Otkrivanje kolinearnosti karakterističnih točaka trokuta programom GeoGebra

Kladić, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:680939

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Kladić

OTKRIVANJE KOLINEARNOSTI KARAKTERISTIČNIH TOČAKA TROKUTA PROGRAMOM GEOGEBRA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, studeni, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Karakteristične točke trokuta **2**
1.1 Definicija karakteristične točke 2
1.2 Prvih 20 karakterističnih točaka trokuta 3

2 Praktični dio u programu GeoGebra **36**
2.1 Pretvorba trilinearnih koordinata u Kartezijeve koordinate 36
2.2 Otkrivanje kolinearnih karakterističnih točaka 41

3 Rigorozni dokazi **46**
3.1 Kolinearne točke $X(2)$, $X(3)$, $X(4)$, $X(5)$ i $X(20)$ 46
3.2 Kolinearne točke $X(1)$, $X(2)$, $X(8)$ i $X(10)$ 48
3.3 Kolinearne točke $X(1)$, $X(5)$, $X(11)$, i $X(12)$ 50

Bibliografija **53**

Uvod

Uz trokut vežemo niz karakterističnih točaka od kojih su neke više poznate kao što su središte upisane kružnice, težište, središte opisane kružnice te ortocentar, dok su druge manje poznate.

Ovaj diplomski rad podijelit ćemo na tri poglavlja. U prvom poglavlju navest ćemo prvih 20 karakterističnih točaka trokuta iz enciklopedije ETC [3] u kojoj se trenutno nalazi više od 30000 karakterističnih točaka trokuta. Odabrane točke ćemo definirati, navest ćemo njihova osnovna svojstva i relevantne povijesne komentare. Nadalje, karakteristične točke u enciklopediji ETC [3] identificirane su pomoću njihovih trilinearnih koordinata pa ćemo za svaku odabranu točku navesti i njezine trilinearne koordinate.

U drugom poglavlju ćemo svih 20 karakterističnih točaka unijeti u radnu bilježnicu programa GeoGebra [4] koristeći se njihovim trilinearnih koordinatama. Na taj način vizualno ćemo detektirati potencijalne skupove međusobno kolinearnih točaka među njima.

U posljednjem, trećem poglavlju, rigorozno ćemo dokazati uočene kolinearnosti koristeći elementarne metode euklidske geometrije poput onih iz klasične knjige [5].

Poglavlje 1

Karakteristične točke trokuta

Prije nego navedemo 20 karakterističnih točaka trokuta iz enciklopedije ETC [3] definirat ćemo karakteristične točke i njihove trilinearne koordinate.

1.1 Definicija karakteristične točke

Možemo si postaviti pitanje koje svojstvo treba zadovoljiti neka točka trokuta da bi je mogli nazvati karakterističnom točkom. Rigoroznu definiciju karakteristične točke dao je Kimberling u članku [2] (vidjeti i rad [1]) i ona je sljedeća.

Neka je dan trokut ABC i u njegovoj ravnini neka točka P. Orijentirane udaljenosti od te točke P do pravaca BC, CA, AB neka su redom d_a, d_b, d_c. Imajmo na umu da će ta udaljenost biti pozitivna ako se točke A i P nalaze s iste strane pravca BC, negativna ako se nalaze s različitih strana tog istog pravca te jednaka nuli ukoliko se točka P nalazi na pravcu BC. Trilinearne koordinate točke P su trojka realnih brojeva (t_a, t_b, t_c) ako postoji $k \neq 0$ takav da je $t_a = kd_a$, $t_b = kd_b$, $t_c = kd_c$. Zbog toga što su trilinearne koordinate točke P jednoznačno određene do na skalarni višekratnik, pišemo ih kao $t_a : t_b : t_c$. Kažemo da je točka P *karakteristična točka trokuta* ukoliko su njene trilinearne koordinate oblika

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

gdje je f neka funkcija definirana na skupu svih mogućih trojki (a, b, c) duljina stranica trokuta i ima sljedeća svojstva:
1. Postoji realni broj p takav da je $f(ka, kb, kc) = k^p f(a, b, c)$ za svaki $k > 0$ i za svaku trojku (a, b, c) iz domene. Kažemo, f je homogena stupnja p.
2. Za svaku trojku (a, b, c) iz domene vrijedi $f(a, c, b) = f(a, b, c)$. Možemo reći kako je ovo svojstvo svojevrsne parcijalne simetrije.
3. Funkcija f nije jednaka konstanti 0.

Spomenimo još i da jednu karakterističnu točku trokuta P mogu određivati različite funkcije f. Iz tog razloga praktično je odabrati funkciju f danu što jednostavnijom formulom. Možemo zaključiti kako trilinearne koordinate opisuju relativne udaljenosti neke točke od tri strane trokuta, a trilinearni koordinatni sustav položaj točaka u odnosu na određeni trokut.

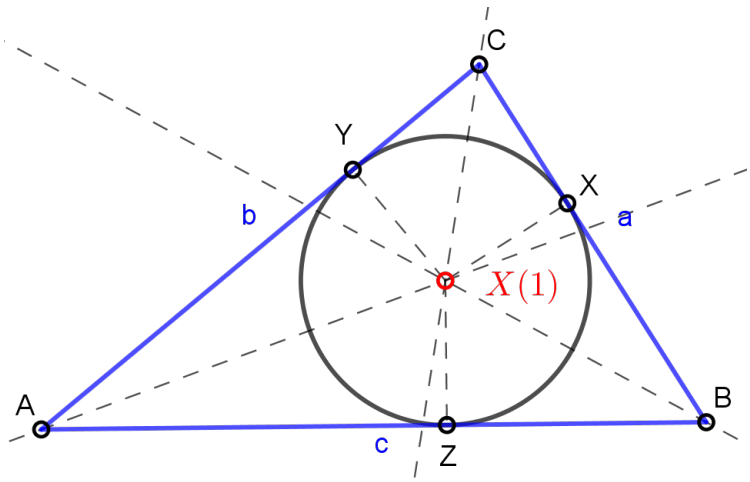
1.2 Prvih 20 karakterističnih točaka trokuta

Navedimo sada prvih 20 karakterističnih točaka trokuta iz enciklopedije ETC [3] označenih s $X(1)$–$X(20)$, neka od njihovih svojstava te relevantne povijesne komentare.

SREDIŠTE KRUŽNICE UPISANE TROKUTU, $X(1) = U$

Definicija 1. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Kružnicu koja dira svaku stranicu danog trokuta ABC s unutrašnje strane zovemo tom trokutu upisanom kružnicom.*

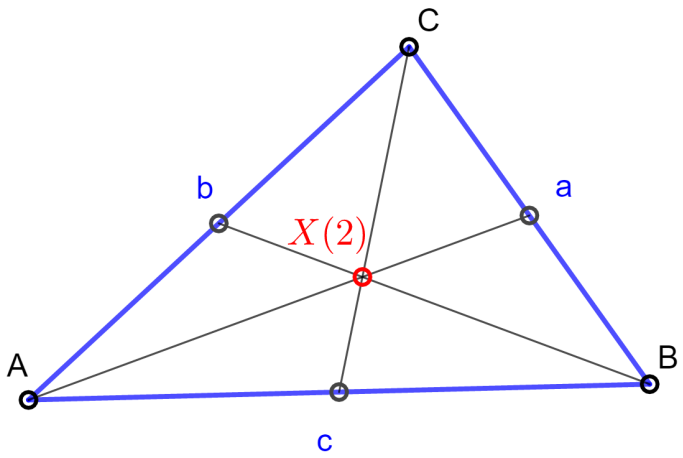
Središte $X(1)$ kružnice upisane trokutu ABC je točka jednako udaljena od svih triju stranica tog trokuta. Simetrala kuta određenog dvjema zrakama čini geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od tih dviju zraka. Zbog toga će se središte $X(1)$ nalaziti upravo na sjecištu simetrala unutarnjih kutova danog trokuta ABC gdje su $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$ (Slika 1.1.). Dakle, s obzirom da je središte $X(1)$ kružnice upisane trokutu jednako udaljeno od svih stranica trokuta, trilinearne koordinate te točke, prema ETC [3], dane su s $1 : 1 : 1$.



Slika 1.1: Središte kružnice upisane trokutu, $X(1)$

TEŽIŠTE TROKUTA, $X(2) = T$

Definicija 2. *Neka je u ravnini dan trokut ABC te neka su redom A', B' i C' polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$ tog trokuta. Spojnicu nekog vrha trokuta ABC sa polovištem suprotne stranice nazivamo težišnicom tog trokuta. Dakle, postoje tri težišnice $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ trokuta ABC koje se sijeku u jednoj točki $X(2)$ koju nazivamo težištem trokuta.*



Slika 1.2: Težište trokuta, $X(2)$

Sljedeći teorem pokazuje nam da su trilinearne koordinate težišta $X(2)$ dane s $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Dokaz tog teorema može se pronaći u [5].

Teorem 1.2.1. [5] *Za udaljenosti d_a, d_b, d_c težišta trokuta ABC od stranica a, b, c vrijedi*

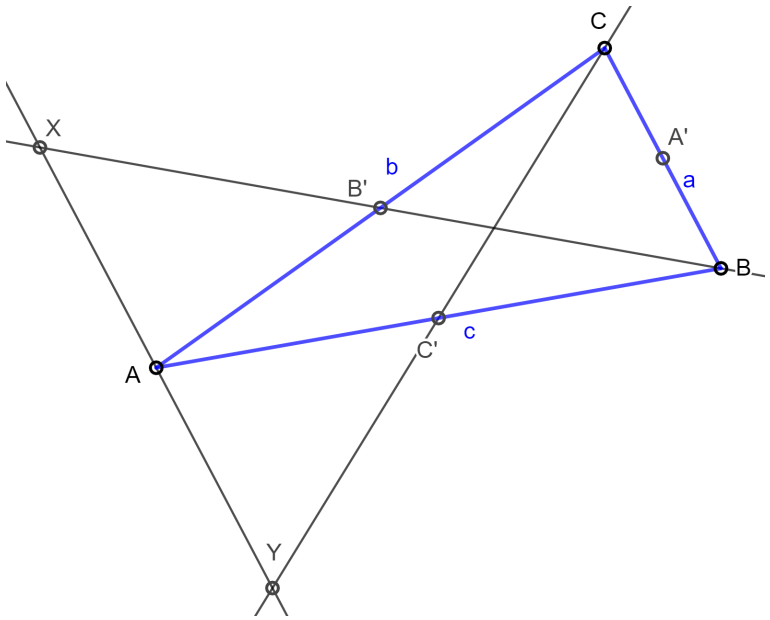
$$d_a : d_b : d_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Navedimo sada neka od zanimljivih svojstava težišta trokuta.

Teorem 1.2.2. [5] *Težište T svaku težišnicu nekog trokuta ABC dijeli u omjeru $2 : 1$, tj. vrijedi*

$$|AT| : |TA'| = |BT| = |TB'| = |CT| = |TC'| = 2 : 1.$$

Dokaz. Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$ kroz vrh A trokuta ABC. Težišnice $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ tu paralelu sijeku u točkama X i Y. Vidi Sliku 1.3.



Slika 1.3: Sjecište težišnica sa paralelom kroz vrh A

Promatrajmo trokute $AC'Y$ i BCC'. Uočimo da su $\sphericalangle YC'A$ i $\sphericalangle CC'B$ vršni kutovi pa su samim time i sukladni. Kako su $\sphericalangle C'AY$ i $\sphericalangle CBC'$ te $\sphericalangle C'YA$ i $\sphericalangle C'CB$ kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca, slijedi

$$\sphericalangle C'AY = \sphericalangle CBC'$$
$$\sphericalangle C'YA = \sphericalangle C'CB.$$

Prema KK - poučku o sličnosti zaključujemo kako su trokuti $AC'Y$ i BCC' slični pa vrijedi

$$\frac{|YA|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|BC'|} = 1.$$

Promatrajmo sada trokute $AB'X$ i $CB'B$. Uočimo da su $\sphericalangle AB'X$ i $\sphericalangle CB'B$ također vršni kutovi pa su samim time i sukladni. Nadalje, $\sphericalangle B'XA$ i $\sphericalangle CBB'$ te $\sphericalangle XAB'$ i $\sphericalangle BCB'$ kutovi su uz presječnicu paralelnih pravaca, pa slijedi

$$\sphericalangle B'XA = \sphericalangle CBB'$$
$$\sphericalangle XAB' = \sphericalangle BCB'.$$

Prema KK - poučku o sličnosti zaključujemo kako su i trokuti $AB'X$ i $CB'B$ slični pa vrijedi

$$\frac{|AX|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C|} = 1.$$

Kako su $\sphericalangle C'YA$ i $\sphericalangle C'CB$ te $\sphericalangle B'XA$ i $\sphericalangle CBB'$ sukladni kutovi, a $\sphericalangle XTY$ i $\sphericalangle CTB$ vršni kutovi pa samim time i sukladni, prema KK-poučku o sličnosti trokuti XYT i CTB su slični.

Zbog sličnosti trokuta XYT i CTB te zbog dviju gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{|AT|}{|TA'|} = \frac{|YX|}{|BC|} = \frac{|YA| + |AX|}{|BC|} = \frac{|YA|}{|BC|} + \frac{|AX|}{|BC|} = 1 + 1 = 2.$$

Zaključujemo

$$|AT| : |TA'| = 2 : 1.$$

Analogno bismo pokazali i za preostale dvije težišnice $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$. □

Sljedeći teorem povezuje dvije karakteristične točke trokuta, središte trokutu upisane kružnice $X(1)$ te težište trokuta $X(2)$.

Teorem 1.2.3. [5] *Udaljenost težišta T od središta U kružnice upisane trokutu ABC je dana s*

$$|UT| = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3s^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)},$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, r polumjer upisane kružnice, a s poluopseg trokuta.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [5].

SREDIŠTE KRUŽNICE OPISANE TROKUTU, $X(3) = O$

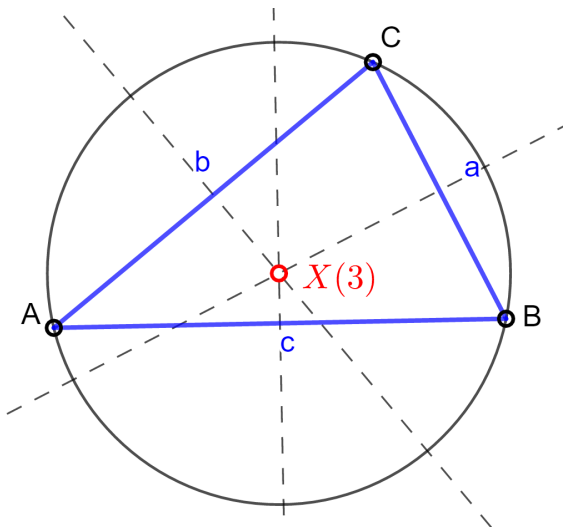
Definicija 3. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Kružnicu koja prolazi vrhovima danog trokuta ABC zovemo opisanom kružnicom trokuta.*

Simetrala dužine $\overline{AB}$ čini geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od vrhova trokuta A i B. Dakle, središte $X(3)$ kružnice opisane trokutu sjecište je simetrala dviju stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ danog trokuta ABC. Da središtem $X(3)$ prolazi i simetrala stranice $\overline{AC}$ trokuta ABC pokaže se vrlo jednostavno. Možemo, dakle, zaključiti kako je središte $X(3)$ kružnice opisane trokutu ABC jednako udaljeno od sva tri njegova vrha A, B, C (Slika 1.4.).

Kako se navodi u ETC [3], trilinearne koordinate središta kružnice opisane trokutu dane su s

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.4: Središte kružnice opisane trokutu, $X(3)$

Spomenimo još da se središte kružnice opisane trokutu nalazi unutar trokuta ukoliko se radi o šiljastokutnom trokutu, na polovištu hipotenuze kod pravokutnog trokuta te izvan trokuta ukoliko se radi o tupokutnom trokutu.

Sljedeća dva teorema povezuju središte $X(3) = O$ kružnice opisane trokutu s težištem trokuta $X(2) = T$ te sa središtem $X(1) = U$ trokutu upisane kružnice.

Teorem 1.2.4. [5] *Udaljenost težišta T od središta O kružnice opisane trokutu ABC dana je s*

$$|OT| = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)},$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, a R polumjer opisane kružnice trokutu.

Teorem 1.2.5. [5] *Udaljenost središta O kružnice opisane i središta U kružnice upisane danom trokutu ABC dana je s*

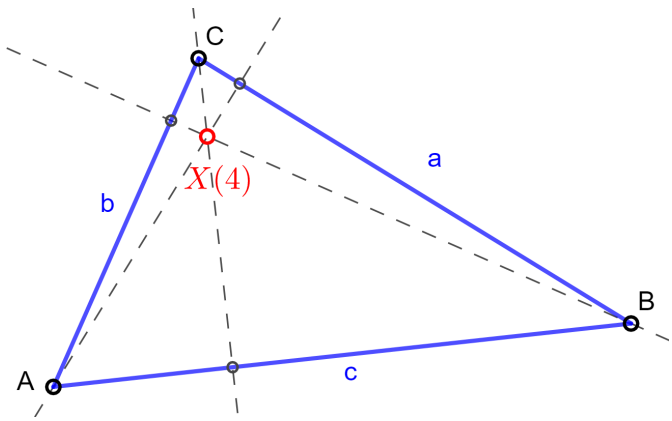
$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr,$$

gdje je R polumjer kružnice opisane, a r polumjer kružnice upisane trokutu.

Dokazi oba teorema mogu se pronaći u [5].

