

# Primjena teorije grafova u proučavanju mreža javnog prijevoza

---

Mihaljević, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:867242>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-11**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marija Mihaljević

**PRIMJENA TEORIJE GRAFOVA U  
PROUČAVANJU MREŽA JAVNOG  
PRIJEVOZA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Obitelji, za neizmjernu podršku na mom životnom putovanju.*

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Osnovni pojmovi teorije grafova</b>	<b>2</b>
1.1 Graf . . . . .	2
1.2 Šetnja, tura, staza . . . . .	5
<b>2 Mreže</b>	<b>7</b>
2.1 Tokovi . . . . .	7
2.2 Rezovi . . . . .	13
2.3 Teorem o maksimalnom toku i minimalnom rezu . . . . .	17
2.3.1 Algoritam metode označavanja . . . . .	21
<b>3 Analiza mreža javnog prijevoza</b>	<b>36</b>
3.1 Reprezentacija mreže javnog prijevoza grafom i mjere mreže . . . . .	36
3.2 Prekidi u mrežama javnog prijevoza . . . . .	38
3.3 Analiza primjera . . . . .	39
3.3.1 Simulacija ciljanog napada na mrežu u statičnom kontekstu . . . . .	40
3.3.2 Simulacija postupnog propasta mreže . . . . .	43
3.3.3 Zaključak . . . . .	45
<b>Bibliografija</b>	<b>46</b>

# Uvod

Teorija grafova se počela razvijati kao zasebna matematička disciplina tek u 19. stoljeću. Do tada se teorija grafova razvijala pod okriljem drugih matematičkih disciplina te su se grafovi najčešće koristili kao reprezentacija problema koji se javljaju u svakodnevnom životu (npr. *Problem Königsbergških mostova*, *Problem kineskog poštara*). Zahvaljujući intuitivnom shvaćanju osobina i povezanosti objekata koji se promatraju i jasnoj predodžbi koju graf pruža, teorija grafova se brzo i intenzivno razvijala. Teorija grafova danas ima široku primjenu, kako u drugim znanostima i svakodnevnim problemima, tako i u ostalim matematičkim disciplinama.

U ovom radu izneseni su neki od rezultata teorije grafova povezani s mrežama te je opisana primjena teorije grafova u analizi mreža javnog prijevoza Firence i Atike. U prvom poglavlju rada iznesene su definicije i objašnjenja pojmova iz teorije grafova koji su potrebni u proučavanju mreža. Drugo poglavlje, zasnovano na [1], poglavlje 11, započinje definicijama i primjerima mreže i toka mreže. Nastavlja se uvođenjem pojma reza u mreži te iznošenjem rezultata koji povezuju tok i rez dane mreže. Na temelju tih rezultata dolazimo do glavnog dijela ovog poglavlja, teorema o maksimalnom toku i minimalnom rezu mreže te algoritma metode označavanja. Algoritmom metode označavanja određujemo maksimalan tok dane mreže. Nakon opisa algoritma, dana su dva primjera određivanja maksimalnog toka iste mreže, ali različitog početnog toka kako bismo usporedili broj potrebnih iteracija u ovisnosti o odabiru početnog toka. U posljednjem, trećem, poglavlju opisana je analiza mreža javnog prijevoza provedena u sklopu europskog projekta H2020, RESOLUTE. Cilj projekta je pridonijeti održivosti europskih transportnih sustava te kreirati model transportnih mreža koji bi se koristio čak i pri planiranju trasa prijevoza hitnih službi. Preciznije, analiziramo rezultate iz [3] gdje su se proučavale mreže javnog prijevoza Firence i regije Atika. Na početku poglavlja opisana je reprezentacija mreža javnog prijevoza grafom, mjere mreže te dva načina na koji se mogu manifestirati prekidi mreže. U drugom dijelu poglavlja opisane su simulacije ciljanog napada na mrežu koji rezultira nedostupnošću jedne ili više stanica.

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi teorije grafova

Situacije iz svakodnevnog života često možemo prikazati pomoću dijagrama koji se sastoje od skupa točaka i linija kojima su neke od točaka povezane. Na primjer, točke mogu predstavljati gradove, a linije među njima mogu predstavljati direktnu avionsku liniju kojom su ti gradovi povezani. Ukoliko postoji direktna avionska linija među neka dva grada, tada su oni povezani linijom. Na taj način dobivamo jednostavan prikaz povezanosti odabranih gradova direktnim avionskim linijama.

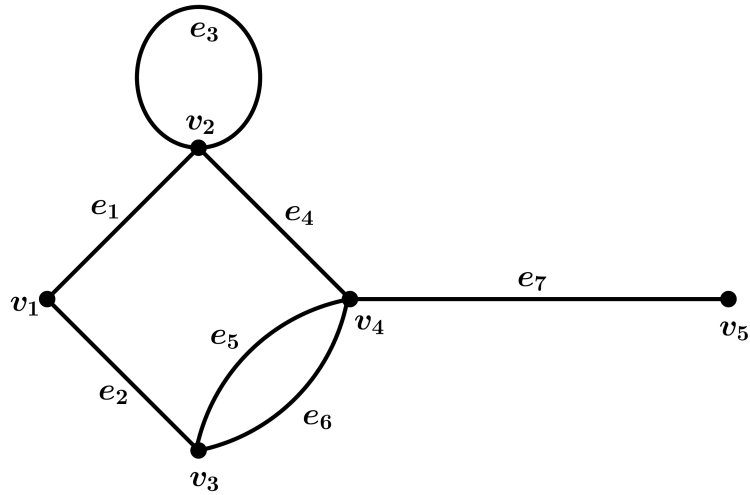
Takvo pridruživanje dijagrama svakodnevnim situacijama odgovara matematičkom pojmu grafa.

### 1.1 Graf

**Definicija 1.1.1.** *Graf  $G$  je uređena trojka  $(V(G), E(G), \psi_G)$  koja se sastoji od nepraznog skupa vrhova  $V(G)$ , skupa bridova  $E(G)$  koji je disjunktan skupu  $V(G)$  i funkcije incidencije  $\psi_G$  koja svakom bridu od  $G$  pridružuje uređen par vrhova od  $G$  (ne nužno različitih).*

Pri crtanju grafa, vrhove predstavljamo točkama, a bridove linijama koje spajaju dva vrha. Ne postoji jedinstven način crtanja, odnosno prikazivanja grafa. Svaki graf se može prikazati na više načina. Pri crtanju grafa dobro je pripaziti da nijedna linija ne siječe samu sebe i da nijedna linija ne prolazi trima točkama (ne prolazi „slučajno” nekom točkom). Često se graf poistovjećuje sa svojim crtežom. U tom slučaju, kada se govori o linijama i točkama crteža grafa, koriste se termini bridovi i vrhovi grafa. U ovom radu često ćemo grafove zadavati njihovim crtežima te se koristiti navedenom terminologijom.

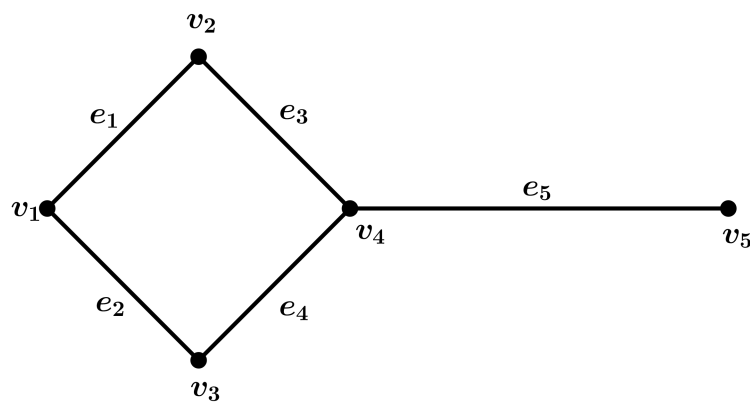
Brid grafa čiji su krajevi isti vrh nazivamo *petlja*, a brid čiji su krajevi različiti vrhovi nazivamo *poveznica* (eng. link).



