gdje je  $a = 2.256 \pm 0.0092$  m,  $b = 2.072 \pm 0.0054^\circ$ .

Budući da je index refrakcije  $n$  u troposferi jako malen, zamijenjuje se s refraktivnosti  $N = 10^6(n - 1)$ . Uvrštavanjem refraktivnosti u formulu 1.15 dobivamo novi izraz za troposfersko kašnjenje:

$$d_{trop} = 10^{-6} \int_S N(s) ds + d_{geom}. \quad (1.16)$$

Refraktivnost se može izraziti:

$$N = k_1 R_d \rho + \left[ k_2' \left( \frac{e}{T} \right) + k_3 \left( \frac{e}{T^2} \right) \right] Z_v^{-1}, \quad (1.17)$$

gdje su  $k_1, k_2'$  i  $k_3$  konstante dobivene empirijski (tablica 1.3),  $R_d$  specifična plinska konstanta suhog zraka,  $\rho$  totalna gustoća u troposferi,  $e$  parcijalni tlak vodene pare,  $T$  temperatura,  $Z_v^{-1}$  inverzni faktor kompresije vodene pare [3, 27]. Refraktivnost se dijeli na dvije komponente, hidrostatičku  $N_h = k_1 R_d \rho$  i nehidrostatičku (vlažnu)  $N_{nh} = \left[ k_2' \left( \frac{e}{T} \right) + k_3 \left( \frac{e}{T^2} \right) \right] Z_v^{-1}$ .

Tablica 1.3: Vrijednosti koeficijenata refraktivnosti

Izvor	$k_1$ ( $KhPa^{-1}$ )	$k'_2$ ( $KhPa^{-1}$ )	$k_3$ $10^5$ ( $K^2hPa^{-1}$ )
Boudouris, 1963	$77.59 \pm 0.08$	$24 \pm 11$	$3.75 \pm 0.03$
Smith i Weintraub, 1953	$77.61 \pm 0.01$	$24 \pm 9$	$3.75 \pm 0.03$
Thayer, 1974	$77.60 \pm 0.01$	$17 \pm 10$	$3.776 \pm 0.004$
Essen i Frome, 1951	77.624	16.4178	3.719

Uvrštavanjem u formulu za troposfersko kašnjenje dobiva se:

$$\begin{aligned}
 d_{trop} &= 10^{-6} \int_S N_h(s) ds + 10^{-6} \int_S N_{nh}(s) ds + d_{geom} \\
 &= d_h + d_{nh} + d_{geom},
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

gdje je  $d_h$  takozvano hidrostatičko kašnjenje, a  $d_{nh}$  nehidrostatičko (vlažno) kašnjenje. Integriranje gornjih izraza nije moguće jer ne znamo refraktivnost u svakoj točki duž puta S. Stoga, u većini GPS prijemnika za civilnu upotrebu troposfersko kašnjenje se aproksimira modelima koji za ulaz primaju parametre koji su dostupni u svakom trenutku. Hidrostatičko kašnjenje uzrokovano je suhim plinovima u atmosferi i može se modelirati s velikom točnošću koristeći površinska mjerenja. Kašnjenje varira od 2m do 20m i uzrokuje 90% ukupnog kašnjenja [12]. Ostatak ukupnog kašnjenja uzrokovano je vodenom parom u atmosferi. Varijabilnost vodene pare vremenski i prostorno otežava modeliranje nehidrostatičkog kašnjenja. Nehidrostatičko kašnjenje varira od 0.2m do 2m [12].

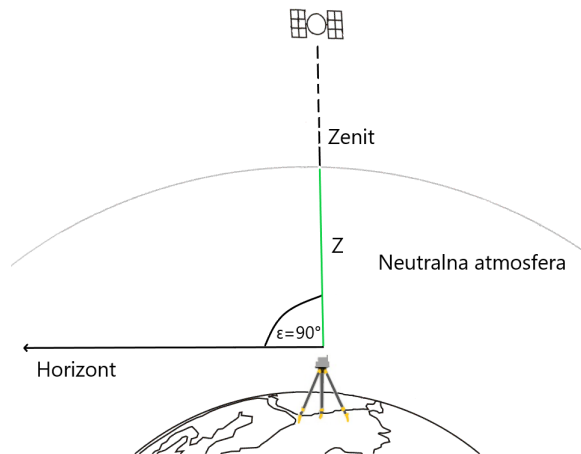
## Poglavlje 2

# Model troposferskog kašnjenja

Promotrimo slučaj kada signal dolazi sa satelita koji se nalazi u smjeru zenita, tj. pod elevacijskim kutom od  $90^\circ$  (slika 2.1). U tom slučaju, kao posljedica Fermatovog principa, u troposferi ne dolazi do savijanja putanje širenja signala, samo do smanjenja brzine širenja. Stoga izraz za troposfersko kašnjenje u smjeru zenita,  $d_{trop}^z$ , ne sadrži geometrijsku grešku:

$$d_{trop}^z = d_h^z + d_{nh}^z = 10^{-6} \int_Z N_h(z) dz + 10^{-6} \int_Z N_{nh}(z) dz, \quad (2.1)$$

gdje je  $d_h^z$  zenitno hidrostatičko kašnjenje, a  $d_{nh}^z$  zenitno nehidrostatičko kašnjenje.



Slika 2.1: Širenje signala u zenitnom smjeru

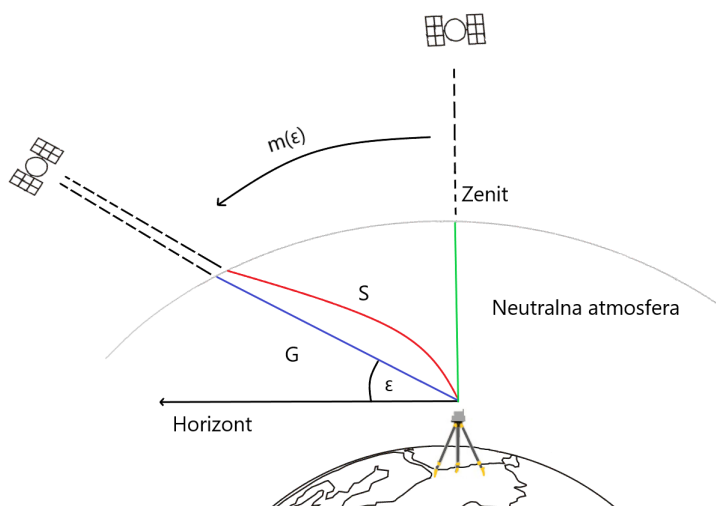
Primijetimo, signal odaslan sa satelita u zenitnom smjeru uvijek prijeđe kraći put u troposferi od signala odaslanog sa satelita koji je pod elevacijskim ku-

tom manjim od  $90^\circ$ . To je jedan od razloga zašto se u posljednjih nekoliko desetaka godina pri razvoju modela za troposfersko kašnjenje prvo razmatra razvoj modela u zenitnom smjeru. Drugi razlog je velik broj standardnih pretpostavki o vertikalnim profilima temperature, tlaka i vodene pare u troposferi.

Da bi se iz zenitnog troposferskog kašnjenja dobilo kašnjenje signala odaslano sa satelita pod elevacijskim kutom koristi se funkcija (engl. mapping function) općeg oblika:

$$m = \frac{d_{trop}}{d_{trop}^z}. \quad (2.2)$$

Dakle, funkcija 2.2 daje omjer troposferskog kašnjenja pod elevacijskim kutom i zenitnog troposferskog kašnjenja (slika 2.2). U posljednjih nekoliko desetaka godina i u razvoju modela za funkciju 2.2 posebno se razvijaju modeli za njezinu hidrostatičku i nehidrostatičku komponentu.



Slika 2.2: Preslikavanje zenitnog troposferskog kašnjenja na kašnjenje pod kutom

Uzevši u obzir sve navedeno, konačan izraz za troposfersko kašnjenje izgleda:

$$d_{trop} = m_h d_h^z + m_{nh} d_{nh}^z, \quad (2.3)$$

gdje je  $m_h$  hidrostatička komponenta funkcije 2.2,  $m_{nh}$  nehidrostatička komponenta funkcije 2.2. U daljnjem tekstu umjesto hidrostatička i nehidrostatička komponenta funkcije 2.2 koristimo skraćeno hidrostatička i nehidrostatička funkcija.



U nastavku poglavlja dani su najpoznatiji modeli za zenitno troposfersko kašnjenje i za hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju.

## 2.1 Zenitno hidrostatičko kašnjenje

Uz pretpostavku da plinovi u troposferi podliježu zakonu idealnog plina i da su u hidrostatičkoj ravnoteži zenitno hidrostatičko kašnjenje može se modelirati sa milimetarskom točnošću.

*Zakon idealnog plina za i-ti plin zraka:*

$$p_i = \rho_i R_i T, \quad (2.4)$$

gdje je  $p_i$  tlak i-tog plina,  $\rho_i$  gustoća i-tog plina,  $R_i$  plinska konstanta i-tog plina,  $T$  temperatura [10].

*Hidrostatička ravnoteža* predstavlja povezanost tlaka zraka  $p$  i gustoće  $\rho$ :

$$dp = -\rho g dh, \quad (2.5)$$

gdje je  $g$  gravitacijska akceleracija,  $h$  visina [10].

U nastavku je dano nekoliko najpoznatijih modela za zenitno hidrostatičko kašnjenje. Iako svaki od modela pruža zadovoljavajuću točnost praksa je pokazala da je Saastamoinen-ov model generalno bolji od ostalih.

### Saastamoinen-ov model

Uz gornje pretpostavke, tj. da su suhi plinovi u troposferi idealni i da su u hidrostatičkoj ravnoteži izraz za hidrostatičku refraktivnost postaje:

$$N_h = k_1 R_d \rho = -k_1 R_d \frac{dp}{g dz}. \quad (2.6)$$

Saastamoinen gravitacijsku akceleraciju  $g$  tretira kao srednju gravitacijsku akceleraciju  $g_m$  te daje sljedeći izraz [21]:

$$g_m = 9.784 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \left( 1 - 0.00266 \cos(2\phi) - 0.00028 \left[ \frac{1}{km} \right] z \right), \quad (2.7)$$

gdje je  $z$  visina antene prijemnika iznad razine mora [km],  $\phi$  elipsoidna širina prijemnika.

Za konstantu  $k_1$  odabire konstantu koju su 1951. iznijeli Essen i Froome [4] (tablica 1.3), a za  $R_d = 287.04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ .

Integriranjem izvedene hidrostatičke refraktivnosti duž puta u zenitnom smjeru dobiva se sljedeći izraz za  $d_h^z$  [22]:

$$d_h^z = \frac{0.002277 \left[ \frac{\text{m}}{\text{hPa}} \right] p_0}{1 - 0.00266 \cos(2\phi) - 0.00028 \left[ \frac{1}{\text{km}} \right] z}, \quad (2.8)$$

gdje je  $p_0$  tlak na anteni prijemnika [hPa].

### Davis et al. model

Davis, Herring, Shapiro, Rogers i Elgered dali su sljedeći model za zenitno hidrostatičko kašnjenje [3], koji se od Saastamoinen-ovog modela razlikuje samo u odabiru konstante  $k_1$ :

$$d_h^z = \frac{0.0022768 \left[ \frac{\text{m}}{\text{hPa}} \right] p_0}{1 - 0.00266 \cos(2\phi) - 0.00028 \left[ \frac{1}{\text{km}} \right] z}. \quad (2.9)$$

Za konstantu  $k_1$  odabrali su konstantu koju je 1974. iznio Thayer [27](tablica 1.3).

### Hopfield-in model

Također, uz pretpostavku hidrostatičke ravnoteže, idealnih plinova u troposferi te uz dodatne pretpostavke konstantne gravitacijske akceleracije  $g = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$  i linearnog pada temperature od  $6.81^\circ \text{C}$  po km s visinom Hopfield daje sljedeći izraz za hidrostatičku refraktivnost [7]:

$$N_h = k_1 \frac{p_0}{T_0} \left( 1 - \frac{z}{z_h} \right)^4, \quad (2.10)$$

gdje je  $p_0$  tlak na anteni prijemnika [hPa],  $T_0$  temperatura na anteni prijemnika [K],  $z$  visina antene prijemnika iznad razine mora [m],  $z_h$  efektivna visina hidrostatičke komponente ( $N_h = 0$ ) dana sljedećim izrazom:

$$z_h = 40136 [m] + 148.72 \left[ \frac{\text{m}}{^\circ \text{C}} \right] t_0, \quad (2.11)$$

gdje je  $t_0$  temperatura na anteni prijemnika [ $^\circ \text{C}$ ].

Za konstantu  $k_1$  odabire konstantu koju su 1953. iznijeli Smith i Weintraub [24] (tablica 1.3).

Integriranjem izvedene hidrostatičke refraktivnosti duž puta u zenitnom smjeru dobiva se sljedeći izraz za  $d_h^z$  [22]:

$$d_h^z = \left( 0.62291 \left[ \frac{mK}{hPa} \right] \frac{1}{T_0} + 0.0023081 \left[ \frac{m}{hPa} \right] \right) p_0. \quad (2.12)$$

## 2.2 Zenitno nehidrostatičko kašnjenje

### Saastamoinen-ov model

Uz pretpostavku linearnog pada temperature s visinom i pada tlaka vodene pare s visinom Askne i Nordius [1] su 1987. godine iznijeli sljedeći izraz za tlak vodene pare:

$$e = e_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{(\lambda+1)g}{R_d\beta}}, \quad (2.13)$$

gdje je  $T$  temperatura [K],  $T_0$  temperatura na površini [K],  $g$  gravitacijska akceleracija,  $\beta$  vertikalni gradijent temperature,  $\lambda$  vertikalni gradijent vodene pare.

Navedeni izraz za tlak vodene pare Saastamoinen uvrštava u sljedeći izraz za nehidrostatičku refraktivnost:

$$N_{nh} = k'_2 \left( \frac{e}{T} \right) + k_3 \left( \frac{e}{T^2} \right) \quad (2.14)$$

s parametrima  $k'_2 = 16.417872 \text{ KhPa}^{-1}$ ,  $k_3 = 371900 \text{ K}^2\text{hPa}^{-1}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $R_d = 287.04 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$ ,  $\beta = 0.0062 \text{ Km}^{-1}$ .

Integriranjem izraza za refraktivnost duž puta u zenitnom smjeru dobiva se sljedeći izraz za  $d_{nh}^z$  [22]:

$$d_{nh}^z = 0.002277 \left( \frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) e_0. \quad (2.15)$$

### Hopfield-in model

Izraz za nehidrostatičku refraktivnost koju Hopfield koristi za model zenitnog nehidrostatičkog kašnjenja jako je sličan izrazu za hidrostatičku refraktivnost [7]:

$$N_{nh} = 370100 \left[ \frac{K^2}{hPa} \right] \frac{e_0}{T_0^2} \left( 1 - \frac{z}{z_{nh}} \right)^4, \quad (2.16)$$

gdje je  $e_0$  parcijalni tlak vodene pare na anteni prijemnika [hPa],  $T_0$  temperatura na anteni prijemnika [K],  $z$  visina prijemnika iznad razine mora [m],  $z_{nh}$  efektivna visina nehidrostatičke komponente dana sljedećim izrazom:

$$z_{nh} = 7508 [m] + 0.002421 [m] \exp\left(\frac{t_0}{22.90 [^{\circ}C]}\right), \quad (2.17)$$

gdje je  $t_0$  temperatura na anteni prijemnika [ $^{\circ}C$ ].

Integriranjem izraza za refraktivnost duž puta u zenitnom smjeru dobiva se sljedeći izraz za  $d_{nh}^z$  [22]:

$$d_{nh}^z = \left( 555.7 \left[ \frac{mK^2}{hPa} \right] + 1.792 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{mK^2}{hPa} \right] \exp\left(\frac{t_0}{22.90 [^{\circ}C]}\right) \right) \frac{e_0}{T_0^2}. \quad (2.18)$$

### Ifadis-ov model

Ifadis je iznio nekoliko modela za zenitno nehidrostatičko kašnjenje. Svi modeli rezultat su regresijske analize na ogromnom skupu podataka iz radiosonde i svi modeli bazirani su na činjenici da postoji slaba linearna regresija između zenitnog nehidrostatičkog kašnjenja i površinskih meteoroloških parametara.

Jedan njegov model za zenitno nehidrostatičko kašnjenje [22]:

$$d_{nh}^z = 0.00554[m] - 0.88 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{m}{hPa} \right] (p_0 - 1000) + 0.272 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{m}{hPa} \right] e_0 + 2.771 \left[ \frac{m^{\circ}C}{hPa} \right] \left( \frac{e_0}{T_0} \right), \quad (2.19)$$

gdje je  $p_0$  tlak na anteni prijemnika [hPa],  $e_0$  tlak vodene pare na anteni prijemnika [hPa],  $T_0$  temperatura na anteni prijemnika [K].