ORTOCENTAR, $X(4) = H$

Definicija 4. *Spuštene okomice iz vrhova danog trokuta ABC na njima suprotne stranice nazivamo visinama tog trokuta. Redom s D, E, F označimo nožišta visina. Sjecište visina $h_a = \overline{AD}$, $h_b = \overline{BE}$, $h_c = \overline{CF}$ zovemo ortocentrom H tog trokuta.*



Slika 1.5: Ortocentar trokuta, $X(4)$

Trilinearne koordinate ortocentra trokuta prema ETC [3] jednake su

$$\sec\alpha : \sec\beta : \sec\gamma,$$

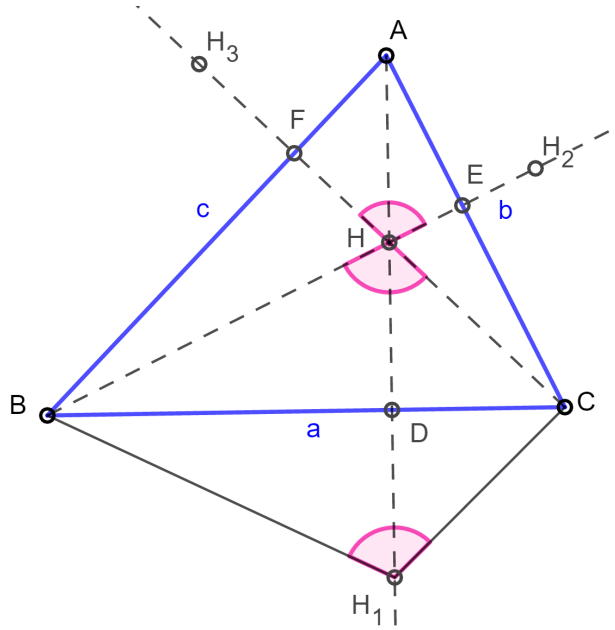
gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.

Teorem 1.2.6. [5] *Neka su točke H_1, H_2, H_3 simetrične ortocentru H s obzirom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ danog trokuta ABC. Navedene točke leže na kružnici opisanoj tom trokutu.*

Dokaz. Zbog toga što su točke H i H_1 simetrične s obzirom na stranicu BC, slijedi

$$\sphericalangle BH_1C = \sphericalangle BHC = \sphericalangle FHE.$$

Vidi Sliku 1.6.



Slika 1.6: Točke simetrične ortocentru H s obzirom na stranice trokuta ABC

Kako su odgovarajuće stranice trokuta ABC i visine okomite, vrijedi

$$\sphericalangle FHE + \sphericalangle FAE = \pi.$$

Nadalje,

$$\sphericalangle BH_1C + \sphericalangle BAC = \pi,$$

pa zaključujemo kako su A, B, H_1 i C koniciklične točke što je i trebalo pokazati. Za preostale točke, H_2 i H_3 dokazuje se analogno. □

SREDIŠTE KRUŽNICE DEVET TOČAKA, $X(5)$

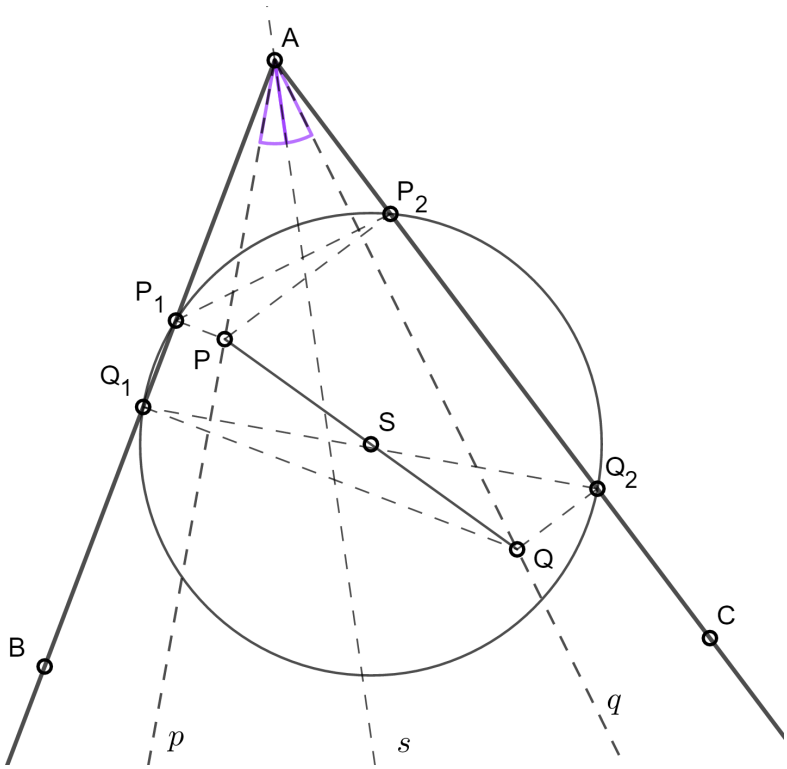
Neka je u ravnini dan neki trokut ABC. Promotrimo sljedećih devet točaka trokuta ABC:

- nožišta visina D, E, F,
- polovišta stranica A', B', C'
- polovišta P, Q, R dužina HA, HB, HC gdje je H ortocentar.

Teorem 1.2.7. [5] *Navedenih devet točaka leži na jednoj kružnici. Nazivamo je kružnicom devet točaka.*

Prije samog dokaza, dokazat ćemo sve potrebne teoreme koje ćemo koristiti u dokazu.

Definicija 5. *Dan je kut ∢BAC (Slika 1.7.). Par pravaca koji sa simetralom tog kuta čine jednake kutove, a prolaze njegovim vrhom, nazivamo izogonalama tog kuta.*



Slika 1.7: Izogonale

Teorem 1.2.8. [5] *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Ukoliko se tri pravca koja prolaze vrhovima danog trokuta sijeku u jednoj točki P, onda će se i njihove izogonale siječi u nekoj točki P'. Točke P i P' zovemo tada izogonalno konjugiranim točkama ili samo kraće izogonalnim točkama trokuta ABC.*

Dokaz ovog teorema možemo pronaći u [5].

Teorem 1.2.9. [5] *Nožišta okomica P_1, P_2, Q_1, Q_2 spuštenih iz točaka P i Q sa izogonala na stranice danog kuta koncikličnе su točke. Središte kružnice koju te točke određuju je polovište dužine PQ (Slika 1.7.).*

Dokaz. Uočimo kako su kutovi $\sphericalangle AP_1P$ i $\sphericalangle PP_2A$ te $\sphericalangle AQ_1Q$ i $\sphericalangle QQ_2A$ pravi pa su četverokuti AP_1PP_2 i AQ_1QQ_2 tetivni sa zajedničkim kutom $\sphericalangle BAC$.

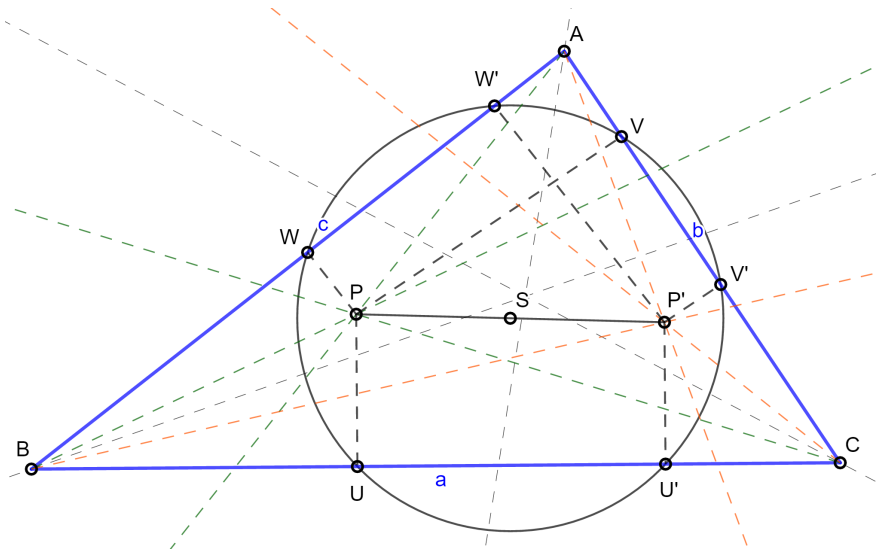
Slijedi da su trokuti AP_1P_2 i AQ_2Q_1 slični. Dakle,

$$|AP_1| \cdot |AQ_1| = |AP_2| \cdot |AQ_2|.$$

Primijetimo kako je $|AP_1| \cdot |AQ_1|$ jednako potenciji točke A s obzirom na kružnicu koja prolazi točkama $P_1,\ P_2,\ Q_1$. Dakle, na toj kružnici treba se nalaziti i točka Q_2.

S obzirom da su $\overline{P_1Q_1}$ i $\overline{P_2Q_2}$ tetive te kružnice, njihove simetrale raspolavljaju dužinu $\overline{PQ}$. Možemo, dakle, zaključiti kako je polovište S dužine $\overline{PQ}$ ujedno i središte kružnice koja prolazi točkama $P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$. □

Teorem 1.2.10. [5] *Šest nožišta okomica spuštenih iz nekog para izogonalnih točaka P i P' na stranice danog trokuta ABC leže na jednoj kružnici. Polovište dužine $\overline{PP'}$ središte je te kružnice (Slika 1.8.).*



Slika 1.8: Izogonalne točke

Dokaz. Dokaz ovog teorema provodimo primjenom Teorema 1.2.9.

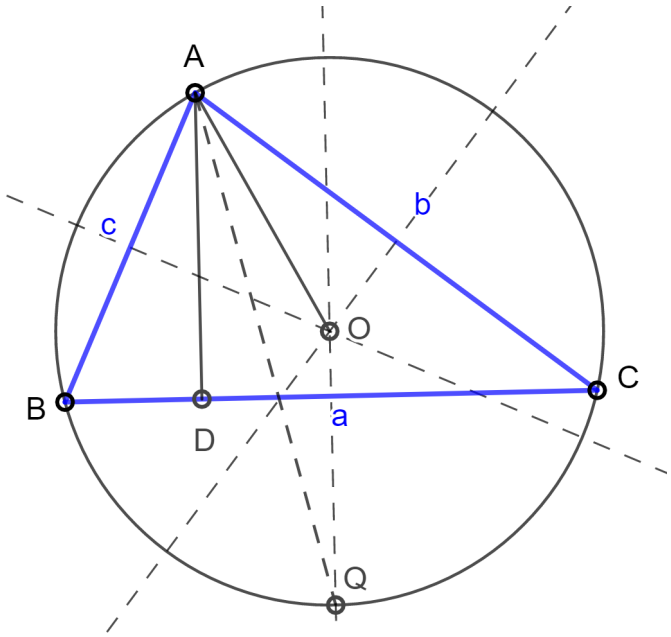
Kutovi $\sphericalangle BUP$, $\sphericalangle BWP$, $\sphericalangle BU'P'$, $\sphericalangle BW'P'$ su pravi pa su četverokuti $BUPW$ i $BU'P'W'$ tetivni sa zajedničkim kutom $\sphericalangle ABC$. Slijedi da su trokuti UPW i $W'P'U'$ slični. Pa prema Teoremu 1.2.9. točke $U,\ V,\ W,\ U',\ V',\ W'$ leže na jednoj kružnici kojoj je središte S te kružnice polovište dužine PP'. □

Teorem 1.2.11. [5] *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Visina $\overline{AD}$ koja prolazi vrhom A i polumjer $\overline{AO}$ tom trokutu opisane kružnice k_o koji prolazi istim vrhom A su izogonale.*

Dokaz. Označimo sa $\overline{OQ}$ polumjer kružnice k_o, opisane trokutu ABC, okomit na stranicu $\overline{BC}$ (Slika 1.9.).

S obzirom da je $\widehat{BQ} = \widehat{QC}$ slijedi da je AQ simetrala kuta pri vrhu A. Nadalje, trokut OAQ je očito jednakokračan te je $\sphericalangle OAQ = \sphericalangle OQA$. Kako je visina $\overline{AD}$ paralelna s OQ vrijedi $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle OQA$.

Zaključujemo kako je $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle OAQ$ pa je dokaz gotov. □



Slika 1.9: Visina $\overline{AD}$ i polumjer AO su izogonale

Teorem 1.2.12. [5] *Ortocentar H i središte O opisane kružnice izogonalne su točke trokuta.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema odmah slijedi na temelju Teorema 1.2.11. □

Napomenimo još kako kružnicu devet točaka nazivamo još i Feuerbachovom kružnicom ili Eulerovom kružnicom. Naime, teorem je objavio L. Euler 1765. godine u Petrogradu te se zbog toga spomenuta polovišta P, Q i R nazivaju još i Eulerovim točkama. Jasno je kako je središte kružnice devet točaka karakteristična točka trokuta $X(5)$.

Dokažimo sada Teorem 1.2.7.

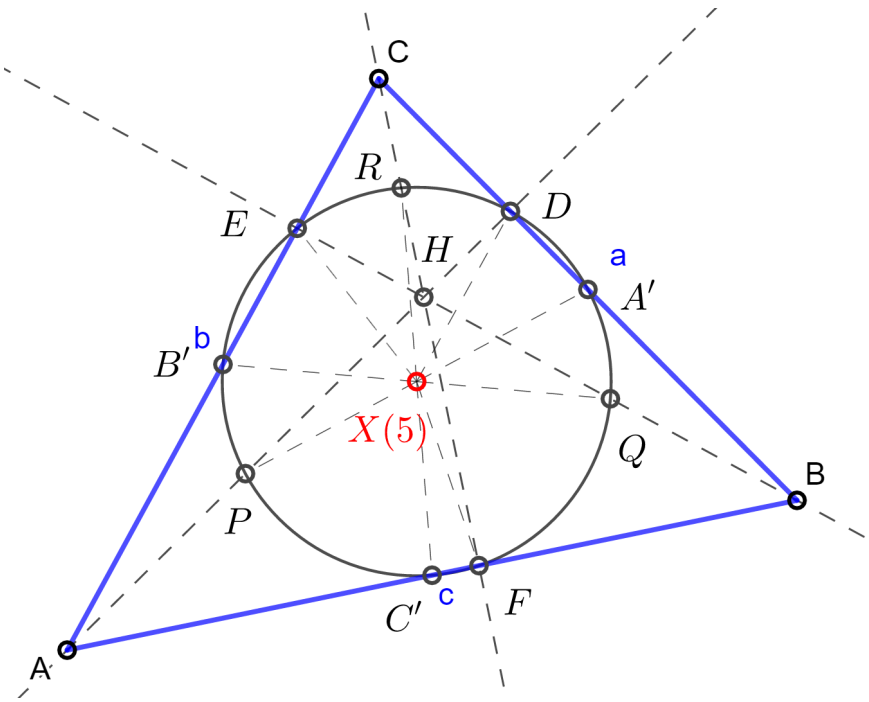
Dokaz. Prema Teoremu 1.2.12. ortocentar H i središte O kružnice opisane danom trokutu ABC izogonalne su točke pa prema Teoremu 1.2.10. slijedi da su nožišta okomica A', B', C' i D, E, F na stranice trokuta ABC iz točaka O i H koniciklične točke. Dakle, tih šest točaka leži na jednoj kružnici. Neka je sa k_9 nazvana kružnica koja prolazi kroz tih šest točaka.

Polovište dužine $\overline{AH}$ je Eulerova točka P. Slijedi kako je $B'P \parallel CF$, a s obzirom da je $A'B' \parallel AB$ vrijedi $\sphericalangle PB'A' = 90°$.

Kao što smo već rekli, P je polovište od $\overline{AH}$, a kako je C' polovište od $\overline{AB}$ slijedi $PC' \parallel BH$. Zbog toga što je $BH \perp AC$ te $AC \parallel A'C'$ vrijedi da je $\sphericalangle PC'A' = 90°$.

S obzirom da su kutovi $\sphericalangle PB'A'$ i $\sphericalangle PC'A'$ pravi možemo zaključiti kako je $PB'A'C'$ tetivni četverokut te da točka P leži na kružnici određenoj trokutom $A'B'C'$. Nadalje, točka P pripada kružnici k_9.

Za preostale dvije Eulerove točke R i Q dokaz je analogan. □



Slika 1.10: Središte kružnice devet točaka, $X(5)$

Kako navodi ETC [3], trilinearne koordinate središta kružnice devet točaka dane su s

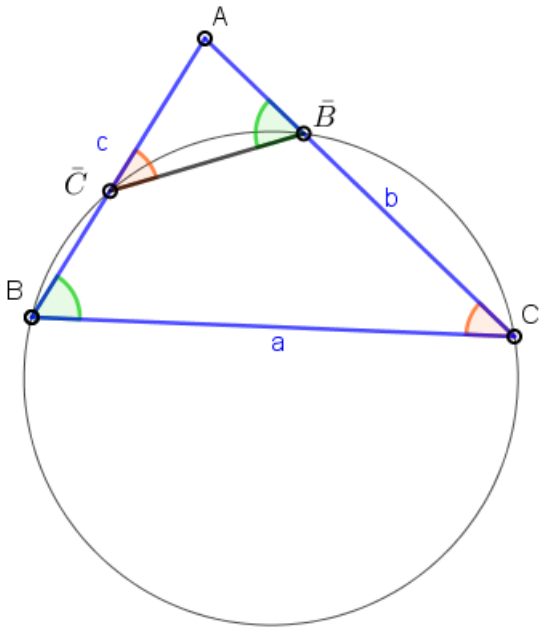
$$\cos(\beta - \gamma) : \cos(\gamma - \alpha) : \cos(\alpha - \beta),$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.

LEMOINEOVA TOČKA, $X(6) = K$

Za potrebe određivanja Lemoineove točke, navest ćemo sljedeće dvije definicije.

Definicija 6. *Neka je u ravnini dan trokut ABC, točka $\bar{B}$ na stranici $\overline{AC}$ i točka $\bar{C}$ na stranici $\overline{AB}$. Ako za takve točke vrijedi $\sphericalangle A\bar{B}\bar{C} = \beta$ tada dužinu $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ zovemo antiparalelom stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC (Slika 1.11.).*



Slika 1.11: Antiparalela trokuta *ABC*

Na Slici 1.11. možemo vidjeti kako je tada i $\sphericalangle A\bar{C}\bar{B} = \gamma$. Antiparalele preostalih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta *ABC* definiramo analogno.

Definicija 7. *Polovišta svih antiparalela neke stranice danog trokuta leže na jednom pravcu koji prolazi trećim vrhom trokuta. Takav se pravac zove simedijana danog trokuta.*

Dokažimo još i sljedeća dva teorema kako bismo u potpunosti mogli reći što to Lemoineova točka jest.

