

# Digitalna obrada signala u glazbi

---

**Majstorović, Monika**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:245035>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-13**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Monika Majstorović

**DIGITALNA OBRADA SIGNALA U**  
**GLAZBI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Ivica Nakić

Zagreb, studeni 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Audio signali</b>	<b>2</b>
1.1 Osnovna svojstva audio signala . . . . .	4
<b>2 Pretvaranje analognog u digitalni signal</b>	<b>11</b>
2.1 Uzorkovanje . . . . .	11
2.2 Preklapanje spektra . . . . .	12
2.3 Kvantizacija i kodiranje . . . . .	15
2.4 Dither . . . . .	17
2.5 Pulsno-kodna modulacija . . . . .	19
<b>3 Filteri</b>	<b>21</b>
3.1 Osnovna terminologija i principi . . . . .	21
3.2 Osrednjavajući filter . . . . .	29
<b>Bibliografija</b>	<b>33</b>

# Uvod

Digitalna računala postala su dostupna 60-ih i 70-ih godina prošlog stoljeća. S njima počela se razvijati i digitalna obrada signala. U početku, budući da su računala bila skupa, digitalna obrada signala koristila se u ograničenom broju područja poput radara i sonara, za istraživanje svemira, traženje nafte i u medicini. Kada su računala postala dostupnija širem broju ljudi, 80-ih i 90-ih, digitalna obrada signala počela se primjenjivati i za komercijalne svrhe te predavati na fakultetima. [18]

Signal je funkcija kojom predstavljamo neku fizikalnu veličinu/varijablu, a koja sadrži informaciju o ponašanju/prirodi promatranoga fenomena [19]. Signalima tako smatramo npr. struju, tlak, ljudski govor ili cijene dionica. Uočavamo da je signal vrlo širok pojam, stoga ne čudi da se digitalna obrada signala primjenjuje u velikom broju područja poput audio kompresije, digitalne obrade slika, prepoznavanja govora, komunikacijama, prognozi vremena, analizi i kontroli industrijskih procesa, medicini i mnogim drugima.

U ovom radu promatrat ćemo osnove digitalne obrade audio signala. Repräsentacija audio signala u digitalnoj domeni na način da ljudsko uho ne primijeti značajnu, ili ikakvu, razliku u velikoj mjeri je moguća zbog ograničenja ljudskog sluha. Znanstveno područje koje se bavi proučavanjem percepcije zvuka naziva se psihoakustika. Neka od psihoakustičnih svojstava audio signala su visina, glasnoća i boja. U prvom poglavlju ovog rada opisat ćemo ta svojstva i njihovu vezu s fizičkim svojstvima audio signala.

Drugo poglavlje bavi se metodama pri pretvorbi vremenski kontinuiranog analognog signala u diskretni digitalni signal. Opisat ćemo tri glavna procesa: uzorkovanje, kvantizaciju i kodiranje, te jednu arhitekturu sklopova, pulsno-kodnu modulaciju. Budući da pri pretvorbi gubimo određene podatke, može doći do nusprodukata poput preklapanja spektra ili šuma kvantizacije. Navodimo i opisujemo te pojave i moguće pristupe njihovom otklanjanju.

U trećem poglavlju opisujemo jedan od vrlo bitnih dijelova digitalne obrade signala: filtriranje. Velike mogućnosti i performanse filtera jedan su od ključnih razloga popularnosti digitalne obrade signala. [18]

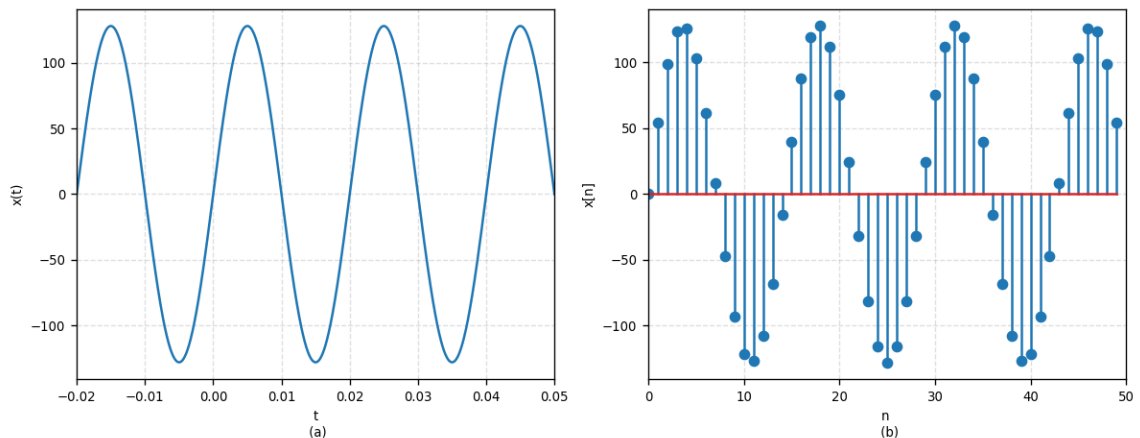
# Poglavlje 1

## Audio signali

Signali su matematički modelirani kao funkcije jedne ili više nezavisnih varijabli. Najčešće nezavisne varijable su vrijeme, frekvencija ili prostorne koordinate. U ovom radu ograničit ćemo se na signale kao funkcije vremena. Domena signala je podskup ili skup realnih brojeva, a kodomenu nazivamo područjem amplituda.

Signale možemo podijeliti s obzirom na mnogo kriterija, a u nastavku ćemo navesti nekoliko glavnih, za ovaj rad relevantnih, podjela.

### Podjela signala prema prirodi vremenske varijable



Slika 1.1: (a) vremenski kontinuirani signal, (b) vremenski diskretni signal

Označimo s  $x$  funkciju kojom modeliramo signal. Prema prirodi vremenske varijable,

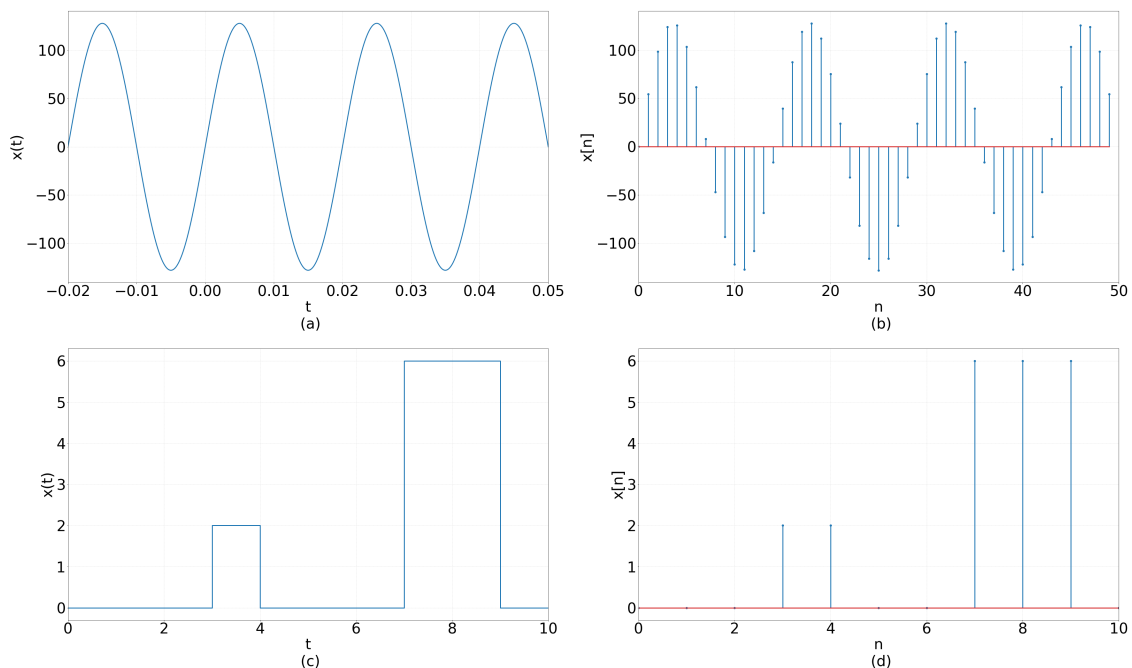
signale dijelimo na:

- (vremenski) kontinuirane - signal je funkcija vremenski kontinuirane varijable  $t \in \mathbb{R}$ , npr. govor. Pišemo:  $x(t)$ .
- (vremenski) diskretne - signal je funkcija vremenski diskretne varijable  $n \in \mathbb{Z}$ , npr. mjesečna rata kredita. Pišemo:  $x[n]$ .

### Podjela signala prema prirodi amplitude

Prema prirodi amplitude signale dijelimo na:

- analogne - signal može poprimiti beskonačan broj vrijednosti amplitude u određenom kontinuiranom intervalu.
- digitalne - signal može poprimiti samo konačan broj vrijednosti amplitude.

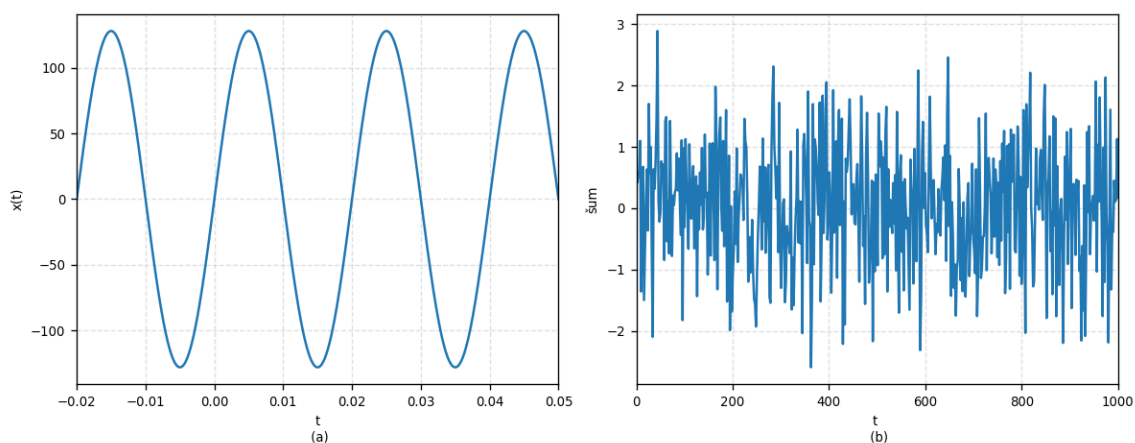


Slika 1.2: (a) kontinuirani, analogni signal, (b) diskretni, analogni signal, (c) kontinuirani, digitalni signal, (d) diskretni, digitalni signal

### Ostale karakterizacije

Signale možemo promatrati s obzirom na njihovu periodičnost, pri čemu razlikujemo periodičke i neperiodičke signale. Još jedna važna klasifikacija signala je na:

- determinističke - fizikalni opis signala, bilo u matematičkom ili grafičkom smislu, u potpunosti je poznat.
- stohastičke - vrijednosti signala ne mogu se točno predvidjeti i poznati su samo statistički parametri signala (npr. srednja vrijednost, varijanca i sl.)



Slika 1.3: (a) deterministički signal, (b) stohastički signal

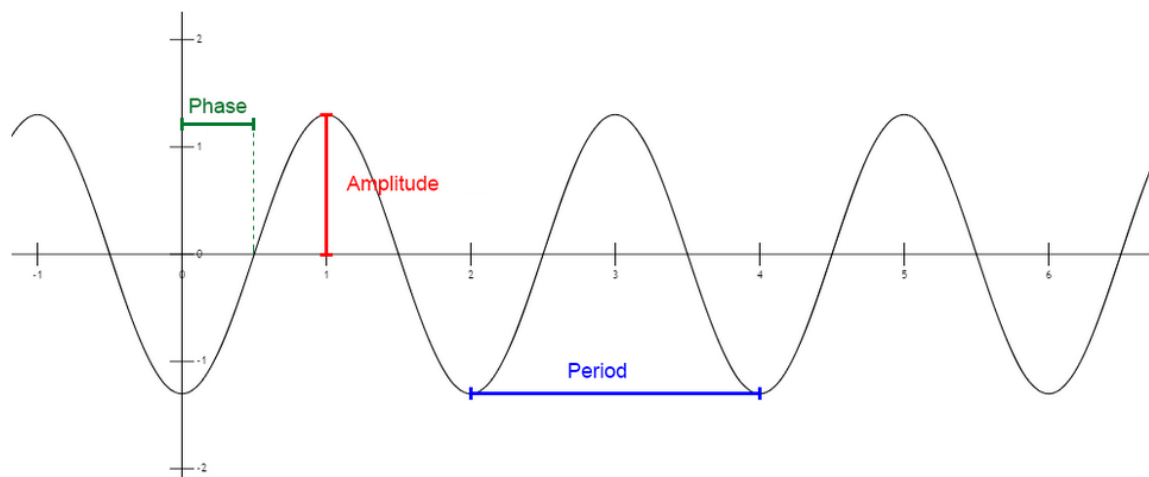
Audio signalima nazivamo signale koje ljudsko uho može čuti. Kako bismo objasnili osnovna svojstva audio signala te ilustrirali pojave i pojmove vezane uz obradu signala, modelirat ćemo audio signal pomoću funkcije sinus, tj. pomoću sinusoidnog vala.