## 2.3 Hidrostatička i nehidrostatička funkcija

Postoji velik broj modela za hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju. Mnogi od njih ignoriraju geometrijsku grešku i imaju slabe performanse za elevacijske kutove manje od  $15^\circ$ . Zbog toga se u većini nedavno razvijenih modela za troposfersko kašnjenje za funkciju (2.2) koriste funkcije izražene u obliku verižnih razlomaka kojima je moguće uzeti u obzir i geometrijsku grešku i odvojiti hidrostatičku i nehidrostatičku komponentu. U tu grupu spadaju Marini i Murray, Chao, Davis et al., Ifadis, Herring i Niell funkcije [10].

Funkcije izražene u obliku verižnih razlomaka pokazale su se bolje od ostalih za male elevacijske kutove, no istovremeno zadržavajući potrebnu točnost za elevacijske kutove blizu zenita. Upotreba ovog tipa funkcija u razvoju modela za funkciju (2.2) potječe od Marini-ja [14], koji je 1972. iznio sljedeći model:

$$m(\epsilon) = \frac{1}{\sin(\epsilon) + \frac{a}{\sin(\epsilon) + \frac{b}{\sin(\epsilon) + \dots}}}, \quad (2.20)$$

gdje su  $a$ ,  $b$  konstante ili linearne funkcije koje ovise o meteorološkim parametrima na anteni prijemnika, visini tropopauze i vertikalnim gradijentima u troposferi. U nastavku su opisani najpoznatiji modeli za hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju nastali malim modifikacijama modela (2.20).

### Davis et al.

Davis, Herring, Shapiro, Rogers i Elgered dali su izraz samo za hidrostatičku funkciju[3]:

$$m_h(\epsilon) = \frac{1}{\sin(\epsilon) + \frac{a_h}{\tan(\epsilon) + \frac{b_h}{\sin(\epsilon) + c_h}}}, \quad (2.21)$$

sa sljedećim izrazima za  $a_h$ ,  $b_h$ ,  $c_h$ :

$$\begin{aligned}
a_h &= 0.001185[1 + 0.6071 \cdot 10^{-4}(P_0 - 1000) - 0.1471 \cdot 10^{-3}e_0 \\
&\quad + 0.3072 \cdot 10^{-2}(T_0 - 20) + 0.1965 \cdot 10^{-1}(\beta - 6.5) \\
&\quad - 0.5645 \cdot 10^{-2}(h_T - 11.231)], \\
b_h &= 0.001144[1 + 0.1164 \cdot 10^{-4}(P_0 - 1000) + 0.2795 \cdot 10^{-3}e_0 \\
&\quad + 0.3109 \cdot 10^{-2}(T_0 - 20) + 0.3038 \cdot 10^{-1}(\beta - 6.5) \\
&\quad - 0.1217 \cdot 10^{-1}(h_T - 11.231)], \\
c_h &= -0.0090,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

gdje su  $p_0$  tlak na anteni prijemnika [hPa],  $e_0$  parcijalni tlak vodene para na anteni prijemnika [hPa],  $T_0$  temperatura na anteni prijemnika [ $^{\circ}C$ ],  $\beta$  temperaturni gradijent u troposferi ( $K km^{-1}$ ),  $h_T$  visina tropopauze [km].

Zamjena jednog izraza  $\sin(\epsilon)$  u formuli (2.20) s izrazom  $\tan(\epsilon)$  omogućuje da navedena hidrostatička funkcija ima vrijednost 1 u zenitu, no zamjena istovremeno uzrokuje greške od 1 do 2 mm za elevacijske kutove između  $20^{\circ}$  i  $60^{\circ}$  [10]. Minimalni elevacijski kut,  $\epsilon_{min}$ , za koji Davis et al. hidrostatička funkcija daje zadovoljavajuće rezultate je  $5^{\circ}$  [3, 15].

Ifadis, Herring i Niell u svojim modelima za funkciju (2.2) koriste sljedeći oblik:

$$m(\epsilon) = \frac{1 + \frac{a}{b}}{\sin(\epsilon) + \frac{1 + \frac{a}{b}}{a}}, \tag{2.23}$$

$$\frac{1 + \frac{a}{b}}{\sin(\epsilon) + \frac{b}{\sin(\epsilon) + c}}$$

gdje su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  konstante ili linearne funkcije.

### Ifadis

Ifadis je na temelju praćenja stvarnih vremenskih uvjeta na različitim stanicama u svijetu došao do sljedećih izraza za koeficijente hidrostatičke funkcije [8]:

$$\begin{aligned}
 a_h &= 0.1237 \cdot 10^{-2} + 0.1316 \cdot 10^{-6}(P_0 - 1000) + 0.8057 \cdot 10^{-5} \sqrt{e_0} \\
 &\quad + 0.1378 \cdot 10^{-5}(T_0 - 15), \\
 b_h &= 0.3333 \cdot 10^{-2} + 0.1946 \cdot 10^{-6}(P_0 - 1000) + 0.1747 \cdot 10^{-6} \sqrt{e_0} \\
 &\quad + 0.1040 \cdot 10^{-6}(T_0 - 15), \\
 c_h &= 0.078
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

i nehidrostatičke funkcije:

$$\begin{aligned}
 a_{nh} &= 0.5236 \cdot 10^{-3} + 0.2471 \cdot 10^{-6}(P_0 - 1000) - 0.1328 \cdot 10^{-4} \sqrt{e_0} \\
 &\quad + 0.1724 \cdot 10^{-6}(T_0 - 15), \\
 b_{nh} &= 0.1705 \cdot 10^{-2} + 0.7384 \cdot 10^{-6}(P_0 - 1000) + 0.2147 \cdot 10^{-4} \sqrt{e_0} \\
 &\quad + 0.3767 \cdot 10^{-6}(T_0 - 15), \\
 c_{nh} &= 0.05917,
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

gdje su  $p_0$  tlak na anteni prijemnika [hPa],  $e_0$  parcijalni tlak vodene pare na anteni prijemnika [hPa],  $T_0$  temperatura na anteni prijemnika. Ifadis hidrostatička i nehidrostatička funkcija daju zadovoljavajuću točnost za  $\epsilon_{min} = 2^\circ$  [15].

### Herring

Kao i Ifadis, Herring je koeficijente za hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju dobio analizirajući prikupljene podatke sa stanica u SAD-u [6].

Koeficijenti za hidrostatičku funkciju:

$$\begin{aligned}
 a_h &= [1.2320 - 0.0139 \cos(\phi) - 0.0209h_0 + 0.00215(T_0 - 10)]10^{-3}, \\
 b_h &= [3.1612 - 0.1600 \cos(\phi) - 0.0331h_0 + 0.00206(T_0 - 10)]10^{-3}, \\
 c_h &= [71.244 - 4.293 \cos(\phi) - 0.149h_0 - 0.0021(T_0 - 10)]10^{-3}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

i nehidrostatičku funkciju:

$$\begin{aligned}
 a_{nh} &= [0.583 - 0.011 \cos(\phi) - 0.052h_0 + 0.0014(T_0 - 10)]10^{-3}, \\
 b_{nh} &= [1.402 - 0.102 \cos(\phi) - 0.101h_0 + 0.0020(T_0 - 10)]10^{-3}, \\
 c_{nh} &= [45.85 - 1.91 \cos(\phi) - 1.29h_0 + 0.015(T_0 - 10)]10^{-3},
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

gdje su  $\phi$  geografska širina prijemnika,  $h_0$  visina antene prijemnika [km],  $T_0$  temperatura na anteni prijemnika [ $^\circ C$ ]. Herring hidrostatička i nehidrostatička funkcija daju zadovoljavajuću točnost za  $\epsilon_{min} = 3^\circ$  [15].

**Niell**

Arthur Niell konstruirao je model za hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju koji ne ovisi o meteorološkim podacima kao svi dotadašnji modeli. Niellova hidrostatička funkcija ovisi o danu u godini ( $t$ ), geografskoj širini ( $\phi$ ) i visini ( $H$ ), a nehidrostatička funkcija samo o geografskoj širini. Nehidrostatička funkcija varira samo s geografskom širinom jer se vodena para ne nalazi u hidrostatičkoj ravnoteži i raspodjela vodene pare ne može se odrediti iz visine stanice. Niell je predložio sljedeće izraze za hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju:

$$m_h(\epsilon, \phi, t, H) = \frac{1 + \frac{a_h(\phi, t)}{b_h(\phi, t)}}{1 + \frac{c_h(\phi, t)}{1 + \frac{a_h(\phi, t)}{b_h(\phi, t)}}} \cdot \frac{\sin(\epsilon) + \frac{a_h(\phi, t)}{\sin(\epsilon) + \frac{b_h(\phi, t)}{\sin(\epsilon) + c_h(\phi, t)}}}{\sin(\epsilon) + \frac{b_h(\phi, t)}{\sin(\epsilon) + c_h(\phi, t)}}$$

$$+ \underbrace{\left[ \frac{1}{\sin(\epsilon)} - \frac{1 + \frac{a_{ht}}{b_{ht}}}{\sin(\epsilon) + \frac{a_{ht}}{\sin(\epsilon) + \frac{b_{ht}}{\sin(\epsilon) + c_{ht}}}} \right]}_{\Delta m_h(\epsilon)} \frac{H}{1000} \quad (2.28)$$

$$m_{nh}(\epsilon, \phi) = \frac{1 + \frac{a_{nh}(\phi)}{b_{nh}(\phi)}}{1 + \frac{c_{nh}(\phi)}{1 + \frac{a_{nh}(\phi)}{b_{nh}(\phi)}}} \cdot \frac{\sin(\epsilon) + \frac{a_{nh}(\phi)}{\sin(\epsilon) + \frac{b_{nh}(\phi)}{\sin(\epsilon) + c_{nh}(\phi)}}}{\sin(\epsilon) + \frac{b_{nh}(\phi)}{\sin(\epsilon) + c_{nh}(\phi)}}, \quad (2.29)$$

gdje su  $a_{ht} = 2.53 \cdot 10^{-5}$ ,  $b_{ht} = 5.49 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_{ht} = 1.14 \cdot 10^{-3}$ . Zbog ovisnosti hidrostatičke funkcije o visini ona sadrži i tzv. visinsku korekciju,  $\Delta m_h(\epsilon)$ .

Prateći put zrake svjetlosti na devet elevacijskih kutova između  $3^\circ$  i  $90^\circ$  za svaki



od devet profila temperature i relativne vlažnosti standardne atmosfere, jedan za sjevernu geografsku širinu od  $15^\circ$  (za cijelu godinu) te po dva za sjeverne geografske širine od  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  (za mjesece siječanj i srpanj), Niell je došao do srednjih vrijednosti koeficijenata za navedene geografske širine, prikazane u tablici 2.1. Uz pretpostavku da su sjeverna i južna polutka antisimetrične u vremenu, tj. da je sezonsko ponašanje isto, vrijednost hidrostaticke i nehidrostaticke funkcije možemo izračunati za svaku geografsku širinu.

Koeficijenti  $a_h$ ,  $b_h$  i  $c_h$  izračunaju se pomoću tablice na sljedeći način:

- za  $15^\circ \leq |\phi| \leq 75^\circ$  postupkom interpolacije

$$p_h(\phi, t) = p_h^{avg}(\phi_i) + (p_h^{avg}(\phi_{i+1}) - p_h^{avg}(\phi_i)) \frac{\phi - \phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_i} - \left[ p_h^{amp}(\phi_i) + (p_h^{amp}(\phi_{i+1}) - p_h^{amp}(\phi_i)) \frac{\phi - \phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_i} \right] \cos \left( 2\pi \frac{t - t_0}{365.25} \right), \quad (2.30)$$

- za  $|\phi| < 15^\circ$

$$p_h(\phi, t) = p_h^{avg}(15^\circ) - p_h^{amp}(15^\circ) \cos \left( 2\pi \frac{t - t_0}{365.25} \right), \quad (2.31)$$

- za  $|\phi| > 75^\circ$

$$p_h(\phi, t) = p_h^{avg}(75^\circ) - p_h^{amp}(75^\circ) \cos \left( 2\pi \frac{t - t_0}{365.25} \right), \quad (2.32)$$

gdje je  $t$  dan u godini,  $\phi$  geografska širina stanice,  $t_0 = 28$  ako je  $\phi$  sjeverna geografska širina, a  $t_0 = 211$  ako je južna geografska širina,  $i$  je najveći index u tablici za kojeg vrijedi  $\phi_i \leq |\phi|$ .

I koeficijenti  $a_{nh}$ ,  $b_{nh}$  i  $c_{nh}$  izračunaju se pomoću tablice:

- za  $15^\circ \leq |\phi| \leq 75^\circ$  postupkom interpolacije

$$p_{nh}(\phi) = p_{nh}^{avg}(\phi_i) + (p_{nh}^{avg}(\phi_{i+1}) - p_{nh}^{avg}(\phi_i)) \frac{\phi - \phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_i}, \quad (2.33)$$

- za  $|\phi| < 15^\circ$

$$p_{nh}(\phi) = p_{nh}^{avg}(15^\circ), \quad (2.34)$$

- za  $|\phi| > 75^\circ$

$$p_{nh}(\phi) = p_{nh}^{avg}(75^\circ), \quad (2.35)$$

gdje je  $\phi$  geografska širina stanice,  $i$  najveći index u tablici za kojeg vrijedi  $\phi_i \leq |\phi|$ . Niell hidrostatička i nehidrostatička funkcija daju zadovoljavajuću točnost za  $\epsilon_{min} = 3^\circ$  [17].

Tablica 2.1: Vrijednost parametara Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije

	$\phi_1 = 15^\circ$	$\phi_2 = 30^\circ$	$\phi_3 = 45^\circ$	$\phi_4 = 60^\circ$	$\phi_5 = 75^\circ$
$a_h^{avg} \cdot 10^{-3}$	1.2769934	1.2683230	1.2465397	1.2196049	1.2045996
$b_h^{avg} \cdot 10^{-3}$	2.9153695	2.9152299	2.9288445	2.9022565	2.9024912
$c_h^{avg} \cdot 10^{-3}$	62.610505	62.837393	63.721774	63.824265	64.258455
$a_h^{amp} \cdot 10^{-5}$	0.0	1.2709626	2.6523662	3.4000452	4.1202191
$b_h^{amp} \cdot 10^{-5}$	0.0	2.1414979	3.0160779	7.2562722	11.723375
$c_h^{amp} \cdot 10^{-5}$	0.0	9.0128400	4.3497037	84.795348	170.37206
$a_{nh}^{avg} \cdot 10^{-4}$	5.8021897	5.6794847	5.8118019	5.9727542	6.1641693
$b_{nh}^{avg} \cdot 10^{-3}$	1.4275268	1.5138625	1.4572752	1.5007428	1.7599082
$c_{nh}^{avg} \cdot 10^{-2}$	4.3472961	4.6729510	4.3908931	4.4626982	5.4736038

## Poglavlje 3

# Matematička obilježja Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije

Budući da su brojnici i nazivnici razlomaka Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije napisani u obliku verižnih razlomaka, na početku poglavlja, predstavljena su opća obilježja verižnih razlomaka te najpoznatiji algoritmi za njihovo izvrednjavanje. Na kraju je prikazana kratka analiza Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije.

### 3.1 Verižni razlomci

Općenito, verižni razlomak ima sljedeći oblik:

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}, \quad (3.1)$$

gdje koeficijenti  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  i  $b_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  mogu biti brojevi (realni ili kompleksni), funkcije, matrice itd. Verižni razlomak kojemu su svi  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  jednaki 1 zove se *jednostavni verižni razlomak*.

Alternativniji zapisi verižnog razlomka

$$R = \left[ b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots \right], \quad R = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots, \quad (3.2)$$

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots$$

gdje se  $b_0$  zove nulta komponenta, a  $\frac{a_n}{b_n}$  n-ta komponenta verižnog razlomka.

Za svaki verižni razlomak možemo promatrati niz elemenata  $R_n$ :

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots \frac{a_n}{b_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

$R_n$  nazivamo n-ta konvergenta verižnog razlomka i možemo ju prikazati kao racionalan broj  $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ . Verižni razlomak je *konačan* ako je njegov niz elemenata (3.3) konačan i u tom slučaju posljednji element niza predstavlja vrijednost verižnog razlomka. S druge strane, kod *beskonačnog* verižnog razlomka niz elemenata (3.3) je beskonačan i ako postoji vrijednost verižnog razlomka onda se ona definira kao

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n. \quad (3.4)$$

Verižni razlomci mogu se svesti na oblik u kojemu su svi  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  ili svi  $b_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  jednaki 1 [20]. To se postiže primjenom dokazane tvrdnje da računanjem verižnog razlomka

$$R' = b_0 + \frac{\omega_0 \omega_1 a_1}{\omega_1 b_1 +} \frac{\omega_1 \omega_2 a_2}{\omega_2 b_2 +} \frac{\omega_2 \omega_3 a_3}{\omega_3 b_3 +} \dots, \quad (3.5)$$

gdje su  $\omega_k$ ,  $k \geq 1$  proizvoljni brojevi različiti od 0,  $\omega_{-1} = \omega_0 = 1$ , dobije se ista vrijednost R kao u (3.2).