Teorem 1.2.13. [5] *Ako je $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ antiparalela stranice $\overline{BC}$, tada su točke B, C, $\bar{B}$, $\bar{C}$ konciklične. Vrijedi i obrnuto: bilo koja kružnica koja prolazi točkama B i C siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama $\bar{C}$ i $\bar{B}$ takvima da je $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ antiparalela.*

Dokaz. S obzirom da je $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ antiparalela, $\sphericalangle A\bar{B}\bar{C} = \beta$ pa slijedi $\sphericalangle C\bar{B}\bar{C} = 180^\circ - \beta$. A kako je

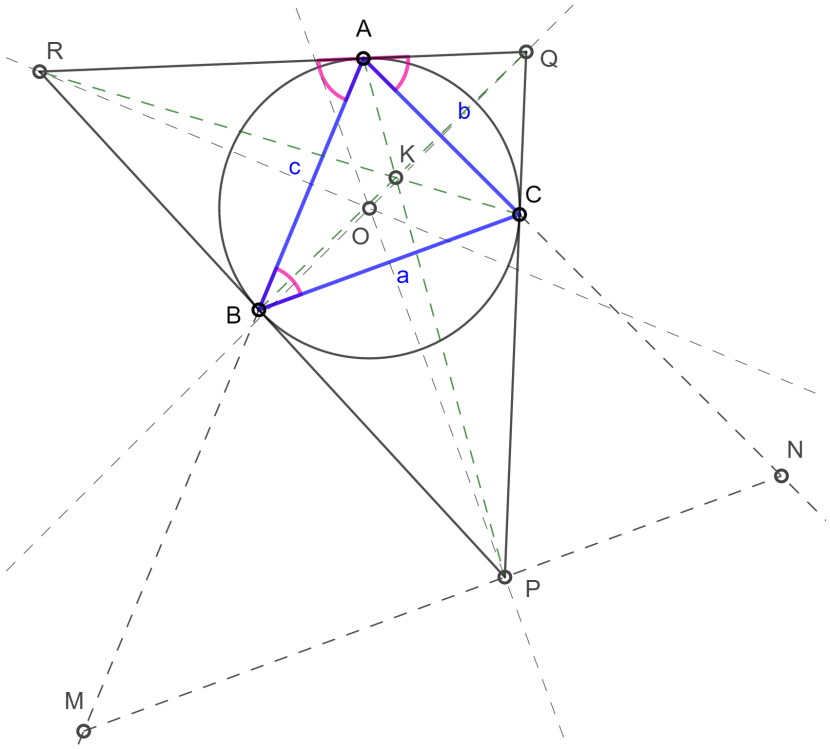
$$\sphericalangle A\bar{B}\bar{C} + \sphericalangle C\bar{B}\bar{C} = 180^\circ,$$

četverokut $BC\bar{B}\bar{C}$ je tetivni što znači da su točke B, C, $\bar{B}$, $\bar{C}$ konciklične.

Pretpostavimo li da su točke B, C, $\bar{B}$, $\bar{C}$ konciklične, tada je četverokut $BC\bar{B}\bar{C}$ tetivni. Dakle, $\sphericalangle C\bar{B}\bar{C} = 180^\circ - \beta$ pa je $\sphericalangle A\bar{B}\bar{C} = \beta$ što znači da je $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ antiparalela trokuta ABC. □

Teorem 1.2.14. [5] *Neka su stranice trokuta PQR tangente opisane kružnice k_o danog trokuta ABC u njegovim vrhovima. Spojnice $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ raspolavljaju antiparalele stranice $\overline{BC}$, odnosno $\overline{AC}$, odnosno $\overline{AB}$ i sijeku se u točki K.*

Dokaz. Za početak, neka je $\overline{MN}$ antiparalela stranice $\overline{BC}$ te neka prolazi točkom P (Slika 1.12.). Prema Teoremu 1.2.13. tangenta kružnice opisane trokutu ABC u točki A paralelna je s antiparalelom MN iz čega slijedi $MN \parallel RQ$.



Slika 1.12: Spojnice $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ sijeku se u točki K

Dakle, $\sphericalangle PMB = \sphericalangle RAB$. Kako je $|AR| = |RB|$, slijedi da je $\sphericalangle RAB = \sphericalangle RBA = \sphericalangle MBP$. Nadalje, $|PM| = |PB|$. Analogno se pokaže kako je $|PN| = |PC|$.

Točka P je polovište od $\overline{MN}$ zbog toga što je $|PB| = |PC|$. Možemo zaključiti kako pravac AP siječe antiparalelu MN u njenom polovištu P. Nadalje, prema Teoremu 1.2.12. pravac AP siječe i sve ostale antiparalele stranice $\overline{BC}$ u njihovim polovištima.

Da pravac BQ siječe sve antiparalele stranice $\overline{AC}$ u njihovim polovištima te da pravac CR siječe sve antiparalele stranice $\overline{AB}$ u njihovim polovištima dokazuje se analogno. □

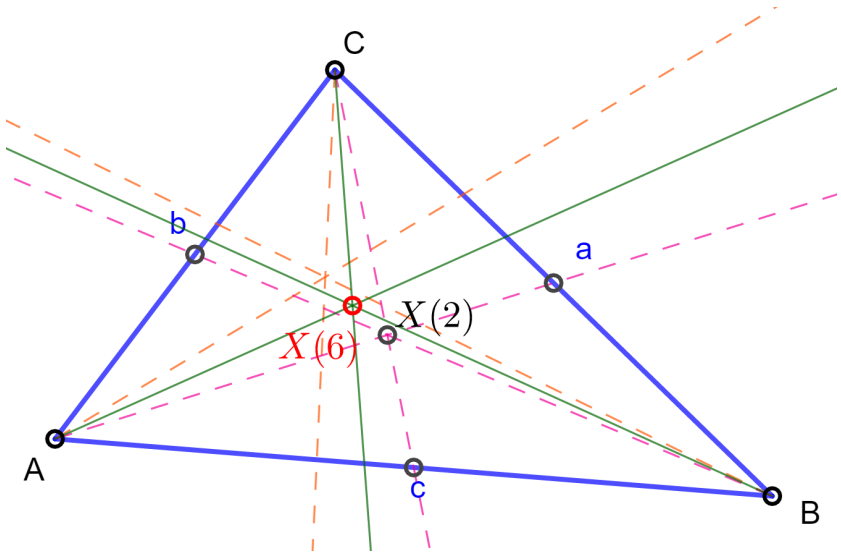
Teorem 1.2.15. [5] *Simedijane nekog trokuta ABC sijeku se u jednoj točki K koju nazivamo Lemoineovom točkom.*

Dokaz. S obzirom da su pravci AP, BQ CR iz Teorema 1.2.14. simedijane trokuta ABC pa slijedi dokaz. □

Prema ETC [3], trilinearne koordinate Lemoineove točke $X(6)$ dane su s

$$a : b : c,$$

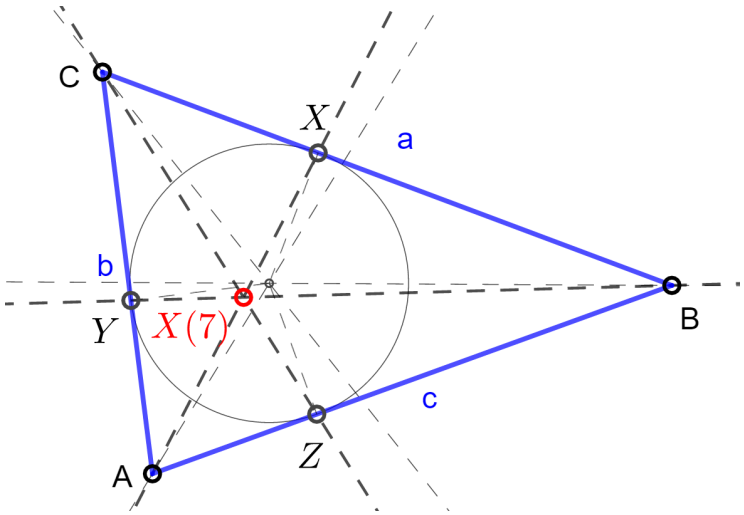
gdje su a, b i c duljine stranica trokuta.



Slika 1.13: Lemoineova točka, $X(6)$

GERGONNEOVA TOČKA, $X(7) = \Gamma$

Teorem 1.2.16. [5] *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Pravci koji spajaju vrhove A, B, C danog trokuta ABC s diralištima X, Y, Z upisane kružnice trokutu sa suprotnim stranicama, sijeku se u točki* Γ *koju nazivamo Gergonneovom točkom (Slika 1.14.).*



Slika 1.14: Gergonneova točka, $X(7)$

Za potrebe dokaza ovog teorema dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 1.2.17. [5] *Neka su s X, Y, Z označena dirališta upisane kružnice s odgavarajućim stranicama danog trokuta ABC (Slika 1.1.). Vrijedi*

$$\begin{gathered}|AZ| + |BC| = |BX| + |AC| = |CY| + |AB| = s,\\ |AZ| = |AY| = s - a,\\ |BX| = |BZ| = s - b,\\ |CY| = |CX| = s - c,\end{gathered}$$

gdje, podsjetimo, s označava poluopseg trokuta ABC.

Dokaz. Prisjetimo se kako je udaljenost od oba dirališta tangenata, položenih na neku kružnicu, do neke točke u ravnini jednaka. Slijedi

$$\begin{gathered}|AY| = |AZ|,\\ |BX| = |BZ|,\\ |CX| = |CY|.\end{gathered}$$

Zbrojimo li duljine svih navedenih šest dužina dobijemo opseg danog trokuta ABC, tj. $2s$. Dakle,

$$|AZ| + |BZ| + |CY| = s.$$

Nadalje, s obzirom da je

$$|BZ| + |CY| = |BX| + |CX| = |BC| = a,$$

slijedi

$$|AZ| = |AY| = s - a.$$

Analogno dokazujemo preostale jednakosti. □

Prije nego što dokažemo Teorem 1.2.16., iskažimo Cevin teorem.

Teorem 1.2.18. [5] *Neka točke A_1, B_1, C_1 leže na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ danog trokuta ABC. Nužan i dovoljan uvjet da se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki R glasi*

$$(AB : C_1)(BC : A_1)(CA : B_1) = -1,$$

odnosno

$$\frac{[AC_1]}{[BC_1]} \cdot \frac{[BA_1]}{[CA_1]} \cdot \frac{[CB_1]}{[AB_1]} = -1.$$

Dokaz. Dokaz Cevinog teorema može se naći u [5]. □

Dokažimo sada Teorem 1.2.16.

Dokaz. Prema Teoremu 1.2.17. slijedi da je

$$\begin{aligned} |AY| &= |AZ|, \\ |BX| &= |BZ|, \\ |CX| &= |CY|, \end{aligned} \tag{1.1}$$

a prema Cevainu teoremu 1.2.18. treba vrijediti

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = -1. \tag{1.2}$$

Uzmemo li u obzir orijentacije dužina iz (1.1) i uvrstimo li te jednakosti u (1.2) možemo se uvjeriti da vrijedi (1.2). □

Dakle, pravci AX, BY i CZ su Cevaini pravci što znači da se sijeku u jednoj točki i to upravo u točki $X(7)$.

Spomenimo još kako su prema ETC [3] trilinearne koordinate Geogenneove točke dane s

$$\frac{bc}{b+c-a} : \frac{ca}{c+a-b} : \frac{ab}{a+b-c},$$

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta.

NAGELOVA TOČKA, $X(8) = N$

Definicija 8. *Neka je u ravnini dan trokut ABC sa stranicama a, b, c. Kružnicu k_a koja dira stranicu a s vanjske strane i produženja ostalih stranica b i c, zovemo pripisanom kružnicom k_a uz stranicu a. Analogno definiramo uz stranice b i c pripisane kružnice k_b te k_c (Slika 1.15.).*

Uvedimo sada sljedeće oznake:
- X_a, Y_a, Z_a — dirališta pripisane kružnice k_a sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$;
- X_b, Y_b, Z_b — dirališta pripisane kružnice k_b sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$;
- X_c, Y_c, Z_c — dirališta pripisane kružnice k_c sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.

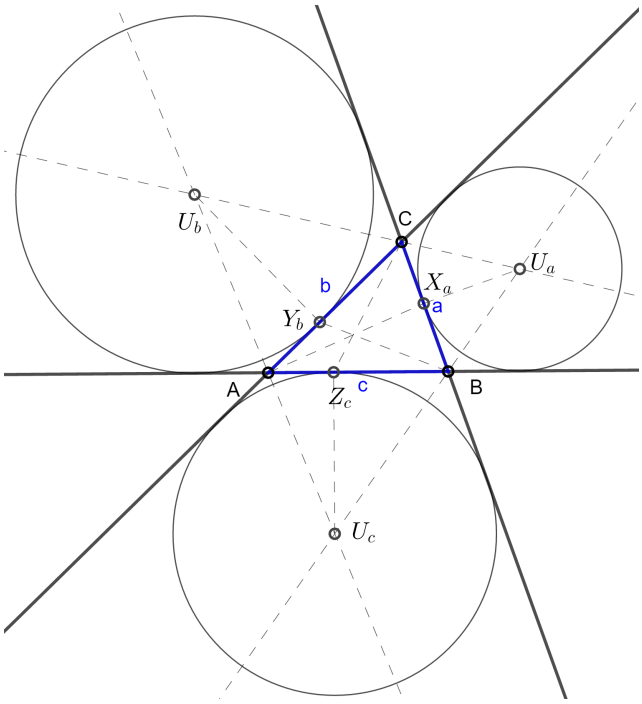
Vrhove danog trokuta ABC spojimo sa diralištima koja se nalaze na suprotnoj stranici odgovarajućeg vrha tog trokuta. Dobivamo devet spojnica:

$$\overline{AX_a},\ \overline{AX_b},\ \overline{AX_c},$$

$$\overline{BY_a},\ \overline{BY_b},\ \overline{BY_c},$$

$$\overline{CZ_a},\ \overline{CZ_b},\ \overline{CZ_c}.$$

Kroz unutrašnjost trokuta ABC prolaze spojnice $\overline{AX_a}$, $\overline{BY_b}$, $\overline{CZ_c}$, (Slika 1.15.).



Slika 1.15: Pripisane kružnica trokutu ABC

Teorem 1.2.19. [5] *Spojnice* $\overline{AX_a}$, $\overline{BY_b}$, $\overline{CZ_c}$, *sijeku se u jednoj točki N koju nazivamo Nagelovom točkom.*

Za potrebe dokaza ovog teorema dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 1.2.20. [5] *Neka su s* X_a, Y_a, Z_a *označena dirališta pripisane kružnice* k_a *s odgavarajućim stranicama danog trokuta ABC (Slika 1.15.). Vrijedi*

$$|AZ_a| = |AB| + |BX_a| = |CA| + |CX_a| = s,$$
$$|AZ_a| = |AY_a| = s,$$
$$|BX_a| = |BZ_a| = s - c,$$
$$|CX_a| = |CY_a| = s - b.$$

Dokaz ovog teorema provodi se u potpunosti analogno kao i Teorem 1.2.17. Također, analogno se dokazuju jednakosti vezane uz preostale pripisane kružnice k_b i k_c. Dokažimo sada Teorem 1.2.19.

Dokaz. Prema Cevainu teoremu 1.2.18. treba vrijediti

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = -1. \tag{1.3}$$

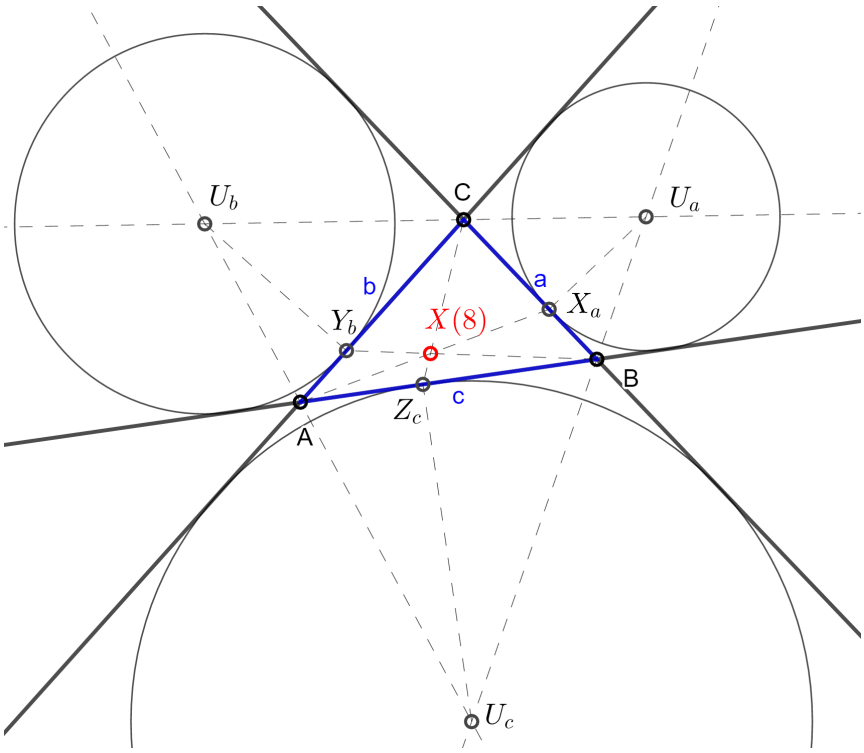
Prema Teoremu 1.2.20. slijedi:

$$|BX_a| = s - c;\ |CX_a| = s - b,$$
$$|CY_b| = s - a;\ |AY_b| = s - c,$$
$$|AZ_c| = s - b;\ |BZ_c| = s - a.$$

Uvrstimo li prethodne jednakosti u (1.3) dobivamo

$$\frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1,$$

a uvažimo li i orijentacije dužina možemo se uvjeriti da je (1.3) ispunjeno. □



Slika 1.16: Nagelova točka, $X(8)$

Sljedećim teoremom pokazat ćemo neka svojstva Nagelove točke $X(8) = N$ za neki trokut ABC.

Teorem 1.2.21. [5] *Nagelova točka N danog trokuta ABC je središte upisane kružnice trokuta $A_1B_1C_1$ kojemu stranice a_1, b_1, c_1 prolaze vrhovima A, B, C danog trokuta i paralelne su sa suprotnim stranicama tog trokuta.*

Za dokaz Teorema 1.2.21. potrebno je prvo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.2.22. [5] *Neka su X, X_a, X_b, X_c označena dirališta upisane i pripisanih kružnica sa stranicom danog trokuta ABC (Slika 1.17). Vrijedi*

$$|XX_a| = b - c,$$

$$|XX_b| = b,$$

$$|XX_c| = c.$$

Točke X i X_a leže simetrično s obzirom na polovište A' stranice $\overline{BC}$.