## 1.1 Osnovna svojstva audio signala

Sinusoidni val nastaje harmonijskim titranjem izvora, periodičan je i neprekidan. Navedimo osnovne pojmove vezane uz sinusoidni val dan jednadžbom  $y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$ . Oznaka  $A$  predstavlja amplitudu - maksimalan odmak od ravnotežnog stanja. Temeljni period  $T$  funkcije  $y$  je najmanja količina vremena nakon kojeg funkcija  $y$  poprima iste vrijednosti, tj. vrijedi  $y(t + T) = y(t)$ . Kažemo da je po završetku jednog perioda val napravio jedan titraj/ciklus. Broj ciklusa u jednoj sekundi naziva se frekvencija (oznaka:  $f$ ) i izražava se u Herzima (Hz). Vrijedi sljedeća relacija između frekvencije  $f$  i perioda



$T: f = 1/T$ . Početni fazni kut  $\phi$ , izražen u radijanima, određuje pomak od ravnotežnog položaja u  $t = 0$ .



Slika 1.4: Sinusoida s označenom fazom (zeleno), amplitudom (crveno) i periodom (plavo). [11]

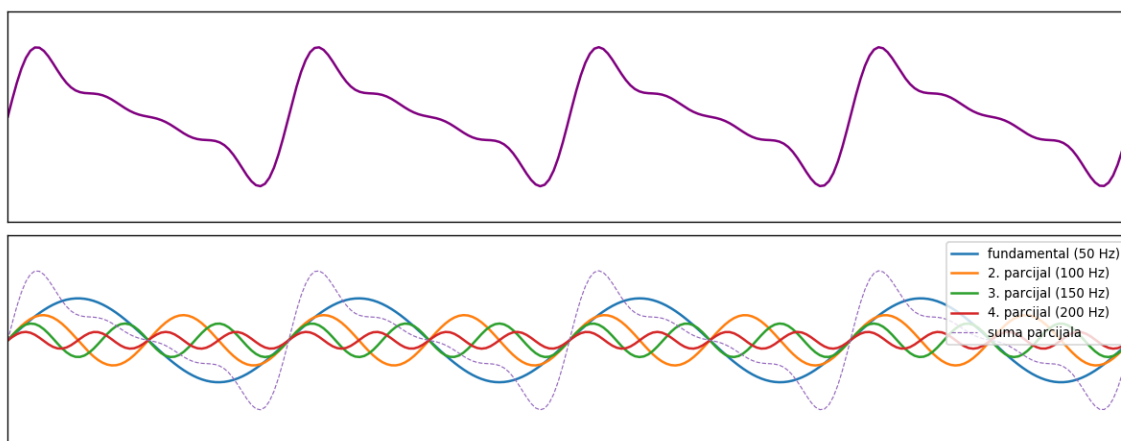
## Visina

Visina zvuka (eng. pitch) jedan je od glavnih psihoakustičnih atributa zvuka, a najviše je vezana uz frekvenciju. Zvukove većih frekvencija percipiramo višima, dok za zvukove manjih frekvencija kažemo da su niži. Ljudsko uho u prosjeku čuje frekvencije od 20 Hz do 20 000 Hz. Točna donja i gornja granica ovog raspona su individualne te ovise o npr. starosti ili zdravlju osobe. Naše uho najosjetljivije je na frekvencije između 1000 i 4000 Hz [14]. Zanimljivo je da se granica osjeta zvuka i granica percepcije visine ne poklapaju. Dobar primjer su zvukovi frekvencije ispod 16 Hz, infrazvukovi: njih osjetimo kao vibracije, ne nužno samo uhom, nego i drugim dijelovima tijela.

Sinusoidni val najjednostavniji je zvuk, još se naziva i čisti ton. Možemo ga čuti samo u studiju za snimanje zvuka ili laboratoriju jer su zvukovi u prirodi mnogo složeniji. Složenije zvukove možemo razložiti na jednostavne sinusoidne valove koji u zbroju daju polazni zvuk. To je osnovno polazište tzv. aditivne sinteze zvuka i usko je povezano s Fourierovim redovima. Kod složenog zvuka razlikujemo fundamentalnu frekvenciju i parcijale [3]. Fundamentalna frekvencija je sinusoidni val najmanje frekvencije u rastavu složenog zvuka na sinusoidne komponente. Nazivamo ga još i prvi parcijal ili fundamental. Ostali sinusoidni valovi imaju veću frekvenciju i najčešće manju amplitudu od fundamen-

talne frekvencije i nazivamo ih redom drugi, treći, četvrti parcijal... Frekvencija složenog vala jednaka je fundamentalnoj frekvenciji, stoga na našu percepciju visine složenog vala najviše utječe fundamentalna frekvencija.

Često se za parcijal koristi i termin harmonik, ali između tih pojmova postoji bitna razlika. Frekvencija harmonika je (okvirno) višekratnik fundamentalne frekvencije. Recimo, za fundamentalnu frekvenciju  $f$ , harmonici su  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$  itd. Kod zvukova u prirodi parcijali ne moraju (svi) biti višekratnici fundamentalne frekvencije, stoga dodatno za parcijale možemo koristiti termine: skoro harmonički parcijali, djelomično harmonički parcijali i neharmonički parcijali [2]. Na slici 1.5 parcijali su višekratnici fundamentalala. Primijetimo da je frekvencija složenog vala ista kao i frekvencija fundamentalala.



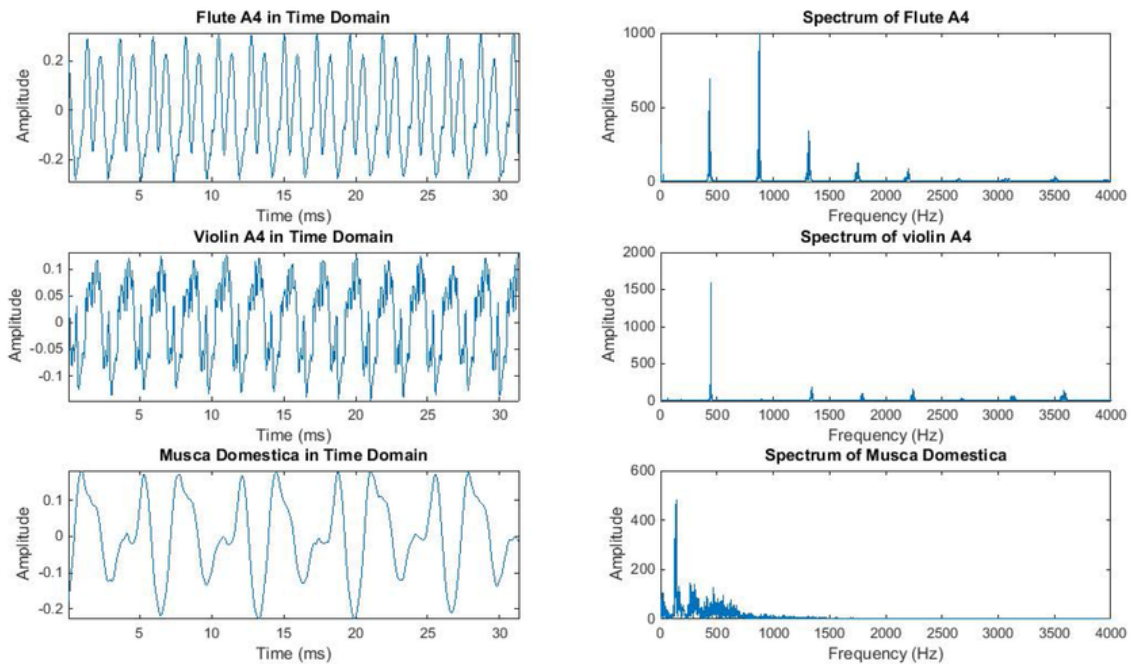
Slika 1.5: Rastav složenog vala na sinusoidne komponente (parcijale).

## Boja

Međusoban odnos frekvencija, amplituda i faza parcijala, koji daju signalu njegov specifičan oblik, uvelike oblikuju našu percepciju boje zvuka. Boja zvuka omogućuje nam razlikovanje zvukova različitih izvora, a iste frekvencije: primjerice, zvuk flaute od zvuka violine (v. sliku 1.6).

## Glasnoća

Glasnoća zvuka također je psihoakustični atribut zvuka. Objektivno, zvuku ne mjerimo glasnoću, nego jakost. Jakost ili intenzitet zvuka opisuje energiju zvučnoga vala u vremenskom razdoblju kroz površinu okomitu na smjer širenja vala. Mjerna jedinica je vat

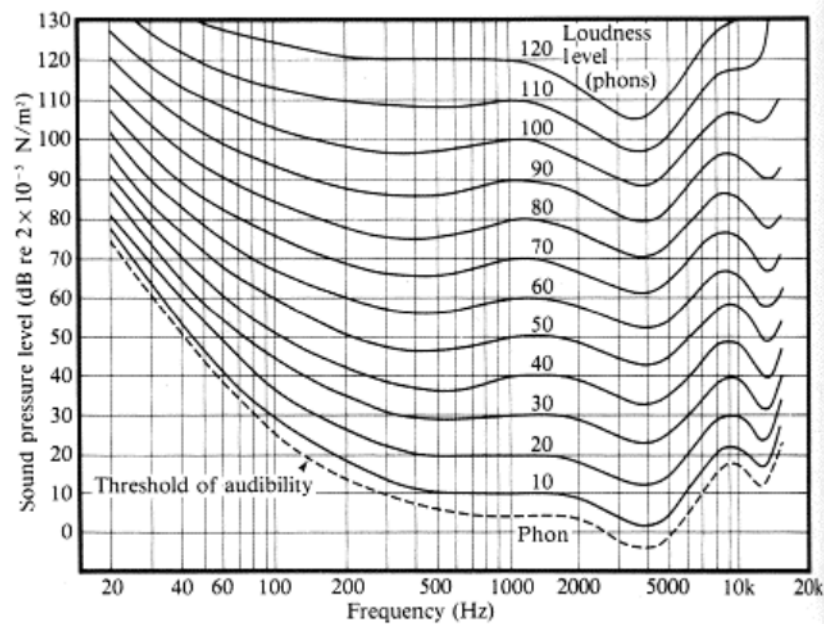


Slika 1.6: Zvukovi u vremenskoj domeni (lijevo) i frekvencijskoj domeni (desno): flauta (gore), violina (sredina) i domaća mušica (dolje). [17]

po kvadratnom metru ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). Za praktičnu upotrebu, intenzitet zvuka koji promatramo uspoređujemo s nekim referentnim intenzitetom iste frekvencije. Najčešće se uzima tzv. prag čujnosti- intenzitet pri kojemu prosječno ljudsko uho počinje čuti signal frekvencije 1000 Hz. On iznosi približno 10 do 12  $\text{W}/\text{m}^2$ . Nadalje, budući da je ljudsko uho osjetljivije na zvukove manjih intenziteta, nego na one vrlo velikih intenziteta, tj. percepcija intenziteta zvuka je nelinearna, uvodi se logaritamska skala. Ona je zgodna i zbog velikog raspona jakosti koje ljudsko uho može čuti jer logaritmom smanjujemo broj vrijednosti na y-osi pa je lakše prikazati relevantne podatke. Time dolazimo do mjerne jedinice bel, nazvane prema američkom izumitelju Alexandru Grahamu Bellu<sup>1</sup>:

$$B = \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_0} \right), \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Alexandar Graham Bell (1847. - 1922.) američki izumitelj, znanstvenik i fiziolog škotskog porijekla. Najpoznatiji po izumu prvog široko upotrebljivog električnog telefona.