Svedimo verižni razlomak R u ekvivalentan verižni razlomak kojemu su svi koeficijenti  $a_i$  jednaki 1. Pretpostavimo da su  $a_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Izaberimo  $\omega_k$ ,  $k \geq 1$  tako da vrijedi

$$\omega_1 a_1 = 1, \quad \omega_1 \omega_2 a_2 = 1, \quad \dots, \quad \omega_{k-1} \omega_k a_k = 1, \quad \dots \quad (3.6)$$

Tada imamo

$$\omega_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\omega_1 a_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{\omega_2 a_3} = \frac{a_2}{a_1 a_3}, \quad \dots \quad (3.7)$$

odnosno općenito

$$\omega_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}, \quad \omega_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}}. \quad (3.8)$$

Uvrštavanjem izraza za  $\omega_k$  u (3.5) dobili smo verižni razlomak kojemu su svi  $a_i$  jednaki 1

$$R' = b_0 + \frac{1}{b'_1 +} \frac{1}{b'_2 +} \frac{1}{b'_3 +} \cdots, \quad (3.9)$$

gdje su

$$b'_k = \omega_k b_k, \quad k \geq 1. \quad (3.10)$$

Isto tako, verižni razlomak R možemo svesti na ekvivalentan verižni razlomak kojemu su svi  $b_j$  jednaki 1. Pretpostavimo da su  $b_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Izaberimo  $\omega_k$ ,  $k \geq 1$  tako da vrijedi

$$\omega_1 b_1 = 1, \quad \omega_2 b_2 = 1, \quad \dots, \quad \omega_k b_k = 1, \quad \dots \quad (3.11)$$

Tada imamo

$$\omega_k = \frac{1}{b_k}. \quad (3.12)$$

Uvrštavanjem izraza za  $\omega_k$  u (3.5) dobili smo verižni razlomak kojemu su svi  $b_j$  jednaki 1

$$R' = b_0 + \frac{a'_1}{1+} \frac{a'_2}{1+} \frac{a'_3}{1+} \cdots, \quad (3.13)$$

gdje su

$$a'_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad a'_k = \frac{a_k}{b_{k-1} b_k} \quad k \geq 2. \quad (3.14)$$

Za dokazivanje tvrdnji vezanih uz verižne razlomke ponekad je zgodno napisati ih u Eulerovoj formi. Eulerova forma verižnih razlomak ima oblik

$$R' = b_0 + \frac{\alpha_1}{1+} \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_2)+} \frac{\alpha_3}{(1 - \alpha_3)+} \cdots \quad (3.15)$$

Verižni razlomak se može svesti na Eulerovu formu ako su svi  $Q_k \neq 0$ ,  $k \geq 1$  [20]. Tada se koeficijenti  $\alpha_k$  dobiju na sljedeći način

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{Q_1}, \quad \alpha_k = \frac{Q_{k-2}}{Q_k} a_k, \quad k \geq 2. \quad (3.16)$$

**Teorem 3.1.1.** *Neka je  $R$  verižni razlomak s koeficijentima kao u (3.1) te neka su  $P_n, Q_n, n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  brojevi za koje vrijedi*

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$$

*i*

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{aligned} \quad n \geq 1. \tag{3.17}$$

*Neka je  $N + 1$  broj konvergenti verižnog razlomka  $R$ . Za beskonačne verižne razlomke  $N + 1 = \infty$ . Razlomak  $\frac{P_n}{Q_n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$  je  $n$ -ta konvergenta verižnog razlomka  $R$ .*

*Dokaz.* Teorem se dokazuje matematičkom indukcijom po  $n$ . Pretpostavimo da je  $N \geq 1$ . Za  $N = 0$  jedina konvergenta verižnog razlomka je 0-ta konvergenta  $R_0$  za koju je tvrdnja trivijalno istinita

$$R_0 = b_0 = \frac{P_0}{Q_0}, \tag{3.18}$$

tj. razlomak  $\frac{P_0}{Q_0}$  je očito 0-ta konvergenta,  $R_0$ , verižnog razlomka  $R$ .

Dokažimo slučaj za  $n=1$ .

$$R_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}. \tag{3.19}$$

Uvrštavanjem (3.17) u (3.19) dobivamo

$$R_1 = \frac{b_1 P_0 + a_1 P_{-1}}{b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}} = \frac{P_1}{Q_1}. \tag{3.20}$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki  $n < N$ , tj. da vrijedi

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}}. \tag{3.21}$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za  $n + 1 \leq N$ . Očito, konvergenta  $R_{n+1}$  se dobije iz konvergente  $R_n$  zamjenom koeficijenta  $b_n$  s  $b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ , što s pretpostavkom indukcije

daje

$$\begin{aligned}
 R_{n+1} &= \frac{(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}} = \frac{b_{n+1}(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1}(b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) + a_{n+1} Q_{n-1}} \\
 &= \frac{b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ , odnosno za sve  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$   $\frac{P_n}{Q_n}$  je  $n$ -ta konvergenta verižnog razlomka  $R$ .

□

Primjenom rekurzivnih izraza za  $P_n, Q_n$  lako se za  $n \geq 1$  izvede

$$R_n - R_{n-1} = (-1)^{n+1} \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_1}{Q_n Q_{n-1}} \tag{3.23}$$

i za  $n \geq 2$

$$R_n - R_{n-2} = (-1)^n \frac{b_n a_{n-1} \cdots a_1}{Q_n Q_{n-2}}. \tag{3.24}$$

Pomoću (3.23) dokaže se sljedeći teorem [20].

**Teorem 3.1.2.** *Ako su  $a_k, b_k > 0$  tada vrijede nejednakosti*

$$\begin{aligned}
 R_1 &> R_3 > \cdots > R_{2k-1} > \cdots, \\
 R_0 &< R_2 < \cdots < R_{2k} < \cdots
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

i  $R_{2m-1} > R_{2k}$  za svako  $m$  i  $k$ .

Korištenjem izraza (3.16) i rekurzivnom primjenom (3.23) dobiva se sljedeći izraz za  $R_n$

$$R_n = b_0 + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1. \tag{3.26}$$

Uvrštavanjem izraza za  $R_n$  u (3.4) dobije se

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = b_0 + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1. \quad (3.27)$$

Sljedeći teorem govori o uvjetima pod kojim verižni razlomak konvergira [16, 18, 3].

**Teorem 3.1.3.** *Ako su  $a_k, b_k > 0$  i ako vrijedi  $a_k \leq b_k$  i  $b_k \geq \delta > 0$  za  $k \geq 1$ , gdje je  $\delta$  neka konstanta onda je verižni razlomak (3.1) konvergentan.*

Verižni razlomci imaju važnu ulogu u teoriji aproksimacija funkcija jer njihovi načini izvrednjavanja mogu riješiti neke od problema aproksimacija, kao što su brzina računanja i problem preljeva (engl. overflow). Stoga, u nastavku poglavlja, opisani su najpoznatiji načini izvrednjavanja verižnih razlomaka.

## 3.2 Algoritmi za izvrednjavanje verižnih razlomaka

U ovom potpoglavlju dana su 3 algoritma za izvrednjavanje  $n$ -te konvergente verižnog razlomka

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots \frac{a_n}{b_n}. \quad (3.28)$$

Algoritam A1: Brojnik  $P_n$  i nazivnik  $Q_n$   $n$ -te konvergente dobiju se primjenom rekurzivnih relacija iz teorema 3.1.1.

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$$

i

$$\begin{aligned} P_k &= b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2} \\ Q_k &= b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.29)$$

U praksi se dani algoritam često naziva uzlazni algoritam za izvrednjavanje. Postoji i tzv. silazni algoritam za izvrednjavanje koji je dan u nastavku.

Algoritam A2: Definiramo  $y_n = b_n$  i računamo

$$y_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{y_{k+1}}, \quad k = n-1, \dots, 1, 0. \quad (3.30)$$



Ovakvim načinom izvrednjavanja očito vrijedi

$$R_n = y_0. \quad (3.31)$$

Primijetimo da izvrednjavanje verižnog razlomka algoritmom A2 zahtjeva manji broj operacija nego algoritmom A1. U svakom koraku algoritma A2 potrebno je jedno zbrajanje i jedno dijeljenje, dok je u svakom koraku algoritma A1 (u općem slučaju) potrebno 4 množenja i 2 zbrajanja.

Algoritam A3: Definiramo  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = b_n$  i računamo

$$y_k = b_{n+2-k}y_{k-1} + a_{n+3-k}y_{k-2}, \quad k = 3, 2, \dots, n. \quad (3.32)$$

Tada je

$$R_n = b_0 + \frac{a_1 y_n}{b_1 y_n + a_2 y_{n-1}}. \quad (3.33)$$

Tablica 3.1: Broj operacija algoritama za izvrednjavanje

Algoritam	Zbrajanje	Množenje	Dijeljenje	Ukupno
A1	$2n - 1$	$4n - 4$	1	$6n - 4$
A2	$n$	0	$n$	$2n$
A3	$n$	$2n - 2$	1	$3n - 1$

Usporedba algoritama za izvrednjavanje prema broju operacija dana je u tablici 3.1. Iz tablice vidimo da algoritam A2 zahtjeva najmanji broj operacija. Također, vidimo da u algoritmu A2 operacija dijeljenja dominira nad operacijom množenja, dok je kod algoritma A3 situacija obrnuta. Stoga, ako je cijena dijeljenja <sup>1</sup> veća od cijene množenja algoritam A3 može biti efikasniji od algoritma A2 [16].

<sup>1</sup>Npr. za cijenu operacije se može uzeti procesorsko vrijeme potrebno za realizaciju operacije.

### 3.3 Analitička svojstva Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije

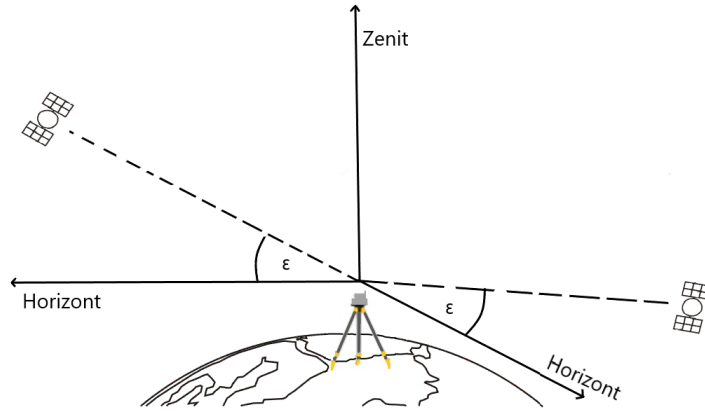
Prisjetimo se ponovno analitičkog oblika Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije:

$$m_h(\epsilon, \phi, t, H) = \frac{1 + \frac{a_h(\phi, t)}{b_h(\phi, t)}}{1 + \frac{1 + c_h(\phi, t)}{a_h(\phi, t)}} \cdot \frac{\sin(\epsilon) + \frac{a_h(\phi, t)}{\sin(\epsilon) + \frac{b_h(\phi, t)}{\sin(\epsilon) + c_h(\phi, t)}}}{\sin(\epsilon) + \frac{b_h(\phi, t)}{\sin(\epsilon) + c_h(\phi, t)}}$$

$$+ \left[ \frac{1}{\sin(\epsilon)} - \frac{1 + \frac{a_{ht}}{1 + \frac{b_{ht}}{1 + c_{ht}}}}{\sin(\epsilon) + \frac{a_{ht}}{\sin(\epsilon) + \frac{b_{ht}}{\sin(\epsilon) + c_{ht}}}} \right] \frac{H}{1000} \quad (3.34)$$

$$m_{nh}(\epsilon, \phi) = \frac{1 + \frac{a_{nh}(\phi)}{b_{nh}(\phi)}}{1 + \frac{1 + c_{nh}(\phi)}{a_{nh}(\phi)}} \cdot \frac{\sin(\epsilon) + \frac{a_{nh}(\phi)}{\sin(\epsilon) + \frac{b_{nh}(\phi)}{\sin(\epsilon) + c_{nh}(\phi)}}}{\sin(\epsilon) + \frac{b_{nh}(\phi)}{\sin(\epsilon) + c_{nh}(\phi)}}. \quad (3.35)$$

Promotrimo Niellovu hidrostatičku i nehidrostatičku funkciju za  $\epsilon$  iz intervala  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Promatranje Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije za vrijednosti  $\epsilon$  iz intervala  $[0, \frac{\pi}{2}]$  je dovoljno za satelitsko određivanje položaja standardne preciznosti gdje se pretpostavlja da je neutralna atmosfera azimutno simetrična. Opišimo azimutnu simetričnost pomoću slike 3.1. Na slici su prikazana dva satelita s istim elevacijskim kutom. Zbog pretpostavke azimutne simetričnosti kašnjenje signala uzrokovano troposferom odaslanog sa satelita sa slike bit će jednako. Dakle, kašnjenje signala u troposferi ne ovisi s koje strane se satelit nalazi u odnosu na prijemnik, nego pod kojim elevacijskim kutom.



Slika 3.1: Azimutna simetričnost

Kada se satelit nalazi u smjeru zenita, tj. kada je  $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ , vrijednost hidrostatičke i nehidrostatičke Niellove funkcije mora imati vrijednost 1. Računanjem limesa vidimo da funkcije ispunjavaju navedeni uvjet:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} m_h(\epsilon, \phi, t, H) &= \frac{1 + \frac{a_h(\phi, t)}{b_h(\phi, t)}}{1 + \frac{c_h(\phi, t)}{a_h(\phi, t)}} \quad (3.36) \\
 &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{a_h(\phi, t)}{b_h(\phi, t)}}{\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{c_h(\phi, t)}{a_h(\phi, t)}} \\
 &+ \left[ \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})} - \frac{1 + \frac{a_{ht}}{b_{ht}}}{\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{c_{ht}}{a_{ht}}} \right] \frac{H}{1000} \\
 &= 1 + [1 - 1] \frac{H}{1000} = 1,
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} m_{nh}(\epsilon, \phi) = \frac{1 + \frac{a_{nh}(\phi)}{1 + \frac{b_{nh}(\phi)}{1 + c_{nh}(\phi)}}}{\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{a_{nh}(\phi)}{\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{b_{nh}(\phi)}{\sin(\frac{\pi}{2}) + c_{nh}(\phi)}}} = 1. \quad (3.37)$$

Kada se satelit približava horizontu, tj. kada se  $\epsilon$  približava 0, vrijednost funkcija bi trebala biti maksimalna. Naime, signal odaslan sa satelita pod malim elevacijskim kutom veći dio puta se nalazi u troposferi, nego signal odaslan sa satelita pod većim elevacijskim kutom. Zbog toga je kašnjenje signala, uzrokovano troposferom, odaslanog sa satelita pod manjim elevacijskim kutom uvijek veće. Računanjem limesa pogledajmo kako se ponašaju nehidrostatička i hidrostatička Niellova funkcija kada elevacijski kut teži u 0:

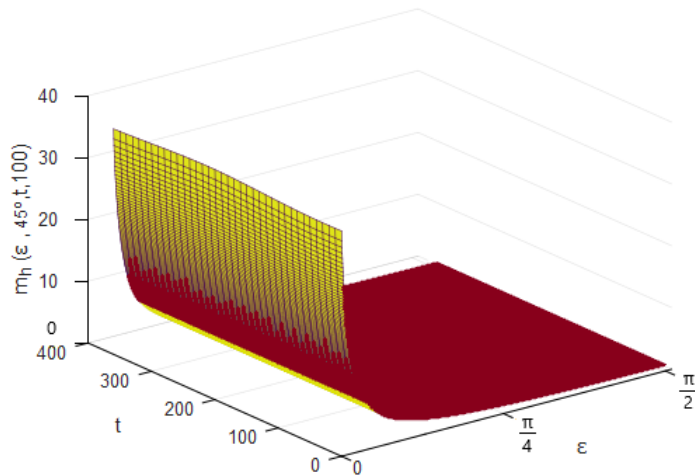
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_h(\epsilon, \phi, t, H) = \frac{1 + \frac{a_h(\phi, t)}{1 + \frac{b_h(\phi, t)}{1 + c_h(\phi, t)}}}{\sin(0) + \frac{a_h(\phi, t)}{\sin(0) + \frac{b_h(\phi, t)}{\sin(0) + c_h(\phi, t)}}} \quad (3.38)$$

$$+ \left[ \frac{1}{\sin(0)} - \frac{1 + \frac{a_{ht}}{1 + \frac{b_{ht}}{1 + c_{ht}}}}{\sin(0) + \frac{a_{ht}}{\sin(0) + \frac{b_{ht}}{\sin(0) + c_{ht}}}} \right] \frac{H}{1000} = +\infty,$$

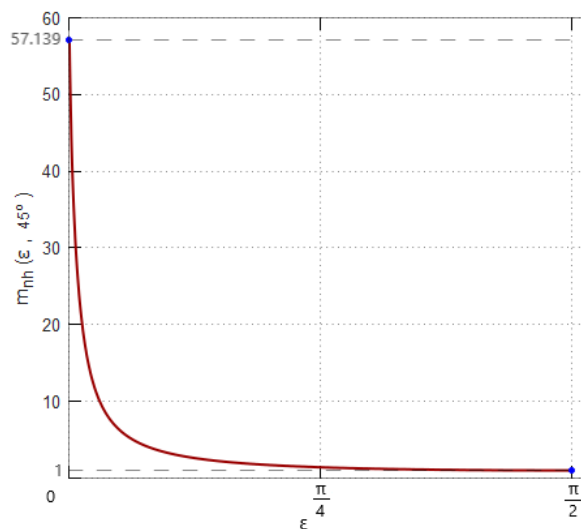
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_{nh}(\epsilon, \phi) = \frac{1 + \frac{a_{nh}(\phi)}{1 + \frac{b_{nh}(\phi)}{1 + c_{nh}(\phi)}}}{\sin(0) + \frac{a_{nh}(\phi)}{\sin(0) + \frac{b_{nh}(\phi)}{\sin(0) + c_{nh}(\phi)}}} = \frac{1 + \frac{a_{nh}(\phi)}{1 + \frac{b_{nh}(\phi)}{1 + c_{nh}(\phi)}}}{\frac{a_{nh}(\phi)}{\frac{b_{nh}(\phi)}{c_{nh}(\phi)}}}. \quad (3.39)$$

Iz (3.38) zaključujemo da je  $\epsilon = 0$  vertikalna asimptota funkcije  $m_h(\epsilon, \phi, t, H)$ .