Slika 1.1: Graf

Na Slici 1.1 prikazan je graf  $G$  čiji su vrhovi  $v_1, v_2, \dots, v_5$ , a bridovi  $e_1, e_2, \dots, e_7$ . Graf  $G$  ima jednu petlju, brid  $e_3$ , te dvije poveznice tog grafa povezuju isti par vrhova (bridovi  $e_5$  i  $e_6$ ).

Za graf kažemo da je *konačan* ako je skup njegovih vrhova konačan i ako je skup



Slika 1.2: Jednostavan graf

njegovih bridova konačan. U ovom radu promatrat ćemo konačne grafove.

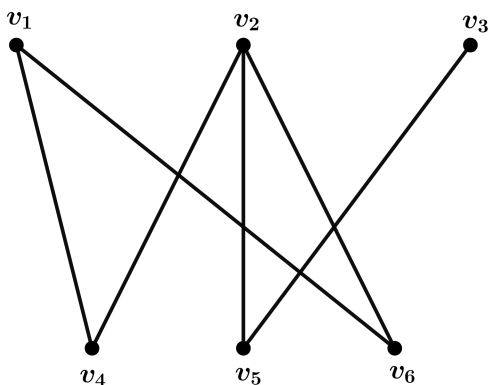
Za graf kažemo da je *jednostavan* ako nema petlje i ako nijedne dvije poveznice ne



povezuju isti par vrhova. Mnoge situacije koje grafom prikazujemo zahtijevaju prikaz upravo jednostavnim grafom (npr. avionske linije koje povezuju određene gradove). Na Slici 1.2 prikazan je jedan jednostavan graf.

**Definicija 1.1.2.** *Bipartitan graf je onaj graf čiji skup vrhova može biti podijeljen u dvije particije podskupova,  $X$  i  $Y$ , tako da svaki brid ima jedan kraj u  $X$  i jedan kraj u  $Y$ . Takvu particiju, u oznaci  $(X, Y)$ , nazivamo biparticija grafa.*

Potpun bipartitan graf je jednostavan bipartitan graf s biparticijom  $(X, Y)$  u kojoj je svaki vrh iz  $X$  pridružen svakom od vrhova iz  $Y$ . Na Slici 1.3 prikazan je



Slika 1.3: Bipartitan graf

jedan bipartitan graf. Vrhovi  $v_1, v_2$  i  $v_3$  pripadaju jednoj particiji podskupa vrhova,  $X$ , a vrhovi  $v_4, v_5$  i  $v_6$  pripadaju drugoj particiji podskupa vrhova tog grafa,  $Y$ . Bipartitan graf prikazan na slici nije potpun jer postoji vrh iz  $X$  koji nije pridružen svim vrhovima iz  $Y$  (vrhovi  $v_1$  i  $v_3$ ).

Za vrhove  $v_i$  i  $v_j, i \neq j$ , grafa  $G$  kažemo da su *incidentni* ili da su *susjedni* ako je  $(v_i, v_j)$  brid grafa  $G$ . Nadalje, za vrh  $v_i$  i brid  $(v_i, v_j)$  kažemo da su *incidentni* ako su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  susjedni. Često je korisno promatrati broj bridova koji su incidentni s nekim vrhom. Na taj način vidimo s koliko vrhova je neki vrh povezan. Stoga definiramo sljedeći pojam:

**Definicija 1.1.3.** *Stupanj vrha  $v$  u grafu  $G$ , u oznaci  $d_G(v)$ , jednak je broju bridova od  $G$  koji su incidentni sa  $v$ . Pri tom svaku petlju brojimo kao dva brida.*

Pogledajmo graf  $G$  prikazan na Slici 1.2. Graf  $G$  ima jedan vrh stupnja jedan ( $d_G(v_5) = 1$ ), tri vrha stupnja dva ( $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$ ) te jedan vrh stupnja tri ( $d_G(v_4) = 3$ ).

## 1.2 Šetnja, tura, staza

Kada turistički obilazimo neki grad, važno je napraviti plan obilaska bitnih znamenitosti kako bismo put koji ćemo prijeći za vrijeme obilaska optimizirali i vrijeme što bolje iskoristili. U tom slučaju, zgodno je o gradu i znamenitostima razmišljati kao o grafu. Plan obilaska možemo izraditi na više načina, ovisno o tome što nam je u interesu i kakvo razgledavanje želimo. Možemo planirati razgledavanja kojima ćemo se vratiti na početno mjesto, razgledavanja u kojima želimo svaku znamenitost obići točno jednom, razgledavanje u kojemu želimo proći određenim ulicama točno jednom kako bismo vidjeli zanimljivu arhitekturu... U tom svjetlu, donosimo sljedeće definicije:

**Definicija 1.2.1.** Šetnja u  $G$  je konačan nenul niz  $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$  čiji su članovi, alternirajući, vrhovi i bridovi grafa takvi da je  $1 \leq i \leq k$ . Krajevi brida  $e_i$  su  $v_{i-1}$  i  $v_i$ .

Za  $W$  kažemo da je šetnja od  $v_0$  do  $v_k$  ili  $(v_0, v_k)$ -šetnja. Vrh  $v_0$  nazivamo početak, a vrh  $v_k$  završetak šetnje  $W$ . Za vrhove  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  kažemo da su unutarnji vrhovi od  $W$ . Duljina šetnje  $W$  jednaka je cijelom broju  $k$ .

**Definicija 1.2.2.** Ako su bridovi  $e_1, e_2, \dots, e_k$  šetnje  $W$  različiti, tada  $W$  nazivamo tura (eng. trail). U ovom slučaju, duljinu šetnje  $W$  označavamo s  $\varepsilon(W)$ . Ako su, dodatno, i vrhovi  $v_0, v_1, \dots, v_k$  ture  $W$  različiti, onda  $W$  nazivamo put (eng. path).

**Definicija 1.2.3.** Za  $u$  i  $v$ , dva vrha grafa  $G$ , kažemo da su povezani ako postoji  $(u, v)$ -put u  $G$ .

Za graf  $G$  kažemo da je *povezan* ako postoji put između svaka dva vrha grafa. Inače kažemo da je graf *nepovezan*. Duljinu puta definiramo kao broj bridova od kojih se taj put sastoji. S obzirom na to da put između dva vrha  $u$  i  $v$  grafa  $G$ , općenito, nije jedinstven,  $(u, v)$ -puteve možemo razlikovati s obzirom na duljinu. Tako  $(u, v)$ -put najmanje moguće duljine nazivamo geodetski  $(u, v)$ -put (eng. geodesic). Duljinu geodetskog  $(u, v)$ -puta tada nazivamo udaljenost od  $u$  do  $v$  te ju označavamo sa  $d(u, v)$ . Najveću udaljenost između bilo koja dva vrha grafa  $G$  nazivamo dijametar grafa  $G$  te ga označavamo sa  $D(G)$ .

Prema [1], povezanost grafa je relacija ekvivalencije na skupu njegovih vrhova te sa  $\omega(G)$  označavamo broj komponenti povezanosti grafa  $G$ .

**Definicija 1.2.4.** *Zatvorenu turu čiji se početak i unutarnji vrhovi razlikuju nazivamo ciklus.*

Ciklus duljine  $k$  nazivamo  $k$ -ciklus. Ako je  $k$  paran (neparan), kažemo da je ciklus paran (neparan). Za graf koji ne sadrži cikluse kažemo da je acikličan.

**Definicija 1.2.5.** *Povezan acikličan graf nazivamo stablo.*

U ovom poglavlju izneseni su glavni pojmovi teorije grafova koji su potrebni u nastavku rada. Za više rezultata povezanih s navedenim pojmovima može se koristiti knjiga navedena u bibliografiji [1] te nastavni materijal kolegija Diskretna matematika [2].