Slika 1.7: Fletcher-Munsonova krivulja [6]

pri čemu je  $I_1$  intenzitet zvuka kojeg promatramo, a  $I_0$  intenzitet referentnog zvuka iste frekvencije. U općenitij upotrebi je jedinica decibel:

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_0} \right). \quad (1.2)$$

Ovako izražen omjer dvaju intenziteta zvuka naziva se razina zvučnog intenziteta (eng. sound intensity level, SIL). Bitno je napomenuti da se decibeli i generalno koriste za izražavanje logaritamskog omjera bilo kojih dvaju veličina (npr. struje). Kako bi se razlikovalo koje veličine promatramo u omjeru, oznaci dB dodaje se sufiks ili indeks koji pobliže opisuje što se uspoređuje. Konkretno, dB kojim izražavamo razinu zvučnog intenziteta označavamo s dB<sub>SIL</sub>. Također, možemo promatrati i razinu zvučnog tlaka (eng. sound pressure level, SPL) izraženu jednadžbom:

$$\text{dB}_{\text{SPL}} = 20 \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_0} \right), \quad (1.3)$$

pri čemu referentna vrijednost  $P_0$  iznosi  $2 \times 10^{-5}$  Pa pri frekvenciji od 1000 Hz, a  $P_1$  je zvučni tlak zvuka kojeg promatramo pri istoj toj frekvenciji. Najmanja razlika u zvučnom

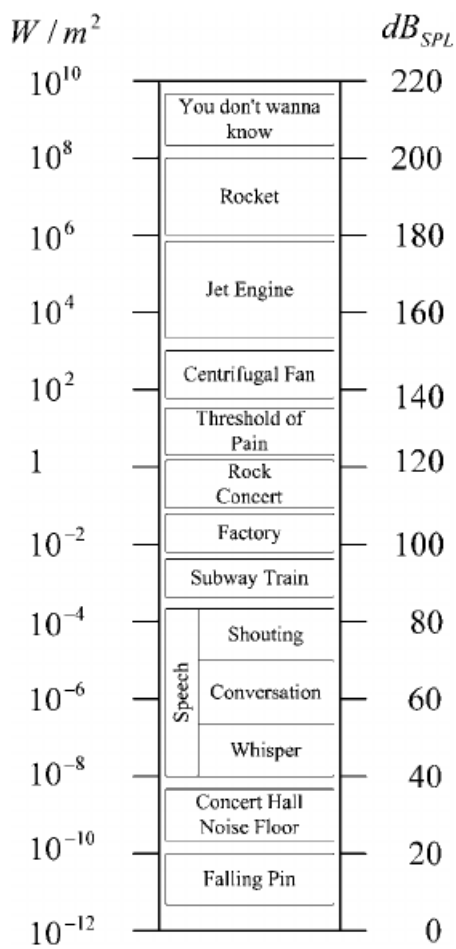
tlaku koju ljudsko uho može detektirati iznosi oko  $1 \text{ dB}_{\text{SPL}}$ . Između jednadžbi (1.2) i (1.3) postoji sljedeća veza:

$$20 \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_0} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^2 = 10 \log_{10} \left( \frac{P_1^2}{P_0^2} \right). \quad (1.4)$$

Drugim riječima, dobivamo da je intenzitet proporcionalan kvadratu amplitude. Na slici 1.8 prikazano je kojim razinama decibela pripadaju određeni zvukovi iz ljudske svakodnevice.

Dok su razina zvučnog intenziteta i razina zvučnog tlaka objektivne mjere, razina glasnoće zvuka je subjektivna. Mjeri se na način da se slušaču puste u isto vrijeme zvuk čija se razina glasnoće mjeri te referentni ton frekvencije 1000 Hz. Referentnom tonu prilagođava se amplituda sve dok slušač ne percipira dva zvuka da su jednake glasnoće. Razina glasnoće, izražena u fonima, tada je jednaka razini zvučnog tlaka (u  $\text{dB}_{\text{SPL}}$ ) prilagođenog referentnog tona u omjeru sa standardnom referencom  $A_0 = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ .

Zanimljivo je da naša percepcija razine glasnoće ovisi o frekvenciji zvuka. Taj fenomen prikazan je na Fletcher-Munson krivulji (v. sliku 1.7). Zvuk frekvencije između 3000 Hz i 4000 Hz čujemo pri razini zvučnog tlaka 0 dB. Kako bismo zvuk frekvencije 20 Hz percipirali jednako glasnim kao i zvuk između 3000 Hz i 4000 Hz, on mora biti razine zvučnog tlaka iznad 70 dB. S druge strane, ako bismo promatrali zvukove iste razine zvučnog tlaka, recimo 60 dB, a različitih frekvencija, možemo uočiti da ćemo zvukove frekvencija 200 Hz do 5000 Hz percipirati glasnijima nego recimo zvukove frekvencija 100 Hz ili 10 000 Hz.



Slika 1.8: Tipične razine decibela poznatih zvukova u našem okruženju. [15]

## Poglavlje 2

# Pretvaranje analognog u digitalni signal

Kontinuirani analogni signal po prirodi može poprimiti beskonačno mnogo vrijednosti i u vremenu i u amplitudi. Budući da digitalni sustavi imaju ograničenu memoriju, potrebno je naći način spremanja podataka o signalu takav da ljudsko uho prilikom reprodukcije ne primijeti razliku između originala i pripadnog zvuka pohranjenog u digitalnom sustavu.

### 2.1 Uzorkovanje

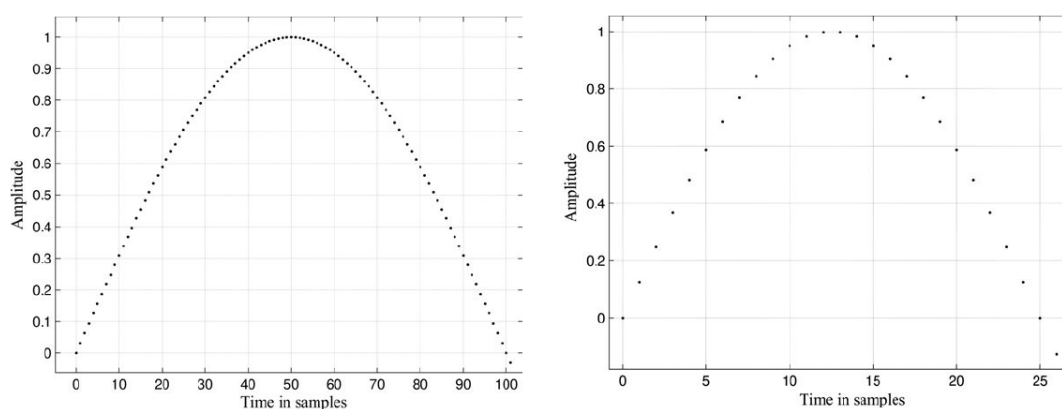
Pozabavimo se prvo diskretizacijom vremenske domene: uzimat ćemo vrijednosti kontinuiranog signala u određenim vremenskim razmacima. Taj proces naziva se uzorkovanje (eng. sampling).

Promotrimo uniformno uzorkovanje. Neka je  $x(t)$  analogni signal čije se vrijednosti uzimaju svakih  $\Delta t$  sekundi. Vremenski interval  $T = \Delta t$  nazivamo interval ili period uzorkovanja, a  $f_{sr} = \frac{1}{\Delta t}$  frekvencija uzorkovanja (eng. sample rate). Svaka diskretna vrijednost od  $x(t)$  u trenucima  $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$  naziva se uzorak signala  $x(t)$  i označava pomoću uglatih zagrada:  $x[0], x[T], x[2T], x[3T], \dots$  Na slici 2.1 možemo usporediti dva ista dijela sinusoide frekvencije 1Hz uzorkovana drugačijom frekvencijom uzorkovanja.

#### Teorem o uzorkovanju

Teorem o uzorkovanju (eng. sampling theorem) kaže da se svaki kontinuiran frekvencijski ograničen signal može zamijeniti uzorcima bez ikakvog uočljivog gubitka informacija, te kako se takav signal može rekonstruirati. Teorem specificira da  $f_{sr}$  mora biti barem dva puta veća od maksimalne frekvencije  $f_{max}$  ograničenog frekvencijskog pojasa signala. Drugim riječima,

$$f_{max} < \frac{f_{sr}}{2}. \quad (2.1)$$



Slika 2.1: Približno pola trajanja sinusoide frekvencije 1Hz uzorkovane frekvencijom  $f_{sr} = 200\text{Hz}$  (lijevo) i  $f_{sr} = 50\text{Hz}$  (desno). [15]

Recimo, za audio signal koji uključuje frekvencije od 100Hz do 10kHz, frekvencija uzorkovanja  $f_{sr}$  mora biti veća od 20kHz. Ukoliko uzorkovanje nije uniformno, teorem i dalje vrijedi uvrštavanjem prosječne frekvencije uzorkovanja.

Ovaj teorem često se naziva i Nyquist-Shannonov teorem u čast znanstvenicima Harryju Nyquistu<sup>1</sup> i Claudeu Shannonu<sup>2</sup>, a  $\frac{f_{sr}}{2}$  naziva se Nyquistova frekvencija. Nyquist je tvrdio da je širina kanala za komunikaciju povezana s brzinom slanja impulsa, odnosno da brzina slanja impulsa mora biti dvostruko veća od širine komunikacijskog kanala kako bi došlo do točne rekonstrukcije signala na strani prijavnika. Shannon je proširio tu tvrdnju na bilo kakve signale, matematički ju dokazao i primijenio na digitalna računala. Neovisno o Nyquistu i Shannonu, do analognih zaključaka došli su i Vladimir Kotelnikov<sup>3</sup>, Edmund Whittaker<sup>4</sup> i drugi.

## 2.2 Preklapanje spektra

Ako je frekvencija uzorkovanja  $f_{sr}$  manja nego što se zahtjeva teoremom o uzorkovanju, što nazivamo poduzorkovanje (eng. undersampling), dolazi do pojave preklapanja spektra

<sup>1</sup>Harry Nyquist (1889. - 1976.), američki inženjer elektrotehnike švedskog porijekla, poznat po doprinosima teoriji informacija.

<sup>2</sup>Claude Shannon (1916. - 2001.), američki matematičar, kriptograf i inženjer elektrotehnike. Smatra se ocem teorije informacija, postavio je temelje modernih digitalnih računala.

<sup>3</sup>Vladimir Kotelnikov (1908. - 2005.), pionir teorije informacija i radarske astronomije SSSR-a.

<sup>4</sup>Edmund Whittaker (1873. - 1956.), engleski matematičar. Ostvario velik doprinos u primijenjenoj matematici, matematičkoj fizici i teoriji specijalnih funkcija.

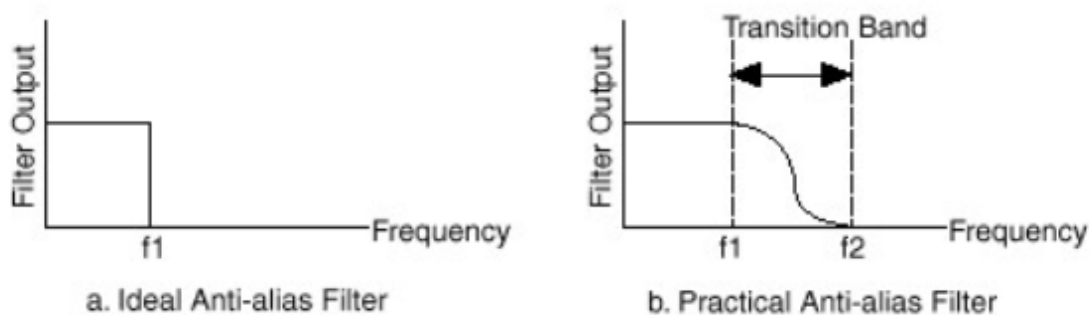


(eng. aliasing). U uzorkovanom signalu pojavljuju se frekventijske komponente koje nisu postojale u originalnom signalu: frekvencije iznad  $f_{sr}$  bit će reprezentirane "aliasom".

Frekvencija aliasa je apsolutna vrijednost razlike originalne frekvencije i najbližeg višekratnika frekvencije uzorkovanja. Primjerice, ako frekvencijom uzorkovanja od 25 kHz uzorkujemo signal od 20 kHz (nije zadovoljen dovoljan uvjet iz teorema o uzorkovanju), generirat će se nova frekventijska komponenta od 5 kHz.

Kako bi se izbjegao ovaj problem, signal se prije samog uzorkovanja mora propustiti kroz tzv. anti-alias filter. Najčešće se radi o niskopropusnom filtru - filtru koji propušta frekvencije niže od granične frekvencije, a više frekvencije prigušuje tako što im smanjuje amplitudu (eng. attenuation).