Kako bi grafički prikazali hidrostatičku i nehidrostatičku Niellovu funkciju bez smanjenja općenitosti fiksirajmo  $\phi = 45^\circ$  i  $H = 100$ . Grafički prikazi funkcija  $m_h$  i  $m_{nh}$  prikazani su na slikama 3.2 i 3.3, respektivno. Na slikama vidimo da funkcije najmanju vrijednost 1 poprimaju kada se satelit nalazi u zenitnom smjeru. Također, vidi se da funkcije rastu smanjenjem elevacijskog kuta.



Slika 3.2:  $m_h(\epsilon, 45^\circ, t, 100)$



Slika 3.3:  $m_{nh}(\epsilon, 45^\circ)$

## Poglavlje 4

# Izvedba Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije u programskom okruženju R

### 4.1 Uvod u R

R je programski jezik i okruženje za upravljanje podacima, računanje i grafički prikaz. Razvili su ga Ross Ihaka i Robert Gentleman na sveučilištu u Aucklandu. Zbog velike popularnosti konstantno se nadograđuje, postoji i poseban tim za razvoj R-a nazvan *R Core Team* [19]. Većina korisnika R smatra statističkim sustavom jer sadrži veliki broj statističkih metoda kao što su metode za linearno i nelinearno modeliranje, klasične statističke testove, analize vremenskih serija, klasteriranje itd.

R je dostupan za operacijske sustave UNIX, Windows i MacOS. Instalacija je besplatna i poprilično jednostavna. Verzija kompatibilna operacijskom sustavu može se preuzeti s web stranice <https://cran.r-project.org/>. S instalacijom R-a dolaze standardne knjižice koji nude osnovne funkcionalnosti sustava R: aritmetiku, ulaz i izlaz podataka, osnovnu statistiku i grafiku. Osnovne funkcionalnosti R-a mogu se proširiti dodavanjem knjižica. Danas postoji nekoliko tisuća knjižica i većina ih je smještena i raspoređena po grupama na repozitoriju CRAN (engl. The Comprehensive R Archive Network). I popis svih knjižica dostupnih na repozitoriju može se pronaći na navedenoj stranici. Preko konzole sustava R knjižica se instalira sljedećom naredbom:

```
> install.packages("package_name")
```

Instalacijom knjižice instaliraju se i sve knjižice o kojima on ovisi. Da bi funkcije instalirane knjižice bile dostupne potrebno ih je svaki puta prilikom početka rada u sustavu učitati u radni prostor naredbom:

```
> library(package_name)
```

Unutar konzole sustava R može se saznati više informacija o knjižici jednostavnom naredbom

```
> help(package_name)
```

ili

```
> ?package_name
```

Na jednak način možemo saznati više informacija o funkcijama unutar sustava R, samo umjesto `package_name` upišemo ime funkcije čija nam je funkcionalnost potrebna. Funkcije `install.packages()` i `help()` mogu primiti još argumenata. Opisi argumenata i njihova upotreba mogu se pronaći na službenim stranicama dokumentacije sustava R.

Popis osnovnih tipova podataka u R-u zajedno s primjerima nalaze se u sljedećoj tablici:

Tablica 4.1: Osnovni tipovi podataka u R-u

Tip podatka	Primjer
logički operator (engl. logical)	<code>&gt; v &lt;- TRUE</code>
realan broj/numerik (engl. numeric)	<code>&gt; v &lt;- 20.5</code>
cijeli broj (engl. integer)	<code>&gt; v &lt;- 12L</code>
kompleksni broj (engl. complex)	<code>&gt; v &lt;- 2+5i</code>
znak/slovo/tekst (engl. character/string)	<code>&gt; v &lt;- "TRUE"</code>
sirovi (engl. raw)	<code>&gt; v &lt;- charToRaw("TRUE")</code>

Najvažnije strukture podataka u sustavu R su: vektori (engl. atomic vectors), matrice (engl. matrices), polja (engl. arrays), popisi (engl. lists), okviri poda-

taka (engl. data frames). Budući da se u izvedbi Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije od struktura podataka koriste samo matrice i *data frames* u nastavku potpoglavlja dan je opis inicijalizacije i pristupa određenim elementima tih struktura podataka. Svi elementi matrice moraju biti istog tipa. Općeniti format stvaranja i inicijalizacije matrice:

```
M <- matrix(vector, nrow=r, ncol=c, byrow=FALSE,
            dimnames=list(char_vector_rownames, char_vector_colnames)).
```

Ukoliko je `byrow=TRUE` matrica će se puniti elementima iz `vector` po retcima, a ako je `byrow=FALSE` po stupcima. Pomoću `dimnames` možemo svakom retku i stupcu matrice dodijeliti naziv. Primjer:

```
> M <- matrix(c('a','a','b','c','b','a'), nrow = 2, ncol = 3, byrow = TRUE)
> print(M)
```

Naredba `print(M)` ispisuje matricu `M` u sljedećem obliku:

```
 [,1] [,2] [,3]
[1,] "a" "a" "b"
[2,] "c" "b" "a"
```

Elementu matrice koji se nalazi u retku  $i$  i stupcu  $j$  (indeksi kreću od 1) pristupamo s `M[i, j]`. Jedna od najvažnijih struktura podataka u R-u su *data frames*. Za razliku od matrice svaki stupac sadrži elemente istog tipa, no različiti stupci mogu sadržavati elemente različitih tipova podataka. Također, *data frame* ima dodatan redak s imenima objekata i dodatan stupac s imenima redaka. Elementima strukture *data frame* pristupa se jednako kao elementima matrice. Primjer:

```
> D <- data.frame(gender=c("Male", "Female"), age=c(32, 25))
> print(D)
```

Ispis:

```
  gender age
1  Male   32
2 Female  25
```

Ukoliko želimo učitati podatke iz datoteke u strukturu podataka *data frame* to



možemo učiniti naredbom `read.table`. Smatra se da su podaci u datoteci odvojeni razmakom. Ako su elementi u datoteci odvojeni nekim drugim separatorom potrebno je argumentu `sep` funkcije `read.table` pridružiti vrijednost separatora:

```
> D <- read.table("file", sep=" ")
```

Detaljnije opise struktura podataka i primjere korištenja možete pronaći na službenim stranicama dokumentacije sustava R.

R dolazi s velikim brojem već ugrađenih funkcija. Za definiranje vlastitih funkcija koristi se sintaksa:

```
func_name <- function(argument){ function_body }
```

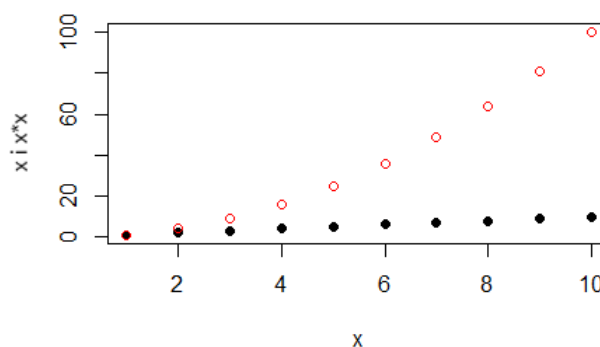
Ako funkcija prima samo jedan argument pozivamo ju na sljedeći način:

```
> func_name(x)
```

Za izrađivanje grafova u ovom radu korištena je funkcija `matplot`. Pomoću `matplot` moguće je prikazati više grafova funkcija na jednoj slici, odabrati debljinu linije, nazive koordinatnih osi i sl. Primjer:

```
> x <- 1:10
> matplot(x, cbind(x, x*x), pch=c(16,1), xlab="x", ylab="x i x*x")
```

Rezultat:



Slika 4.1:  $m_h(\epsilon, 45^\circ, t, 100)$

## 4.2 Struktura programske izvedbe Niellove funkcije

U programskoj izvedbi Niellove funkcije posebno je izrađena funkcija za Niellovu nehidrostatičku i posebno za Niellovu hidrostatičku funkciju. U nastavku je dan način na koji se pozivaju funkcije te detaljniji opis ulaznih argumenata i njihovih ograničenja.

Niellovu hidrostatičku funkciju pozivamo naredbom:

```
> niell_hydrostatic(e, phi, t, h)
```

gdje vrijednost **e** predstavlja elevacijski kut [°], **phi** geografsku širinu [°], **t** dan u godini i **h** visinu prijemnika iznad razine mora [m].

Dozvoljene vrijednosti za elevacijski kut **e** nalaze se u intervalu  $(0, 90]$ , za **t** u skupu  $\{1, 2, 3, \dots, 366\}$ , za **h** u intervalu  $[0, +\infty)$  i za **phi** u intervalu  $[-90, 90]$ . Ukoliko je **phi** negativan radi se o južnoj geografskoj širini, a ako je pozitivan o sjevernoj geografskoj širini. Kada se funkcija pozove sa argumentima čije vrijednosti nisu dozvoljene izvršavanje funkcije se prekida s porukom o grešci.

Niellova nehidrostatička funkcija poziva se naredbom:

```
> niell_nonhydrostatic(e, phi)
```

gdje su **e** i **phi** kao kod hidrostatičke funkcije. Jedina razlika je u dozvoljenim vrijednostima za elevacijski kut, koje se kod nehidrostatičke funkcije nalaze u intervalu  $[0, 90]$ . Navedena razlika nije toliko bitna za praktičnu upotrebu Niellove funkcije jer, kao što je već rečeno, Niellova funkcija daje zadovoljavajuće rezultate za elevacijske kuteve veće od  $3^\circ$ .

Da bismo izračunali vrijednost Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije potrebno je izračunati razlomke čiji su brojnici i nazivnici verižni razlomci. U programskoj izvedbi postupak izvrednjavanja verižnih razlomaka odvojen je u posebne funkcije. Za algoritam izvrednjavanja verižnih razlomaka odabran je silazni algoritam (Algoritam A2, stranica 34) jer zahtjeva najmanji broj operacija.

Prisjetimo se općeg oblika verižnog razlomka za  $n=3$ :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}}. \quad (4.1)$$

Nazivnici Niellove hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije su oblika:

$$\sin(\epsilon) + \frac{a}{\sin(\epsilon) + \frac{b}{\sin(\epsilon) + \frac{c}{1}}}, \quad (4.2)$$

dok su brojnici:

$$1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + \frac{c}{1}}}. \quad (4.3)$$

Primijetimo da u verižnim razlomcima koji se pojavljuju u nazivnicima hidrostatičke i nehidrostatičke funkcije vrijedi  $b_0 = b_1 = b_2 = \sin(\epsilon)$ ,  $b_3 = 1$ . To znači da funkcija koja računa verižne razlomke koji su u nazivniku mora primiti samo 4 argumenta  $\text{sine}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

```
> continued_fraction(sine, a, b, c)
```

U brojnicima funkcija se pojavljuju jednostavni verižni razlomci. Funkcija u programskoj izvedbi koja ih računa prima samo 3 argumenta i poziva se sljedećom naredbom:

```
> simple_continued_fraction(a, b, c)
```

Za uspješno izvršavanje programske izvedbe Niellove funkcije potrebno je u istom direktoriju gdje se nalazi izvedba imati datoteku naziva `data.txt` s podacima kao u dodatku B.

### 4.3 Procjena programske izvedbe

U ovom potpoglavlju vrijednosti Niellove funkcije uspoređene su s vrijednostima Vienna funkcije. Vrijednosti navedenih funkcija dobivene su izvršavanjem programskih izvedbi na odabranom skupu podataka.

Tesmer, Bohm, Heinkelmann i Schuh [26] su uspoređujući 4 najkorištenije funkcije koje daju omjer troposferskog kašnjenja pod kutom i zenitnog troposferskog kašnjenja (Niell, Ifadis, Vienna, Global) pokazali da je Vienna funkcija najtočnija. Nekoliko godina kasnije preporučena je za sve precizne geofizičke primjene.

Vienna funkcija se od Niellove funkcije razlikuje samo po odabiru koeficijenata. Koeficijenti  $b_h$  i  $c_h$  za hidrostatičku Vienna funkciju izračunaju se na sljedeći način [28]:

$$b_h = 0.0029$$

$$c_h = c_0 + \left[ \left( \cos \left( \frac{doy - 28}{365.25} 2\pi + \psi \right) + 1 \right) \frac{c_{11}}{2} + c_{10} \right] (1 - \cos(\phi)), \quad (4.4)$$

gdje je  $doy$  dan u godini,  $\phi$  geografska širina prijemnika, a  $c_0, c_{10}, c_{11}, \psi$  se pročitaju iz tablice (4.2). Koeficijenti  $b_{nh}$  i  $c_{nh}$  za nehidrostatičku Vienna funkciju iznose:

$$b_{nh} = 0.00146$$

$$c_{nh} = 0.04391. \quad (4.5)$$

Koeficijenti  $a_h$  i  $a_{nh}$  se računaju algoritmima za praćenje zrake svjetlosti i korištenjem podataka o pretpostavkama vremena na temelju trenutnih vremenskih uvjeta (engl. Numerical Weather Prediction).

Tablica 4.2: Vrijednosti parametara za Vienna funkciju

Hemisfera	$c_0$	$c_{10}$	$c_{11}$	$\psi$
sjeverna	0.062	0.001	0.005	0
južna	0.062	0.002	0.007	$\pi$

Za potrebe ovog rada odabrani su podaci koje pruža sveučilište u New Brunswick-u (engl. The University of New Brunswick), Kanada. Podaci se za svaki

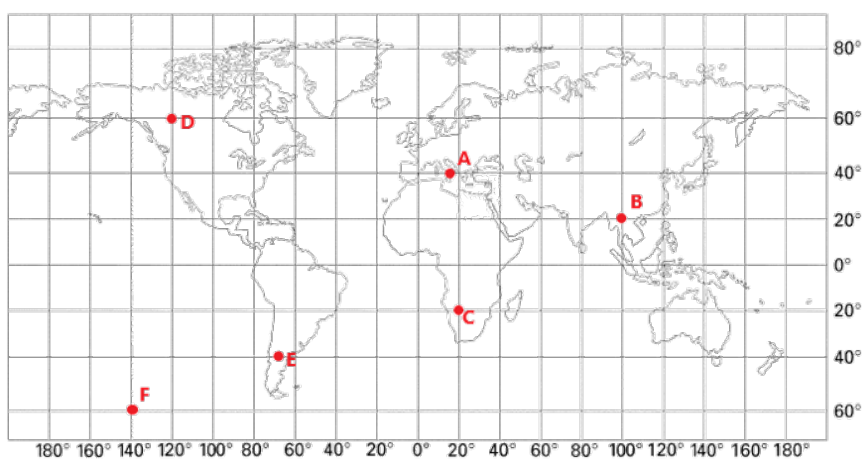
dan od 1990. godine nalaze na službenoj web stranici sveučilišta <http://unb-vmf1.gge.unb.ca/pub/> u sljedećem formatu:

Slika 4.2: Format podataka sa sveučilišta u New Brunswick-u

90.0	0.0	0.00115526	0.00054225	2.3228	0.0099
90.0	2.5	0.00115526	0.00054230	2.3228	0.0099
90.0	5.0	0.00115526	0.00054232	2.3228	0.0099
90.0	7.5	0.00115526	0.00054237	2.3229	0.0099
90.0	10.0	0.00115525	0.00054241	2.3229	0.0099
90.0	12.5	0.00115525	0.00054245	2.3229	0.0099
90.0	15.0	0.00115525	0.00054250	2.3229	0.0099
...					

gdje su vrijednosti u stupacima redom geografska širina, geografska dužina,  $a_h$ ,  $a_{nh}$ , zenitno hidrostatičko kašnjenje i zenitno nehidrostatičko kašnjenje.