Dokaz. Sljedeće jednakosti vrijede zbog Teorema 1.2.17. i Teorema 1.2.20.

$$|XX_a| = |BX_a| - |BX| = (s-c) - (s-b) = b - c,$$

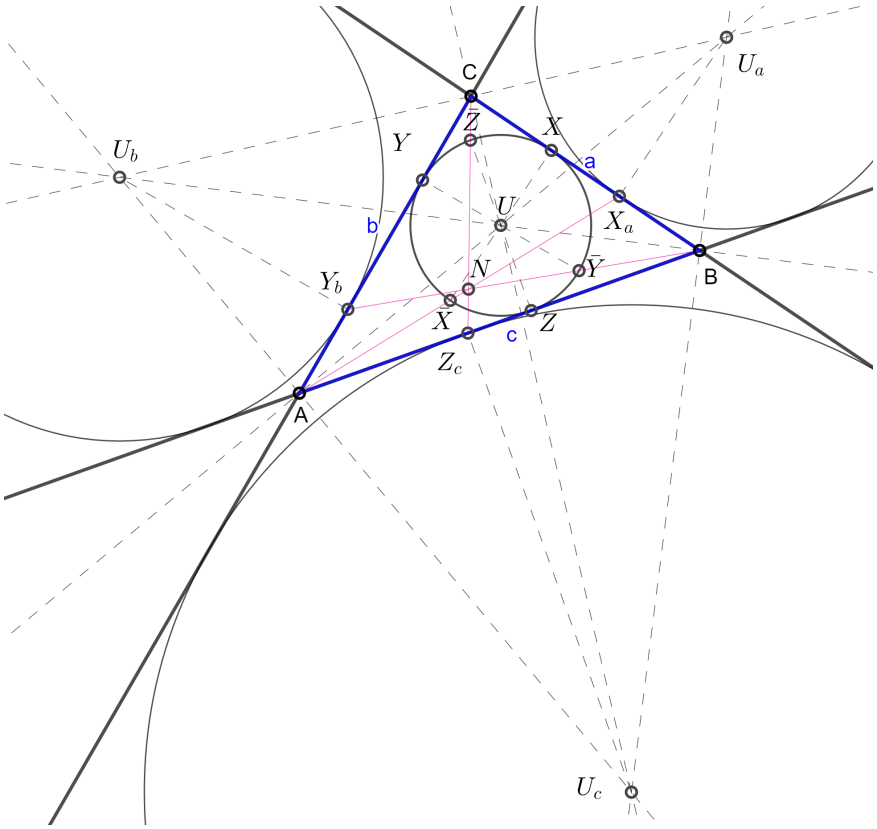
$$|XX_b| = |BX_b| - |BX| = s - (s-b) = b,$$

$$|XX_c| = |CX_c| - |CX| = s - (s-c) = c.$$

No, prema Teoremu 1.2.17. i Teoremu 1.2.20. je i

$$|BX| = |CX_a| = s - b,$$

pa su točke X i X_a simetrične s obzirom na polovište A' stranice $\overline{BC}$. □



Slika 1.17: Središta upisane i pripisanih kružnica trokutu ABC

Dokažimo sada Teorem 1.2.21.

Dokaz. Neka je k_u kružnica sa središtem U upisana trokutu ABC. Neka je X diralište kružnice k_u sa stranicom $\overline{BC}$. Slijedi kako je $\overline{UX}$ polumjer kružnice k_u te je on okomit na stranicu $\overline{BC}$. Vidi Sliku 1.17. Polumjer $\overline{UX}$ kružnice k_u produžimo u njen promjer $\overline{X\bar{X}}$.

Primijetimo kako su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ tangente upisane kružnice k_u, a produžimo li ih i tangente pripisane kružnice k_a. Možemo zaključiti kako je A centar homotetije prema kojoj se te dvije kružnice preslikavaju jedna u drugu. Dakle, točke $\bar{X}$ i X_a pridružene su točke toj homotetiji. Nadalje, zaključujemo kako točka $\bar{X}$ pripada spojnici $\overline{AX_a}$, a toj spojnici pripada i Nagelova točka.

Neka je A' polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Prema Teoremu 1.2.22. polovište dužine $\overline{XX_a}$ je upravo točka A'. S obzirom da je $\overline{X\bar{X}}$ promjer kružnice k_u, polovište dužine $\overline{X\bar{X}}$ je središte U pa slijedi da je $\overline{A'U} \parallel \overline{\bar{X}X_a}$, tj. $\overline{A'U} \parallel \overline{AX_a}$.

Neka je dan trokut $A'B'C'$. Vrhovi tog trokuta A', B', C' redom su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Zbog toga što su trokuti ABC i $A'B'C'$ homotetični, gdje je težište T centar te homotetije, vrijedi $|AT| : |A'T| = 2 : 1$. Što znači da je konstanta homotetije $k = \frac{1}{2}$.

Uočimo kako se tom homotetijom pravac AX_a preslika u pravac $A'U$ zbog toga što se točka A preslika u točku A' i zbog toga što su pravci AX_a i UA' paralelni. Dalje možemo zaključiti kako se pravac BY_b tom homotetijom preslikava u pravac $B'U$ te pravac CZ_c u $C'U$. A kako je točka N sjecište pravaca AX_a, BY_b, CZ_c, tako su i središte U kružnice k_u i Nagelova točka N homotetične točke.

Dakle, možemo zaključiti kako su središte U kružnice k_u upisane trokutu, Nagelova točka N i težište T, koje nam je kao što smo već i rekli ujedno i centar hommotetije, kolinearne točke. Štoviše, kako je konstanta homotetije $k = \frac{1}{2}$, slijedi $|NT| = 2|UT|$.

Istom tom homotetijom trokut $A_1B_1C_1$ preslikava se u trokut ABC, kružnica upisana trokutu $A_1B_1C_1$ u kružnicu upisanu trokutu ABC te središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$ u središte kružnice upisane trokutu ABC. Konačno zaključujemo kako je upravo Nagelova točka N središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$ što je i trebalo pokazati. □

Navedimo još i trilinearne koordinate Nagelove točke. Prema ETC [3] one su dane s

$$\frac{b+c-a}{a} : \frac{c+a-b}{b} : \frac{a+b-c}{c},$$

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta.

$X(9)$ = MITTENPUNKT

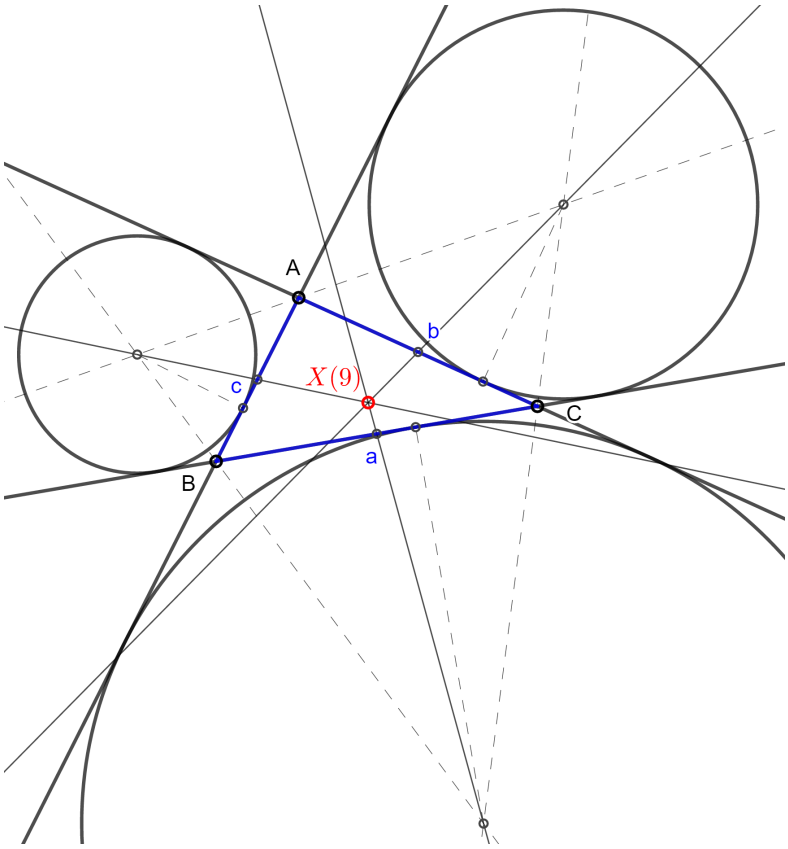
Karakterističnu točku trokuta $X(9)$, tj. Mittenpunkt otkrio je Christian Heinrich von Nagel 1836. godine. Za potrebe definiranja te točke, koristit ćemo Teorem 1.2.14. te Definiciju 8.

Definicija 9. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Lemoineovu točku trokuta čiji su vrhovi središta pripisanih kružnica danog trokuta ABC nazivamo Mittenpunkt.*

Trilinearne koordinate Mittenpunkta prema ETC [3] dane su s

$$(b + c - a) : (c + a - b) : (a + b - c)$$

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta.



Slika 1.18: Mittenpunkt, $X(9)$

$X(10)$ = SPIEKEROV CENTAR

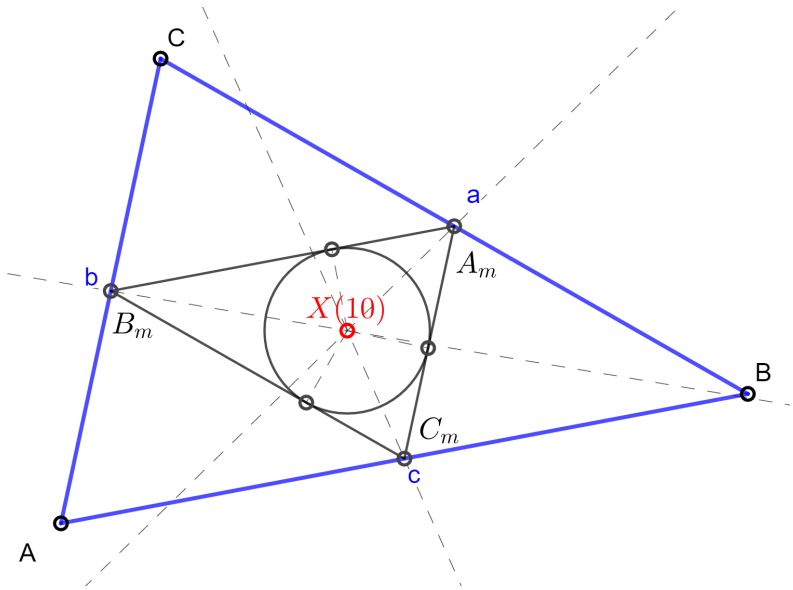
Definicija 10. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ označimo redom s C_m, A_m i B_m. Trokut $A_mB_mC_m$ naziva se medijalni (polovišni) trokut danog trokuta ABC.*

Definicija 11. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Upisanu kružnicu medijalnog trokuta polaznog trokuta nazivamo Spiekerovom kružnicom. Središte Spiekerove kružnice jest Spiekerov centar.*

Spiekerova kružnica nazvana je prema 19. stoljetnom njemačkom matematičaru Theodoru Spiekeru. Spomenimo još kako je Spiekerova točka centar mase homogene žice savijene u rub trokuta ABC, dokaz te tvrdnje možemo pronaći u [1]. Preostaje nam još navesti trilinearne koordinate Spiekerovog centra, a one su prema ETC [3] dane s

$$bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b)$$

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta.



Slika 1.19: Spiekerov centar, $X(10)$

$X(11)$ = FEUERBACHOVA TOČKA

Za potrebe definiranja Feuerbachove točke prisjetit ćemo se Teorema 1.2.7.

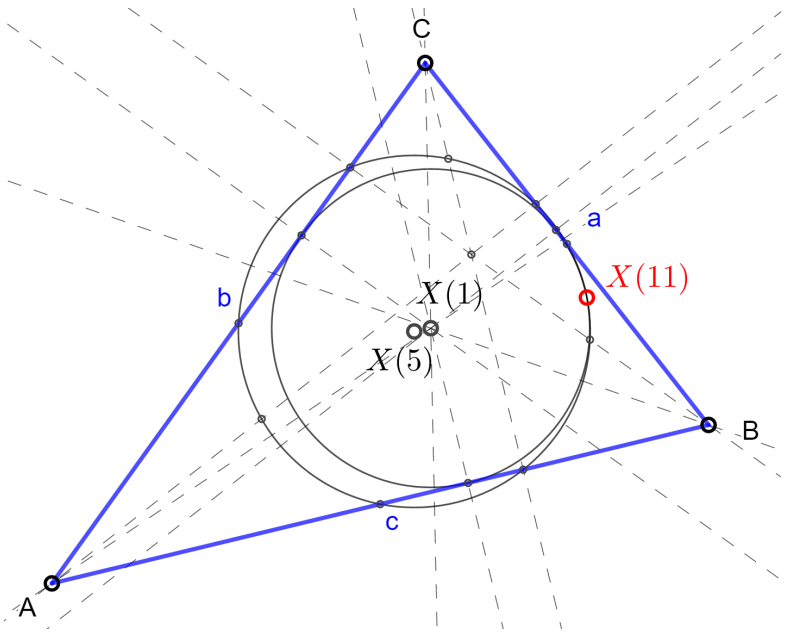
Definicija 12. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Točka gdje se upisana kružnica i kružnica devet točaka (poznata i kao Eulerova kružnica i kao Feuerbachova kružnica) danog trokuta dodiruju zove se Feuerbachova točka tog trokuta.*

Dokaz da Feuerbachova kružnica uistinu dira kružnicu upisanu danom trokutu ABC može se pronaći u [5].

Trilinearne koordinate Feuerbachove točke prema ETC [3] dane su s

$$1 - cos(\beta - \gamma) : 1 - cos(\gamma - \alpha) : 1 - cos(\alpha - \beta)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.20: Feuerbachova točka, $X(11)$

$X(12)$ = TOČKA HARMONIČKI KONJUGIRANA TOČKI $X(11)$ S OBZIROM NA PAR TOČAKA $X(1)$ i $X(5)$

Definicija 13. *Neka su dane tri različite kolinearne točke A, B i C. Točka D nalazi se na pravcu AB i dužinu $\overline{AB}$ dijeli u istom omjeru kao i zadana točka C. Drugim riječima, za točku D vrijedi*

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

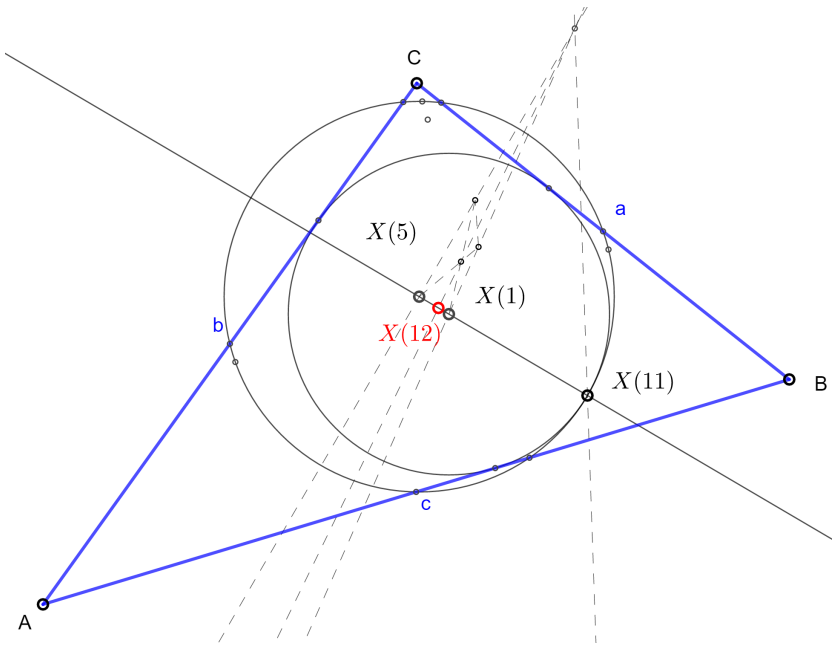
Za točku D kažemo da je harmonički konjugirana točki C s obzirom na par točaka A, B, što označavamo s $H(AB, CD)$. Točku D još zovemo i četvrta harmonička točka za točke A, B i C.

Pa kao što samo ime točke $X(12)$ kaže, točka $X(12)$ harmonički je konjugirana točki $X(11)$ (Feuerbachova točka) s obzirom na par točaka $X(1)$ (središte upisane kružnice) i $X(5)$ (središte kružnice devet točaka). Označavamo s $H(X(1)X(5), X(11)X(12))$.

Trilinearne koordinate točke $X(12)$ prema ETC [3] dane su s

$$1 + cos(\beta - \gamma) : 1 + cos(\gamma - \alpha) : 1 + cos(\alpha - \beta)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.21: Točka harmonički konjugirana točki $X(11)$ s obzirom na par točaka $X(1)$ i $X(5)$

$X(13)$ = PRVI IZOGONIČNI CENTAR (TORRICELLIJEVA TOČKA)

Definicija 14. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Nad svakom stranicom danog trokuta konstruirani su, izvana, jednakostranični trokuti ABC_1, BCA_1, ACB_1. Kružnice opisane trokutima ABC_1, BCA_1, ACB_1 nazivaju se Torricellijevim kružnicama, dok se njihovo sjecište naziva Torricellijevom točkom polaznog trokuta.*

Teorem 1.2.23. [5] *Neka je dan trokut ABC i neka su njemu konstruirani jednakostranični trokuti kao u Definiciji 14. Pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze jednom točkom, Torricellijevom točkom, i vrijedi $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.*

Dokaz. S obzirom da vrijede sljedeće jednakosti,

$$|AB| = |AC_1| \text{ i } |AC| = |AB_1| \sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle CAC_1 = \alpha + 60^\circ,$$

slijedi da su trokuti BAB_1 i C_1AC sukladni pa vrijedi $|BB_1| = |CC_1|$. Analogno se zaključuje kako vrijedi i $|CC_1| = |AA_1|$.