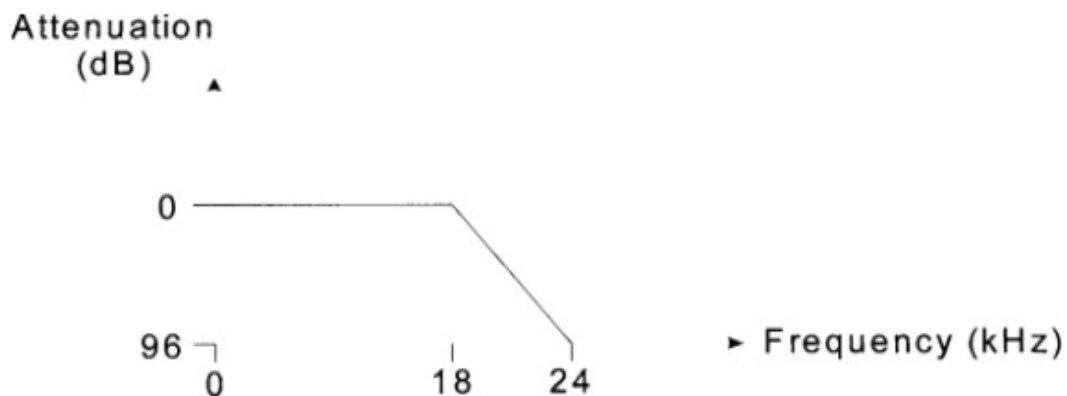
Idealan anti-alias filter propušta sve ulazne frekvencije ispod određene granice  $f_1$  i odsijeca sve frekvencije iznad  $f_1$  [1].  $f_1$  nazivamo graničnom frekvencijom ili frekvencijom odsijecanja (eng. cut-off frequency). Takav filter nije moguće fizički realizirati. U praksi, filteri funkcioniraju kao na slici 2.2 b). Propuštaju sve frekvencije manje od  $f_1$  i odsijecaju sve frekvencije veće od  $f_2$ . Područje između  $f_1$  i  $f_2$  naziva se prijelazni pojas i sadrži ulazne frekvencije postepeno oslabljenih amplituda. One i dalje mogu uzrokovati preklapanje spektra pa se u praksi frekvencija uzorkovanja određena teoremom o uzorkovanju još dodatno povećava. Navedimo za primjer standardnu frekvenciju uzorkovanja za CD. Raspon frekvencija koje ljudsko uho čuje seže do 20 kHz. Po teoremu o uzorkovanju, dovoljno je uzeti  $f_{sr} > 40\text{kHz}$ . Standardno se uzima frekvencija uzorkovanja od 44.1kHz, čime se omogućuje oko 2 kHz prijelaznog pojasa.



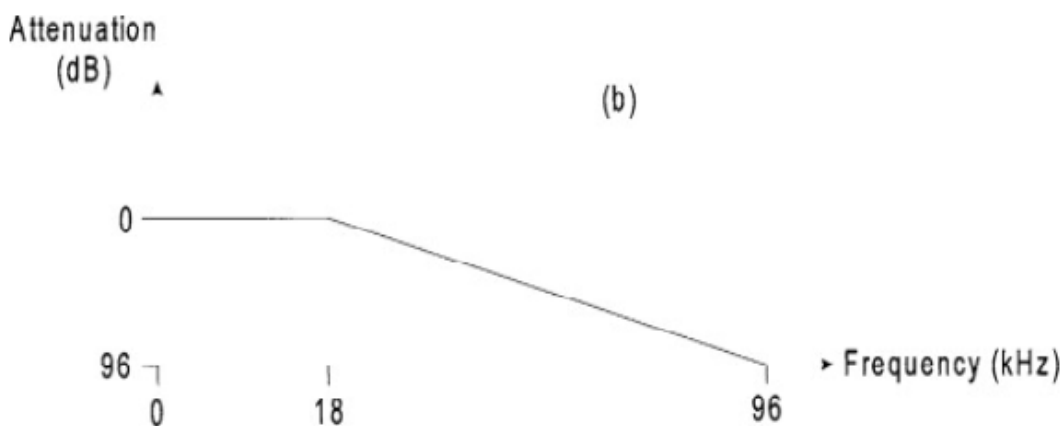
Slika 2.2: Niskopropusni filter u idealnom slučaju (a) i u praksi (b). [1]

Također, često se koristi i naduzorkovanje (eng. oversampling), tj. odabere se frekvencija uzorkovanja značajno veća nego što je zadano teoremom o uzorkovanju. Ilustrirajmo jednu od prednosti naduzorkovanja na primjeru [12]. Promotrimo audio sustav koji koristi frekvenciju uzorkovanja 48 kHz. U tom slučaju, trebamo anti-alias filter koji prigušuje sve

frekvencije iznad 24 kHz za, recimo, 96 dB. Frekvencija odsijecanja filtera mora biti ispod 24 kHz, uzmimo da je 18 kHz (v. sliku 2.3).



Slika 2.3: Niskopropusni filter ( $f_{sr} = 24\text{kHz}$ ) [12]



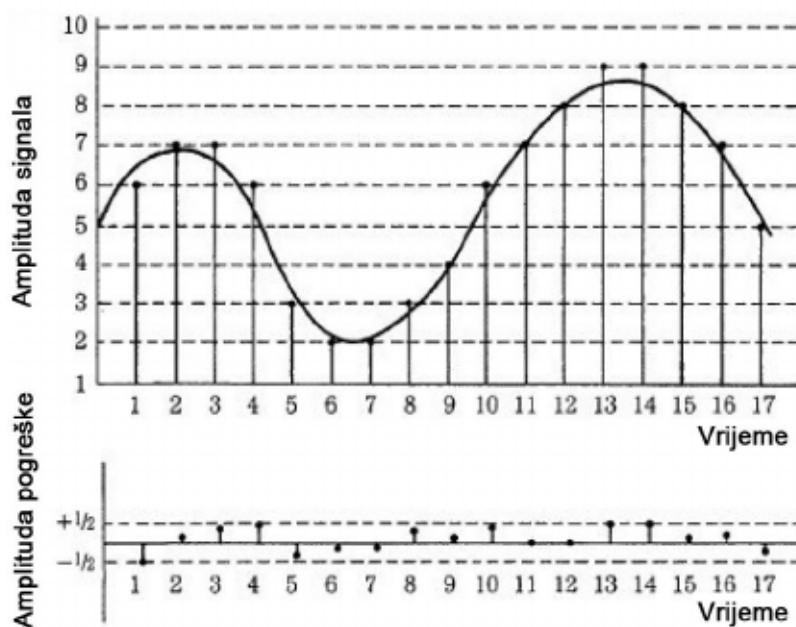
Slika 2.4: Niskopropusni filter ( $f_{sr} = 96\text{kHz}$ ) [12]

Ako naduzorkujemo signal 4 puta, frekvencija uzorkovanja postaje 192 kHz. Potrebno prigušivanje anti-alias filtera je sada 96 dB na 96 kHz, umjesto na 24 kHz. Ako frekvencija odsijecanja ostane na 18 kHz, promjena u amplitudi bit će postepenija nego ranije (v. sliku

2.4). To omogućava korištenje jednostavnijeg anti-alias filtera što smanjuje troškove jer anti-alias filtri visokih performansi mogu biti skupi.

## 2.3 Kvantizacija i kodiranje

Razmotrimo sada diskretizaciju područja amplituda: kvantizaciju. Područje amplituda dijeli se na tzv. razine kvantizacije. Razlika između dvije susjedne razine kvantizacije naziva se korakom kvantizacije ili kvantom. Na slici 2.5 možemo vidjeti područje amplituda podijeljeno na deset razina, pri čemu su svi kvantovi jednaki. Takva kvantizacija naziva se linearna/uniformna kvantizacija.

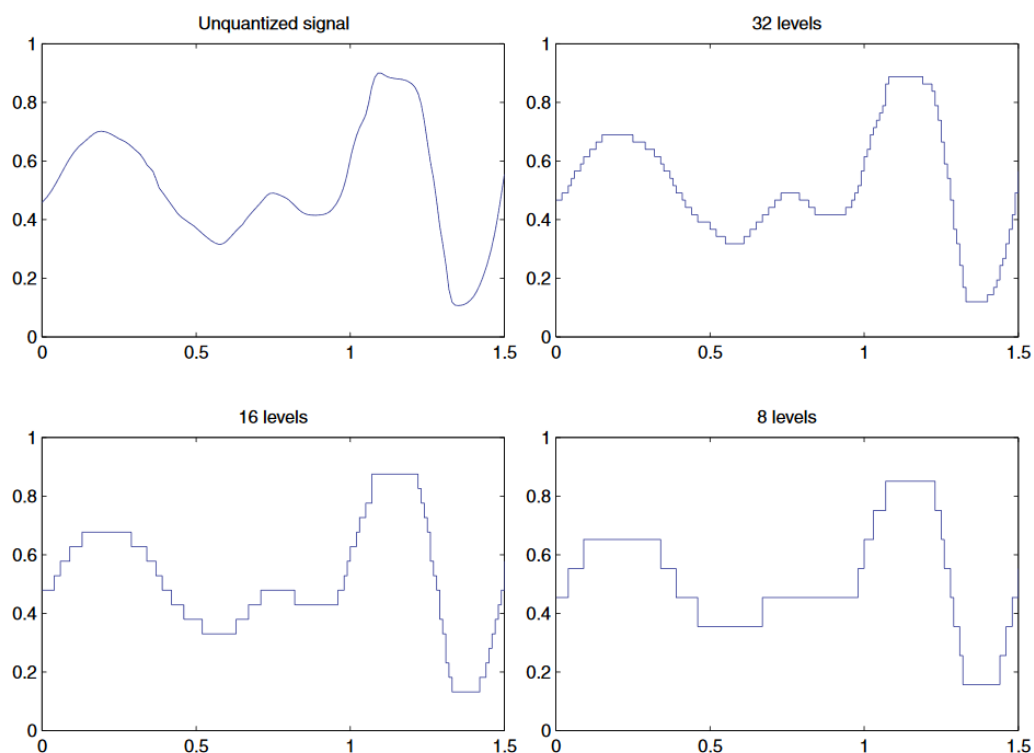


Slika 2.5: Prikaz kvantizacije signala (gore) i prikaz pripadnog signala pogreške kvantizacije (dolje). [9]

Nakon podjele područja amplituda na razine kvantizacije, vrijednost amplitude zaokružuje se na najbližu razinu po odabranom kriteriju. Zbog toga se kod uzoraka pojavljuju razlike između ekvivalentne kvantizirane i analogne vrijednosti. Ta razlika predstavlja po-

grešku kvantizacije, koja se u signalu pojavljuje kao novi signal s amplitudom od najviše polovice kvanta (v. sliku 2.5).

U digitalnim sustavima podaci su prikazani nizom nula i jedinica pa je svakom kvantiziranom uzorku potrebno dodijeliti odgovarajuću binarnu vrijednost. Postupak pridruživanja binarnog koda pojedinoj razini kvantizacije naziva se kodiranje. Broj kvantizacijskih razina ovisi o broju bitova koji se rabe za kodiranje. Broj bitova koji se koristi pri kodiranju naziva se bitna dubina. Najčešće se koristi 8-bitna (256 razina), 16-bitna (65 536 razina), 20-bitna ili 24-bitna (16.8 milijuna razina) dubina. Što je odabrana veća bitna dubina, to je manja pogreška kvantizacije jer preciznije možemo aproksimirati svaki uzorak zbog većeg broja razina (slika 2.6).



Slika 2.6: Utjecaj rezolucije na kvantizaciju. [5]

Ako je uzorkovanje obavljeno dovoljno velikom frekvencijom, susjedni uzorci signala međusobno su visoko korelirani jer se amplituda znatnije ne mijenja. Ta činjenica može se iskoristiti na način da se ne kvantiziraju uzorci, već razlika između uzoraka. Na taj način

može se smanjiti broj bitova potreban za kodiranje pojedinog uzorka. Takva kvantizacija naziva se diferencijalna kvantizacija.

## SQNR

Signal pogreške kvantizacije ponekad se naziva i kvantizacijski šum te možemo promatrati omjer signala i kvantizacijskog šuma (eng. signal-to-quantization-noise ratio, SQNR). Generalno, omjer signala i šuma (eng. signal-to-noise ratio, SNR) je mjera kojom se uspoređuju razina promatranog signala i pozadinske buke. Izražava se najčešće u dB pomoću sljedeće jednadžbe

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{signal}}{P_{\text{šum}}} \right), \quad (2.2)$$

pri čemu su  $P_{signal}$  i  $P_{\text{šum}}$  snaga promatranog signala, odnosno šuma, izražena u vatima (W) ili milivatima (mW). Ukoliko bismo promatrali kvadratni korijen srednje vrijednosti (eng. root mean square, RMS) amplitude,  $A_{signal}$  i  $A_{\text{šum}}$ , izražene u voltima (V) ili amperima (A), izraz bi glasio:

$$SNR = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{signal}}{A_{\text{šum}}} \right). \quad (2.3)$$

Poželjno je imati što veći omjer signala i šuma.