Niellova i Vienna funkcija uspoređene su na šest odabranih geografskih širina. Odabrane su tri geografske širine na sjevernoj Zemljinoj polutci 20°N, 40°N, 60°N i tri na južnoj Zemljinoj polutci 20°S, 40°S, 60°S. Na svakoj navedenoj geografskoj širini odabrana je jedna referentna stanica tako da tri stanice budu na zapadnoj i tri na istočnoj Zemljinoj polutci (slika 4.3). Korišteni su podaci vezani za položaje referentnih stanica, preuzeti sa stranice Sveučilišta u New Brunswick-u za četiri dana u 2018. godini: 15.1. ( $doy=15$ ), 15.4. ( $doy=105$ ), 15.7. ( $doy=196$ ) i 15.10. ( $doy=288$ ).



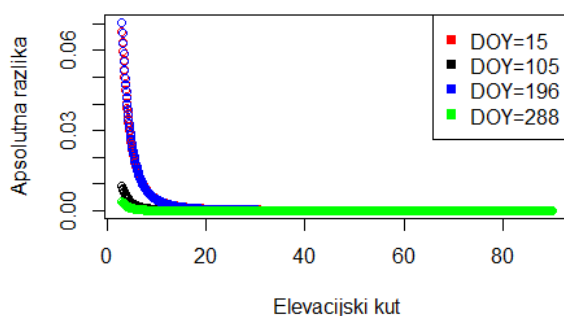
Slika 4.3: Odabrane referentne stanice s koordinatama A(40°N,15°E), B(20°N,100°E), C(20°S,20°E), D(60°N,120°W), E(40°S,70°W), F(60°S,140°W)

U nastavku su dane usporedbe posebno hidrostatičke i posebno nehidrostatičke Niellove i Vienna funkcije.

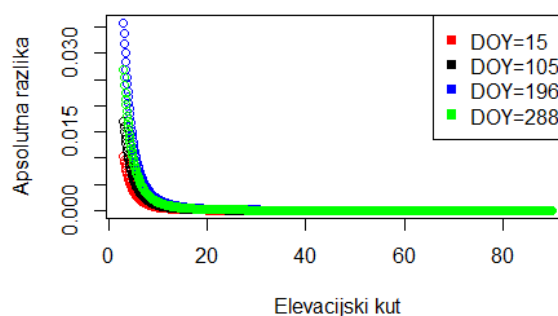
## Usporedba hidrostatičkih funkcija

Za svaku referentnu stanicu za sva četiri odabrana dana u godini vrijednosti hidrostatičke Niellove i Vienna funkcije dobivene su izvršavanjem programskih izvedbi na elevacijskim kutovima oblika  $3^\circ + k \cdot 0.5^\circ$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 174$ . Također, vrijednosti funkcija su izračunate s fiksiranom visinom  $H = 500 \text{ m}$ . Fiksiranje visine na kojoj uspoređujemo vrijednosti funkcija ne utječe na rezultate usporedbe Niellove i Vienna funkcije jer obje funkcije visinsku razliku računaju na isti način i s istim vrijednostima. Programske izvedbe hidrostatičkih funkcija mogu se naći u dodatku A.

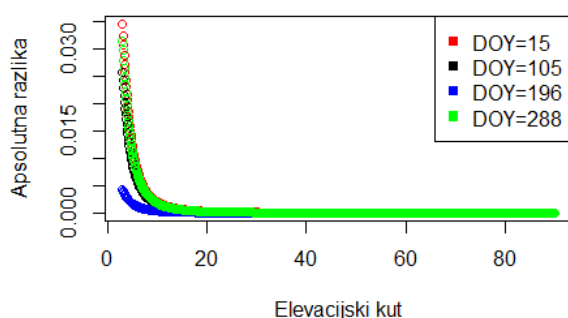
Na slikama 4.4-4.9 za svaku referentnu stanicu nalaze se grafovi koji prikazuju apsolutne vrijednosti razlika hidrostatičke Niellove i Vienna funkcije za sva četiri odabrana dana. *Apsolutna vrijednost razlike* dva broja  $x$  i  $y$  definira se kao  $|x - y|$ . Na grafovima je za svaku referentnu stanicu i na svaki odabran dan vidljiv trend povećanja apsolutnih vrijednosti razlika hidrostatičkih funkcija smanjenjem elevacijskog kuta. Za vrijednosti elevacijskog kuta između  $20^\circ$  i  $90^\circ$  Niellova i Vienna hidrostatička funkcija se podudaraju. Također, uočavamo da se na svim referentnim stanicama, osim stanice C, najveće apsolutne vrijednosti razlika hidrostatičkih funkcija postižu na 196. dan u godini (plavom bojom na grafovima), dok se na stanici C hidrostatičke funkcije najviše razlikuju na 15. dan u godini (crvenom bojom na grafu). Na većini grafova vidimo da su apsolutne vrijednosti razlika funkcija najmanje na 288. danu u godini. Najveća apsolutna razlika iznosi  $\approx 0.06$ . Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatičke funkcije za sve referentne stanice i za svaki odabran dan pojedinačno su prikazane na slikama C.1-C.24 u dodatku C.



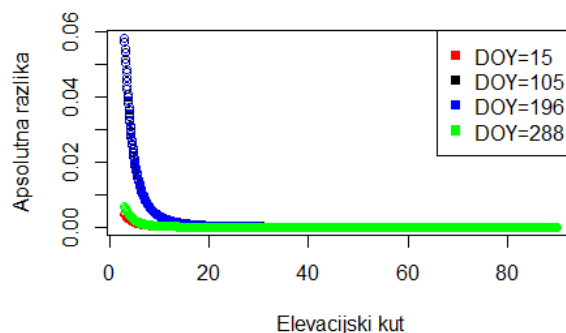
Slika 4.4: Apsolutne vrijednosti razlika hidrostatičkih funkcija na stanici A



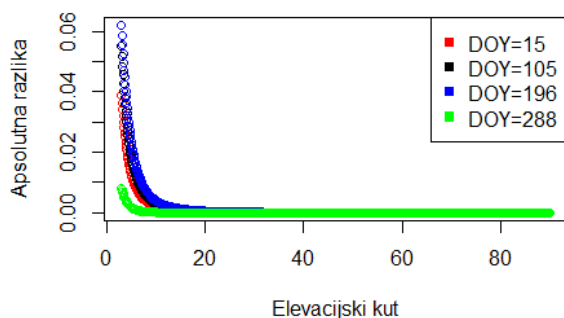
Slika 4.5: Apsolutne vrijednosti razlika hidrostatičkih funkcija na stanici B



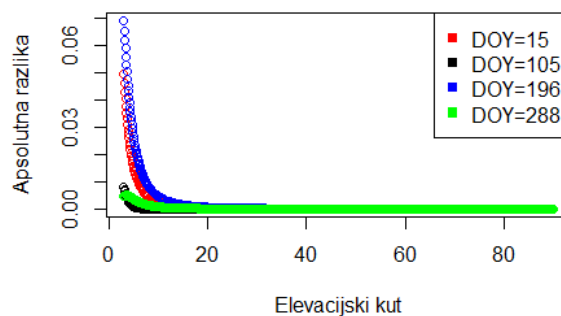
Slika 4.6: Apsolutne vrijednosti razlika hidrostatickih funkcija na stanici C



Slika 4.7: Apsolutne vrijednosti razlika hidrostatickih funkcija na stanici D



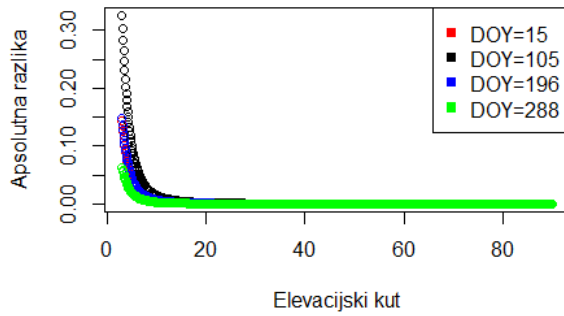
Slika 4.8: Apsolutne vrijednosti razlika hidrostatickih funkcija na stanici E



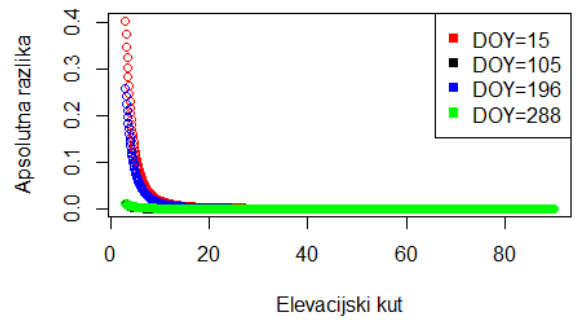
Slika 4.9: Apsolutne vrijednosti razlika hidrostatickih funkcija na stanici F

### Usporedba nehidrostatickih funkcija

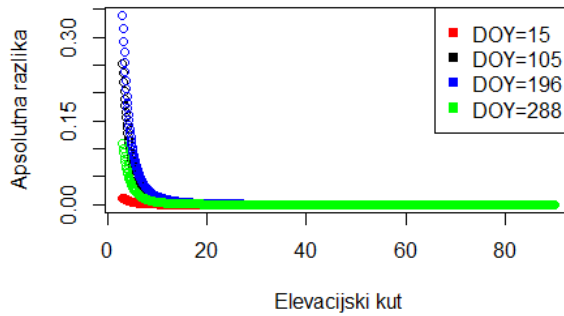
I na grafovima sa slika 4.10-4.15 vidljiv je trend povećanja apsolutnih vrijednosti razlika nehidrostatickih funkcija na odabranom skupu podataka smanjenjem elevacijskog kuta. Također, za vrijednosti elevacijskog kuta između 20° i 90° Niellova i Vienna nehidrostaticka funkcija se podudaraju. Kod nehidrostatickih funkcija najveća apsolutna razlika je veća nego kod hidrostatickih i iznosi  $\approx 0.4$ . Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostaticke funkcije za sve referentne stanice i za svaki odabran dan pojedinačno su prikazane na slikama C.25-C.48 u dodatku C.



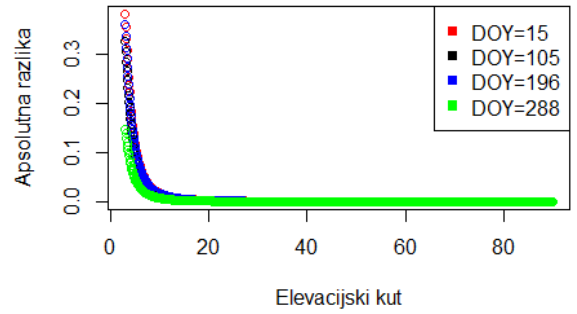
Slika 4.10: Apsolutne vrijednosti razlika nehidrostatičkih funkcija na stanici A



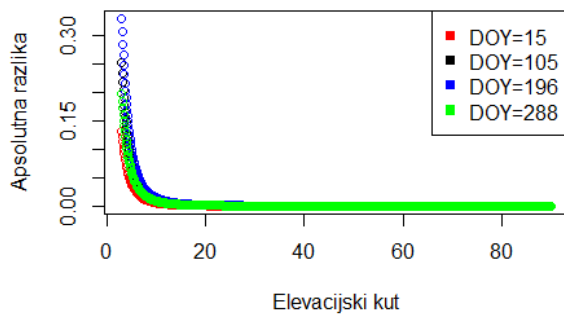
Slika 4.11: Apsolutne vrijednosti razlika nehidrostatičkih funkcija na stanici B



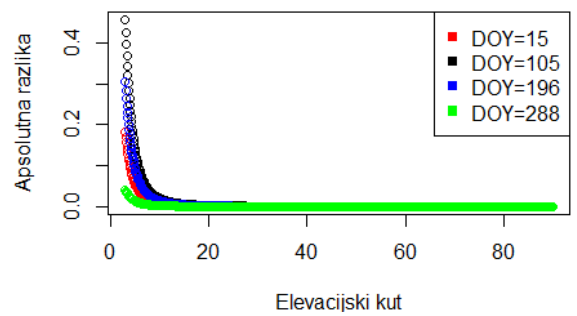
Slika 4.12: Apsolutne vrijednosti razlika nehidrostatičkih funkcija na stanici C



Slika 4.13: Apsolutne vrijednosti razlika nehidrostatičkih funkcija na stanici D



Slika 4.14: Apsolutne vrijednosti razlika nehidrostatičkih funkcija na stanici E



Slika 4.15: Apsolutne vrijednosti razlika nehidrostatičkih funkcija na stanici F



# Poglavlje 5

## Zaključak

Troposfersko kašnjenje je pogreška u izračunu udaljenosti od satelita do prijemnika nastala utjecajem troposfere na širenje signala od satelitske do prijemnikove antene. Troposfera smanjuje brzinu širenja signala i uzrokuje savijanje putanje signala. U GPS prijemnicima za civilnu upotrebu troposfersko kašnjenje se određuje korištenjem razvijenih modela koji procijenjuju kašnjenje na temelju površinskih meteoroloških parametara. U posljednjih nekoliko desetaka godina modeli se razvijaju na način da se razvijaju modeli za zenitno troposfersko kašnjenje (satelit je pod elevacijskim kutom od  $90^\circ$ ) i modeli za funkciju koja preslikava zenitno troposfersko kašnjenje na kašnjenje pod kutom. Najpoznatiji model funkcije koja preslikava zenitno troposfersko kašnjenje na kašnjenje pod kutom je Niellova funkcija. A. Niell je 1996. godine, u svom radu, dao izraz za Niellovu funkciju i pokazao da daje zadovoljavajuću točnost za elevacijske kutove veće ili jednake od  $3^\circ$ . Niellova funkcija napisana je u obliku verižnih razlomaka. J. V. Marini je 1972. godine prvi puta funkciju koja preslikava zenitno kašnjenje na kašnjenje pod kutom izrazio u obliku verižnih razlomaka. Od tada se najčešće koriste jer su se pokazale bolje od ostalih za male elevacijske kutove.

Cilj ovog rada je detaljnije analizirati problem troposferskog kašnjenja te dati pregled najpoznatijih modela za zenitno troposfersko kašnjenje i funkcija koje preslikavaju zenitno kašnjenje na kašnjenje pod kutom. Zatim, cilj je detaljnije analizirati Niellovu funkciju, dati kratak pregled teorije verižnih razlomaka i najpoznatije algoritme za njihovo izvrednjavanje. I na samom kraju dati izvedbu Niellove funkcije u programskom okruženju za statističko računarstvo R.

U ovom radu, izvedba Niellove funkcije za izvrednjavanje verižnih razlomaka koristi silazni algoritam jer zahtjeva najmanji broj operacija. Izvedba je uspoređena s Vienna funkcijom, za koju su Tesmer, Bohm, Heinkelmann i Schuh 2007. godine

pokazali da je najpreciznija. Uspoređujući vrijednosti Niellove i Vienna funkcije na odabranom skupu podataka zaključujemo da se značajnije razlike vide tek za male elevacijske kutove, do  $\approx 10^\circ$ . Najveća apsolutna vrijednost razlika hidrostatičke Niellove i Vienna funkcije na odabranom skupu podataka iznosi  $\approx 0.06$ , a nehidrostatičke  $\approx 0.4$ .