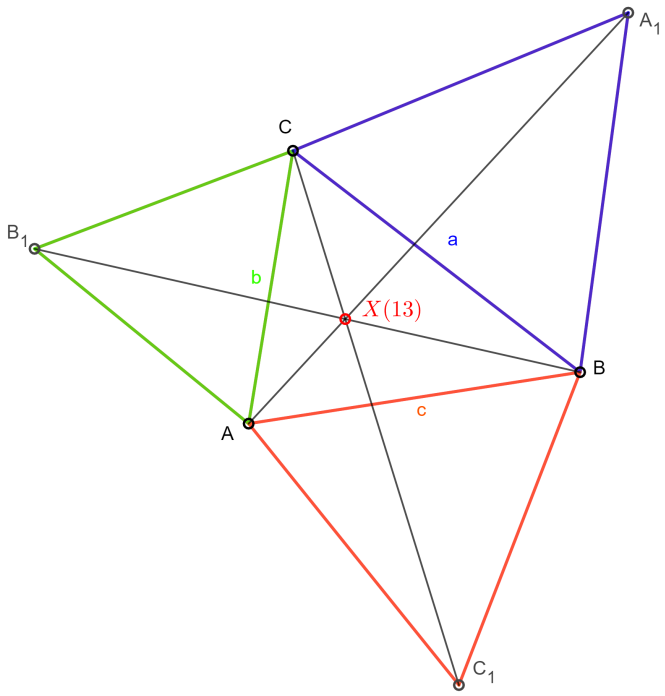
Označimo sjecište od BB_1 i CC_1 s V_1. Potom spojimo točku V_1 s točkama A i A_1. Kako su trokuti BAB_1 i C_1AC sukladni, slijedi $\sphericalangle V_1BA = \sphericalangle V_1C_1A$. Nadalje, točke A, V_1, B i C_1 su konciklične točke. Dakle $\sphericalangle AV_1B = 120°$. Analogno proizlazi da je točka V_1 na kružnici opisanoj trokutu ACB_1 i na kružnici opisanoj trokutu BCA_1.

S obzirom da je $\sphericalangle AV_1C = \sphericalangle BV_1C = 120°$ i na temelju toga što su točke B, V_1, C i A_1 konciklične vrijedi da je $\sphericalangle A_1V_1C = 60°$, zaključujemo kako su točke A, V_1 i A_1 kolinearne. □

Navedimo jedno zanimljivo svojstvo prvog izogoničnog centra. Naime, kod trokuta čije su sve veličine unutarnjih kutova manje od 120°, ukupna udaljenost od triju vrhova tog trokuta do prvog izogoničnog centra najmanja je moguća. Prvi koji je probao riješiti taj problem bio je francuski matematičar i pravnik Pierre de Fermat. S obzirom da nije uspio, pisao je talijanskom fizičaru i matematičaru Evangelisti Torricelliju koji je taj problem riješio pa prvi izogonični centar nazivamo još i Torricellijevom točkom. Prema ETC [3], trilinearne koordinate Torricellijeve točke dane su s

$$\csc\left(\alpha + \tfrac{\pi}{3}\right) : \csc\left(\beta + \tfrac{\pi}{3}\right) : \csc\left(\gamma + \tfrac{\pi}{3}\right)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.22: Prvi izogonični centar (Torricellijeva točka), $X(13)$

$X(14)$ = DRUGI IZOGONIČNI CENTAR

Definicija 15. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Nad svakom stranicom danog trokuta konstruirani su, na unutrašnju stranu, jednakostranični trokuti ABC_2, BCA_2, ACB_2. Kružnice opisane trokutima ABC_2, BCA_2 i ACB_2 sijeku se u točki $X(14)$, tj. u drugom izogoničnom centru.*

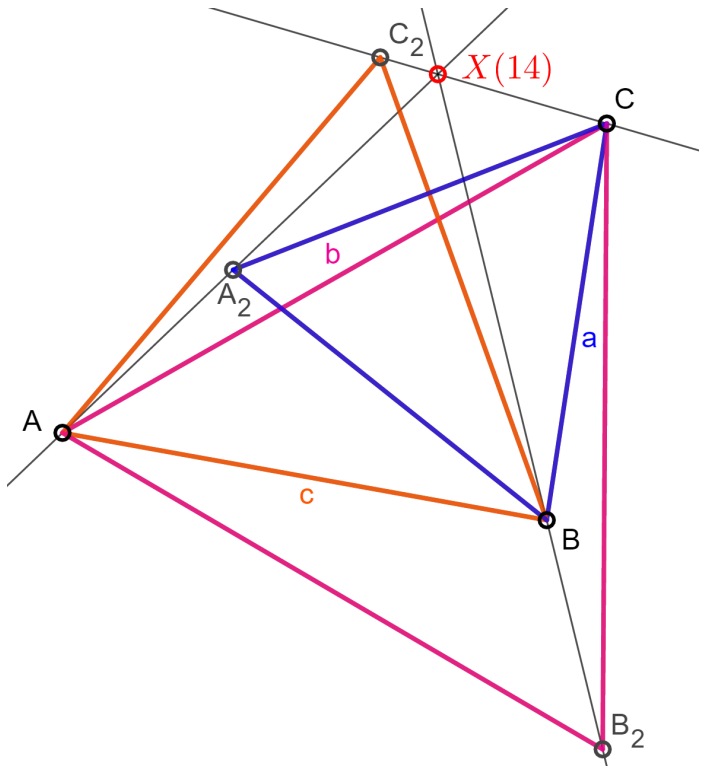
Teorem 1.2.24. [5] *Neka je dan trokut ABC i neka su njemu konstruirani jednakostranični trokuti kao u Definiciji 14. Pravci AA_2, BB_2, CC_2 prolaze jednom točkom, drugim izogoničnim centrom, i vrijedi $|AA_2| = |BB_2| = |CC_2|$.*

Dokaz. Dokaz Teorema 1.2.24. provodi se u potpunosti analogno kao i dokaz Teorema 1.2.23. □

Trilinearne koordinate drugog izogoničnog centra, prema ETC [3], dane su s

$$\csc\left(\alpha - \tfrac{\pi}{3}\right) : \csc\left(\beta - \tfrac{\pi}{3}\right) : \csc\left(\gamma - \tfrac{\pi}{3}\right)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.23: Drugi izogonični centar, $X(14)$

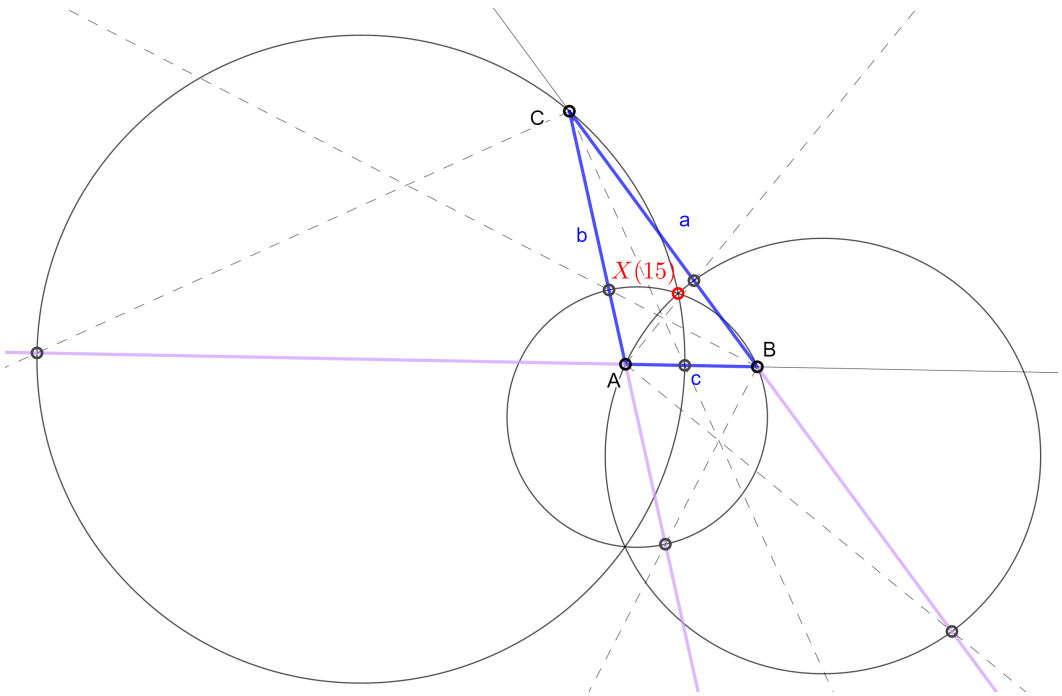
$X(15)$ = PRVA IZODINAMIČNA TOČKA

Definicija 16. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Tri kružnice koje se sijeku pod kutom od $\frac{\pi}{3}$ sa opisanom kružnicom trokuta i svaka sa sobom sijeku se u točki koju nazivamo prva izodinamična točka.*

Trilinearne koordinate prve izodinamične točke, prema ETC [3], dane su s

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) : sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) : sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.24: Prva izodinamična točka, $X(15)$

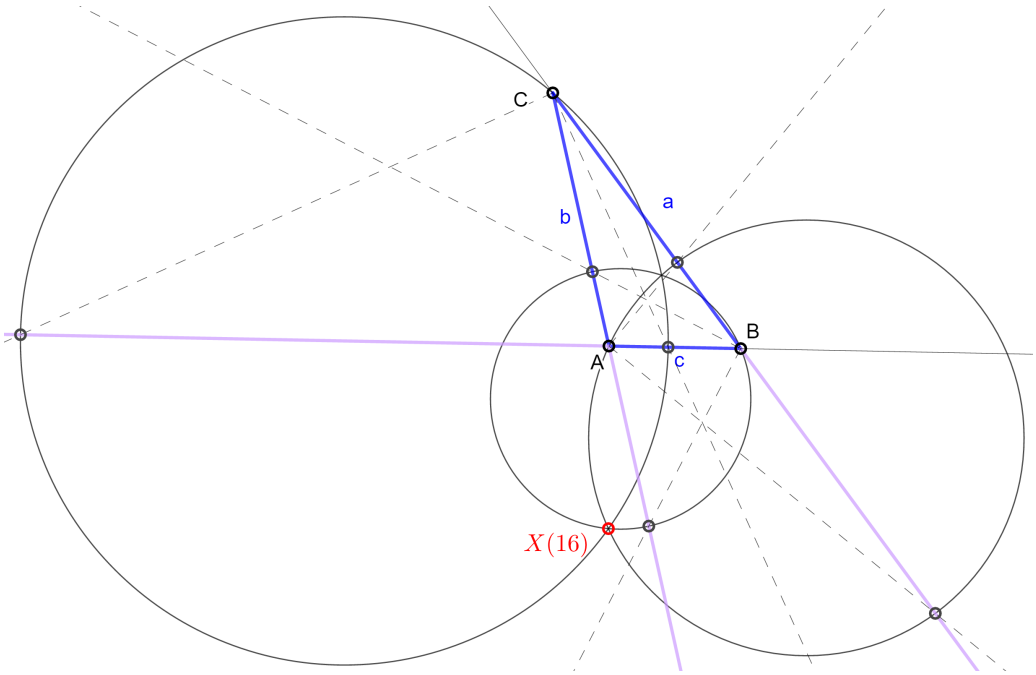
$X(16)$ = DRUGA IZODINAMIČNA TOČKA

Tri kružnice iz Definicije 16. sijeku se u točki koju nazivamo prva izodinamična točka. No, te tri kružnice sijeku se u dvije točke. Drugu točku nazivamo *drugom izodinamičnom točkom.*

Trilinearne koordinate druge izodinaminčne točke, prema ETC [3], dane su s

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) : sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) : sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.25: Druga izodinamična točka, $X(16)$

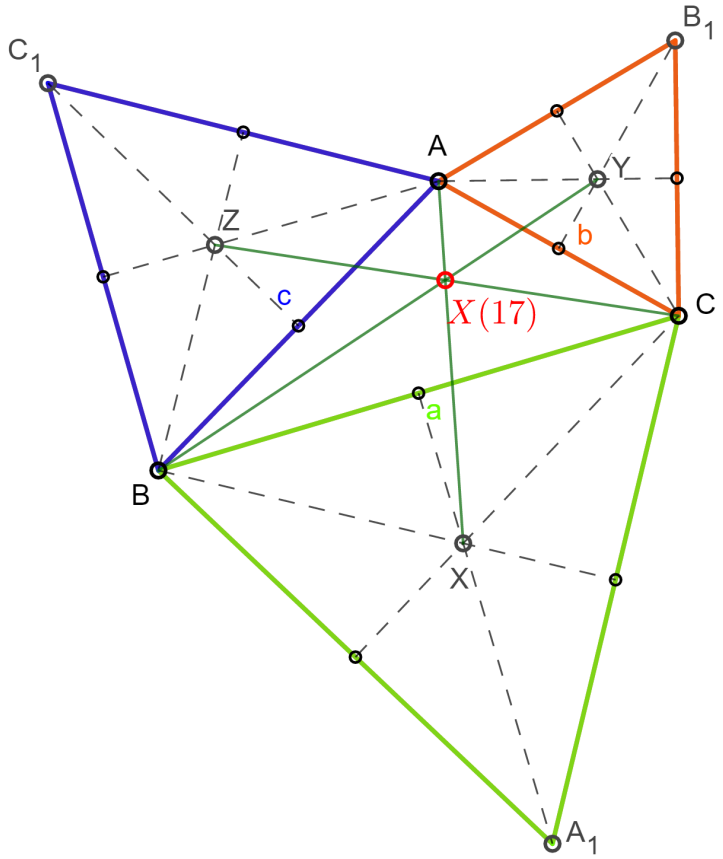
$X(17)$ = PRVA NAPOLEONOVA TOČKA

Definicija 17. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Nad stranicama danog trokuta $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ konstruirani su, izvana, redom jednakostranični trokuti A_1BC, B_1CA i C_1AB. Neka su redom X, Y i Z težišta tako dobivenih jednakostraničnih trokuta. Pravci AX, BY i CZ sijeku se u jednoj točki i tu točku nazivamo prvom Napoleonovom točkom polaznog trokuta.*

Trokut XYZ iz Definicije 17. naziva se vanjski Napoleonov trokut.
Trilinearne koordinate prve Napoleonove točke, prema ETC [3], dane su s

$$\csc\left(\alpha + \tfrac{\pi}{6}\right) : csc\left(\beta + \tfrac{\pi}{6}\right) : csc\left(\gamma + \tfrac{\pi}{6}\right)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.26: Prva Napoleonova točka, $X(17)$

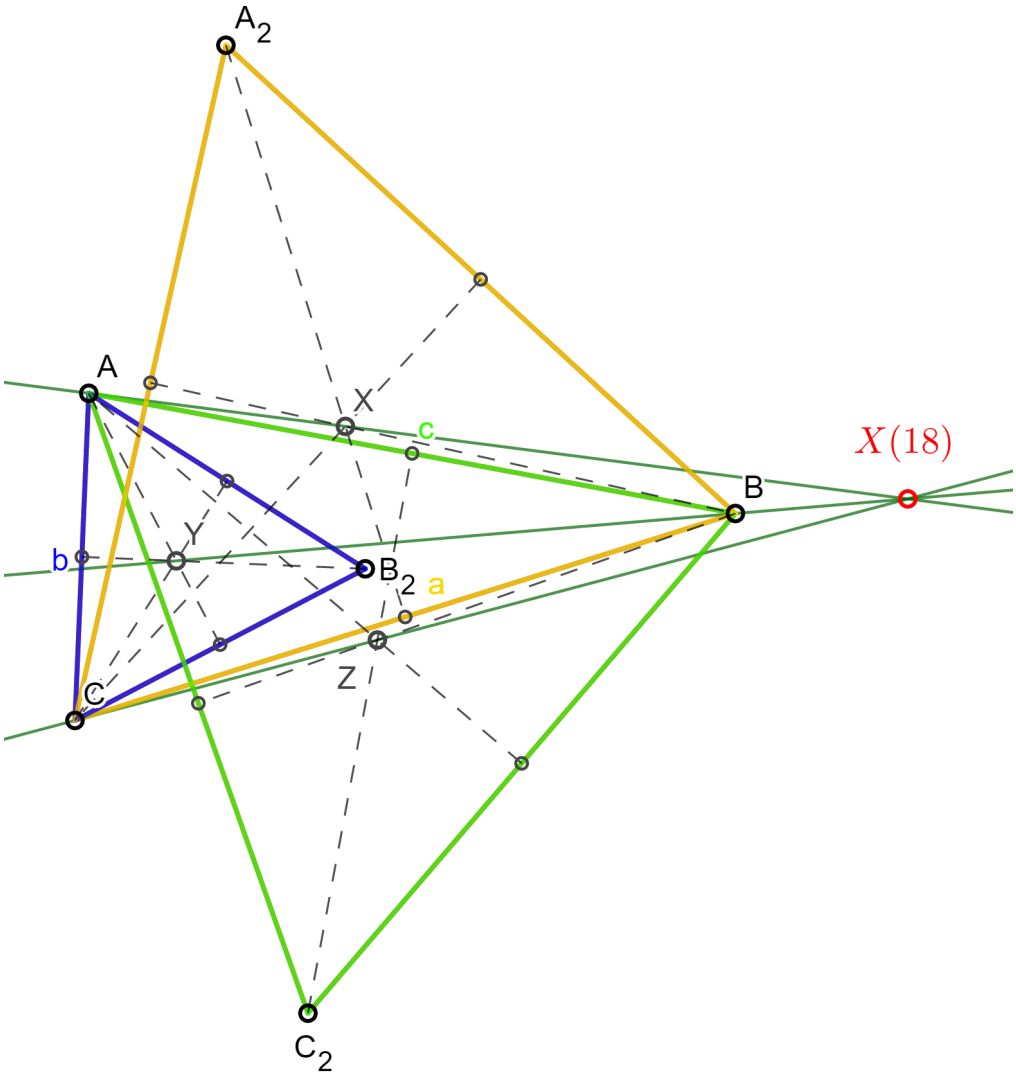
$X(18)$ = DRUGA NAPOLEONOVA TOČKA

Definicija 18. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Nad stranicama danog trokuta $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ konstruirani su, prema unutra, redom jednakostranični trokuti A_2BC, B_2CA i C_2AB. Neka su redom X, Y i Z težišta tako dobivenih jednakostraničnih trokuta. Pravci AX, BY i CZ sijeku se u jednoj točki i tu točku nazivamo drugom Napoleonovom točkom polaznog trokuta.*

Trokut XYZ iz Definicije 18. naziva se unutarnji Napoleonov trokut.
Trilinearne koordinate druge Napoleonove točke, prema ETC [3], dane su s

$$\csc\left(\alpha - \tfrac{\pi}{6}\right) : csc\left(\beta - \tfrac{\pi}{6}\right) : csc\left(\gamma - \tfrac{\pi}{6}\right)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.27: Druga Napoleonova točka, $X(18)$