Za SQNR promatramo maksimalnu vrijednost amplitude u signalu i maksimalnu vrijednost pogreške kvantizacije. Veza između SQNR i bitne dubine predočena je izrazom:

$$SQNR \approx 6 \cdot b, \quad (2.4)$$

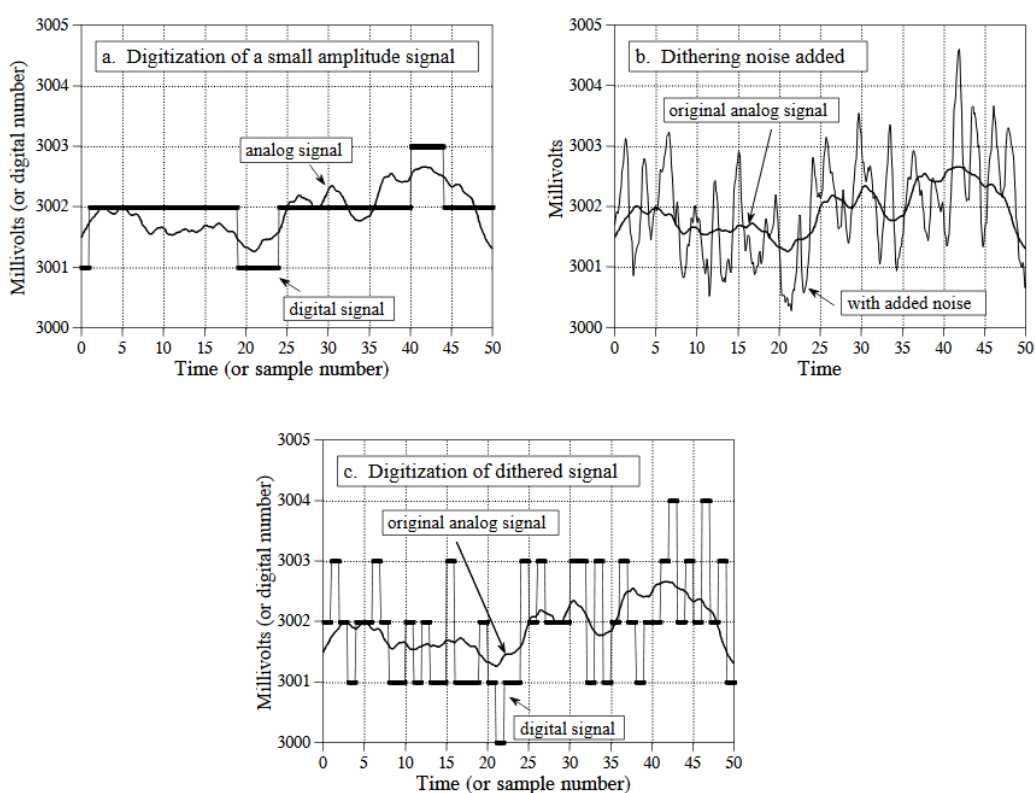
gdje je  $b$  broj bitova. Važan rezultat koji dobijemo iz izraza (2.4) je aproksimacija dinamičkog raspona sustava: svakim dodanim bitom povećavamo dinamički raspon za otprilike 6 dB<sub>SPL</sub>. Recimo, ako je dinamički raspon nekog audio signala od 10 dB<sub>SPL</sub> do 100 dB<sub>SPL</sub>, tj. 90 dB<sub>SPL</sub>, dovoljna je 16-bitna dubina jer po (2.4) omogućujemo dinamički raspon od  $16 \cdot 6 \text{ dB}_{\text{SPL}} = 96 \text{ dB}_{\text{SPL}}$ . Klasična bitna dubina audio signala na CD-u iznosi upravo 16 bitova.

## 2.4 Dither

Kod signala visoke amplitude postoji mala korelacija između signala i pogreške kvantizacije. Može se smatrati da je u tom slučaju pogreška slučajna i slična bijelom šumu. Kod signala niskih amplituda, postoji visoka korelacija sa signalom pogreške kvantizacije pa može doći do čujnih izobličenja.

Prvo rješenje koje se nameće je povećanje broja bitova jer se time smanjuje pogreška kvantizacije, no to iziskuje skuplje i kompleksnije pretvarače i sustave, pa takvo rješenje nije isplativo.

Učinkovitija metoda je dither (ponekad se u literaturi na hrvatskom jeziku koristi termin podrhtavanje). Dither je šum koji se dodaje audio signalu prije uzorkovanja. Dodavanjem nasumičnog zvuka male amplitude činimo pogrešku kvantizacije nasumičnijom pa ju slabije percipiramo jer ljudsko uho stavlja buku u pozadinu. Time je pogreška kvantizacije dekorelirana od audio signala.



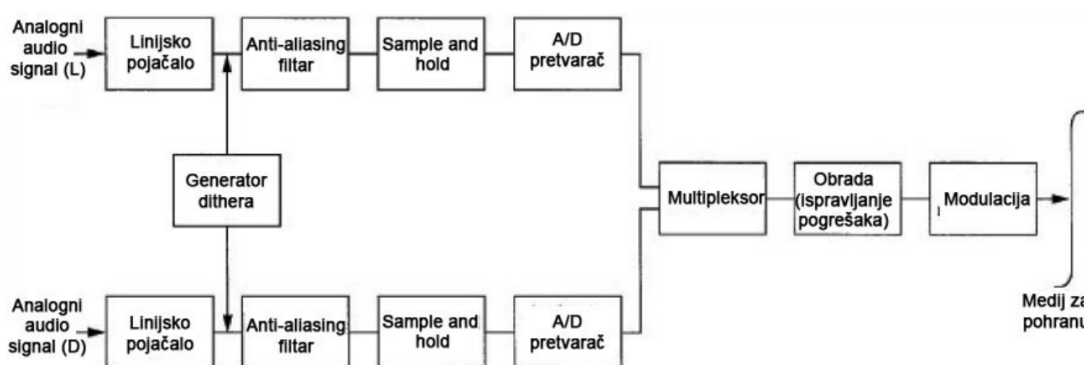
Slika 2.7: Promjena digitalnog signala nakon dodavanja dithera: a) Analogni signal ima puno malih promjena unutar najmanje značajnog bita koje nisu vidljive nakon pretvorbe u digitalni signal. b) Dodavanje buke analognom signalu. c) Digitalni signal nastao iz analognog s ditherom bolje modelira promjene originalnog analognog signala. [18]

Druga situacija u kojoj je dither primjenjiv jest kada je analogni signal sporo promjenjiv, tj. mijenja se unutar  $\pm 1$  najmanje značajnog bita. Pri kvantiziranju takve promjene u amplitudi ne bi se vidjele jer bi svi uzorci pripali većinom jednoj razini (slika 2.7 a.).

Ako koristimo dovoljno veliku rezoluciju, dither postaje nepotreban. Konkretno, 24-bitna dubina pruža dinamički raspon takav da je najmanje značajan bit ekvivalentan amplitudi buke na atomskoj razini. Ako bismo morali preći na 16-bitnu dubinu, opet bismo upotrijebili dither.

## 2.5 Pulsno-kodna modulacija

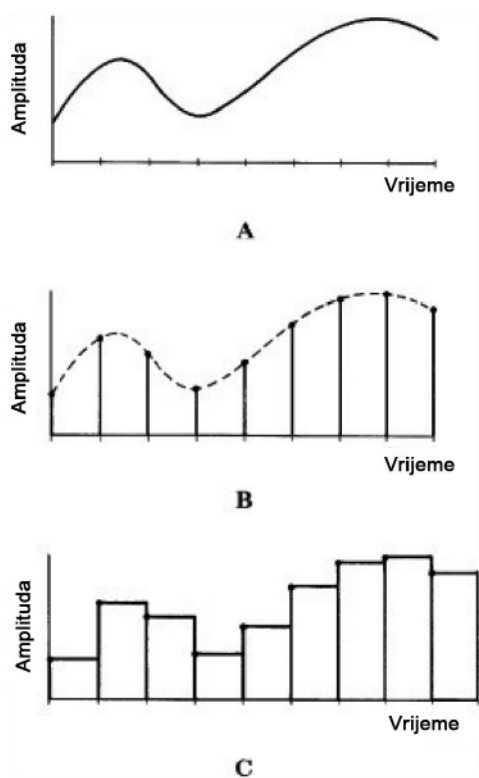
Nakon pregleda osnovnih postupaka diskretizacije vremena i amplitude analognog signala, promotrimo jednu od arhitektura sklopova za pretvaranje analognog u digitalni signal: pulsno-kodnu modulaciju (eng. Pulse Code Modulation, PCM). Ona uključuje sljedeće sklopove: linearno pojačalo, generator dithera, anti-alias filter, sklop za uzorkovanje i zadržavanje (eng. sample-and-hold), analognog-digitalni pretvarač (A/D pretvarač) i modulator kanalnog koda (slika 2.8). [9]



Slika 2.8: Arhitektura linearnog PCM sklopa. [9]

Analogni audio signal prvo prolazi kroz linearno pojačalo. Njime se analogni signal prilagođava za zahtjeve A/D pretvarača. Primjerice, A/D pretvarač može raditi s rasponom analognog signala od 0V do 2V, pa se signali s većim rasponom tome moraju prilagoditi. Nakon toga signal prolazi kroz anti-alias filter do sklopa za uzorkovanje i zadržavanje (sample-and-hold). Uzorak analognog signala zadržava se određeno vrijeme, koje mora biti dovoljno da A/D pretvarač analognoj vrijednosti pridruži odgovarajuću binarnu riječ. Izlaz sklopa za uzorkovanje i zadržavanje je diskretizirani analogni signal stepeničastog

oblika (slika 2.9). U A/D pretvaraču dolazi do kvantizacije i kodiranja. Ukoliko je kvantizacija linearna, PCM se detaljnije naziva linearna pulsno-kodna modulacija. Ako se radi o stereo signalu, potreban je vremenski multipleksor koji iz više ulaza tvori jedan izlaz. Prije spremanja ili prijenosa signala ispravljaju se eventualne greške i odvija se modulacija kanalnim kodovima. U modulatoru se originalni kodovi prekodiraju kako bi se prilagodili mediju na koji će se pohraniti ili kojim će se prenositi. Na primjer, PCM signal nije prikladan za direktni zapis na optički medij jer se zapis na optičkom mediju bazira na detekciji prijelaza između jedinica i nula, a ne samih razina jedinica i nula. Jedan od poznatijih kanalnih kodova u audio području je EFM kod (eng. Eight to Fourteen Modulation), kod kojih se 8 bitova pretvara u 14 bitova, pa je takav kod prilagođen optičkom zapisu na audio CD. [9]



Slika 2.9: a) analogni signal, b) uzorkovani analogni signal, c) zadržane vrijednosti analognog signala. [9]



# Poglavlje 3

## Filteri

Filteri u obradi signala propuštaju određene frekvencije nepromjenjene dok istovremeno guše ostale frekvencijske komponente. Mogu se koristiti u dvije svrhe: razdvajanje i obnavljanje signala. Razdvajanje je potrebno ukoliko je signal zagađen bukom ili drugim signalima. Recimo, prilikom EKG-a srca fetusa, EKG može u isto vrijeme uhvatiti i majčine otkucaje i disanje zbog čega je potrebno moći razdvojiti te signale kako bi se mogli individualno analizirati. Obnavljanje signala potrebno je kada je signal deformiran, npr. zbog snimanja opremom loše kvalitete. [18]

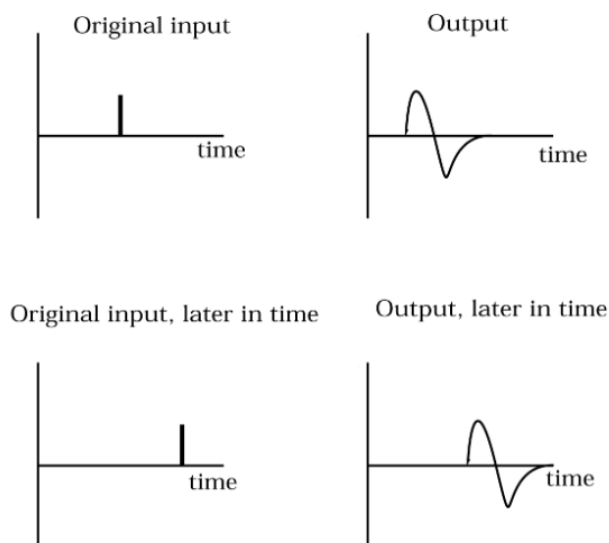
U ovom poglavlju ograničit ćemo se na promatranje digitalnih filtera, i to linearnih vremenski nepromjenjivih (eng. linear time invariant, LTI) digitalnih filtera jer su oni najčešće korišteni u praksi. Digitalne filtere realiziramo pomoću specijalnih integriranih krugova ili posebnim algoritmima. U odnosu na analogne filtere, digitalni filteri mogu postići veću preciznost i fleksibilniji su, tj. mogu se lakše prilagoditi različitim ulaznim podacima. Svojstvo vremenske nepromjenjivosti nekog sustava znači da izlaz sustava ne ovisi o apsolutnom vremenu, tj. neki ulaz A uvijek će biti transformiran u isti izlaz B, bez obzira kada se transformacija odvija. Ovo svojstvo ilustrirano je na slici 3.1.