# Bibliografija

- [1] J. Askne i H. Nordius, *Estimation of tropospheric delay for microwaves from surface weather data*, Radio Science, br. 22 (1987), 379–386.
- [2] M. Cavcar, *The International Standard Atmosphere*, dostupno na: <http://fisicaatmo.at.fcen.uba.ar/practicas/ISAwab.pdf>, (11. studenoga 2019.).
- [3] J. L. Davis, T. A. Herring, I. I. Shapiro, A. E. E. Rogers i G. Elgered, *Geodesy by radio interferometry: Effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length*, dostupno na [http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/154491/local\\_154491.pdf](http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/154491/local_154491.pdf), (11. studenoga 2019.).
- [4] L. Essen i K. D. Froome, *Dielectric constant and refractive index of air and its principal constituents*, Nature, br. 167 (1951), 512–513.
- [5] M. Filić, *Analiza postupka procjene položaja temeljem zadanih pseudoudaljenosti u programski određenom prijemniku za satelitsku navigaciju*, dostupno na: <https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf%3A3230>, (11. studenoga 2019.).
- [6] T. A. Herring, *Modeling atmospheric delays in the analysis of space geodetic data*, Refraction of transatmospheric signals in geodesy (1992), 157–164.
- [7] H. S. Hopfield, *Two-quartic tropospheric refractivity profile for correcting satellite data*, Journal of Geophysical Research, br. 74 (1969), 4487–4499.
- [8] I. M. Ifadis, *The excess propagation path of radio waves: Study of the influence of the atmospheric parameters on its elevation dependence*, Survey Review, br. 31 (1992), 289–298.
- [9] NovAtel Inc., *An Introduction to GNSS, GPS, GLONASS, BeiDou, Galileo and other Global Navigation Satellite Systems, Second Edition*, NovAtel Inc., Calgary, Alberta, 2013.

- [10] F. Kleijer, *Troposphere Modeling and Filtering for Precise GPS Leveling*, NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 2004.
- [11] M. Kos, T. nad Grgić i S. Krile, *Hiperbolni i satelitski sustavi za navigaciju*, Naše more : znanstveni časopis za more i pomorstvo, br. 51, 5-6 (2004), 189–199.
- [12] T. Kos, M. Botinčan i A. Dlesk, *Mitigating GNSS Positioning Errors due to Atmospheric Signal Delays*, Pomorstvo (Journal of Maritime Studies), br. 23, 2 (2009), 495–513.
- [13] D. Lelas, *Fizika 2, Geometrijska optika, predavanje 9*, dostupno na: [http://adria.fesb.hr/~zmiletic/Fizika%202/9.%20Geometrijska%20optika/Fizika2\\_Razlikovni\\_Predavanje9.pdf](http://adria.fesb.hr/~zmiletic/Fizika%202/9.%20Geometrijska%20optika/Fizika2_Razlikovni_Predavanje9.pdf), (11. studenoga 2019.).
- [14] J. W. Marini, *Correction of satellite tracking data for an arbitrary tropospheric profile*, Radio Science, br. 7 (1972), 223–231.
- [15] V. B. Mendes, *Modeling the Neutral-Atmospheric Propagation Delay in Radiometric Space Techniques*, dostupno na: <http://www2.unb.ca/gge/Pubs/TR199.pdf>, (11. studenoga 2019.).
- [16] G. V. Milovanović, *Numerička analiza*, IRO "Naučna knjiga", Beograd, 1988.
- [17] A. E. Niell, *Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths*, Journal of Geophysical Research (B), br. 101 (1996), 3227–3246.
- [18] V. Petričević, *Periodski verižni razlomci*, dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vpetrice/radovi/Magistarski.pdf>, (11. studenoga 2019.).
- [19] Sveučilišni računski centar, *Upoznavanje sa sintaksom jezika R i njegova primjena u osnovnoj statističkoj i grafičkoj analizi podataka*, dostupno na: [https://www.srce.unizg.hr/files/srce/docs/edu/R/s720\\_polaznik.pdf](https://www.srce.unizg.hr/files/srce/docs/edu/R/s720_polaznik.pdf), (11. studenoga 2019.).
- [20] M. Rogina, Sanja Singer i Saša Singer, *Numerička analiza*, dostupno na: [https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num\\_anal.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf), (11. studenoga 2019.).
- [21] J. Saastamoinen, *Atmospheric correction for the troposphere and stratosphere in radio ranging of satellites*, The use of artificial satellites for geodesy, Geophys. Monogr. Ser., br. 15 (1972), 247–251.

- [22] T. Schüler, *On Ground-Based GPS Tropospheric Delay Estimation*, dostupno na: <http://athene-forschung.unibw.de/doc/85240/85240.pdf>, (11. studenoga 2019.).
- [23] S. M. Shrestha, *Investigations into the Estimation of Tropospheric Delay and Wet Refractivity Using GPS Measurements*, dostupno na: [https://www.ucalgary.ca/engo\\_webdocs/SS/03.20180.SMShrestha.pdf](https://www.ucalgary.ca/engo_webdocs/SS/03.20180.SMShrestha.pdf), (11. studenoga 2019.).
- [24] E.K. Smith i S. Weintraub, *The constants in the equation for atmospheric refractive index at radio frequencies*, Proc. IRE, br. 41 (1953), 1035–1037.
- [25] J. S. Subirana, J. M. J. Zornoza i M. Hernández-Pajares, *GNSS Data Processing, Volume I: Fundamentals and Algorithms*, European Space Agency, Noordwijk, 2013.
- [26] V. Tesmer, J. Böhm, R. Heinkelmann i H. Schuh, *Effects of different tropospheric mapping functions on the TRF, CRF, and position time-series estimated from VLBI*, Journal of Geodesy, br. 81, 6-8 (2007), 409—421.
- [27] G. D. Thayer, *An improved equation for the radio refractive index of air*, Radio Science, br. 9(10) (1974), 803–807.
- [28] L. Urquhart i M. C. Santos, *Development of a VMF1-like service at UNB*, dostupno na: [unb-vmf1.gge.unb.ca/publications/VMF1-UNB\\_White\\_paper.pdf](http://unb-vmf1.gge.unb.ca/publications/VMF1-UNB_White_paper.pdf), (11. studenoga 2019.).
- [29] J. Zhang, *Investigations into the Estimation of Residual Tropospheric Delays in a GPS Network*, dostupno na: [https://www.ucalgary.ca/engo\\_webdocs/GL/99.20132.JZhang.pdf](https://www.ucalgary.ca/engo_webdocs/GL/99.20132.JZhang.pdf), (11. studenoga 2019.).

# Sažetak

Prolazeći kroz troposferu na svom putu od satelita do prijemnika GPS signali mijenjaju brzinu i smjer širenja, uzrokujući tako greške u određivanju položaja. Navedeni utjecaji troposfere na signal zovu se troposfersko kašnjenje. Budući da je troposfera nedisperzivan medij troposfersko kašnjenje ne može biti uklonjeno korištenjem dvo-frekvencijskih GPS prijemnika, nego se modelira. Troposfersko kašnjenje prvo se modelira u zenitnom smjeru. Zatim se kašnjenje u zenitnom smjeru preslikava na kašnjenje pod elevacijskim kutom koristeći modele funkcija koje daju omjer troposferskog kašnjenja pod elevacijskim kutom i zenitnog kašnjenja. Primjer jedne takve funkcije koja se može koristiti za visoku preciznost određivanja položaja je Niell funkcija.

Prvo poglavlje opisuje utjecaje troposfere na GPS signal. Prvo su opisane karakteristike satelitskog određivanja položaja i troposfere, a potom je opisan pojam refrakcije signala u troposferi. U drugom poglavlju dani su napoznatiji modeli za zenitno troposfersko kašnjenje i funkcije koje daju omjer kašnjenja pod elevacijskim kutom i zenitnog kašnjenja. Budući da je Niellova funkcija izražena u obliku verižnih razlomaka treće poglavlje pruža kratak pregled teorije verižnih razlomaka. U posljednjem poglavlju na odabranom skupu podataka Niellova funkcija uspoređena je s Vienna funkcijom.

# Summary

GPS signals change the propagation speed and direction as they pass through the troposphere on their path from the satellite to the receiver, causing positioning errors. These effects of the troposphere on the GPS signals are called tropospheric delay. Since troposphere is a non-dispersive medium, tropospheric delay cannot be removed using a combination of two GPS frequencies, but must be modelled. The tropospheric delay can be approximated by finding closed-form analytical models for the zenith delay and then by mapping this delay to the arbitrary elevation angles using a mapping function. Example of mapping function that can be used for high-precision positioning applications is Niell mapping function.

Chapter 1 describes the effects of the troposphere on the GPS signals. Characteristics of satellite positioning and the troposphere are first reviewed. Secondly, the refraction of GPS signals in the troposphere is presented. The description of the most used models for zenith delay and mapping function are given with the second chapter. Since Niell mapping function is expressed in a form of continued fraction third chapter provides a brief overview of continued fraction theory. Last chapter gives a comparison of the Niell and Vienna mapping function on the selected dataset.

# Životopis

Zovem se Valentina Gavranić. Rođena sam 2. kolovoza 1995. godine u Slavonskom Brodu. Prva četiri razreda osnovne škole "Vladimir Nazor" pohađala sam u Gornjoj Vrbi, a preostala u Slavonskom Brodu. Nakon završetka osnovne škole, 2010. godine, upisujem matematičku gimnaziju "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2014. godine i iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2017. godine postala sam sveučilišna prvostupnica matematike. Iste godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu upisala sam diplomski studij Računarstvo i matematika.



# Dodatak A

## Kodovi izvedbe funkcija

### A.1 Izvedba Niellove funkcije

```
1 #globalne konstante
2 PI <- 3.1415926535897935601
3 a_ht <- 2.53*10^(-5)
4 b_ht <- 5.49*10^(-3)
5 c_ht <- 1.14*10^(-3)
6 matrix1 = read.table("data.txt", sep=",", fill=FALSE, strip.white=TRUE)
7 #print(matrix1)
8
9 #silazni algoritam za izvrednjavanje veriznih razlomaka
10
11 simple_continued_fraction <- function(a, b, c){
12   y_2 <- 1 + c
13   y_1 <- 1 + b/y_2
14   y_0 <- 1 + a/y_1
15   return(y_0)
16 }
17
18 continued_fraction <- function(sine, a, b, c){
19   y_2 <- sine + c
20   y_1 <- sine + b/y_2
21   y_0 <- sine + a/y_1
22   return(y_0)
23 }
24
25 #hidrostaticka Niellova funkcija
26
27 niell_hydrostatic <- function(e, phi, t, h){
28
29   if(e <= 0 || e > 90){
30     stop("Elevacijski kut mora biti u intervalu <0,90]")
31   }
32
33   if(phi < -90 || phi > 90){
34     stop("Geografska sirina mora biti u intervalu [-90,90]")
35   }
36
37   if(h < 0){
```

```

38     stop("Visina mora biti veca od 0")
39 }
40
41 x <- sin(e*(PI/180))
42 doy <- t
43 t_0 <- 28
44
45 if(phi < 0){
46     t_0 <- 211
47 }
48
49 q_deg <- abs(phi)
50
51 if(q_deg <= 15){
52     j <- 1
53     k <- j
54     M <- 0
55 }else if(q_deg >= 75){
56     j <- 5
57     k <- j
58     M <- 0
59 }else{
60     j <- floor(floor(q_deg)/15)
61     k <- j + 1
62     M <- (q_deg - matrix1[1,j])/(matrix1[1,j+1] - matrix1[1,j])
63 }
64
65 y <- cos(2*PI*((doy-t_0)/365.25))
66
67 a_h <- matrix1[2,j]*10^(-3) + 10^(-3)*(matrix1[2,k] - matrix1[2,j])*M - (matrix1
68 [5,j]*10^(-5) + 10^(-5)*(matrix1[5,k] - matrix1[5,j])*M)*y
69 b_h <- matrix1[3,j]*10^(-3) + 10^(-3)*(matrix1[3,k] - matrix1[3,j])*M - (matrix1
70 [6,j]*10^(-5) + 10^(-5)*(matrix1[6,k] - matrix1[6,j])*M)*y
71 c_h <- matrix1[4,j]*10^(-3) + 10^(-3)*(matrix1[4,k] - matrix1[4,j])*M - (matrix1
72 [7,j]*10^(-5) + 10^(-5)*(matrix1[7,k] - matrix1[7,j])*M)*y
73
74 numerator1 <- simple_continued_fraction(a_h, b_h, c_h)
75 denominator1 <- continued_fraction(x, a_h, b_h, c_h)
76
77 numerator2 <- simple_continued_fraction(a_ht, b_ht, c_ht)
78 denominator2 <- continued_fraction(x, a_ht, b_ht, c_ht)
79
80 result <- numerator1/denominator1 + (1/x - numerator2/denominator2)*(h/1000)
81
82 return(result)
83 }
84
85 #nehidrostaticka Niellova funkcija
86
87 niell_nonhydrostatic <- function(e, phi){
88     if(e < 0 || e > 90){
89         stop("Elevacijski kut mora biti u intervalu [0,90]")
90     }
91
92     if(phi < -90 || phi > 90){
93         stop("Geografska sirina mora biti u intervalu [-90,90]")
94     }
95
96     x <- sin(e*(PI/180))

```

```

95 | q_deg <- abs(phi)
96 |
97 | if(q_deg <= 15){
98 |   j <- 1
99 |   k <- j
100 |   M <- 0
101 | }else if(q_deg >= 75){
102 |   j <- 5
103 |   k <- j
104 |   M <- 0
105 | }else{
106 |   j <- floor(floor(q_deg)/15)
107 |   k <- j + 1
108 |   M <- (q_deg - matrix1[1,j])/(matrix1[1,j+1] - matrix1[1,j])
109 | }
110 |
111 | a_nh <- matrix1[8,j]*10^(-4) + 10^(-4)*(matrix1[8,k] - matrix1[8,j])*M
112 | b_nh <- matrix1[9,j]*10^(-3) + 10^(-3)*(matrix1[9,k] - matrix1[9,j])*M
113 | c_nh <- matrix1[10,j]*10^(-2) + 10^(-2)*(matrix1[10,k] - matrix1[10,j])*M
114 |
115 | numerator <- simple_continued_fraction(a_nh, b_nh, c_nh)
116 | denominator <- continued_fraction(x, a_nh, b_nh, c_nh)
117 |
118 | result <- numerator/denominator
119 |
120 | return(result)
121 | }

```

## A.2 Izvedba Vienna funkcije

```

1 | PI <- 3.1415926535897935601
2 | a_ht <- 2.53*10^(-5)
3 | b_ht <- 5.49*10^(-3)
4 | c_ht <- 1.14*10^(-3)
5 | matrix1 = read.table("data.txt", sep=",", fill=FALSE, strip.white=TRUE)
6 |
7 | simple_continued_fraction <- function(a, b, c){
8 |   y_2 <- 1 + c
9 |   y_1 <- 1 + b/y_2
10 |  y_0 <- 1 + a/y_1
11 |  return(y_0)
12 | }
13 |
14 | continued_fraction <- function(sine, a, b, c){
15 |   y_2 <- sine + c
16 |   y_1 <- sine + b/y_2
17 |   y_0 <- sine + a/y_1
18 |   return(y_0)
19 | }
20 |
21 | #hidrostaticka Vienna funkcija
22 | vienna_hydrostatic <- function(e, phi, t, h, a_h){
23 |
24 |   if(e <= 0 || e > 90){
25 |     stop("Elevacijski kut mora biti u intervalu <0,90")
26 |   }

```

```

27
28   if(phi < -90 || phi > 90){
29     stop("Geografska sirina mora biti u intervalu [-90,90]")
30   }
31
32   if(h < 0){
33     stop("Visina mora biti veca od 0")
34   }
35
36   x <- sin(e*(PI/180))
37   doy <- t
38   c_0 <- 0.062
39
40   if(phi < 0){
41     p_h <- PI
42     c_10 <- 0.002
43     c_11 <- 0.007
44   }else{
45     p_h <- 0
46     c_10 <- 0.001
47     c_11 <- 0.005
48   }
49
50   b_h <- 0.0029
51   c_h <- c_0 + ((cos(((doy - 28)/365.25)*(2*PI) + p_h) + 1)*(c_11/2) + c_10)*(1 -
      cos(phi*(PI/180)))
52
53   numerator1 <- simple_continued_fraction(a_h, b_h, c_h)
54   denominator1 <- continued_fraction(x, a_h, b_h, c_h)
55
56   numerator2 <- simple_continued_fraction(a_ht, b_ht, c_ht)
57   denominator2 <- continued_fraction(x, a_ht, b_ht, c_ht)
58
59   result <- numerator1/denominator1 + (1/x - numerator2/denominator2)*(h/1000)
60
61   return(result)
62 }
63
64 #nehidrostaticka Vienna funkcija
65 vienna_nonhydrostatic <- function(e, phi, a_nh){
66
67   if(e < 0 || e > 90){
68     stop("Elevacijski kut mora biti u intervalu [0,90]")
69   }
70
71   if(phi < -90 || phi > 90){
72     stop("Geografska sirina mora biti u intervalu [-90,90]")
73   }
74   x <- sin(e*(PI/180))
75   b_nh <- 0.00146
76   c_nh <- 0.04391
77
78   numerator <- simple_continued_fraction(a_nh, b_nh, c_nh)
79   denominator <- continued_fraction(x, a_nh, b_nh, c_nh)
80
81   result <- numerator/denominator
82
83   return(result)
84 }