# Poglavlje 2

## Mreže

### 2.1 Tokovi

Transportne mreže, mreže javnog prijevoza, načini na koje se roba distribuira iz centra proizvodnje na tržište se najefikasnije mogu analizirati kao digrafi koji imaju još neku dodatnu strukturu. U ovom poglavlju bavit ćemo se teorijom koja je rezultat takvih analiza.

**Definicija 2.1.1.** *Mreža  $N$  je digraf  $D$  (pridružen digraf od  $N$ ) s dva različita podskupa vrhova,  $X$  i  $Y$ , i cjelobrojnom nenegativnom funkcijom  $c$  koja je definirana na skupu usmjerenih bridova (eng. arcs)  $A$  od  $N$ . Pretpostavka je da su  $X$  i  $Y$  neprazni i međusobno disjunktni skupovi.*

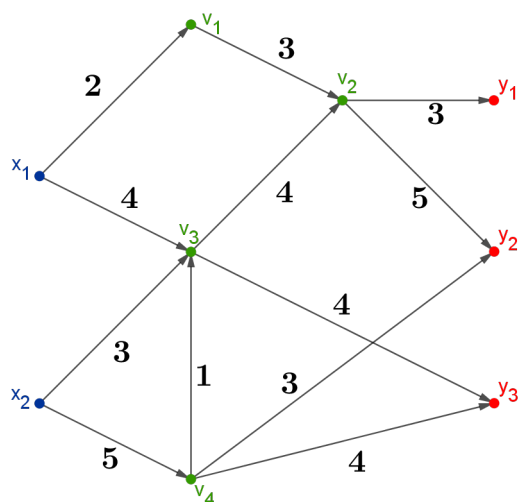
Vrhove koji se nalaze u  $X$  nazivamo *izvori* (eng. sources), a vrhove koji se nalaze u  $Y$  nazivamo *ponori* (eng. sinks) mreže  $N$ . Vrhove koji nisu izvori ili ponori nazivamo *međuvrhovi* (eng. intermediate vertices). U ovom radu skup svih međuvrhova označavat ćemo s  $I$ .

Funkcija  $c$  je *funkcija kapaciteta* od  $N$  i njenu vrijednost na bridu  $a$  nazivamo kapacitet od  $a$ . Ako o kapacitetu brida razmišljamo u svjetlu transportne mreže, kapacitet brida možemo shvatiti kao maksimalnu količinu robe koja može biti prevezena tim bridom.

Mrežu najčešće prikazujemo crtanjem pripadnog digrafa te mreže i označavanjem kapaciteta svakog od bridova.

Na Slici 2.1 dan je primjer mreže na kojoj su označeni izvori, međuvrhovi i ponori te mreže. Izvori dane mreže su vrhovi  $x_1$  i  $x_2$ , njeni međuvrhovi su  $v_1, v_2, v_3$  i  $v_4$ , a ponori  $y_1, y_2$  i  $y_3$ . Broj napisan uz usmjereni brid označava kapacitet tog usmjerenog

brida.



Slika 2.1: Mreža

Uvedimo oznake koje će trebati za definiciju toka i bit će korisne u nastavku rada. Ako je  $S \subseteq V$ , onda komplement od  $S$  označavamo  $\bar{S} = V \setminus S$ . Ako je  $f$  funkcija realne varijable definirana na skupu usmjerenih bridova  $A$  od  $N$  i ako je  $K \subseteq A$ , s  $f(K)$  označavamo  $\sum_{a \in K} f(a)$ . Zbog jednostavnosti, ukoliko se radi o jednočlanom skupu  $\{a\}$ , umjesto  $f(\{a\})$  pišemo  $f(a)$ . Nadalje, ako su  $S, U \subset V$ , tada uvodimo oznaku  $(S, U)$  za skup svih usmjerenih bridova kojima je početak u  $S$ , a kraj u  $U$ . Tada skup svih usmjerenih bridova kojima je početak u  $S$ , a kraj u  $\bar{S}$  označavamo sa  $(S, \bar{S})$ . Neka je  $K$  skup svih usmjerenih bridova oblika  $(S, \bar{S})$ . Tada pišemo  $f^+(S)$  za  $f(S, \bar{S})$  i  $f^-(S)$  za  $f(\bar{S}, S)$ . Također, ako se radi o jednočlanom skupu  $\{a\}$ , umjesto  $f^+(\{a\})$  pišemo  $f^+(a)$  te, analogno, pišemo  $f^-(a)$  za  $f^-(\{a\})$ .

**Definicija 2.1.2.** Tok mreže  $N$  je cjelobrojna funkcija  $f$  definirana na skupu  $A$  takva da je:

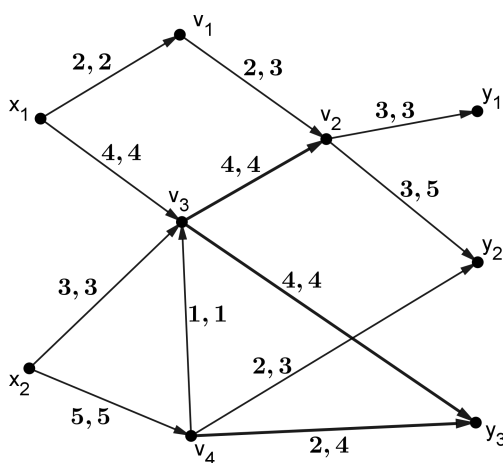
$$0 \leq f(a) \leq c(a) \text{ za sve } a \in A \quad (2.1)$$

$$f^-(v) = f^+(v) \text{ za sve } v \in I. \quad (2.2)$$

Vrijednost  $f(a)$  funkcije  $f$  na bridu  $a$  možemo shvatiti kao količinu materijala koji je prevezen duž  $a$  pod tokom  $f$ . Gornju granicu svojstva (2.1) nazivamo ograničenje kapaciteta. Drugim riječima, radi se o prirodnoj restrikciji prema kojoj tok nekog

brida ne može premašiti kapacitet tog brida. Svojstvo (2.2) možemo shvatiti kao stanje očuvanja koje zahtijeva da, za bilo koji međuvrh  $v$ , stopa u kojoj je materijal „uvezen” u  $v$  je jednaka stopi u kojoj je materijal „izvezen” iz  $v$ .

Na Slici 2.2 prikazana je mreža s naznačenim tokom i kapacitetom svakog usmjerenog brida mreže. Prvi napisani broj označava tok, a drugi označava kapacitet tog usmjerenog brida. Na primjer, tok usmjerenog brida  $(v_1, v_2)$  jednak je 2, a kapacitet je jednak 3.



Slika 2.2: Tok

Definirajmo funkciju  $f(a) = 0, a \in A$ . Očito, tako definirana funkcija zadovoljava uvjete (2.1) i (2.2) te zaključujemo da je to funkcija toka. Iz toga slijedi da svaka mreža ima barem jedan tok. Tako definiran tok nazivamo *trivijalan* ili *nul-tok* (eng. zero flow).

Ako je  $S$  podskup vrhova mreže  $N$  i ako je  $f$  tok u  $N$ , tada se izvoz  $f^+(S) - f^-(S)$  naziva ukupan tok iz  $S$  (eng. resultant flow out of  $S$ ), a uvoz  $f^-(S) - f^+(S)$  se naziva ukupan tok u  $S$ , s obzirom na  $f$ .