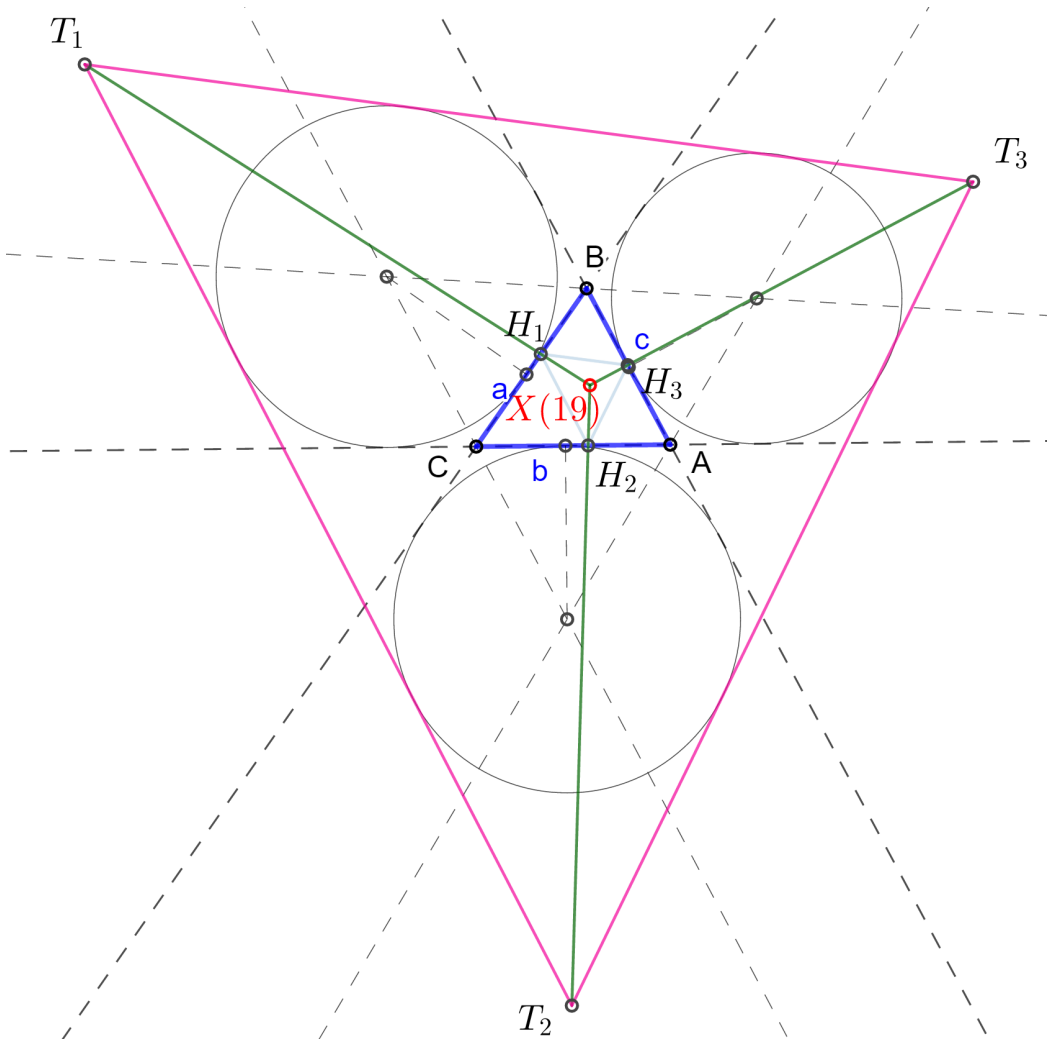
$X(19)$ = CLAWSONOVA TOČKA

Definicija 19. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Nožišta visina na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ su redom H_1, H_2, H_3. Zajedničke tangente pripisanih kružnica polaznog trokuta sijeku se u sljedećim točkama: točki T_1 nasuprot vrha A, točki T_2 nasuprot vrha B te točki T_3 nasuprot vrha C. Pravci T_1H_1, T_2H_2, T_3H_3 sijeku se u jednoj točki koju nazivamo Clawsonova točka.*

Trilinearne koordinate Clawsonove točke, prema ETC [3], dane su s

$$\tan(\alpha) : \tan(\beta) : \tan(\gamma)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.28: Clawsonova točka, $X(19)$

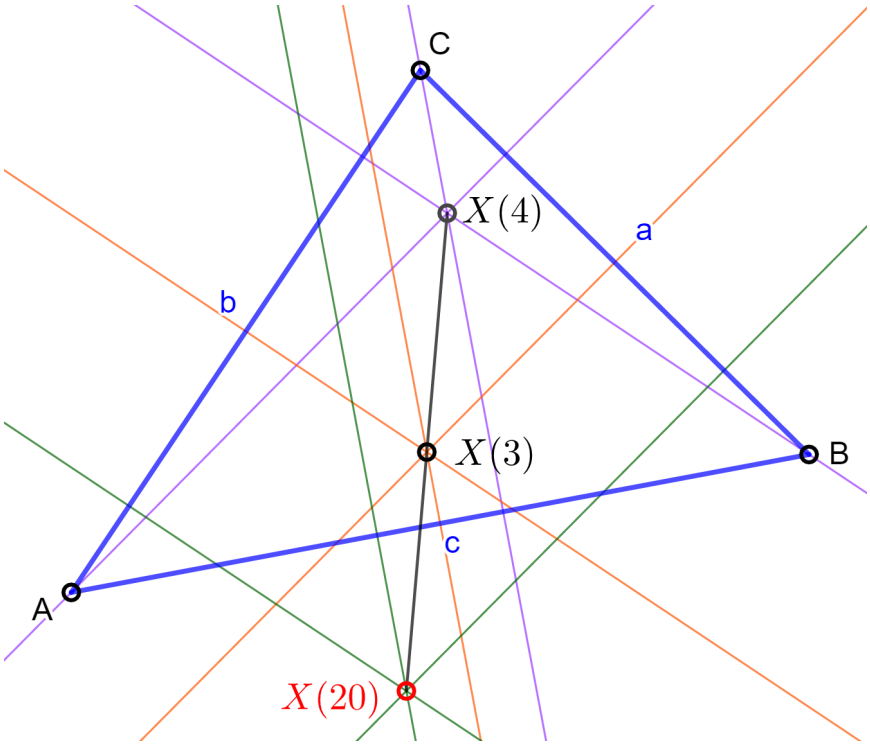
$X(20)$ = DE LONGCHAMPSOVA TOČKA

Definicija 20. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Neka je točka $X(3)$ središte opisane kružnice, a točka $X(4)$ ortocentar danog trokuta. De Londchampsova točka $X(20)$ je točka centralnosimetrična točki $X(4)$ s obzirom na točku $X(3)$.*

De Longchampsova točka ime je dobila po francuskom matematičaru Gastonu Albertu Gohieree de Longchampsu 1886. godine. Navedimo joj još i njene trilinearne koordinate koje su prema ETC [3] dane s

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\gamma) : \cos(\beta) - \cos(\gamma)\cos(\alpha) : \cos(\gamma) - \cos(\alpha)\cos(\beta)$$

gdje su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta.



Slika 1.29: De Longchampsova točka, $X(20)$

Poglavlje 2

Praktični dio u programu GeoGebra

2.1 Pretvorba trilinearnih koordinata u Kartezijeve koordinate

Kako bismo u radnu bilježnicu programa GeoGebra [4] što lakše mogli unijeti svih 20 karakterističnih točaka opisanih u ovom radu, bez cijelih postupaka konstrukcije, poslužit ćemo se već spomenutim trilinearnim koordinatama. S obzirom da nam trilinearne koordinate govore koliko je određena točka udaljena od stranica trokuta te nam je to vrlo nepraktično, trilinearne koordinate pretvorit ćemo u Kartezijeve koordinate i to na sljedeći način.

Neka su trilinearne koordinate točke P dane sa $u : v : w$, tada su njene Kartezijeve koordinate (x_P, y_P) sljedeće:

$$x_P = \frac{aux_A + bvx_B + cwx_C}{au + bv + cw}, \qquad y_P = \frac{auy_A + bvy_B + cwy_C}{au + bv + cw},$$

gdje su a, b, c duljine stranica nekog trokuta ABC, a $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$ Kartezijeve koordinate vrhova A, B, C istog tog trokuta ABC.

Navedimo sada Kartezijeve koordinate svih 20 karakterističnih točaka nekog trokuta ABC, s duljinama stranica a, b, c, veličinama unutarnjim kutova α, β, γ te Kartezijevim koordinatama vrhova $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Tako navedene Kartezijeve koordinate upisivali smo u radnu bilježnicu programa GeoGebra u obliku matematičke formule, kako bi se prilikom pomicanja vrhova trokuta, istovremeno pomicale i karakteristične točke.

Središte upisane kružnice $X(1)$:

$$\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}\right)$$

Težište $X(2)$**:**

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Središte opisane kružnice $X(3)$**:**

$$\left(\frac{a\cos(\alpha)x_A + b\cos(\beta)x_B + c\cos(\gamma)x_C}{a\cos(\alpha) + b\cos(\beta) + c\cos(\gamma)}, \frac{a\cos(\alpha)y_A + b\cos(\beta)y_B + c\cos(\gamma)y_C}{a\cos(\alpha) + b\cos(\beta) + c\cos(\gamma)}\right)$$

Ortocentar $X(4)$**:**

$$\left(\frac{\frac{ax_A}{\cos(\alpha)} + \frac{bx_B}{\cos(\beta)} + \frac{cx_C}{\cos(\gamma)}}{\frac{a}{\cos(\alpha)} + \frac{b}{\cos(\beta)} + \frac{c}{\cos(\gamma)}}, \frac{\frac{ay_A}{\cos(\alpha)} + \frac{by_B}{\cos(\beta)} + \frac{cy_C}{\cos(\gamma)}}{\frac{a}{\cos(\alpha)} + \frac{b}{\cos(\beta)} + \frac{c}{\cos(\gamma)}}\right)$$

Središte kružnice devet točaka $X(5)$**:**

$$\left(\frac{a\cos(\beta-\gamma)x_A + b\cos(\gamma-\alpha)x_B + c\cos(\alpha-\beta)x_C}{a\cos(\beta-\gamma) + b\cos(\gamma-\alpha) + c\cos(\alpha-\beta)}, \frac{a\cos(\beta-\gamma)y_A + b\cos(\gamma-\alpha)y_B + c\cos(\alpha-\beta)y_C}{a\cos(\beta-\gamma) + b\cos(\gamma-\alpha) + c\cos(\alpha-\beta)}\right)$$

Lemoineova točka $X(6)$**:**

$$\left(\frac{a^2x_A + b^2x_B + c^2x_C}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{a^2y_A + b^2y_B + c^2y_C}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$$

Gergonneova točka $X(7)$**:**

$$\left(\frac{\frac{abcx_A}{b+c-a} + \frac{abcx_B}{c+a-b} + \frac{abcx_C}{a+b-c}}{\frac{abc}{b+c-a} + \frac{abc}{c+a-b} + \frac{abc}{a+b-c}}, \frac{\frac{abcy_A}{b+c-a} + \frac{abcy_B}{c+a-b} + \frac{abcy_C}{a+b-c}}{\frac{abc}{b+c-a} + \frac{abc}{c+a-b} + \frac{abc}{a+b-c}}\right)$$

Nagelova točka $X(8)$**:**

$$\left(\frac{(b+c-a)x_A + (c+a-b)x_B + (a+b-c)x_C}{a+b+c}, \frac{(b+c-a)y_A + (c+a-b)y_B + (a+b-c)y_C}{a+b+c}\right)$$

Mittenpunkt $X(9)$**:**

$$\left(\frac{a(b+c-a)x_A+b(c+a-b)x_B+c(a+b-c)x_C}{2(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)},\right.$$
$$\left.\frac{a(b+c-a)y_A+b(c+a-b)y_B+c(a+b-c)y_C}{2(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)}\right)$$

Spiekerov centar $X(19)$**:**

$$\left(\frac{abc((b+c)x_A+(c+a)x_B+(a+b)x_C)}{2abc(a+b+c)},\frac{abc((b+c)y_A+(c+a)y_B+(a+b)y_C)}{2abc(a+b+c)}\right)$$

Feuerbachova točka $X(11)$**:**

$$\left(\frac{ax_A(1-\cos(\beta-\gamma))+bx_B(1-\cos(\gamma-\alpha))+cx_C(1-\cos(\alpha-\beta))}{a(1-\cos(\beta-\gamma))+b(1-\cos(\gamma-\alpha))+c(1-\cos(\alpha-\beta))},\right.$$
$$\left.\frac{ay_A(1-\cos(\beta-\gamma))+by_B(1-\cos(\gamma-\alpha))+cy_C(1-\cos(\alpha-\beta))}{a(1-\cos(\beta-\gamma))+b(1-\cos(\gamma-\alpha))+c(1-\cos(\alpha-\beta))}\right)$$

Točka $X(12)$**:**

$$\left(\frac{ax_A(1+\cos(\beta-\gamma))+bx_B(1+\cos(\gamma-\alpha))+cx_C(1+\cos(\alpha-\beta))}{a(1+\cos(\beta-\gamma))+b(1+\cos(\gamma-\alpha))+c(1+\cos(\alpha-\beta))},\right.$$
$$\left.\frac{ay_A(1+\cos(\beta-\gamma))+by_B(1+\cos(\gamma-\alpha))+cy_C(1+\cos(\alpha-\beta))}{a(1+\cos(\beta-\gamma))+b(1+\cos(\gamma-\alpha))+c(1+\cos(\alpha-\beta))}\right)$$

Prvi izogonični centar $X(13)$**:**

$$\left(\frac{\frac{ax_A}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{bx_B}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{cx_C}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}},\frac{\frac{ay_A}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{by_B}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{cy_C}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}}\right)$$

Drugi izogonični centar $X(14)$**:**

$$\left(\frac{\frac{ax_A}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{bx_B}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{cx_C}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}},\frac{\frac{ay_A}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{by_B}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{cy_C}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}}\right)$$

Prva izodinamična točka $X(15)$**:**

$$\left(\frac{ax_A \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+bx_B \sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+cx_C \sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+c\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)},\right.$$
$$\left.\frac{ay_A \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+by_B \sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+cy_C \sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+c\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)},\right)$$

Druga izodinamična točka $X(16)$**:**

$$\left(\frac{ax_A \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+bx_B \sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+cx_C \sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+c\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)},\right.$$
$$\left.\frac{ay_A \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+by_B \sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+cy_C \sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+c\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)},\right)$$

Prva Napoleonova točka $X(17)$**:**

$$\left(\frac{\frac{ax_A}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{bx_B}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{cx_C}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{6}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{6}\right)}},\frac{\frac{ay_A}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{by_B}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{cy_C}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{6}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{6}\right)}}\right)$$

Druga Napoleonova točka $X(18)$**:**

$$\left(\frac{\frac{ax_A}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{bx_B}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{cx_C}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)}},\frac{\frac{ay_A}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{by_B}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{cy_C}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)}}{\frac{a}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{b}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{c}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{6}\right)}}\right)$$

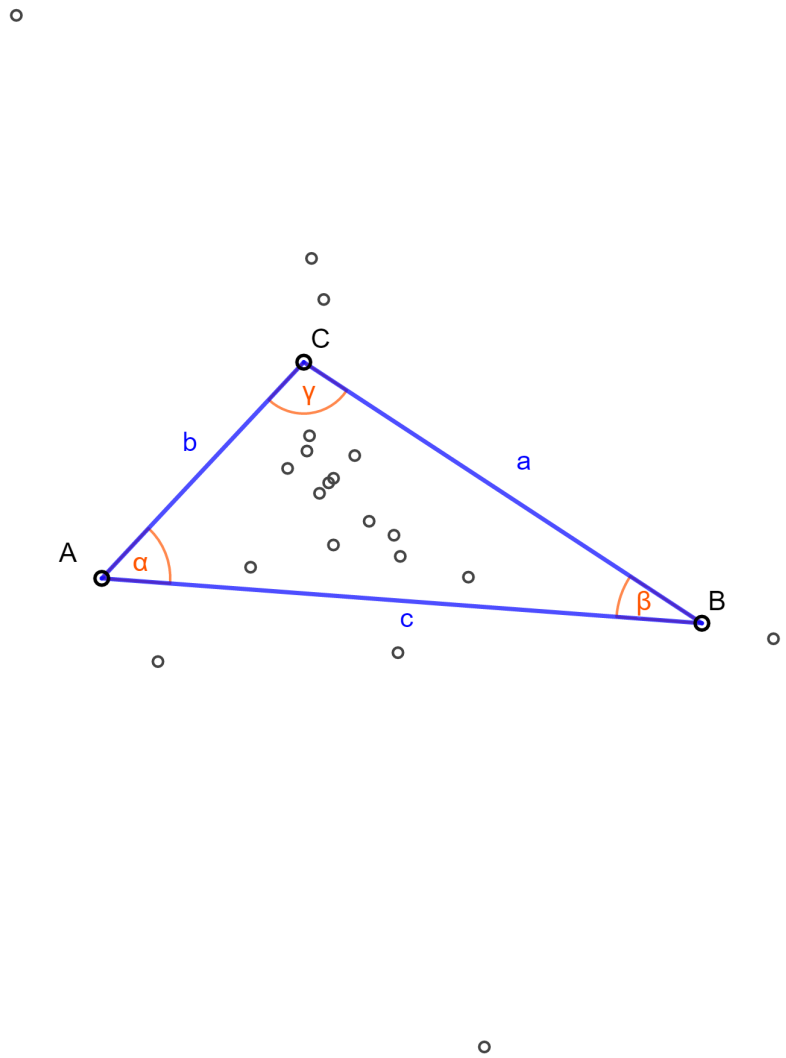
Clawsonova točka $X(19)$**:**

$$\left(\frac{a\tan(\alpha)x_A+b\tan(\beta)x_B+c\tan(\gamma)x_C}{a\tan(\alpha)+b\tan(\beta)+c\tan(\gamma)},\frac{a\tan(\alpha)y_A+b\tan(\beta)y_B+c\tan(\gamma)y_C}{a\tan(\alpha)+b\tan(\beta)+c\tan(\gamma)}\right)$$

De Longchampsova točka $X(29)$**:**

$$\left(\frac{a(\cos(\alpha)-\cos(\beta)\cos(\gamma))x_A+b(\cos(\beta)-\cos(\gamma)\cos(\alpha))x_B+c(\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\cos(\beta))x_C}{a(\cos(\alpha)-\cos(\beta)\cos(\gamma))+b(\cos(\beta)-\cos(\gamma)\cos(\alpha))+c(\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\cos(\beta))},\right.$$
$$\left.\frac{a(\cos(\alpha)-\cos(\beta)\cos(\gamma))y_A+b(\cos(\beta)-\cos(\gamma)\cos(\alpha))y_B+c(\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\cos(\beta))y_C}{a(\cos(\alpha)-\cos(\beta)\cos(\gamma))+b(\cos(\beta)-\cos(\gamma)\cos(\alpha))+c(\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\cos(\beta))}\right)$$

Na Slici 2.1. možemo vidjeti kako izgleda trokut ABC nakon što smo u radnu bilježnicu unijeli Kartezijeve koordinate svih 20 karakterističnih točaka tog trokuta.