```

# Dodatak B

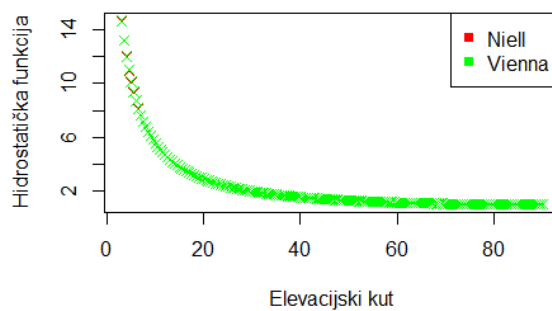
## Sadržaj datoteke data.txt

```
15,30,45,60,75
1.2769934,1.2683230,1.2465397,1.2196049,1.2045996
2.9153695,2.9152299,2.9288445,2.9022565,2.9024912
62.610505,62.837393,63.721774,63.824265,64.258455
0,1.2709626,2.6523662,3.4000452,4.1202191
0,2.1414979,3.0160779,7.2562722,11.723375
0,9.0128400,4.3497037,84.795348,170.37206
5.8021897,5.6794847,5.8118019,5.9727542,6.1641693
1.4275268,1.5138625,1.4572752,1.5007428,1.7599082
4.3472961,4.6729510,4.3908931,4.4626982,5.4736038
```

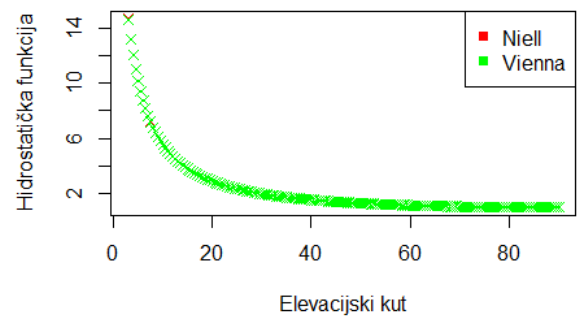
# Dodatak C

## Grafovi Niellove i Vienna funkcije

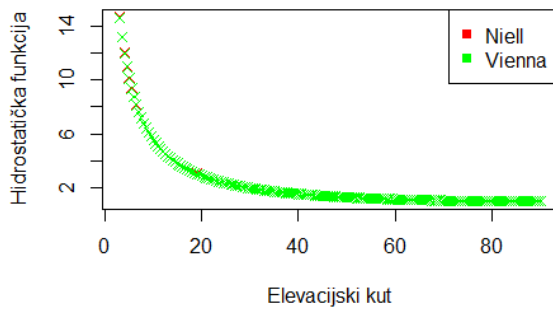
### C.1 Grafovi hidrostatsičke Niellove i Vienna funkcije



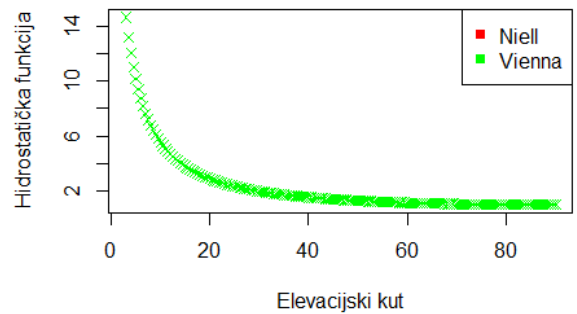
Slika C.1: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatsičke funkcije na stanici A, doy=15 (15.1.)



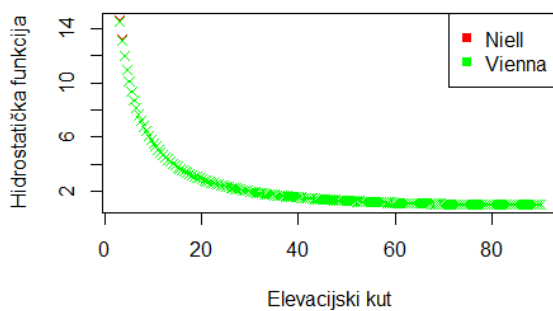
Slika C.2: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatsičke funkcije na stanici A, doy=105 (15.4.)



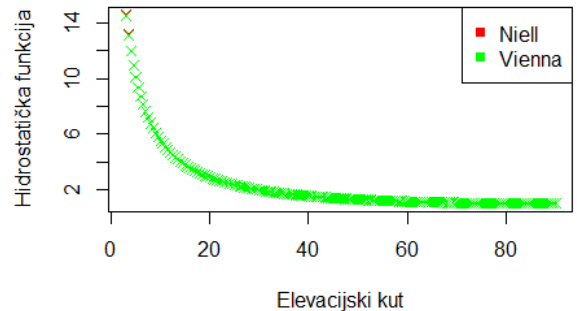
Slika C.3: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici A, doy=196 (15.7.)



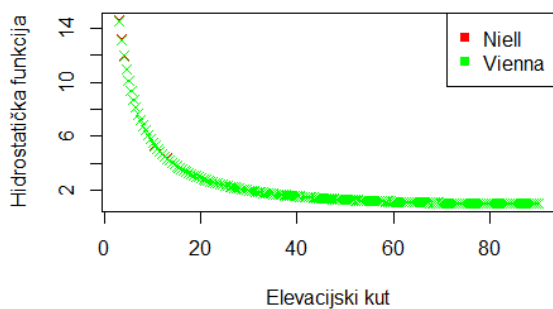
Slika C.4: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici A, doy=288 (15.10.)



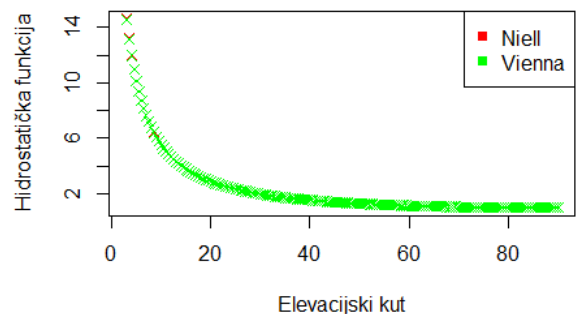
Slika C.5: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici B, doy=15 (15.1.)



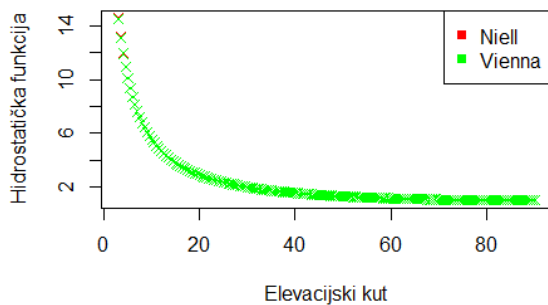
Slika C.6: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici B, doy=105 (15.4.)



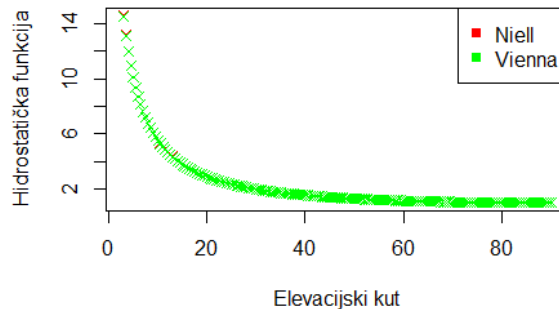
Slika C.7: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici B, doy=196 (15.7.)



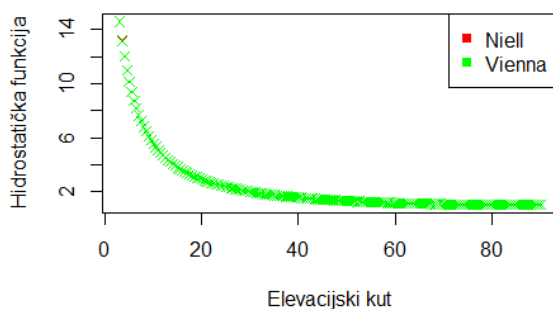
Slika C.8: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici B, doy=288 (15.10.)



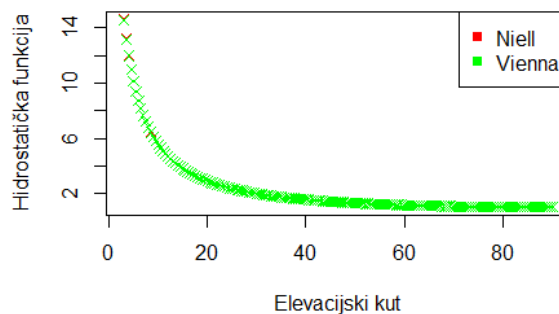
Slika C.9: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici C, doy=15 (15.1.)



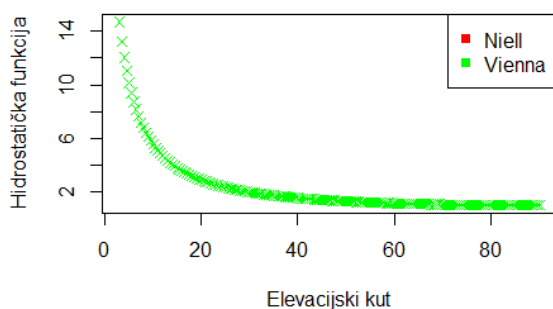
Slika C.10: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici C, doy=105 (15.4.)



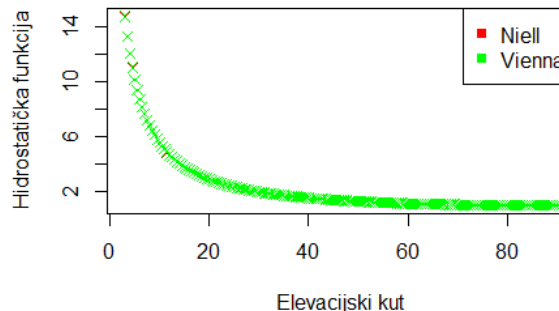
Slika C.11: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici C, doy=196 (15.7.)



Slika C.12: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici C, doy=288 (15.10.)

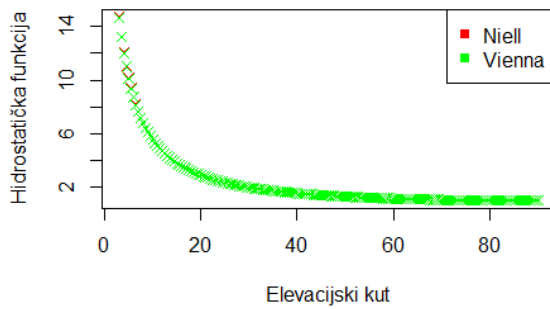


Slika C.13: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici D, doy=15 (15.1.)

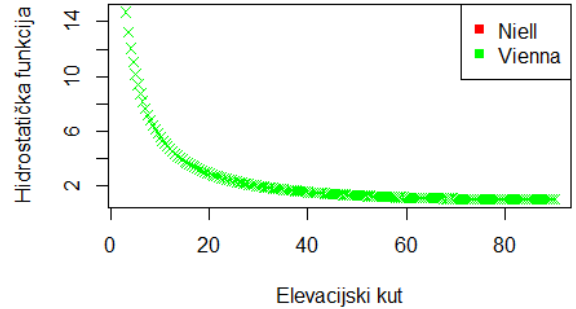


Slika C.14: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici D, doy=105 (15.4.)

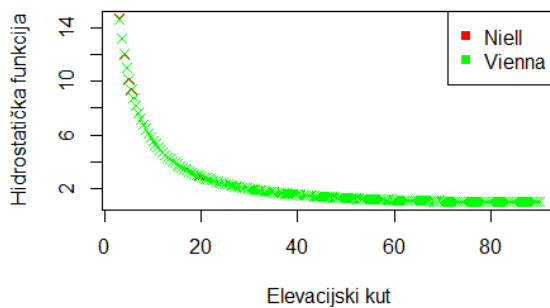




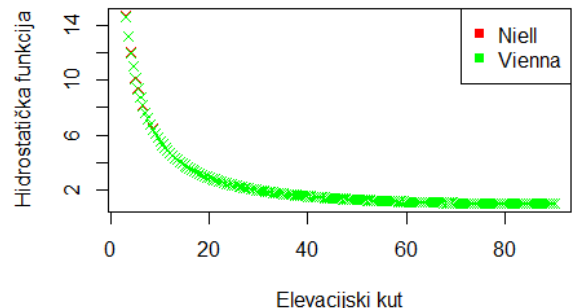
Slika C.15: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici D, doy=196 (15.7.)



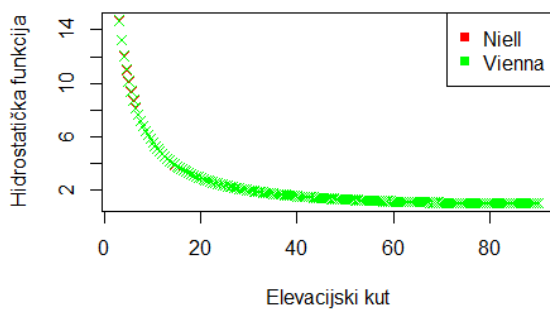
Slika C.16: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici D, doy=288 (15.10.)



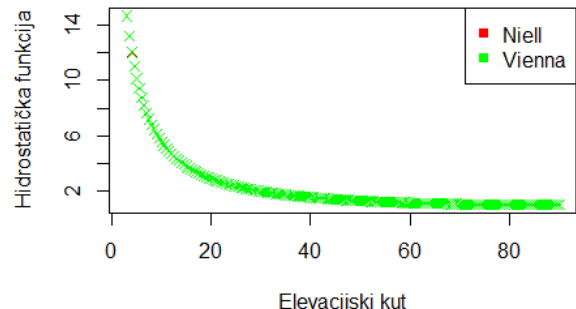
Slika C.17: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici E, doy=15 (15.1.)



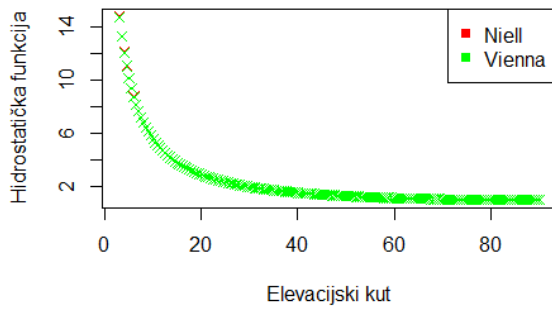
Slika C.18: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici E, doy=105 (15.4.)



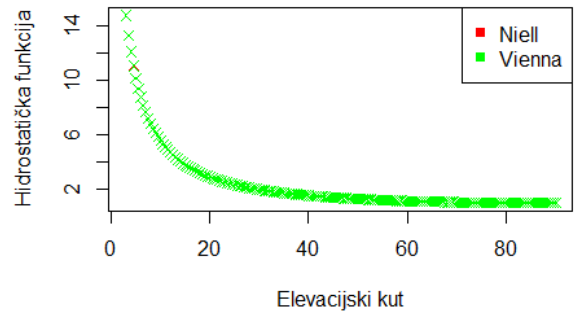
Slika C.19: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici E, doy=196 (15.7.)



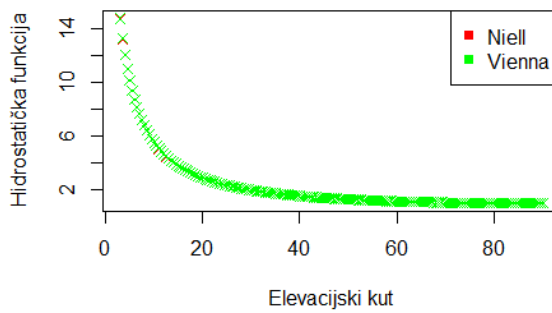
Slika C.20: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici E, doy=288 (15.10.)



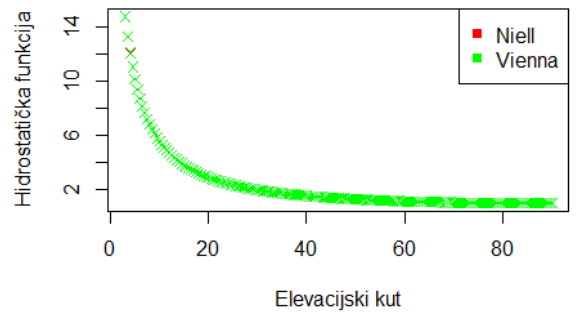
Slika C.21: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici F, doy=15 (15.1.)