Iz uvjeta stanja očuvanja (2.2) dobivamo:

$$f^-(v) = f^+(v) \text{ za sve } v \in I \Leftrightarrow f^+(v) - f^-(v) = 0 \text{ za sve } v \in I,$$

odnosno ukupan tok iz bilo kojeg međuvrha jednak je nuli. Uočimo da za svaki izvor  $x \in X$  vrijedi da je  $f^-(x) = 0$  jer ne postoji usmjereni brid oblika  $(\bar{X}, X)$  te da za svaki ponor  $y \in Y$  vrijedi da je  $f^+(y) = 0$  jer ne postoji usmjereni brid oblika

$(Y, \bar{Y})$ . Vrijednost toka  $f$  je ukupan tok iz  $X$  s obzirom na  $f$  te ga označavamo s  $\text{val } f = f^+(X) - f^-(X) = f^+(X)$ . Uočimo, ako kapacitet  $c$  zadovoljava uvjet (2.2), tj. ako vrijedi  $c^-(v) = c^+(v), v \in I$ , tada je  $f \equiv c$  jedinstveni maksimalan tok pripadne mreže. S obzirom da za svaki međuvrh vrijedi stanje očuvanja (2.2), lako se pokaže da je ukupan tok iz  $X$  jednak ukupnom toku u  $Y$ . Dakle, vrijedi  $\text{val } f = f^-(Y) - f^+(Y) = f^-(Y)$ . Ilustrirajmo na primjeru sa Slike 2.2 da vrijedi  $f^+(X) = f^-(Y)$ . Po definiciji ukupnog toka iz  $X$  i ukupnog toka u  $Y$ , imamo:

$$f^+(X) = f(x_1, v_1) + f(x_1, v_3) + f(x_2, v_3) + f(x_2, v_4), \quad (2.3)$$

$$f^-(Y) = f(v_2, y_1) + f(v_2, y_2) + f(v_3, y_3) + f(v_4, y_2) + f(v_4, y_3). \quad (2.4)$$

Nadalje, zbog uvjeta očuvanja (2.2), vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} f(x_1, v_1) &= f(v_1, v_2) \\ f(v_1, v_2) + f(v_3, v_2) &= f(v_2, y_1) + f(v_2, y_2) \\ f(x_1, v_3) + f(x_2, v_3) + f(v_4, v_3) &= f(v_3, v_2) + f(v_3, y_3) \\ f(x_2, v_4) &= f(v_4, v_3) + f(v_4, y_2) + f(v_4, y_3). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih identiteta u jednakost 2.4 dobivamo:

$$\begin{aligned} f^-(Y) &= f(v_1, v_2) + f(v_3, v_2) + f(x_1, v_3) + f(x_2, v_3) + f(v_4, v_3) - f(v_3, v_2) + f(x_2, v_4) \\ &\quad - f(v_4, v_3) - f(v_4, y_2) + f(v_4, y_2) \\ &= f(x_1, v_1) + f(x_1, v_3) + f(x_2, v_3) + f(x_2, v_4) \\ &= f^+(X). \end{aligned}$$

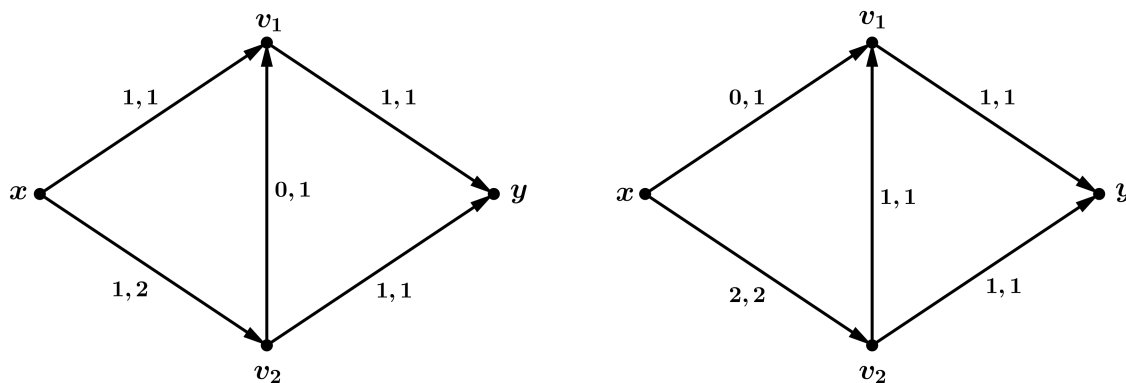
Odnosno, vrijedi  $f^+(X) = f^-(Y)$ .

Očito, za svaki tok  $f$  vrijedi  $\text{val } f \leq c^+(X)$ . To slijedi iz same definicije toka mreže.

Tok mreže, općenito, nije jedinstven (trivijalan tok je tok svake mreže) pa stoga sve tokove neke mreže možemo razlikovati s obzirom na vrijednost njihovih tokova.

**Definicija 2.1.3.** Tok  $f$  u  $N$  nazivamo maksimalan tok ako ne postoji  $f'$  u  $N$  takav da je  $\text{val } f' > \text{val } f$ .

Maksimalan tok je od velike važnosti u kontekstu transportnih mreža jer se prirodno javlja potreba za što većom iskoristivosti mreže. Uočimo: za svaku mrežu  $N$  postoji maksimalan tok  $f'$  takav da je  $\text{val } f \leq \text{val } f'$ , pri čemu je  $f$  neki tok mreže  $N$ . Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da je skup  $\{\text{val } f : f \text{ tok u } N\}$  neomeđen odozgo u  $\mathbb{N}$ . To je u kontradikciji s  $\text{val } f \leq c^+(X)$  pa maksimalan tok mreže uvijek postoji.



Slika 2.3: Dva maksimalna toka mreže

Nadalje, uočimo da je skup tokova mreže  $N$  uvijek neprazan jer je nul-tok tok svake mreže  $N$ . Maksimalan tok, općenito, nije jedinstven. Na Slici 2.3 je dan primjer mreže i dvaju njenih tokova,  $f_1$  i  $f_2$ , čija je vrijednost jednaka i maksimalna, val  $f_1 = \text{val } f_2 = 2$ .

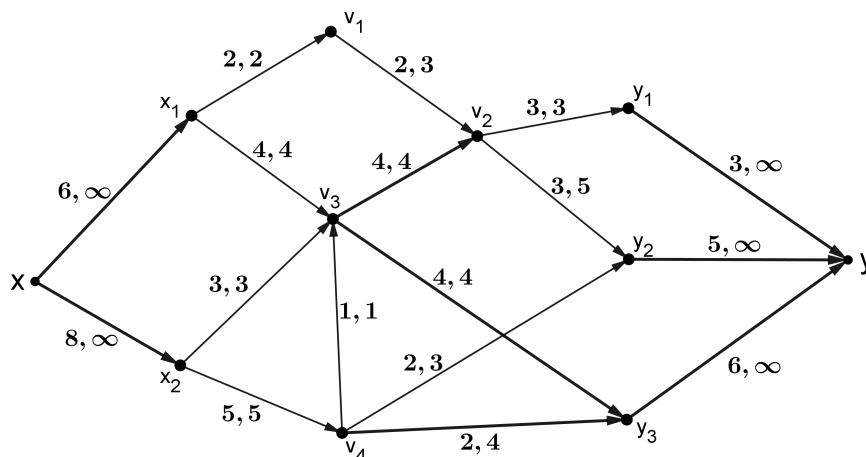
Glavni cilj ovog poglavlja je prezentirati algoritam kojim za danu mrežu konstruiramo neki njezin maksimalan tok.

Pogledajmo kako možemo modificirati proizvoljnu mrežu te time olakšati daljnje postupke i zaključke o mrežama. Proizvoljnu mrežu  $N$  možemo modificirati na sljedeći način:

1. dodati dva nova vrha,  $x$  i  $y$ , mreži  $N$ ;
2. pridružiti  $x$  svakom vrhu iz  $X$  usmjerenim bridom kapaciteta  $\infty$ ;
3. pridružiti svaki vrh iz  $Y$  vrhu  $y$  usmjerenim bridovima kapaciteta  $\infty$ ;
4. odrediti  $x$  kao izvor i  $y$  kao ponor mreže  $N'$ .