### 3.1 Osnovna terminologija i principi

#### Filteri u frekvencijskoj domeni

Promotrimo ukratko filtere u kontekstu frekvencijske domene. Postoje četiri osnovna tipa:

- niskopropusni filter (eng. low-pass filter)
- visokopropusni filter (eng. high-pass filter)
- pojasnpropusni filter (eng. band-pass filter)



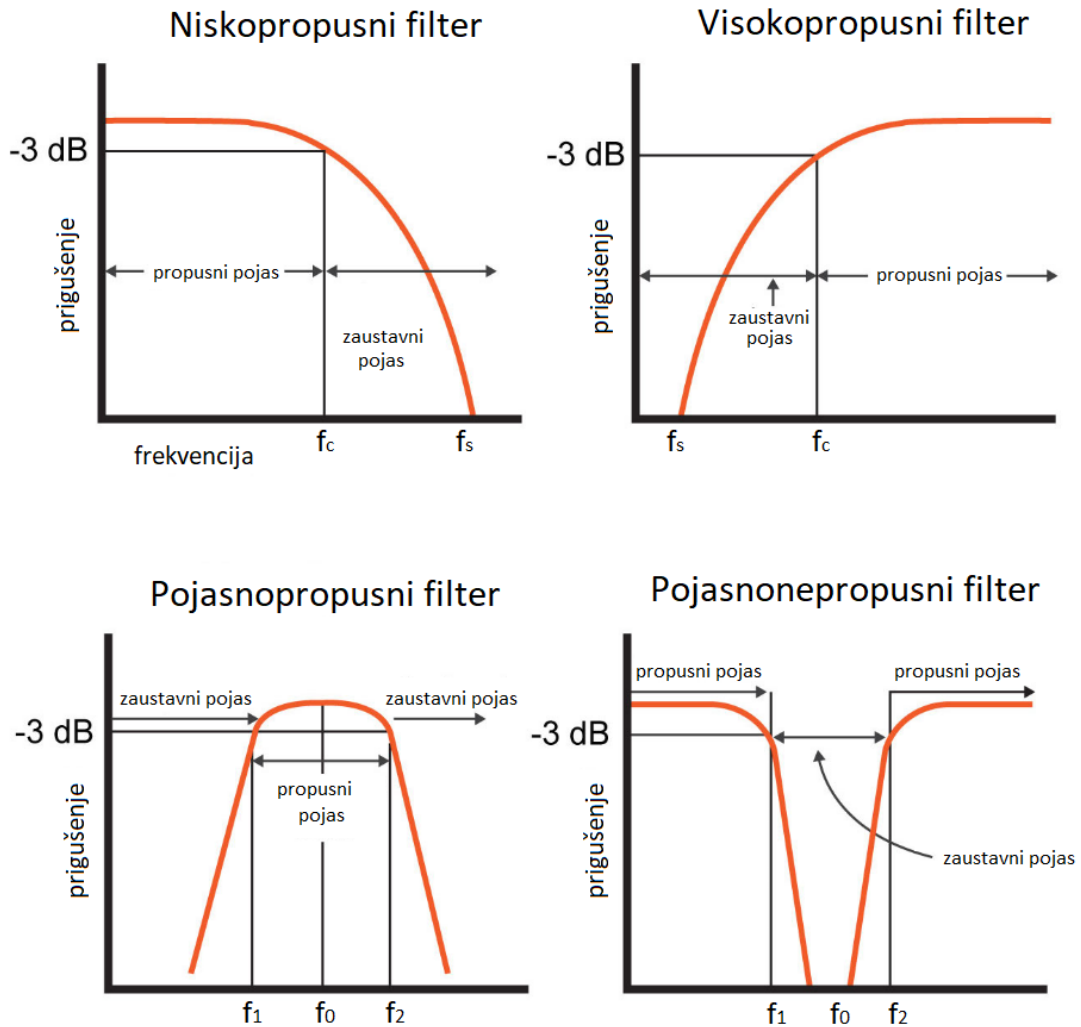
Slika 3.1: Ilustracija svojstva vremenske invarijantnosti. [8]

- pojasnonepropusni filter (eng. band-stop/notch filter)

Na slici 3.2 možemo vidjeti ilustriran frekvencijski odziv svakog od navedenih tipova. Frekvencijski odziv (eng. frequency response, frequency magnitude response) je karakteristika filtera koja opisuje kako filter djeluje na ulazne podatke u frekvencijskoj domeni. Na x-osi nalazi se frekvencija, a na y-osi prigušenje (eng. attenuation). Prigušenje, izraženo u dB, opisuje promjenu u amplitudi na izlaznim podacima nakon djelovanja filtera. Za danu frekvenciju, prigušenje je omjer amplitude izlaznog i ulaznog podatka pripadne frekvencije, dano jednadžbom:

$$\text{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{\text{izlaz}}}{A_{\text{ulaz}}} \right). \quad (3.1)$$

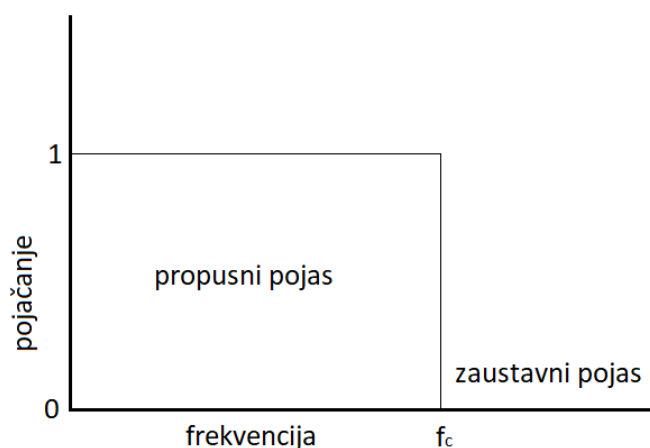
Kod filtera, najčešće je slučaj da je amplituda izlaznog podatka manja od amplitude ulaznog podatka pripadne frekvencije pa je omjer tih amplituda manji od 1, zbog čega je prigušenje negativno. Na slici 3.2 vidimo označeno prigušenje  $-3$  dB. Ono je bitno jer indicira smanjenje izlazne amplitude na  $0.707$  amplitude ulaza, odnosno, smanjenje intenziteta izlaznog signala na pola intenziteta ulaznog signala (v. (1.4)). Frekvencija na kojoj se dogodi prigušenje od  $-3$  dB naziva se frekvencija odsijecanja (eng. cut-off frequency) i označava se  $f_c$ , a ponekad se naziva i  $-3\text{dB}$  frekvencija. Niskopropusni filteri propuštaju sve frekvencije manje od frekvencije odsijecanja, a veće frekvencije prigušuju. Visokopropusni filteri propuštaju sve frekvencije veće od  $f_c$ , a manje prigušuju. Raspon frekvencija koje filter



Slika 3.2: Osnovne vrste filtera: niskopropusni, visokopropusni, pojasnopropusni i pojasnonepropusni. [7]

propušta bez značajnog prigušenja nazivamo propusni pojas (eng. passband), a frekvencije koje filter prigušuje tvore zaustavni/nepropusni pojas (eng. stopband) filtra. Razlika između najniže i najviše frekvencije u propusnom pojasu naziva se širina frekvencijskog pojasa (eng. bandwidth) i izražava se u Herzima. Pojasnopropusni filter propušta sve frekvencije između određene dvije frekvencije, na slici 3.2 označene s  $f_1$  i  $f_2$ , a ostale prigušuje. Centralna frekvencija (eng. central frequency)  $f_0$  najčešće se računa kao aritmetička ili ge-

ometrijska sredina frekvencija  $f_1$  i  $f_2$ . Pojas nepropusni filter prigušuje sve frekvencije između zadanih dvaju frekvencija, a ostale propušta.



Slika 3.3: Idealni niskopropusni filter.

Na slici 3.3 prikazana je ilustracija idealnog niskopropusnog filtra. Kod idealnog filtra, frekvencije veće od frekvencije odsijecanja potpuno su prigušene. Ovakve filtere nije moguće realizirati jer filter koji djeluje idealno u frekvencijskoj domeni uzrokuje neželjene posljedice na signal kada se promatra u vremenskoj domeni. Postoje digitalni filteri čije rezanje (eng. rolloff) može biti vrlo strmo (eng. steep rolloff), blizu idealnom filtru. Rezanje filtra izražava se u decibelima po oktavi (dB/8ve) ili decibelima po dekadi (dB/decade). Razlika između dvije frekvencije  $f_1$  i  $f_2$  je oktava ako je  $f_2 = 2 \cdot f_1$ , a dekada ako je  $f_2 = 10 \cdot f_1$ . Možemo primijeti da y-os na slici 3.3 prikazuje pojaćanje (eng. gain). Pojaćanje prikazuje omjer amplitude izlaza i ulaza, kao i prigušenje, ali na slici 3.2 radi se o logaritamskoj skali. Frekvencije na x-osi također mogu biti prikazane linearno ili logaritamski. Umjesto frekvencije u Hz, nekad se koristi i kružna digitalna frekvencija  $\omega$  izražena u radijanima po sekundi  $\text{rad s}^{-1}$ , a povezana je s pripadnom frekvencijom u Herzima jednažbom:  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ .

### Filteri u vremenskoj domeni

Dva najbitnija pojma vezana uz filtere u vremenskoj domeni su impulsni odziv (eng. impulse response) i konvolucija (eng. convolution).

Impulsni odziv je izlaz sustava kada je ulaz (jedinični) impuls. Jedinični impuls je

signal koji se u diskretnim sustavima modelira Kroneckerovom delta funkcijom na  $\mathbb{Z}$ :

$$\delta[n] := \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Za impulsni odziv najčešće se koristi notacija  $h[n]$ .

Impulsni odziv ima poseban značaj jer poznavanjem impulsnog odziva linearnog vremenski nepromjenjivog sustava (u nastavku koristit ćemo kraticu: LTN sustav) moguće je odrediti odziv tog sustava za bilo koji ulaz. Ovu tvrdnju obrazložiti ćemo u sljedećih nekoliko paragrafa.

Promotrimo sliku 3.4. Svaki signal  $x[n]$  može se rastaviti na aditivne komponente, koje su na slici prikazane signalima  $x_0[n]$ ,  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$ . Ovaj proces naziva se dekompozicija signala. Prolaskom svake komponente kroz linearan sustav, dobivamo izlaze  $y_0[n]$ ,  $y_1[n]$  i  $y_2[n]$  koji sintezom daju signal  $y[n]$  koji je isti kao izlaz tog sustava direktno s ulazom  $x[n]$ . Ovo je jedan od fundamentalnih koncepata digitalne obrade signala. Postoje mnogi načini dekompozicije signala, a za ovo poglavlje važna je impulsna dekompozicija.

Uzmimo signal koji se sastoji od  $N$  uzoraka. Impulsna dekompozicija razdvaja taj signal na  $N$  komponenti, od kojih svaka komponenta sadrži  $N$  uzoraka. Svaka komponenta sadrži jedan uzorak originalnog signala, a ostale vrijednosti su nula (v. sliku 3.5). Takvu komponentu zovemo impulsom. Impulsna dekompozicija omogućuje analizu jednog po jednog uzorka signala.