Slika C.22: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici F, doy=105 (15.4.)

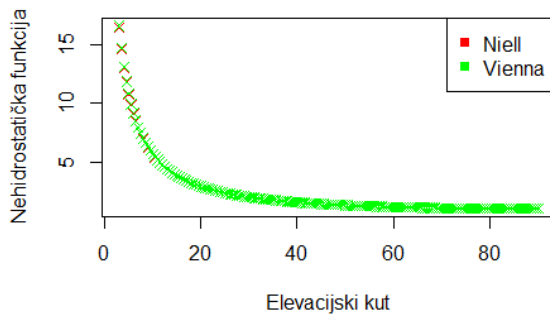


Slika C.23: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici F, doy=196 (15.7.)

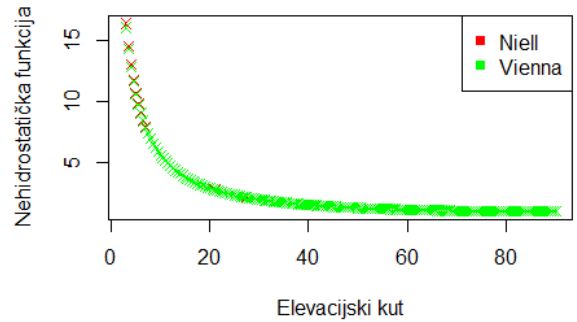


Slika C.24: Vrijednosti Niellove i Vienna hidrostatske funkcije na stanici F, doy=288 (15.10.)

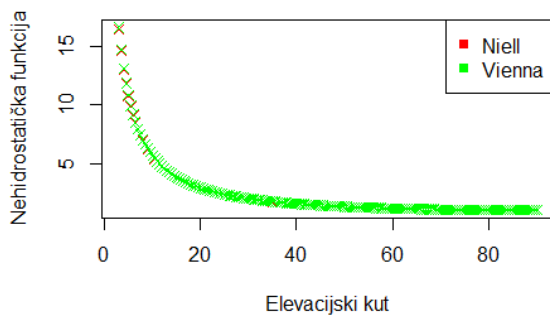
## C.2 Grafovi nehidrostatičke Niellove i Vienna funkcije



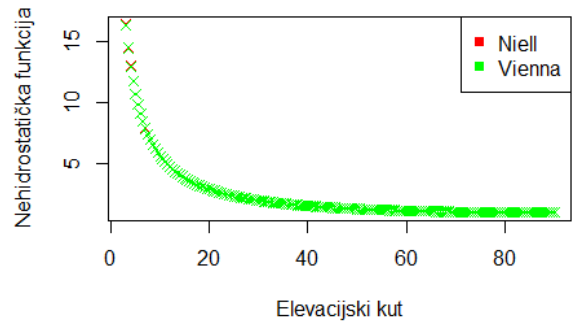
Slika C.25: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatsičke funkcije na stanici A, doy=15 (15.1.)



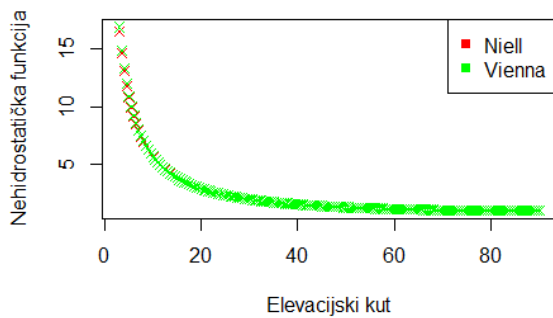
Slika C.26: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatsičke funkcije na stanici A, doy=105 (15.4.)



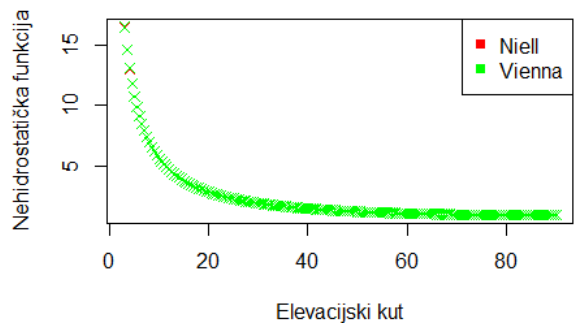
Slika C.27: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatsičke funkcije na stanici A, doy=196 (15.7.)



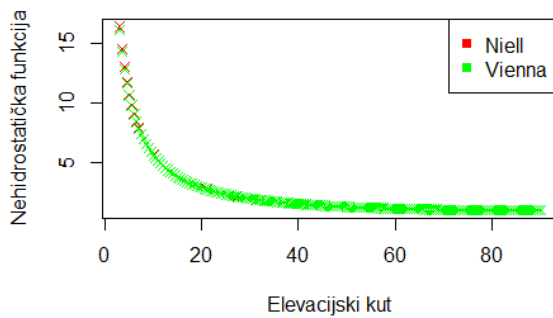
Slika C.28: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatsičke funkcije na stanici A, doy=288 (15.10.)



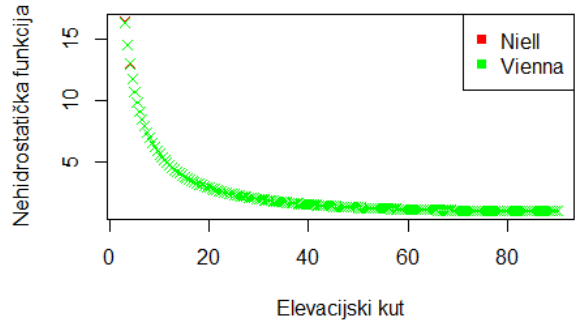
Slika C.29: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici B, doy=15 (15.1.)



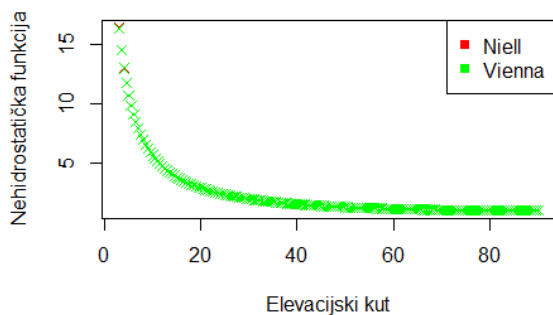
Slika C.30: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici B, doy=105 (15.4.)



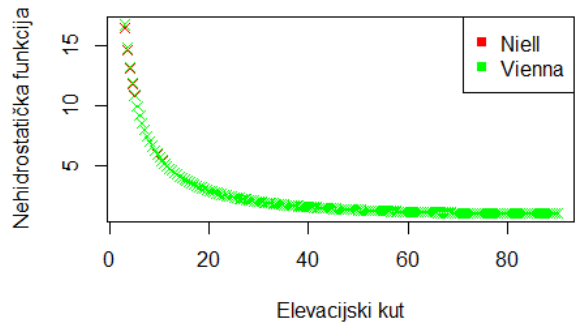
Slika C.31: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici B, doy=196 (15.7.)



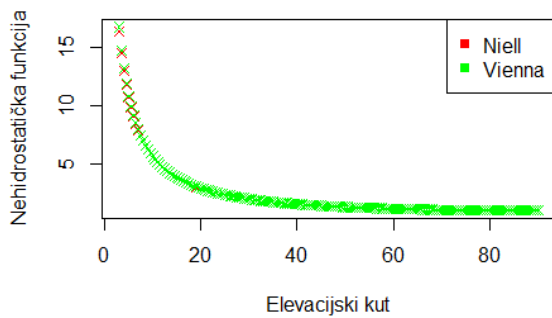
Slika C.32: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici B, doy=288 (15.10.)



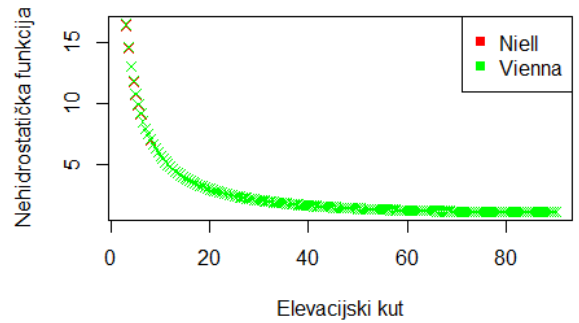
Slika C.33: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici C, doy=15 (15.1.)



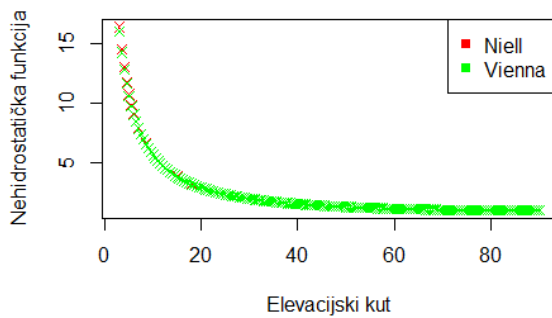
Slika C.34: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici C, doy=105 (15.4.)



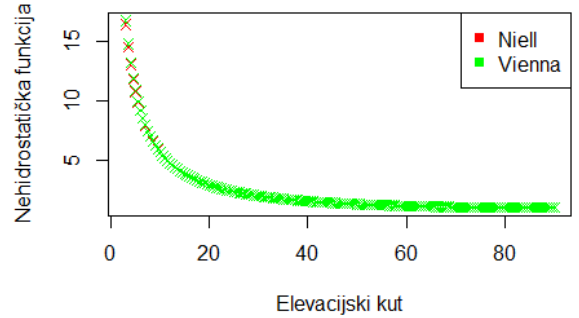
Slika C.35: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici C, doy=196 (15.7.)



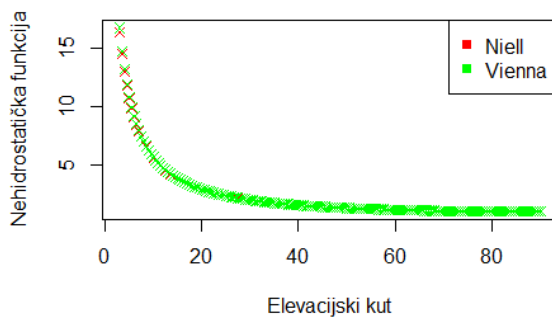
Slika C.36: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici C, doy=288 (15.10.)



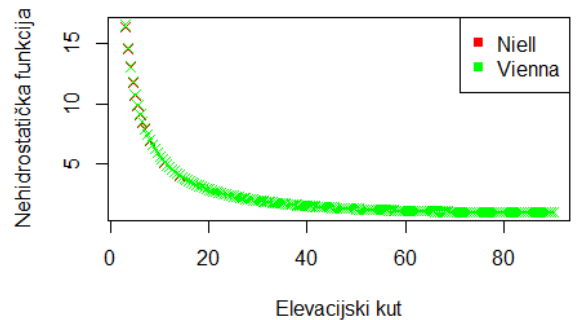
Slika C.37: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici D, doy=15 (15.1.)



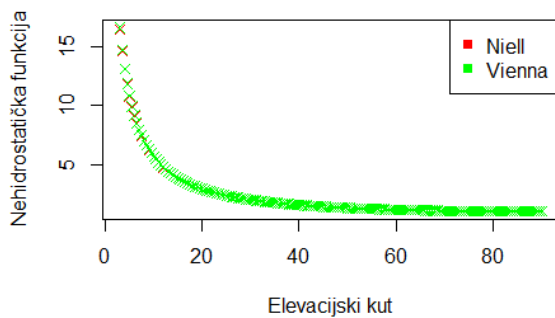
Slika C.38: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici D, doy=105 (15.4.)



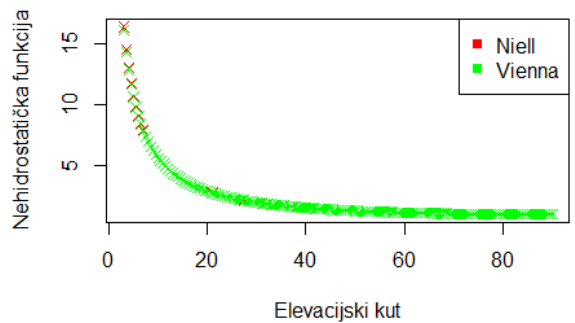
Slika C.39: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici D, doy=196 (15.7.)



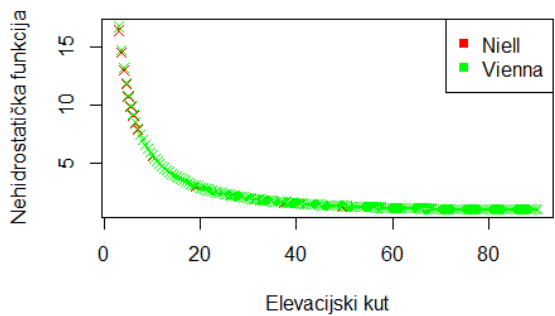
Slika C.40: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici D, doy=288 (15.10.)



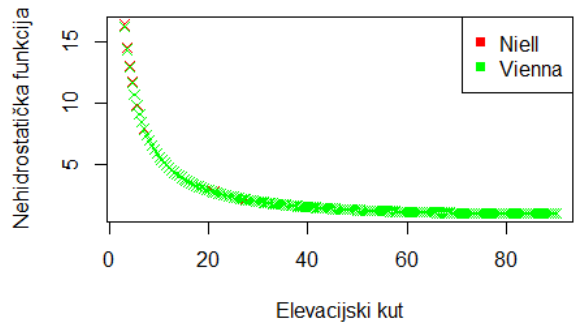
Slika C.41: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici E, doy=15 (15.1.)



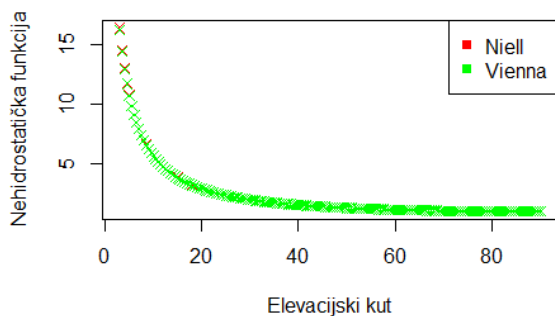
Slika C.42: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici E, doy=105 (15.4.)



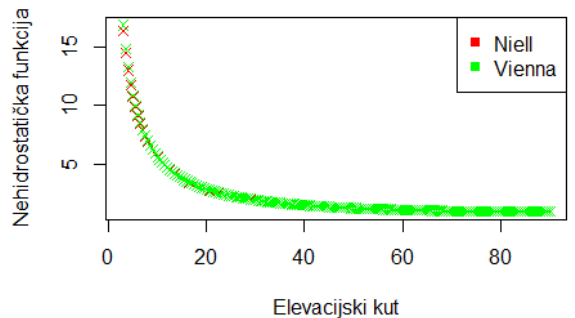
Slika C.43: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici E, doy=196 (15.7.)



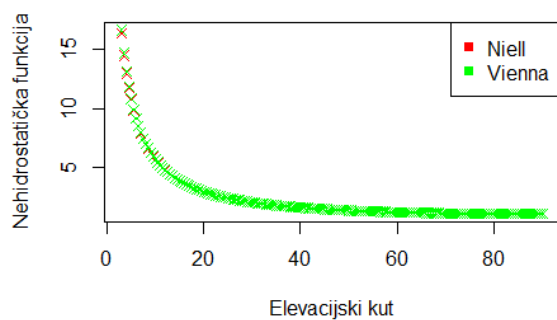
Slika C.44: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici E, doy=288 (15.10.)



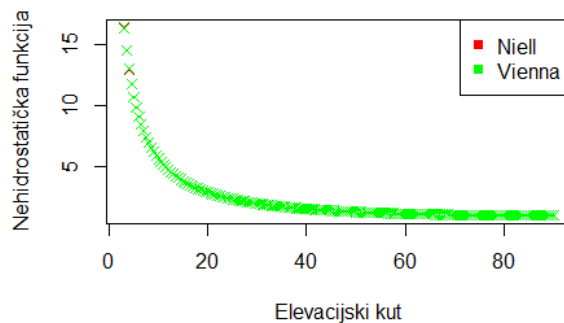
Slika C.45: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici F, doy=15 (15.1.)



Slika C.46: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici F, doy=105 (15.4.)



Slika C.47: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici F, doy=196 (15.7.)



Slika C.48: Vrijednosti Niellove i Vienna nehidrostatske funkcije na stanici F, doy=288 (15.10.)