Pogledajmo kako se međusobno odnose tokovi u  $N$  i  $N'$ . Funkcija  $f'$  definirana na sljedeći način:





Slika 2.4: Modificirana mreža

$$f'(a) = \begin{cases} f(a), & \text{ako je } a \text{ brid od } N \\ f^+(v) - f^-(v) = f^+(v), & \text{ako je } a = (x, v) \\ f^-(v) - f^+(v) = f^-(v), & \text{ako je } a = (v, y), \end{cases}$$

je, očito, tok mreže  $N'$ . Štoviše, vrijedi da je  $\text{val } f' = \text{val } f$ . Zaista,

$$\begin{aligned} \text{val } f' &= (f')^+(x) \\ &= f'(x, x_1) + f'(x, x_2) + \cdots + f'(x, x_k) \\ &= f^+(x_1) + f^+(x_2) + \cdots + f^+(x_k). \end{aligned}$$

S obzirom da ne postoje usmjereni bridovi između vrhova  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , vrijedi:

$$f^+(x_1) + f^+(x_2) + \cdots + f^+(x_k) = f^+(X) = \text{val } f.$$

Dakle, vrijednost toka  $f'$  u mreži  $N'$  jednaka je vrijednosti toka  $f$  u mreži  $N$ .

Obratno, restrikcija toka u  $N'$  na skup usmjerenih bridova od  $N$  je tok u  $N$  koji ima iste vrijednosti. Stoga se možemo ograničiti na promatranje mreža koje imaju jedan izvor  $x$  i jedan ponor  $y$ . Dakle, problem određivanja maksimalnog toka u proizvoljnoj mreži može se svesti na slučaj kada mreža ima jedan izvor i jedan ponor. Na taj način dobivamo mrežu kojoj ćemo lakše odrediti maksimalan tok.

Na Slici 2.4 je prikaz mreže sa Slike 2.2 modificirane prethodno opisanim postupkom.

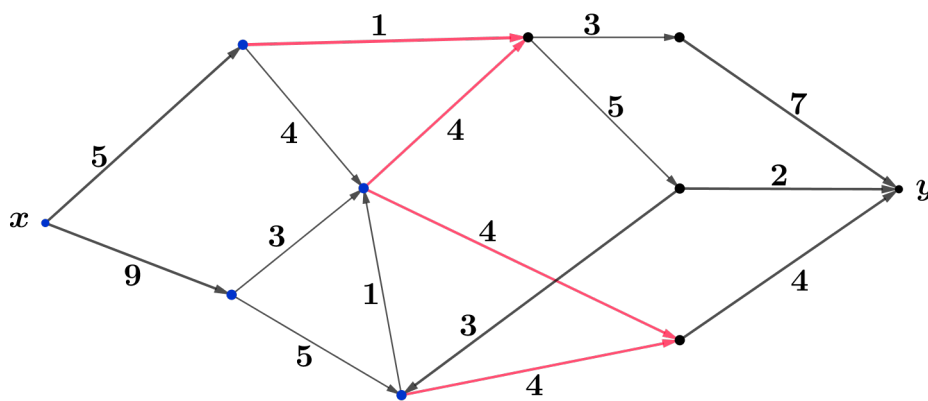
Nova mreža ima samo jedan izvor,  $x$ , i jedan ponor  $y$ . Svi ostali vrhovi mreže su međuvrhovi (uključujući i vrhove koji su prije modifikacije bili izvori ili ponori prethodne mreže).

Modificiranjem mreže prethodno opisanim postupkom, usmjerenim bridovima koji idu iz izvora i usmjerenim bridovima koji idu u ponor, pridružili smo kapacitet  $\infty$ , što nije konačna vrijednost i u kontradikciji je s definicijom mreže. No, takav kapacitet odabran je isključivo zbog jednostavnosti te ne narušava daljnje rezultate. Kapacitet usmjerenih bridova koji idu iz  $x$  mogli smo definirati i kao  $c^+(X)$ , odnosno  $c^-(Y)$  za usmjerene bridove koji idu u  $y$ . Time bi kapaciteti poprimali konačne vrijednosti te bi bili u skladu s definicijom mreže.

## 2.2 Rezovi

**Definicija 2.2.1.** *Neka je  $N$  mreža koja ima jedan izvor  $x$  i jedan ponor  $y$  te  $S \subset V$ . Rez (eng. cut) u mreži  $N$  je skup svih usmjerenih bridova oblika  $(S, \bar{S})$ , gdje je  $x \in S$  i  $y \in \bar{S}$ .*

Kapacitet reza  $K$  je zbroj kapaciteta njegovih usmjerenih bridova, u oznaci  $\text{cap } K$ . Stoga vrijedi  $\text{cap } K = \sum_{a \in K} c(a) = c^+(S)$ . Pogledajmo Sliku 2.5. Na slici je prikazana mreža uz čije su usmjerene bridove navedeni kapaciteti svakog od njih. Uočimo da je skup vrhova koji su obojani plavom bojom disjunktan skupu vrhova koji su obojani crnom bojom. S obzirom da  $x$  pripada skupu plavih vrhova, a  $y$  pripada skupu



Slika 2.5: Rez

zana mreža uz čije su usmjerene bridove navedeni kapaciteti svakog od njih. Uočimo da je skup vrhova koji su obojani plavom bojom disjunktan skupu vrhova koji su obojani crnom bojom. S obzirom da  $x$  pripada skupu plavih vrhova, a  $y$  pripada skupu

crnih vrhova, zaključujemo da usmjereni bridovi obojani crvenom bojom označavaju rez u danoj mreži. Kapacitet naznačenog reza jednak je zbroju kapaciteta usmjerenih bridova tog reza te iznosi 13.

**Lema 2.2.1.** *Za proizvoljan tok  $f$  i rez  $(S, \bar{S})$  u mreži  $N$  vrijedi:*

$$\text{val } f = f^+(S) - f^-(S). \quad (2.5)$$

*Dokaz:* Neka je  $f$  tok i  $(S, \bar{S})$  rez u mreži  $N$ . Prema definiciji toka (posebno, prema uvjetu (2.2)) i vrijednosti toka, imamo:

$$f^+(v) - f^-(v) = \begin{cases} \text{val } f & \text{ako } v = x \\ 0 & \text{ako } v \in S \setminus \{x\}, \end{cases}$$

pri čemu smo koristili da  $y$  nije element skupa  $S$ . Prema definiciji vrijednosti toka, imamo:

$$\begin{aligned} \text{val } f &= f^+(x) - f^-(x) \\ &= (f^+(x) - f^-(x)) + \sum_{v \in S \setminus \{x\}} (f^+(v) - f^-(v)) \\ &= \sum_{v \in S} (f^+(v) - f^-(v)). \end{aligned}$$

Pogledajmo čemu je jednako  $\sum_{v \in S} (f^+(v) - f^-(v))$ . Imamo:

$$\begin{aligned} f^+(v) &= \sum_{(v,u) \in A} f(v,u) = \sum_{\substack{(v,u) \in A \\ u \in S}} f(v,u) + \sum_{\substack{(v,u) \in A \\ u \notin S}} f(v,u) \\ \Rightarrow \sum_{v \in S} f^+(v) &= \sum_{v \in S} \sum_{\substack{(v,u) \in A \\ u \in S}} f(v,u) + f(S, \bar{S}) = f(S, S) + f^+(S). \end{aligned}$$

Analogno dobijemo da je  $\sum_{v \in S} f^-(v) = f(S, S) + f^-(S)$ . Iz prethodnih identiteta sada dobivamo:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} (f^+(v) - f^-(v)) &= \sum_{v \in S} f^+(v) - \sum_{v \in S} f^-(v) \\ &= f(S, S) + f^+(S) - f(S, S) - f^-(S) \\ &= f^+(S) - f^-(S). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi  $\text{val } f = f^+(S) - f^-(S)$ . □

Usmjerene bridove mreže možemo klasificirati s obzirom na tok tog brida. Za usmjereni brid  $a$  kažemo da je  $f$ -nula (eng.  $f$ -zero) ako je  $f(a) = 0$ ,  $f$ -pozitivan (eng.  $f$ -positive) ako je  $f(a) > 0$ ,  $f$ -nezasićen (eng.  $f$ -unsaturated) ako je  $f(a) < c(a)$  i  $f$ -zasićen (eng.  $f$ -saturated) ako je  $f(a) = c(a)$ .