Svaki impuls može se prikazati kao skalirana i vremenski pomaknuta Kroneckerova delta funkcija. Primjerice, promotrimo signal  $a[n]$ , čija je vrijednost svugdje nula osim u uzorku rednog broja 5, gdje  $a[n]$  ima vrijednost  $-4$ . Takav signal možemo zapisati preko Kroneckerove delta funkcije na sljedeći način:  $a[n] = -4 \cdot \delta[n - 5]$ . [18]

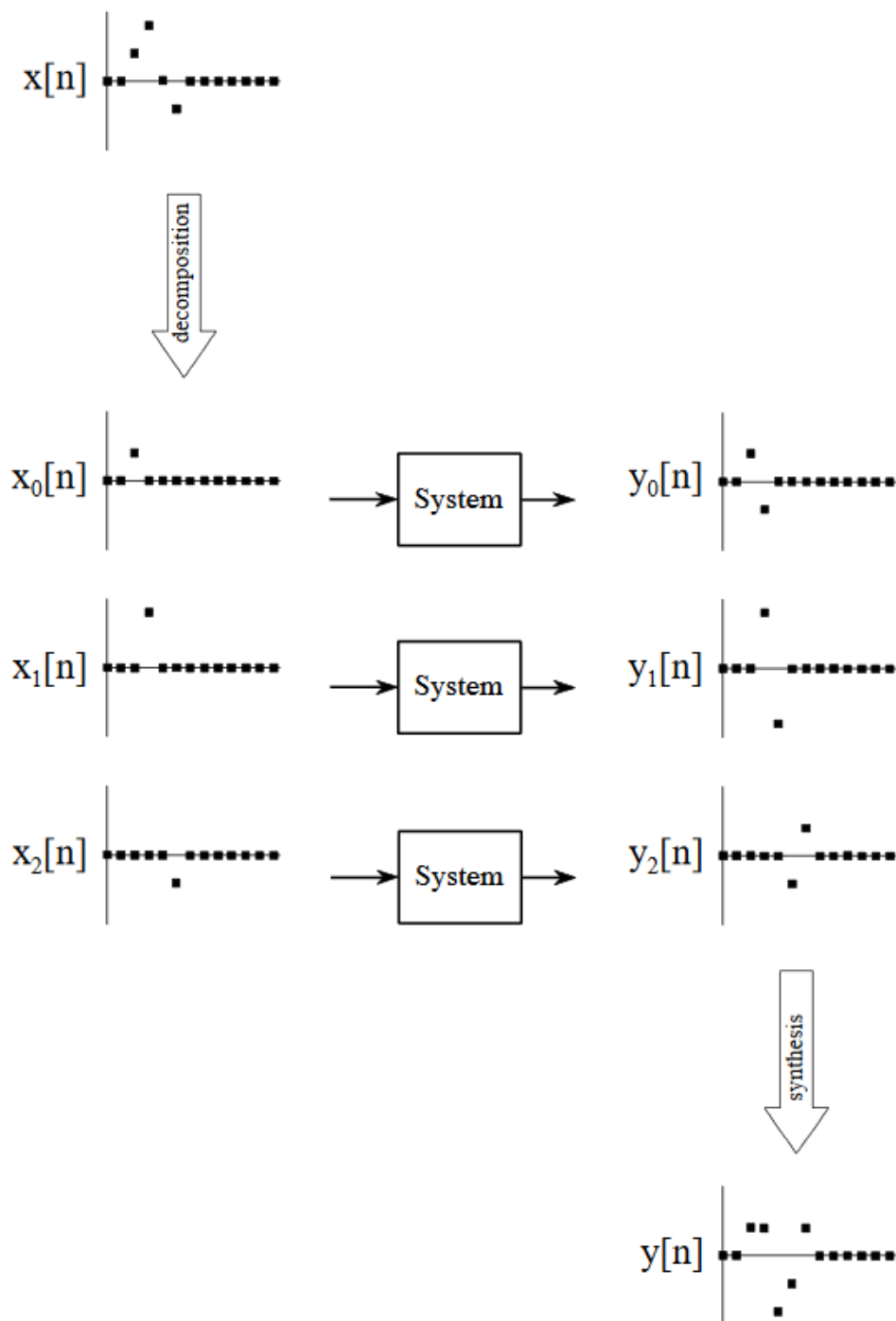
Budući da u LTN sustavima vrijedi homogenost i vremenska invarijantnost, zaključujemo da, ako je za ulaz  $\delta[n]$  izlaz LTN sustava  $h[n]$ , onda je za ulaz  $-4 \cdot \delta[n - 5]$  izlaz LTN sustava  $-4 \cdot h[n - 5]$ . Drugim riječima, ukoliko poznajemo impulsni odziv sustava, znamo kakav će biti izlaz tog sustava za bilo koji impuls.

Ulazni signal  $x[n]$ , impulsni odziv  $h[n]$  i izlazni signal  $y[n]$  LTN sustava povezani su matematičkom operacijom konvolucije:

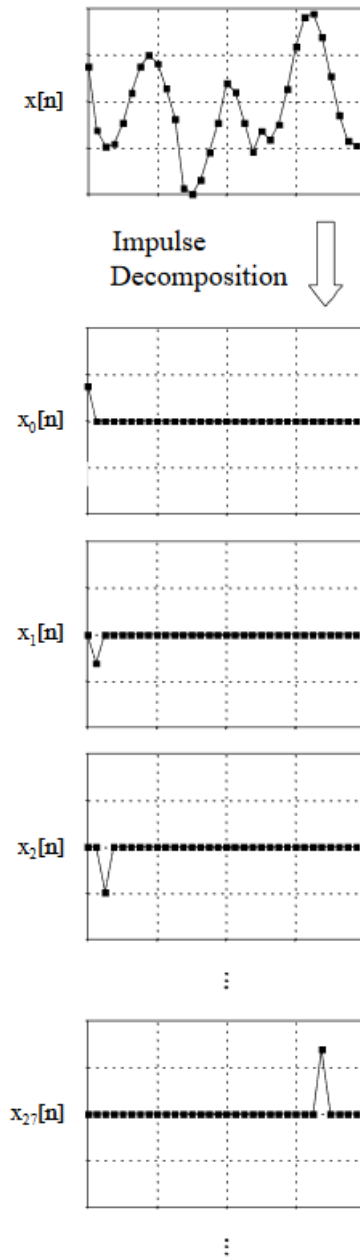
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k] \quad (3.3)$$

Ukoliko je LTN sustav kauzalan, tj. ako njegov trenutni izlaz ovisi samo o sadašnjim i/ili prošlim vrijednostima ulaza, a ne o budućim vrijednostima ulaza, konvolucija poprima sljedeći oblik:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad (3.4)$$

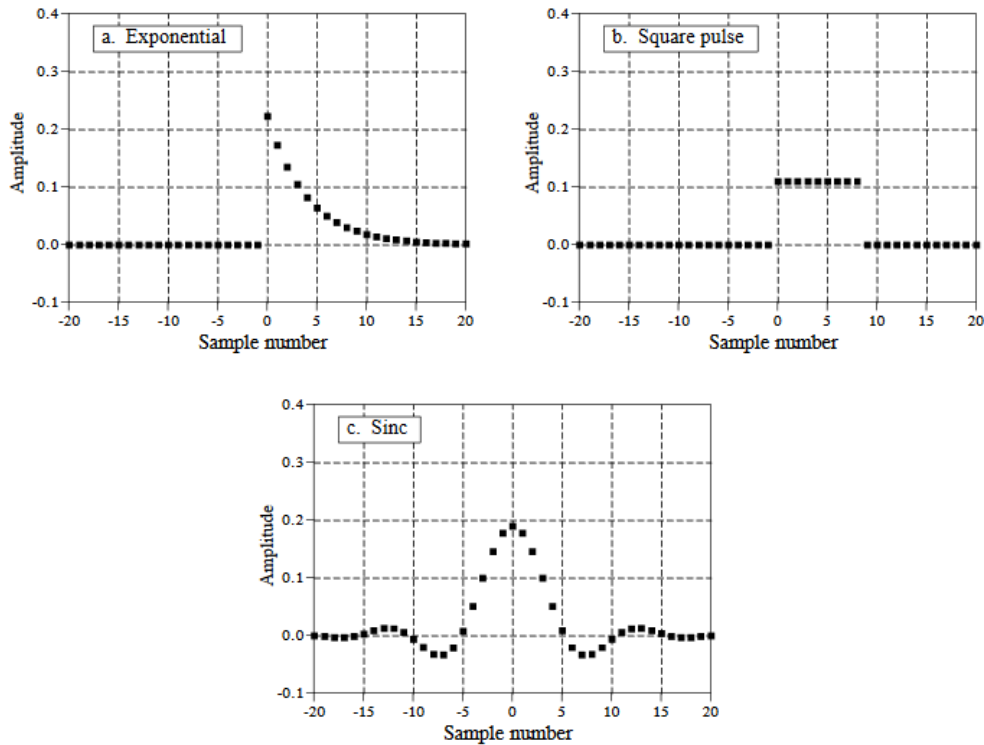


Slika 3.4: Dekompozicija ulaznog signala na komponente i sinteza izlaznih komponenata. Konačan izlaz isti je kao izlaz sustava koji kao ulaz ima signal koji nije rastavljen na komponente. [18]



Slika 3.5: Impulsna dekompozicija signala. [18]

Svaki linearni filter može se konstruirati konvolucijom ulaznog signala s određenim impulsnim odzivom. Impulsni odziv tada se naziva jezgra ili kernel filtra (eng. filter kernel) te se može koristiti i opisnija oznaka  $f[n]$ . Na slici 3.6 prikazane su neke od standardnih jezgri niskopropusnih filtera.



Slika 3.6: Jezgre niskopropusnih filtera. [18]

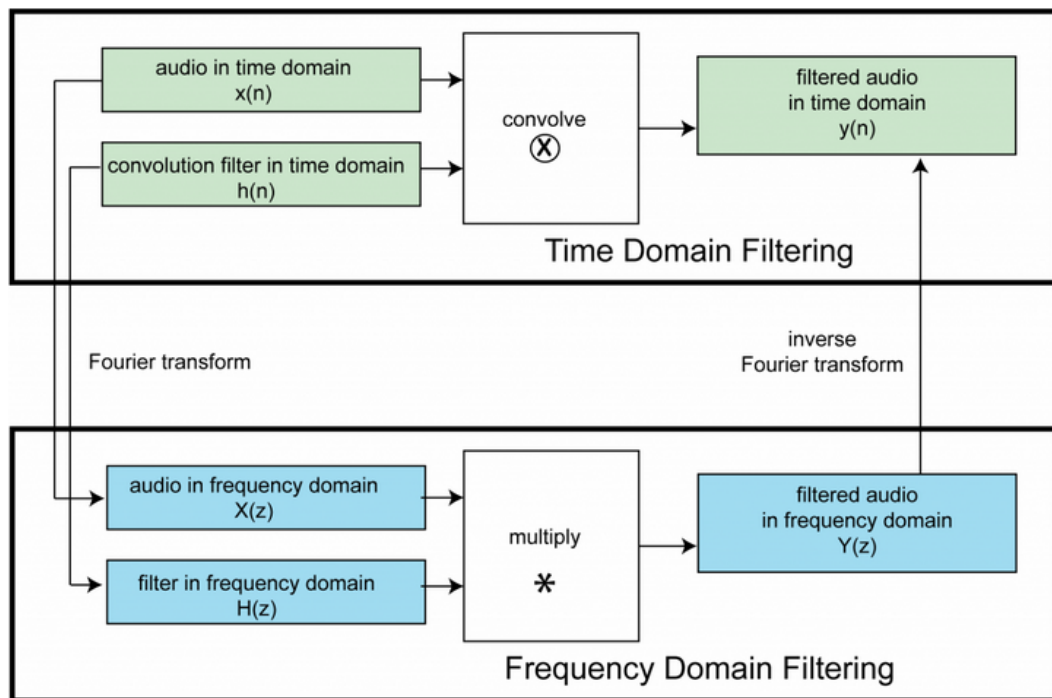
Ukoliko impulsni odziv poprimi vrijednost nula u konačnom vremenu, kažemo da je konačan (eng. finite impulse response, FIR). U suprotnom, kažemo da je beskonačan (eng. infinite impulse response, IIR). S obzirom na konačnost impulsnog odziva, razlikujemo FIR filtre i IIR filtre. Zbog konačnosti impulsnog odziva, konvolucija s kauzalnim diskretnim FIR filtrom poprima oblik:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot x[n-k], \quad (3.5)$$

pri čemu je  $N$  red filtra. U sljedećem odlomku promotrit ćemo jedan od najjednostavnijih FIR filtera - osrednjavajući filter.



Veza između filtriranja u vremenskoj domeni i frekvencijskoj domeni dana je teoremom o konvoluciji. Po njemu, umjesto filtriranja konvolucijom u vremenskoj domeni, možemo filtrirati množenjem u frekvencijskoj domeni i dobiti isti rezultat. Podatke i filter transformiramo u frekvencijsku domenu preko Fourierovih transformacija, a nazad u vremensku domenu preko inverznih Fourierovih transformacija. Ova ideja prikazana je na slici 3.7.



Slika 3.7: Osnovna ideja teorema o konvoluciji. [10]

## 3.2 Osrednjavajući filter

Osrednjavajući filter je niskopropusni FIR filter. Izlaz kod FIR filtera ovisi samo o trenutnim i prošlim ulazima, dok kod IIR filtra izlaz ovisi o trenutnim i prošlim ulazima te i prošlim izlazima.

Osrednjavajući filter kao ulaz uzima  $N$  uzoraka, računa njihov prosjek i kao izlaz dobivamo jednu izlaznu vrijednost. S povećanjem duljine filtra  $N$  izlaz je sve zaglađeniji, tj. manje je šumovit.