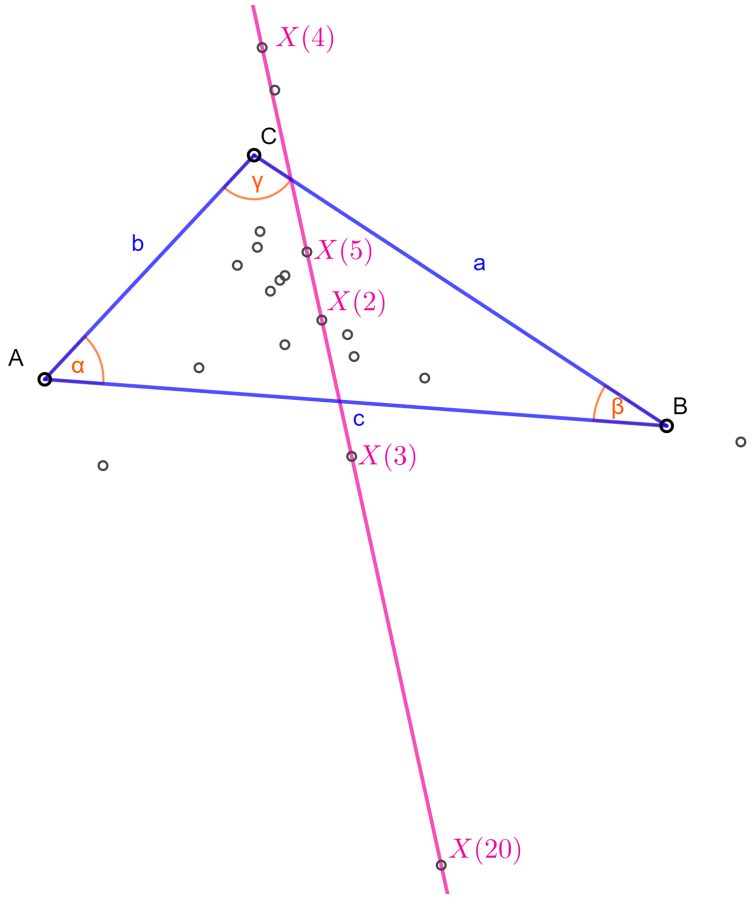


Slika 2.1: Prvih 20 karakterističnih točaka trokuta ABC

2.2 Otkrivanje kolinearnih karakterističnih točaka

Kolinearne karakteristične točke nekog trokuta ABC u programu GeoGebra otkrivat ćemo povlačenjem pravaca, a potom ćemo provjeriti leže li baš te točke na tom pravcu. Provjeru ćemo raditi tako da ćemo isčitati Kartezijeve koordinate određene karakteristične točke te uvrstiti u jednadžbu povučenog pravca. Kartezijeve koordinate i jednadžbu pravca vrlo lako možemo vidjeti u GeoGebrinoj radnoj bilježnici.

Na Slici 2.2. možemo vidjeti da su točke $X(2)$, $X(3)$, $X(4)$, $X(5)$ i $X(20)$ kolinearne. Napomenimo kako sve navedene kolinearnosti u ovom poglavlju još uvijek nisu rigorozna matematička provjera — dokazi će biti dani u idućem poglavlju.



Slika 2.2: Kolinearne karakteristične točke trokuta

Provjerimo jesu li navedene točke uistinu kolinearne. Jednadžba pravca koji prolazi

tim točkama je

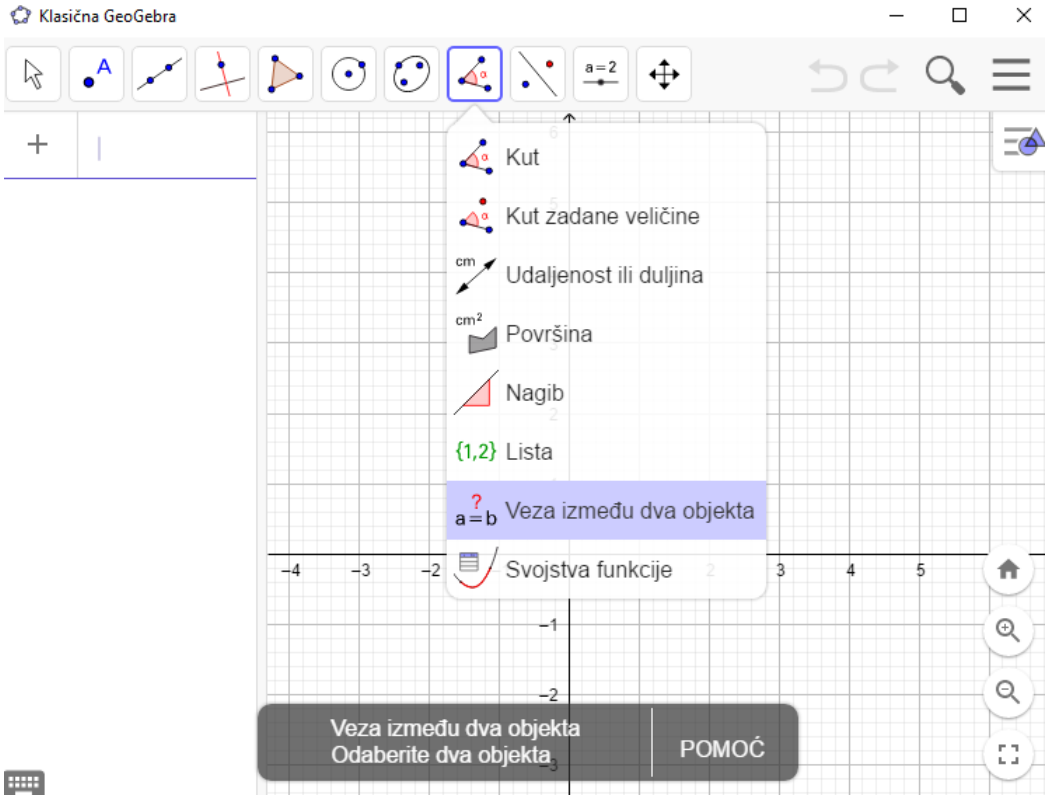
$$2.99x + 0.66y = -9.45.$$

Kartezijeve koordinate karakterističnih točaka su sljedeće:

$$X(2) = (-2.72, -1.99),\ X(3) = (-2.07, -4.98),\ X(4) = (-4.04, 3.99),$$

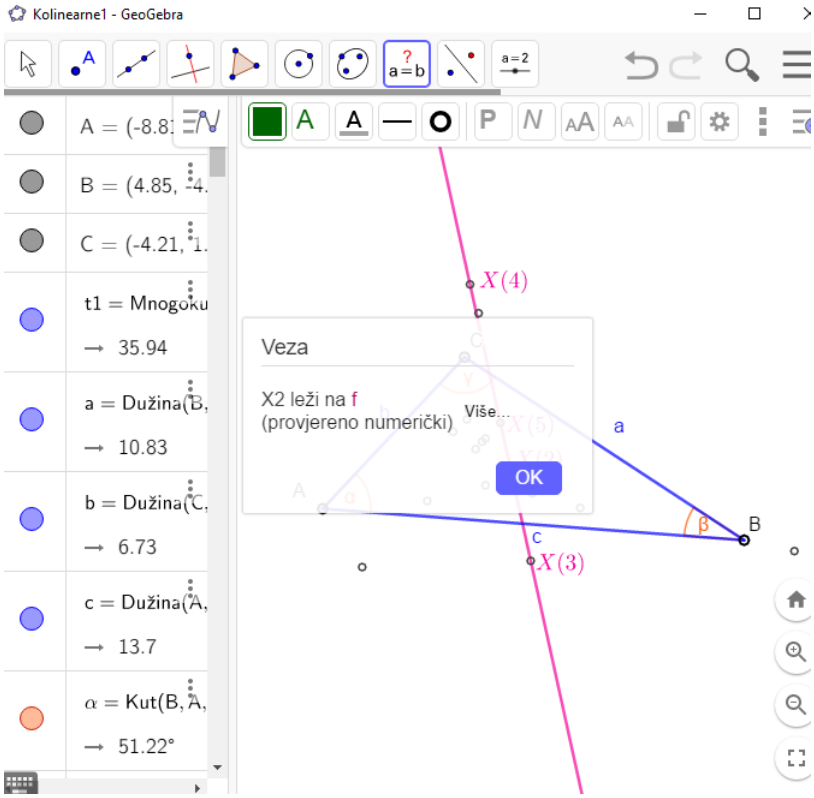
$$X(5) = (-3.05, -0.5),\ X(20) = (-0.1, -13.95).$$

S obzirom da GeoGebra jednadžbe i koordinate zaokružuje na dva decimalna mjesta, najtočnije ćemo izračunati zadovoljava li neka točka jednadžbu pravca računamo li upravo u GeoGebri. Možemo se poslužiti alatom pod nazivom *Veza između dva objekta* (Slika 2.3.). Kao što mu samo ime govori, on nam govori u kojoj su vezi dva odabrana objekta. U našem slučaju, promatrat ćemo leže li određene točke na odabranom pravcu.



Slika 2.3: GeoGebrin alat–Veza između dva objekta

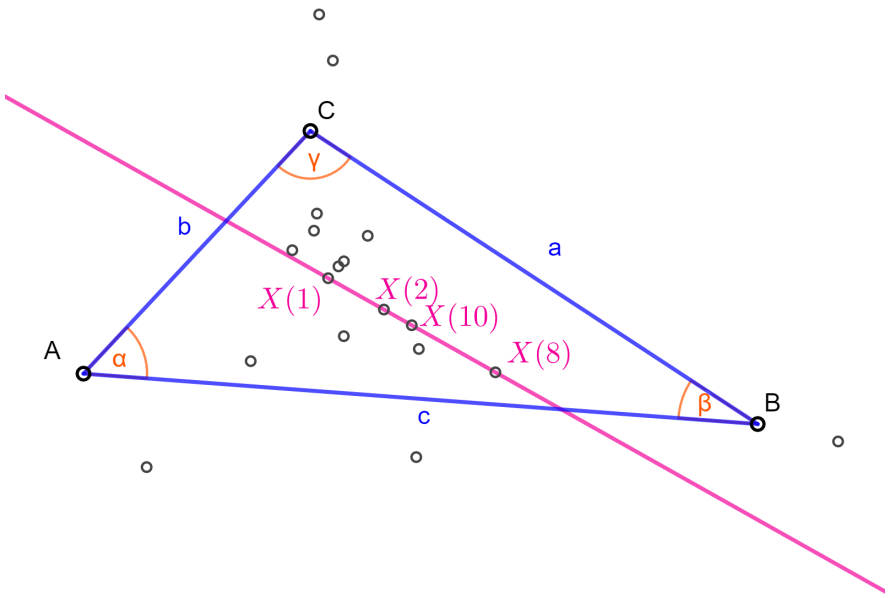
Odaberimo pravac i karakteristične točke za koje smatramo da su kolinearne te provjerimo jesu li uistinu. Na Slici 2.4. možemo vidjeti da točka $X(2)$ leži na tom pravcu. Koristeći taj alat provjerili smo i ostale točke. One također leže na tom pravcu.



Slika 2.4: Točka $X(2)$ leži na pravcu

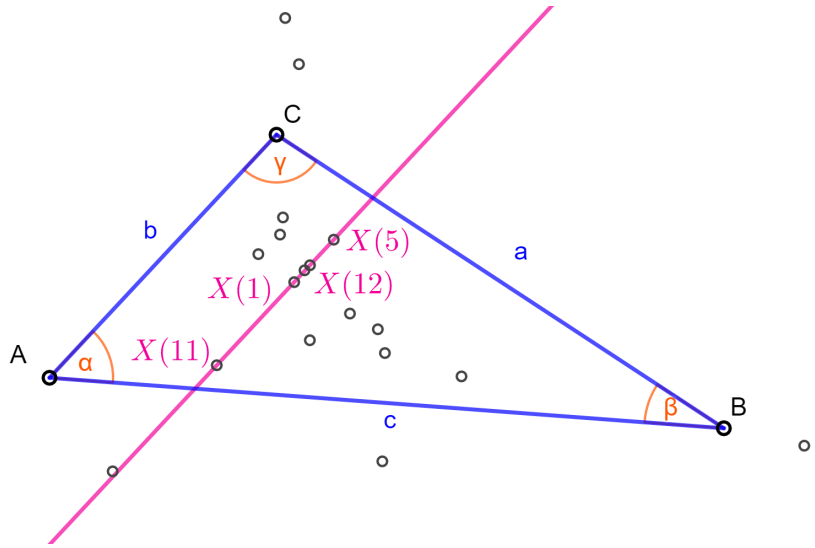
Možemo dakle zaključiti kako su težište $X(2)$, središte opisane kružnice $X(3)$, ortocentar $X(4)$, središte kružnice devet točaka $X(5)$ te de Longchampsova točka $X(20)$ nekog trokuta ABC kolinearne točke.

Na Slici 2.5. možemo vidjeti da su točke $X(1)$, $X(2)$, $X(8)$ i $X(10)$ kolinearne. Koristeći se već spomenutim GeoGebrinim alatom provjerili smo da točke $X(1)$, $X(2)$, $X(8)$ te $X(10)$ uistinu leže na jednom pravcu. Zaključujemo kako su središte upisane kružnice $X(1)$, težište $X(2)$, Nagelova točka $X(8)$ te Spiekerov centar $X(10)$ nekog trokuta ABC kolinearne točke.



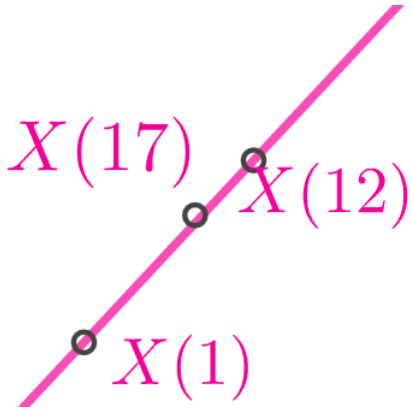
Slika 2.5: Kolinearne karakteristične točke trokuta

Na Slici 2.6. možemo vidjeti da su točke $X(1)$, $X(5)$, $X(11)$ i $X(12)$ kolinearne.



Slika 2.6: Kolinearne karakteristične točke trokuta

Ponovno smo se poslužili GeoGebrinim alatom pod imenom Veza između dva objekta te utvrdili da jedan pravac prolazi točkama $X(1)$, $X(5)$, $X(11)$ te $X(12)$. Ovog puta, zbog toga što su na toj slici karakteristične točke posložene tako kako jesu, mogli smo posumnjati da se i točka $X(17)$ nalazi na tom pravcu. No, provjera je pokazala drugačije, tj. točka $X(17)$ ne leži na pravcu. U to smo se mogli uvjeriti i povećanjem slike gdje se točno vidi kako se točka $X(17)$ ne nalazi na povučenom pravcu (Slika 2.7).



Slika 2.7: Točka $X(17)$ ne leži na pravcu

Dakle, zaključujemo kako su središte upisane kružnice $X(1)$, središte kružnice devet točaka $X(5)$, Feuerbachova točka $X(11)$ te točka harmonički konjugirana točki $X(11)$ s obzirom na par točaka $X(1)$ i $X(5)$, tj. točka $X(12)$ nekog trokuta ABC kolinearne.

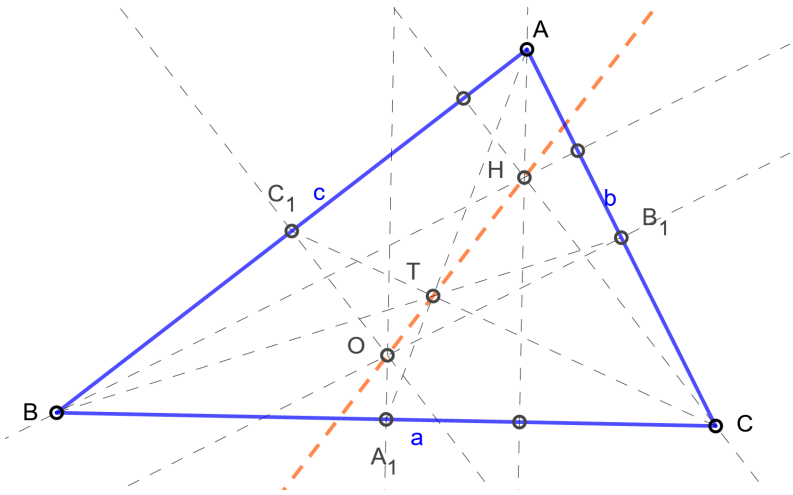
Poglavlje 3

Rigorozni dokazi

U drugom poglavlju smo praktičnim radom u programu GeoGebra ustvrdili koje su točke kolinearne. U ovom poglavlju ćemo to pokazati rigoroznim dokazima kakve možemo naći i u [5].

3.1 Kolinearne točke $X(2)$, $X(3)$, $X(4)$, $X(5)$ i $X(20)$

Teorem 3.1.1. [5] *Težište $X(2) = T$, središte $X(3) = O$ opisane kružnice i ortocentar $X(4) = H$ nekog trokuta ABC leže na jednom pravcu e koji nazivamo Eulerovim pravcem tog trokuta. Udaljenost HT ortocentra H i težišta T dvostruko je veća nego udaljenost TO težišta T i središta opisane kružnice, $|HT| = 2 \cdot |TO|$.*



Slika 3.1: Eulerov pravac nekog trokuta ABC

Dokaz. Neka su A_1, B_1, C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ te neka se težišnica $\overline{AA_1}$ i spojnica $\overline{HO}$ sijeku u nekoj točki T (Slika 3.1.). Trokuti ABH i A_1B_1O imaju paralelne stranice $\overline{A_1O} \parallel \overline{AH}$, $\overline{B_1O} \parallel \overline{BH}$ te $\overline{C_1O} \parallel \overline{CH}$ pa slijedi da su oni homotetični s centrom homotetije T. Zbog toga i treća spojnica $\overline{BB_1}$ vrhova trokuta ABH i A_1B_1O prolazi točkom T, što znači da je upravo točka T težište trokuta ABC.