**Teorem 2.2.1.** *Za svaki tok  $f$  i za svaki rez  $K=(S, \bar{S})$  u mreži  $N$ , vrijedi da je  $\text{val } f \leq \text{cap } K$ . Nadalje, jednakost vrijedi ako i samo ako je svaki usmjereni brid u  $(S, \bar{S})$   $f$ -zasićen i svaki usmjereni brid u  $(\bar{S}, S)$  je  $f$ -nula.*

*Dokaz:* Prema definiciji toka vrijedi da je  $f^+(S) \leq c^+(S) = \text{cap } K$  i  $f^-(S) \geq 0$ . Uvrštavanjem tih nejednakosti u jednakost (2.3), dobivamo da je  $\text{val } f \leq \text{cap } K$ . Dokažimo i drugu tvrdnju teorema.

Pretpostavimo da je svaki usmjereni brid u  $(S, \bar{S})$   $f$ -zasićen i da je svaki usmjereni brid u  $(\bar{S}, S)$   $f$ -nula, odnosno da vrijedi  $f^+(S) = c^+(S) = \text{cap } K$  i  $f^-(S) = 0$ . Tada je:

$$\text{val } f = f^+(S) - f^-(S) = \text{cap } K - 0 = \text{cap } K.$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi  $\text{val } f = \text{cap } K$ . Prema definiciji vrijednosti toka, tada je  $f^+(S) - f^-(S) = \text{cap } K$ , a po prvom dijelu tvrdnje nužno vrijedi da je  $f^+(S) = c^+(S) = \text{cap } K$  i  $f^-(S) = 0$ . Iz svojstva (2.1) sada slijedi da je svaki usmjereni brid u  $(S, \bar{S})$   $f$ -zasićen i svaki usmjereni brid u  $(\bar{S}, S)$  je  $f$ -nula.  $\square$

**Definicija 2.2.2.** *Rez  $K$  u mreži  $N$  nazivamo minimalan rez ako ne postoji rez  $K'$  u  $N$  takav da je  $\text{cap } K' < \text{cap } K$ .*

Uočimo, za svaku mrežu  $N$  postoji minimalan rez  $K'$  takav da je  $\text{cap } K' < \text{cap } K$ , pri čemu je  $K$  neki rez mreže  $N$ . Naime, pretpostavimo li suprotno, tj. da je skup  $\{\text{cap } K : K \text{ rez u } N\}$  neomeđen odozdo u  $\mathbb{N}$ , dobivamo kontradikciju s  $\text{cap } K \geq 0$  pa zaključujemo da minimalan rez uvijek postoji. Također, uočimo da je skup rezova mreže  $N$  uvijek neprazan jer je skup usmjerenih bridova koji idu iz  $x$  rez svake mreže. Općenito, minimalan rez mreže  $N$  nije jedinstven. Pogledajmo mrežu danu na Slici 2.3. Postoje četiri reza dane mreže:  $K_1 = \{(x, v_1), (x, v_2)\}$  ( $S = \{x\}$ ),  $K_2 = \{(x, v_2), (v_1, y)\}$  ( $S = \{x, v_1\}$ ),  $K_3 = \{(x, v_1), (v_2, v_1), (v_2, y)\}$  ( $S = \{x, v_2\}$ ) i  $K_4 = \{(v_1, y), (v_2, y)\}$  ( $S = \{x, v_1, v_2\}$ ). Kapaciteti tih rezova jednaki su  $\text{cap } K_1 = \text{cap } K_3 = 3$  i  $\text{cap } K_2 = \text{cap } K_4 = 2$ . Po Teoremu 2.2.1, očito, ne postoji rez kapaciteta manjeg od 2 jer smo ranije pokazali postojanje maksimalnog toka vrijednosti 2. Navedeni rezovi ( $K_2$  i  $K_4$ ) su minimalni, čime smo dobili da minimalan rez, općenito, nije jedinstven.

Ako je  $f^*$  maksimalan tok i  $\tilde{K}$  minimalan rez, prema prethodnom teoremu, vrijedi da je  $\text{val } f^* \leq \text{cap } \tilde{K}$ . Štoviše, vrijedi i više:

**Korolar 2.2.1.** *Neka je  $f$  tok i  $K$  rez mreže  $N$  takav da je  $\text{val } f = \text{cap } K$ . Tada je  $f$  maksimalan tok, a  $K$  je minimalan rez.*

*Dokaz:* Neka  $K'$  proizvoljan rez mreže  $N$ . Prema prethodnom teoremu slijedi da je  $\text{cap } K' \geq \text{val } f = \text{cap } K$  pa zaključujemo da je  $K$  minimalan rez mreže  $N$ . Analogno, neka je  $f'$  proizvoljan rez mreže  $N$ . Prema prethodnom teoremu slijedi da je  $\text{val } f' \leq \text{cap } K = \text{val } f$  pa zaključujemo da je  $f$  maksimalan tok mreže  $N$ .  $\square$

**Primjer 2.2.1.** Na Slici 2.6 je dana mreža  $N$  i jedan njen tok  $f$ . Odredite sve rezove mreže  $N$ , kapacitet minimalnog reza te pokažite da je tok  $f$  maksimalan tok mreže  $N$ .

Odredimo sve rezove mreže  $N$ . Imamo:

$$\begin{aligned} S_1 = \{x\}, \bar{S}_1 = \{v_1, v_2, v_3, y\} &\implies K_1 = \{(x, v_1), (x, v_2)\}, \\ S_2 = \{x, v_1\}, \bar{S}_2 = \{v_2, v_3, y\} &\implies K_2 = \{(x, v_2), (v_1, y)\}, \\ S_3 = \{x, v_2\}, \bar{S}_3 = \{v_1, v_3, y\} &\implies K_3 = \{(x, v_1), (v_2, v_1), (v_2, v_3)\}, \\ S_4 = \{x, v_3\}, \bar{S}_4 = \{v_1, v_2, y\} &\implies K_4 = \{(x, v_1), (x, v_2), (v_3, v_1), (v_3, y)\}, \\ S_5 = \{x, v_1, v_2\}, \bar{S}_5 = \{v_3, y\} &\implies K_5 = \{(v_1, y), (v_2, v_3)\}, \\ S_6 = \{x, v_1, v_3\}, \bar{S}_6 = \{v_2, y\} &\implies K_6 = \{(x, v_2), (v_3, y), (v_1, y)\}, \\ S_7 = \{x, v_2, v_3\}, \bar{S}_7 = \{v_1, y\} &\implies K_7 = \{(x, v_1), (v_2, v_1), (v_3, v_1), (v_3, y)\}, \\ S_8 = \{x, v_1, v_2, v_3\}, \bar{S}_8 = \{y\} &\implies K_8 = \{(v_1, y), (v_3, y)\}. \end{aligned}$$

Dakle, mreža  $N$  ima ukupno 8 različitih rezova, što odgovara broju podskupova skupa  $\{v_1, v_2, v_3\}$  ( $2^3 = 8$ ). Odredimo kapacitete tih rezova.