Osrednjavajući filter dan je jednadžbom razlika:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \quad (3.6)$$

Osrednjavajući filter jedan je od najčešće korištenih filtera u digitalnoj obradi signala, prvenstveno jer ga je jednostavno razumjeti i koristiti. Unatoč jednostavnosti, osrednjavajući filter optimalan je za korištenje kada podaci sadrže nasumičnu buku što ga čini odličnim izborom za podatke enkodirane za vremensku domenu. Ukoliko se radi o podacima enkodiranim za frekvencijsku domenu, ovaj filter je loš izbor jer ima vrlo malu sposobnost razdvajanja različitih pojasa frekvencija. [18]

Količina buke koja je reducirana osrednjavajućim filtrom jednaka je kvadratnom korijenu broja uzoraka u prosjeku, tj. duljini filtra N.

Na slici 3.8 prikazano je djelovanje osrednjavajućeg filtera na šumovit signal. Uočavamo da se šum smanjuje s povećanjem broja točaka, ali smanjuje se i oštrina rubova signala, što nije poželjno u velikoj mjeri.

Slika 3.8 generirana je pomoću sljedećeg Python koda:

---

```
import numpy as np
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

def osrednjavajuciFilter(x, N):
    h = repeat(1.0/N, N) # Impulsni odziv
    x = signal.convolve(h, x) # Konvolucija
    return(x)

n = 1000 # Broj uzoraka
dt = 1.0 / 100.0 # 100 uzoraka/s
A = 10.0 # Amplituda
f = 0.5 # Hz
t = np.linspace(0.0, n * dt, n)
signalBezSuma = A * np.sin(2 * np.pi * f * t)

s = signalBezSuma + randn(1000)

y1 = osrednjavajuciFilter(s, 5)
y2 = osrednjavajuciFilter(s, 15)
```

```
y3 = osrednjavajuciFilter(s, 150)

plt.rcParams.update({'font.size': 46})

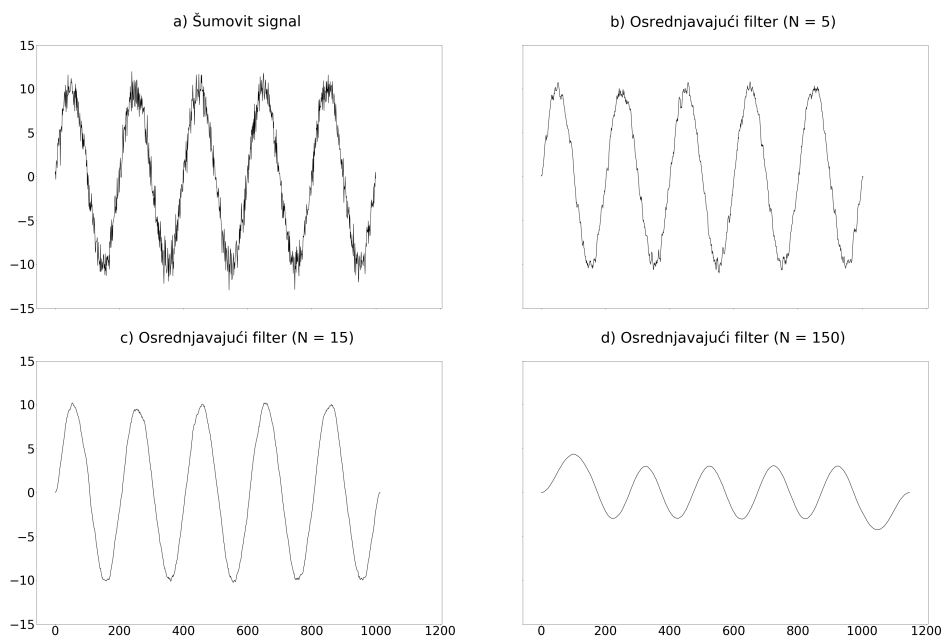
f, ((ax1, ax2),
    (ax3, ax4)) = plt.subplots(2, 2, figsize=(60,40),
                               sharex=True, sharey=True)

ax1.plot(s, 'k')
ax1.set_title("a) Šumovit signal \n")
ax1.set_ylim([-15, 15])
ax2.plot(y1, 'k')
ax2.set_title("b) Osrednjavajuci filter (N = 5) \n")
ax3.plot(y2, 'k')
ax3.set_title("c) Osrednjavajuci filter (N = 15) \n")
ax4.plot(y3, 'k')
ax4.set_title("d) Osrednjavajuci filter (N = 150) \n")

plt.show()
```

---

Python biblioteka *SciPy.Signal* nudi razne metode za digitalnu obradu signala. U ovom kodu koristimo *SciPy.Signal.convolve* metodu koja računa konvoluciju dva signala. Osrednjavajući filter implementirali smo na sljedeći način. Funkcija *osrednjavajuciFilter* prima ulazni niz  $x$  i duljinu filtera  $N$ . Definiramo impulsni odziv  $h$  kao jednodimenzionalni niz koji sadrži vrijednosti  $\frac{1}{N}$ . Izvedemo operaciju konvolucije ulaznog niza  $x$  s impulsnim odzivom  $h$  i vratimo rezultat te operacije. Šumovit signal je funkcija sinus kojoj je dodan šum. Figura se sastoji od četiri grafa koji dijele  $x$  i  $y$  osi. Na prvom grafu je šumovit signal, a na ostalima šumovit signal nakon filtriranja osrednjavajućim filtrom s različitim vrijednostima  $N$ .



Slika 3.8: Djelovanje osrednjavajućeg filtera na šumovit signal.

# Bibliografija

- [1] *Anti-Aliasing Filters and Their Usage Explained*, <https://www.ni.com/en-il/innovations/white-papers/18/anti-aliasing-filters-and-their-usage-explained.html>, posjećena 2019-10-13.
- [2] *Harmonic series(music)*, [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Harmonic\\_series\\_\(music\)](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(music)), posjećena 2019-10-12.
- [3] *Harmonic*, <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Harmonic>, posjećena 2019-10-12.
- [4] *Nyquist-Shannon theorem*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist%E2%80%93Shannon\\_sampling\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist%E2%80%93Shannon_sampling_theorem), posjećena 2019-10-13.
- [5] *Sampling and Quantization*, <https://sisu.ut.ee/sites/default/files/imageprocessing/files/digitizn.pdf>, posjećena 2019-10-26.
- [6] *Studio Tone vs. Live Tone and the Fletcher Munson Curve*, <https://line6.com/support/page/kb/general-faq/studio-tone-vs-live-tone-and-the-fletcher-munson-curve-r448/>, posjećena 2019-10-12.
- [7] Nick Davis, *An introduction to filters*, <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/an-introduction-to-filters/>, posjećena 2019-11-2.
- [8] David Heeger, *Linear systems theory - Lecture slides*, <https://www.cns.nyu.edu/~david/courses/perceptionGrad/Lectures/Winawer/linsys3-jw.pdf>, posjećena 2019-11-2.
- [9] Antonio Petošić Ivan Đurek, *Digitalna audiotehnika*, [https://bib.irb.hr/datoteka/966358.Digitalna\\_audiotehnika\\_-\\_materijali\\_za\\_predavanja.pdf](https://bib.irb.hr/datoteka/966358.Digitalna_audiotehnika_-_materijali_za_predavanja.pdf), posjećena 2019-10-27.
- [10] Eric Schwartz Jennifer Burg, Jason Romney, *Filtering in the Time and Frequency Domains*, <http://digitalsoundandmusic.com/7-3-4-filtering-in-the-time-and-frequency-domains/>, posjećena 2019-11-2.

- [11] Jan Kaluza, *Make floating rocks with the power of Math™! (Part 2)*, <https://www.broad-strokes.com/blog/>, posjećena 2019-10-12.
- [12] Edmund Lai, *Converting analog to digital signals and vice versa*, 2003., <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/nyquist-rate>, posjećena 2019-10-13.
- [13] Victor Lazzarini, *Computer Music Instruments*, Springer, 2017.
- [14] The Editors of Encyclopaedia Britannica, *Loudness*, 2008, <https://www.britannica.com/science/loudness>, posjećena 2019-10-12.
- [15] Tae Hong Park, *Introduction to digital signal processing: Computer musically speaking*, World Scientific, 2009.
- [16] Hrvoje Pinculić, *Obrada ekperimentalnih podataka procesa zakaljivanja primjenom osrednjavajućih i interpolacijskih filtara*, [http://repositorij.fsb.hr/3265/1/Pinculic\\_2015\\_zavrzni\\_preddiplomski.pdf](http://repositorij.fsb.hr/3265/1/Pinculic_2015_zavrzni_preddiplomski.pdf), posjećena 2019-11-2.
- [17] Ilyas Potamitis, Iraklis Rigakis i Konstantinos Fysarakis, *Insect Biometrics: Optoacoustic Signal Processing and Its Applications to Remote Monitoring of McPhail Type Traps - Scientific Figure on ResearchGate*, 2015, [https://www.researchgate.net/figure/Top-Flute-playing-Note-A4-at-440-Hz-Middle-Violin-playing-the-same-note-Bottom\\_fig11\\_283516305](https://www.researchgate.net/figure/Top-Flute-playing-Note-A4-at-440-Hz-Middle-Violin-playing-the-same-note-Bottom_fig11_283516305), posjećena 2019-10-12.
- [18] Steven W Smith et al., *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*, (1997).
- [19] Viktor Sučić, *Signali i sustavi - predavanja*, [https://www.veleri.hr/files/datotekep/nastavni\\_materijali/k\\_telematika\\_1/Predavanje\\_1\\_c\\_-\\_V1-Sucic2.pdf](https://www.veleri.hr/files/datotekep/nastavni_materijali/k_telematika_1/Predavanje_1_c_-_V1-Sucic2.pdf), posjećena 2019-10-12.

# Sažetak

U ovom radu dan je pregled osnovnih pojmova i metoda vezanih uz digitalnu obradu signala.

Definiran je pojam signala i navedene su razne podjele. Reprezentacija signala u digitalnoj domeni moguća je u velikoj mjeri zbog ograničenja ljudskog sluha. Stoga je opisana čovjekova percepcija psihoakustičnih svojstava signala: visine, glasnoće i boje te njihova veza s fizičkim svojstvima signala, frekvencijom i intenzitetom.

U digitalnim sustavima možemo raditi jedino s konačnim brojem podataka zbog čega je potrebno vremenski kontinuirani analogni signal modificirati da u konačno mnogo podataka što vjernije reprezentira original. Opisani su uzorkovanje, kvantizacija i kodiranje - glavni postupci pri pretvaranju analognog u digitalni signal, te nusprodukti do kojih može doći zbog korištenja tih postupaka, poput preklapanja spektra. Dan je opis pulsno-kodne modulacije, jedne od arhitektura sklopova za pretvaranje analognog u digitalni signal.

Navedena je osnovna terminologija i koncepti vezani uz filtere u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Promatran je osrednjavajući filter uz primjer implementacije u programskom jeziku Python.

# Summary

In this thesis an overview is given of basic terms and methods regarding digital signal processing.

The term signal is defined and various categories of signals are mentioned. Representation of signals in the digital domain is in large part possible due to deficiencies in human hearing system. Hence, human perception of three major psychoacoustic signal properties: pitch, loudness and color, is described, along with their connection to the physical signal properties frequency and intensity.

In digital systems one can only work with a finite amount of data and storage. That is why it is necessary to modify time continuous analog signals to a finite amount of data which represents the original signal as closely as possible. Main methods in converting time continuous analog signals to discrete time digital signals: sampling, quantization and coding, are described, along with some of the byproducts, like aliasing. The description of a pulse-code modulation architecture is given.

Basic terminology and concepts regarding filters in frequency and time domain are stated. Moving average filter is described and Python implementation of a said filter is given.



# Životopis

Rođena sam 30. srpnja 1995. u Zagrebu.

Školovanje započinjem 2002. godine u Osnovnoj školi Rovišće kraj Bjelovara, a 2004. upisujem Glazbenu školu Vatroslava Lisinskog u Bjelovaru. Osnovnu školu i osnovnu glazbenu školu završavam s odličnim uspjehom.

2010. godine upisujem Gimnaziju Bjelovar, smjer prirodoslovno-matematički, te srednju glazbenu školu, smjer oboist. Tijekom glazbenog školovanja sudjelujem na regionalnim i državnim natjecanjima kao solist. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja i na maturi zadržavam odličan uspjeh.

Studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu upisujem 2014. godine. Preddiplomski studij završavam 2017., a iste godine upisujem diplomski studij Računarstvo i matematika. Tijekom studija nekoliko puta sudjelujem u radu Ljetne škole znanosti u Požegi kao voditelj jednodnevnih radionica i tehnički asistent.