Nadalje, omjer stranica $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$ homotetičnih trokuta je

$$|AB| : |A_1B_1| = 2 : 1$$

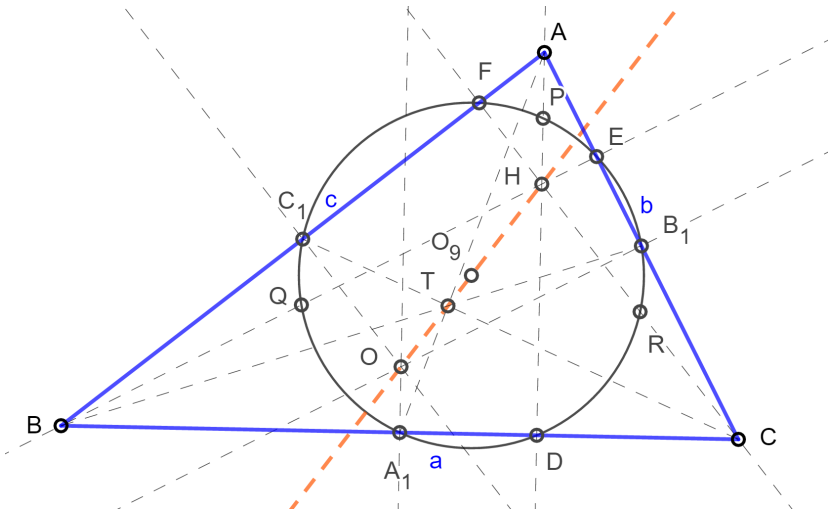
jer je $\overline{A_1B_1}$ srednjica trokuta ABC. Slijedi

$$|AT| : |TA_1| = |HT| : |TO| = 2 : 1,$$

što znači da točka T dijeli težišnicu $\overline{AA_1}$ u omjeru $2 : 1$, a to nam potvrđuje da je točka T težište trokuta ABC □

Pokazali smo da su $X(2)$, $X(3)$ i $X(4)$ kolinearne točke i da se sve nalaze na pravcu koji nazivamo Eulerov pravac. Pokažimo da se i točka $X(5)$ nalazi također na tom pravcu.

Teorem 3.1.2. [5] *Središte $X(5) = O_9$ kružnice devet točaka k_9 je polovište dužine $\overline{HO}$, gdje je $H = X(4)$ ortocentar, a $O = X(3)$ središte opisane kružnice danog trokuta ABC.*

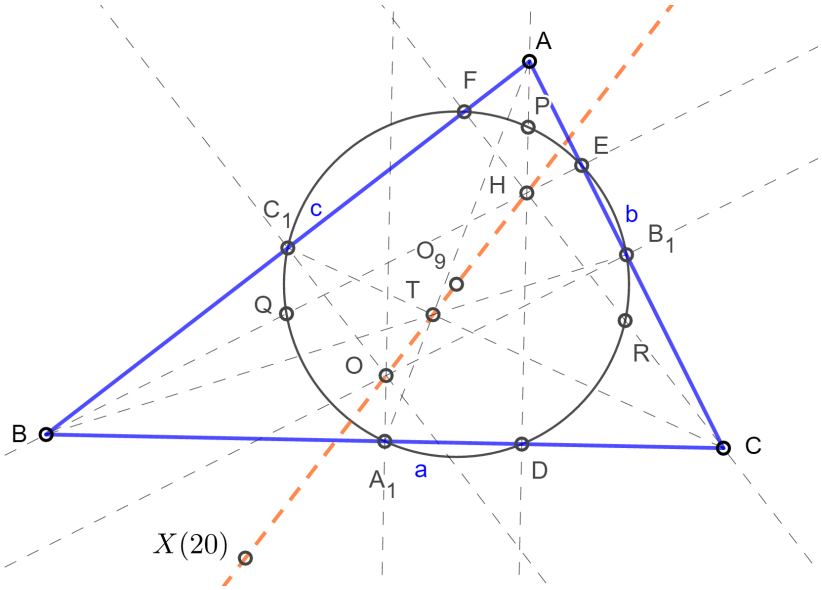


Slika 3.2: Eulerov pravac nekog trokuta ABC

Dokaz Teorema 3.1.2. izravna je posljedica Teorema 1.2.10. te Teorema 1.2.12.

Dakle, sada smo pokazali da se na Eulerovom pravcu nalaze točke $X(2)$, $X(3)$, $X(4)$ i $X(5)$. Pokažimo još da se na pravcu nalazi i točka $X(20)$.

Zbog same definicije de Longchamspove točke $X(20)$ koja kaže da je točka $X(20)$ centralnosimetrična točki $X(4)$ s obzirom na točku $X(3)$ slijedi kako se i ona nalazi na Eulerovom pravcu.



Slika 3.3: Eulerov pravac nekog trokuta ABC

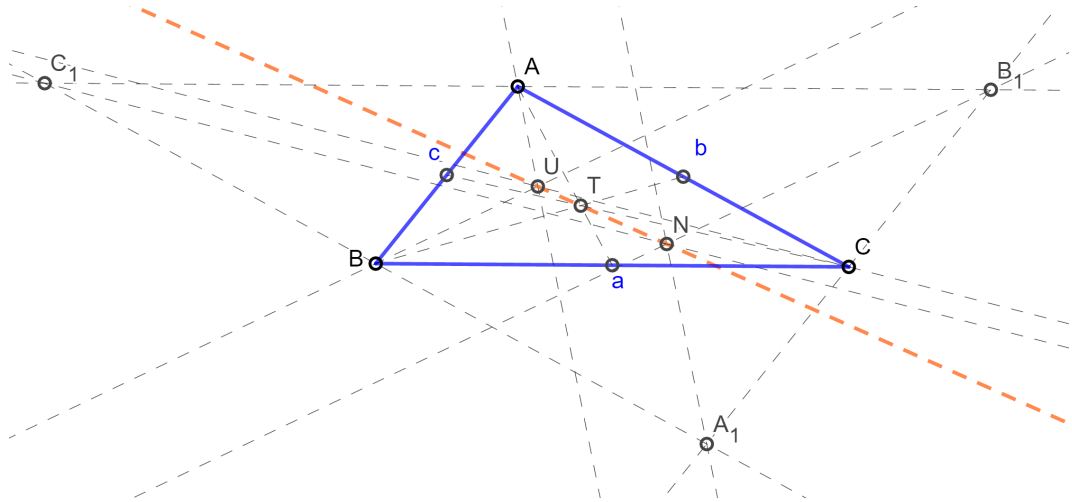
Zaključujemo kako su težište $X(2)$, središte opisane kružnice $X(3)$, ortocentar $X(4)$, središte kružnice devet točaka $X(5)$ te de Longchampsova točka $X(20)$ nekog trokuta ABC kolinearne točke. Pravac na kojem se nalaze navedene točke nazivamo Eulerov pravac trokuta ABC.

3.2 Kolinearne točke $X(1)$, $X(2)$, $X(8)$ i $X(10)$

Teorem 3.2.1. [5] *Središte upisane kružnice $U = X(1)$, težište $T = X(2)$ i Nagelova točka $N = X(8)$ kolinearne su točke, pri čemu težište T dijeli dužinu $\overline{NU}$ u omjeru*

$$|NT| = 2 \cdot |NU|$$

Primjetimo kako smo u dokazu Teorema 1.2.21. već dokazali i Teorem 3.2.1. Dakle, točke $X(1)$, $X(2)$, $X(8)$ su kolinearne (Slika 3.4.). Pokažimo da je i točka $X(10)$ njima kolinearna.



Slika 3.4: Središte upisane kružnice, težište i Nagelova točka kolinearne su točke

Teorem 3.2.2. [5] *Neka su A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ danog trokuta ABC. Točka $U' = X(10)$ središte je upisane kružnice trokutu $A'B'C'$ te polovište dužine $\overline{NU}$ gdje je $N = X(8)$ Nagelova točka, a $U = X(1)$ središte upisane kružnice trokuta ABC.*

Dokaz. Prilikom dokazivanja Teorema 1.2.21. odredili smo homotetiju koja preslikava središte U kružnice upisane trokutu ABC u središte U' kružnice upisane trokutu $A'B'C'$. Dakle, zaključujemo kako su točke U, U', T kolinearne gdje je T težište trokuta ABC. Slijedi,

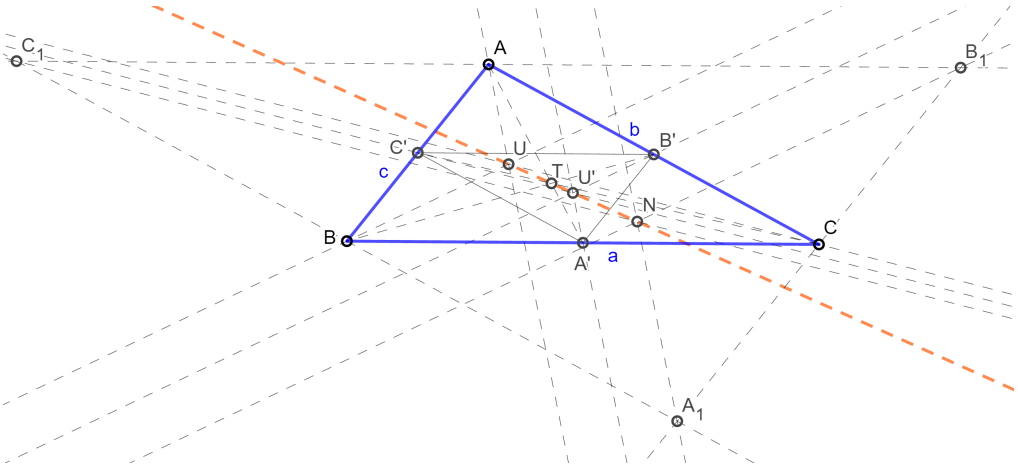
$$|U'T| = \frac{1}{2}|UT|.$$

S obzirom da je

$$|UT| = \frac{1}{2}|NT|$$

, polovište dužine $\overline{NU}$ je točka U'. □

Zaključujemo kako su središte upisane kružnice $X(1)$, težište $X(2)$, Nagelova točka $X(8)$ te Spiekerov centar $X(10)$ nekog trokuta ABC kolinearne točke.



Slika 3.5: Središte upisane kružnice $U = X(1)$, težište $T = X(2)$, Nagelova točka $N = X(8)$ i Spiekerov centar $U' = X(19)$ kolinearne su točke

3.3 Kolinearne točke $X(1)$, $X(5)$, $X(11)$, i $X(12)$

Teorem 3.3.1. *Neka se dvije kružnice dodiruju iznutra. Pravac koji spaja središta tih dviju kružnica prolazi točkom dodira.*

Dokaz. Neka se kružnica ABC i kružnica ADE dodiruju iznutra u točki A. Neka je F središte kružnice ABC, a G središte kružnice ADE. Trebamo pokazati da pravac FG prolazi točkom A.

Pretpostavimo suprotno, tj. da točka A ne leži na pravcu FG. Neka pravac FG prolazi točkom H na kružnici ABC. Vidi Sliku 3.6. Pravac FG će također prolaziti i točkom D na kružnici ADE. Spojimo dužine $\overline{AF}$ i $\overline{AG}$. Zbog toga što zbroj duljina dviju stranica trokuta mora biti veći od duljine treće stranice trokuta slijedi da je

$$|AG| + |GF| > |AF|.$$

Nadalje,

$$|AG| + |GF| > |FH|$$

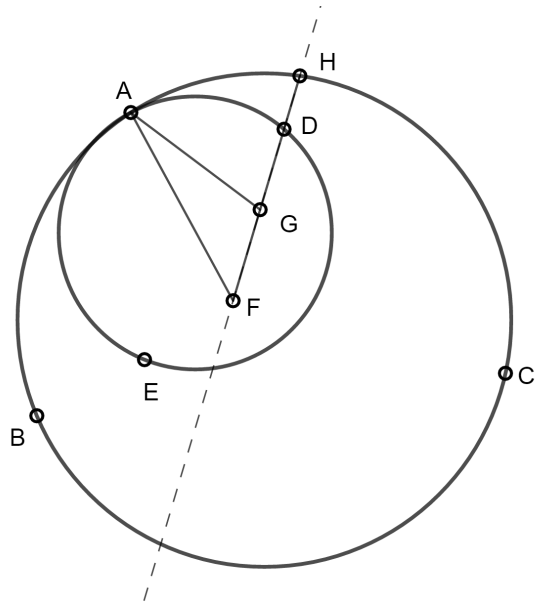
zbog toga što je $|AF| = |FH|$ jer su $\overline{AF}$ i $\overline{FH}$ polumjeri kružnice ADE.

Oduzmemo li $|FG|$ i od $|AG| + |GF|$ i od $|FH|$ dobivamo kako je $|AG| > |GH|$ pa je

$$|AG| > |GD|.$$

No, kako su $\overline{AG}$ i $\overline{GD}$ polumjeri kružnice ADE trebalo bi vrijediti

$$|AG| = |GD|.$$



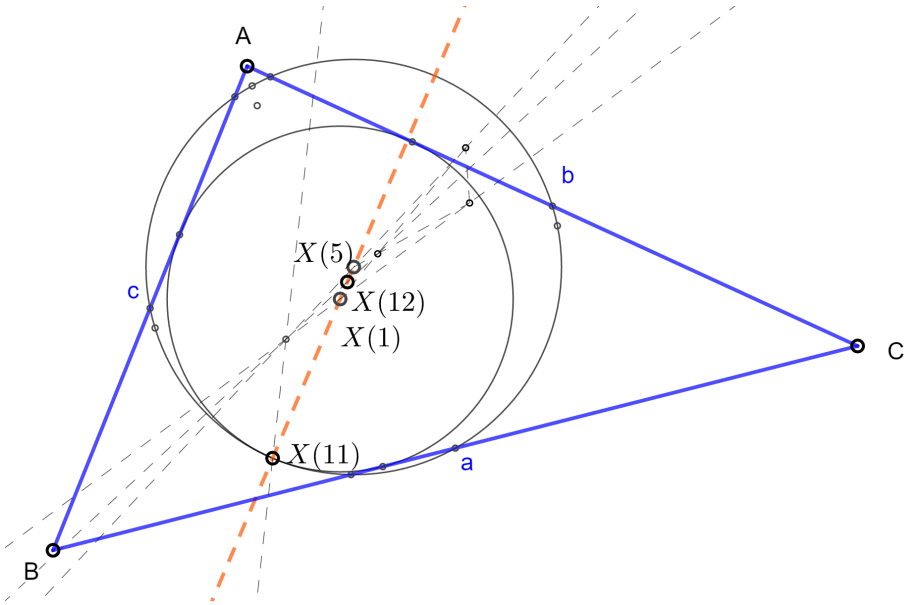
Slika 3.6: Kružnice ABC i ADE

Zbog toga $|AG| + |GF|$ ne može biti veće od $|AF|$, već moraju biti jednaki, tj.

$$|AG| + |GF| = |AF|$$

što upravo znači da su točke A, G i F kolinearne, a to je i trebalo pokazati. □

S obzirom da su točke $X(1)$ i $X(5)$ središta kružnica koje se dodiruju iznutra u točki $X(11)$, prema Teoremu 3.3.1. te točke su kolinearne. Točka $X(12)$ je prema samoj svojoj definiciji kolinearna s točkama $X(1)$, $X(5)$ te $X(11)$.



Slika 3.7: Točke $X(1)$, $X(5)$, $X(11)$ te $X(12)$ su kolinearne

Zaključujemo kako su središte upisane kružnice $X(1)$, središte kružnice devet točaka $X(5)$, Feuerbachova točka $X(11)$ te točka $X(12)$ harmonički konjugirana točki $X(11)$ s obzirom na par točaka $X(1)$ i $X(5)$ nekog trokuta ABC kolinearne točke.

Bibliografija

[1] Ž. Ćaćić i V. Kovač, *Otkrivanje karakterističnih točaka trokuta korištenjem enciklopedije ETC*, Poučak (2017), br. 72, 24–33.

[2] C. Kimberling, *Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle*, Math. Mag. (1994), br. 67, 163–187.

[3] ———, *Encyclopedia of Triangle Center - ETC*, `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`.

[4] Programski paket, *GeoGebra*, `https://www.geogebra.org/`.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 1994.

Sažetak

U ovom diplomskom radu promatrali smo 20 karakterističnih točaka trokuta. Neke su više poznate kao što su središte upisane kružnice, težište, središte opisane kružnice te ortocentar, dok su druge nešto manje poznate. Potom smo te točke unijeli u radnu bilježnicu programa Geogebra i na taj način vizualno detektirali potencijalne skupove međusobno kolinearnih točaka među njima. Jedan od pravaca na kojem leže neke od karakterističnih točaka trokuta je i čuveni Eulerov pravac. Na kraju smo uočene kolinearnosti rigorozno dokazali koristeći elementarne metode euklidske geometrije.

Ključne riječi: Trokut, karakteristične točke trokuta, kolinearnost, Eulerov pravac.

Summary

In this thesis we have discussed 20 triangle centers. Some of them are better known than the others, such as incenter, centroid, circumcenter and orthocenter. We than entered these centers into a GeoGebra workbook and that allowed us to visually detect potential sets of mutually collinear points among them. One of the lines that passes through some of the triangle centers is the famous Euler line. Finally, we have rigorously proved observed collinearities using elementary methods of Euclidean geometry.

Keywords: Triangle, triangle centers, collinearity, Euler line.

Životopis

Rođena sam 30. siječnja 1995. godine u Varaždinu. Nakon završetka Osnovne škole Ludbreg upisala sam Drugu gimnaziju Varaždin, smjer prirodoslovno-matematička gimnazija. Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisala sam 2013. godine, no 2015. godine odlučila sam prebaciti se na nastavnički smjer na istom tom fakultetu kojeg sam potom završila 2017. godine. Nastavak obrazovanja ostvarujem upisom na Diplomski studij matematike (nastavnički smjer) iste te 2017. godine na već spomenutom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.