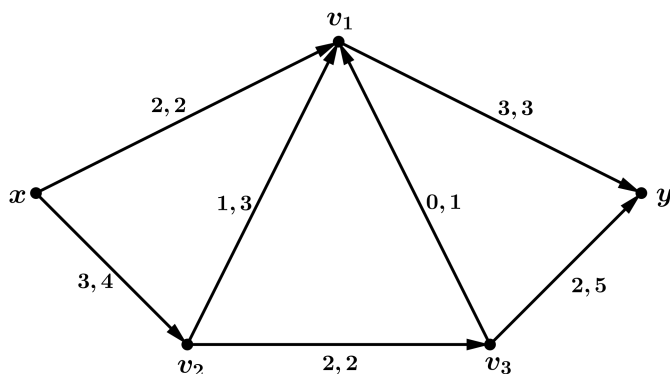
$$\begin{aligned} \text{cap } K_1 &= c(x, v_1) + c(x, v_2) = 2 + 4 = 6, \\ \text{cap } K_2 &= c(x, v_2) + c(v_1, y) = 4 + 3 = 7, \\ \text{cap } K_3 &= c(x, v_1) + c(v_2, v_1) + c(v_2, v_3) = 2 + 3 + 2 = 7, \\ \text{cap } K_4 &= c(x, v_1) + c(x, v_2) + c(v_3, v_1) + c(v_3, y) = 2 + 4 + 1 + 5 = 12, \\ \text{cap } K_5 &= c(v_1, y) + c(v_2, v_3) = 3 + 2 = 5, \\ \text{cap } K_6 &= c(x, v_2) + c(v_3, y) + c(v_1, y) = 4 + 5 + 3 = 12, \\ \text{cap } K_7 &= c(x, v_1) + c(v_2, v_1) + c(v_3, v_1) + c(v_3, y) = 2 + 3 + 1 + 5 = 11, \\ \text{cap } K_8 &= c(v_1, y) + c(v_3, y) = 3 + 5 = 8. \end{aligned}$$

Uspoređujući kapacitete svih rezova mreže  $N$ , uočavamo da kapacitet minimalnog reza iznosi 5 te da je  $K_5$  minimalan rez mreže  $N$ . Da bismo pokazali da je dani tok  $f$  maksimalan tok mreže  $N$ , izračunajmo vrijednost toka  $f$ . Ukoliko je  $\text{val } f = \text{cap } K_5$ , tada, prema Korolaru 2.2.1, slijedi da je  $f$  maksimalan tok mreže  $N$ . Imamo:

$$\text{val } f = f^+(x) = f(x, v_1) + f(x, v_2) = 2 + 3 = 5.$$

Dakle,  $\text{val } f = \text{cap } K_5$  te je  $f$  maksimalan tok mreže  $N$ .

U sljedećem odjeljku, bavit ćemo se obratom Korolaru 2.2.1, odnosno dokazat ćemo da je vrijednost maksimalnog toka jednaka kapacitetu minimalnog reza.



Slika 2.6: Primjer 2.2.1

### 2.3 Teorem o maksimalnom toku i minimalnom rezu

U ovom ulomku bavit ćemo se problemom određivanja maksimalnog toka dane mreže te ćemo predstaviti algoritam kojim ćemo takav tok odrediti.

Neka je  $f$  tok mreže  $N$ . Svakom putu  $P$  u  $N$  pridružujemo nenegativan cijeli broj,  $\iota(P)$ , definiran kao  $\iota(P) = \min\{\iota(a) : a \text{ usmjereni bridovi puta } P\}$ . Definiramo:

$$\iota(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{ako je } a \text{ pozitivno usmjeren brid od } P \\ f(a) & \text{ako je } a \text{ negativno usmjeren brid od } P. \end{cases}$$

Pogledajmo mrežu  $N$  na Slici 2.6 i njen tok  $f$ . Jedan put  $P$  mreže  $N$  je  $x - v_2 - v_1 - v_3 - y$ . Odredimo  $\iota(P)$ . Imamo:

$$\begin{aligned} \iota(x, v_2) &= c(x, v_2) - f(x, v_2) = 4 - 3 = 1, \\ \iota(v_2, v_1) &= c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1) = 3 - 1 = 2, \\ \iota(v_1, v_3) &= f(v_1, v_3) = 0, \\ \iota(v_3, y) &= c(v_3, y) - f(v_3, y) = 5 - 2 = 3. \end{aligned}$$

Stoga,  $\iota(P) = 0$ .

Ukoliko promatramo puteve kojima je izvor  $x$  početni vrh, a ponor  $y$  završni vrh, razlikujemo usmjerene bridove pozitivnog i negativnog smjera. Za usmjerene bridove  $(x, v_2)$ ,  $(v_2, v_1)$  i  $(v_3, y)$  puta  $P$  kažemo da su usmjereni bridovi pozitivnog smjera, a za usmjereni brid  $(v_1, v_3)$  puta  $P$  kažemo da su usmjereni bridovi negativnog smjera. Lako se pokaže da je, općenito,  $\iota(P)$  najveća vrijednost za koju se tok duž puta  $P$  može povećati. Uočimo da se tok duž puta  $P$  povećava ako se povećava tok duž pozitivno usmjerenih bridova ili ako se smanjuje tok duž negativno usmjerenih bridova. Uvjerimo se sada da je  $\iota(P)$  zaista najveća vrijednost za koju se tok duž puta  $P$  može povećati. Iz definicije broja  $\iota(P)$  slijedi da postoji usmjereni brid  $a$  puta  $P$  za koji vrijedi da je  $\iota(P) = \iota(a)$ . Ukoliko je  $a$  pozitivno usmjereni brid puta  $P$ , tada je  $\iota(P) = c(a) - f(a)$  te vrijedi  $c(a) = \iota(P) + f(a)$ . Neka je  $\alpha$  prirodan broj takav da je  $\alpha > \iota(P)$ . Povećavanjem toka  $f(a)$  za vrijednost  $\alpha$  dobivamo  $c(a) = \iota(P) + f(a) < \alpha + f(a)$ , a to je u kontradikciji sa svojstvom toka (2.1). Ukoliko je  $a$  negativno usmjereni brid puta  $P$ , tada je  $\iota(P) = f(a)$ . Neka je  $\alpha$  prirodan broj takav da je  $\alpha > \iota(P) = f(a)$ . Smanjivanjem toka  $f(a)$  za vrijednost  $\alpha$  dobivamo  $f(a) - \alpha < 0$  što je, opet, u kontradikciji sa svojstvom (2.1).

Kažemo da je  $P$  *f-zasićen* ako je  $\iota(P) = 0$  i da je *f-nezasićen* ako je  $\iota(P) > 0$  (ili ekvivalentno, ako je svaki pozitivno usmjereni brid od  $P$  *f-nezasićen* i ako je svaki negativno usmjereni brid od  $P$  *f-pozitivan*). Jednostavnije rečeno, *f-nezasićen* put je onaj put koji nije iskorišten do svog punog kapaciteta. *f-rastući* put je *f-nezasićen* put od izvora  $x$  do ponora  $y$ .

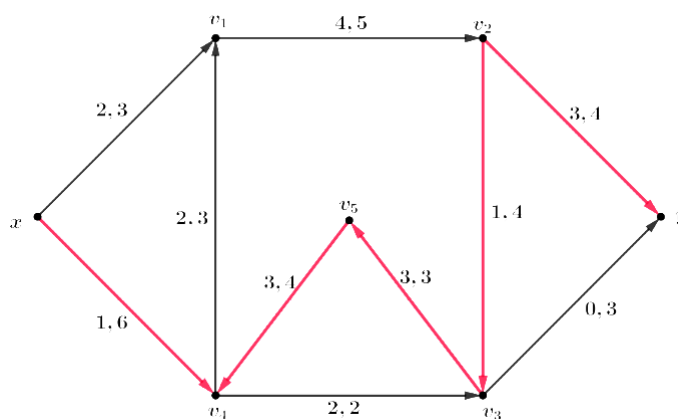
Egzistencija *f-rastućeg* puta  $P$  u mreži je značajan rezultat jer implicira da tok  $f$  nije maksimalan tok. Povećavajući tok duž puta  $P$  za  $\iota(P)$  dobivamo novi tok  $\hat{f}$  definiran kao:

$$\hat{f}(a) = \begin{cases} f(a) + \iota(P) & \text{ako je } a \text{ pozitivno usmjereni brid od } P \\ f(a) - \iota(P) & \text{ako je } a \text{ negativno usmjereni brid od } P \\ f(a), & \text{inače .} \end{cases}$$

Pokažimo da za tok  $\hat{f}$  vrijedi  $\text{val } \hat{f} = \text{val } f + \iota(P)$ . Po definiciji vrijednosti toka, imamo:

$$\begin{aligned}
 \text{val } \hat{f} &= \hat{f}^+(x) - \hat{f}^-(x) = \hat{f}^+(x) = \sum_{j=1}^k \hat{f}(x, v_j) \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \hat{f}(x, v_j) + \hat{f}(x, v_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k f(x, v_j) + (f(x, v_i) + \iota(P)) \\
 &= \sum_{j=1}^k f(x, v_j) + \iota(P) = \text{val } f + \iota(P),
 \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da je usmjereni brid  $(x, v_i)$  dio puta  $P$ . Nazovimo  $\hat{f}$  revidirani tok temeljen na  $P$ .



Slika 2.7:  $f$ -rastući put

Na Slici 2.7 je crvenom bojom označen jedan  $f$ -rastući put  $P$  dane mreže. Koristeći podatke o toku  $f$  i kapacitetu  $c$  usmjerenih bridova danih na slici, odredimo  $\iota(P)$ :

$$\begin{aligned}
 \iota(P) &= \min\{\iota(x, v_4), \iota(v_5, v_4), \iota(v_3, v_4), \iota(v_2, v_3), \iota(v_2, y)\} \\
 &= \min\{c(x, v_4) - f(x, v_4), f(v_5, v_4), f(v_3, v_4), f(v_2, v_3), c(v_2, y) - f(v_2, y)\} \\
 &= \min\{5, 3, 3, 1, 1\} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Dakle,  $\iota(P) = 1$ . Odredimo sada revidirani tok  $\hat{f}$  temeljen na  $P$ . S obzirom da su  $(x, v_4)$  i  $(v_2, y)$  pozitivno usmjereni bridovi od  $P$ , a  $(v_5, v_4)$ ,  $(v_3, v_4)$  i  $(v_2, v_3)$  negativno



usmjereni bridovi od  $P$ , imamo:

$$\hat{f}(x, v_4) = f(x, v_4) + \iota(P) = 1 + 1 = 2,$$

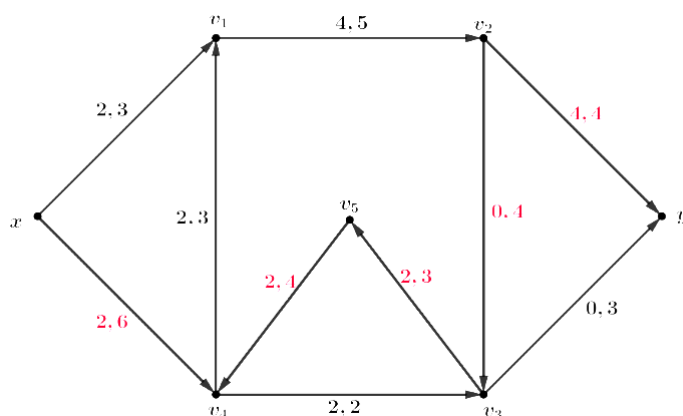
$$\hat{f}(v_2, y) = f(v_2, y) + \iota(P) = 3 + 1 = 4,$$

$$\hat{f}(v_5, v_4) = f(v_5, v_4) - \iota(P) = 3 - 1 = 2,$$

$$\hat{f}(v_3, v_4) = f(v_3, v_4) - \iota(P) = 3 - 1 = 2,$$

$$\hat{f}(v_2, v_3) = f(v_2, v_3) - \iota(P) = 1 - 1 = 0.$$

Revidirani tok  $\hat{f}$  ostalih bridova jednak je njihovom toku  $f$ .



Slika 2.8: Revidirani tok

Time je revidirani tok  $\hat{f}$  potpuno određen te je prikazan na Slici 2.8. Značajnost rastućeg puta u teoriji toka možemo vidjeti u sljedećem teoremu.

**Teorem 2.3.1.** *Tok  $f$  u mreži  $N$  je maksimalan tok ako i samo ako  $N$  ne sadrži  $f$ -rastući put.*

*Dokaz:* Ako  $f$  sadrži  $f$ -rastući put  $P$ , tada  $f$  ne može biti maksimalan tok jer  $\hat{f}$ , revidirani tok temeljen na  $P$ , ima veću vrijednost.

Obratno, pretpostavimo da  $N$  ne sadrži  $f$ -rastući put. Naš cilj je dokazati da je  $f$  tada maksimalan tok. Označimo sa  $S$  skup svih vrhova s kojima je  $x$  povezan  $f$ -nezasićenim putevima u  $N$ . Neka je  $x \in S$ . Kako  $N$  nema  $f$ -rastućih puteva, slijedi da je  $y \in \bar{S}$ . Iz toga zaključujemo da je  $K = (S, \bar{S})$  rez u  $N$ . Sada trebamo pokazati da je svaki brid u  $(S, \bar{S})$   $f$ -zasićen i da je svaki brid u  $(\bar{S}, S)$   $f$ -nula. Neka je  $a$  brid s početkom (eng. tail)  $u \in S$  i završetkom (eng. head)  $v \in \bar{S}$ . Budući da je  $u \in S$ , postoji  $f$ -nezasićen  $(x, u)$ -put  $Q$ . Ako je  $a$   $f$ -nezasićen, tada se  $Q$  može produžiti bridom

$a$  i na taj način dobiti  $f$ -nezasićen  $(x, v)$ -put. S obzirom da je  $v \in \bar{S}$ , takav put ne postoji. Dakle,  $a$  mora biti  $f$ -zasićen. Sličnim zaključivanjem dolazimo do toga da ako je  $a \in (\bar{S}, S)$ , onda  $a$  mora biti  $f$ -nula. Primjenom Teorema 2.2.1, zaključujemo da je val  $f = \text{cap } K$ . Prema Korolaru 2.2.1 slijedi da je  $f$  maksimalan tok (i da je  $K$  minimalan rez).  $\square$

Na temelju prethodnog dokaza, utvrdili smo postojanje maksimalnog toka  $f$  i minimalnog reza  $K$  takvih da je val  $f = \text{cap } K$ . U nastavku ćemo opisati algoritam kojim ćemo odrediti maksimalan tok dane mreže te ćemo iznijeti teorem o maksimalnom toku i minimalnom rezu.

**Teorem 2.3.2** (Max-flow min-cut theorem). *U svakoj mreži je vrijednost maksimalnog toka jednaka kapacitetu minimalnog reza.*

*Dokaz:* Neka je  $f$  maksimalan tok mreže  $N$ . Tada, prema Teoremu 2.3.1, slijedi da u mreži  $N$  ne postoji  $f$ -rastući  $(x, y)$ -put. Prema dokazu Teorema 2.3.1, u tom slučaju, možemo konstruirati rez  $K$  u mreži  $N$  takav da je val  $f = \text{cap } K$ . Po Korolaru 2.2.1  $K$  je minimalan rez, čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

### 2.3.1 Algoritam metode označavanja

Koristeći algoritam *metode označavanja* (eng. *labelling method*) pronalazimo maksimalan tok dane mreže. Algoritam počinje nekim tokom dane mreže (može početi i nul-tokom) te se u svakom koraku algoritma konstruira novi tok čija je vrijednost, u odnosu na prethodni tok, veća. Kako bismo od početnog toka konstruirali novi revidirani tok, provodimo tzv. *proces označavanja* (eng. *labelling procedure*), kojim određujemo  $f$ -rastući  $(x, y)$ -put (ukoliko on postoji). Ukoliko je takav put  $P$  pronađen, tada konstruiramo  $\hat{f}$ , revidirani tok temeljen na  $P$ , te s tokom  $\hat{f}$  ponovno provodimo isti postupak. Ako  $f$ -rastući put ne postoji, algoritam se zaustavlja te po Teoremu 2.3.1 slijedi da smo pronašli maksimalan tok dane mreže.

Opišimo spomenuti proces označavanja. Određivanje  $f$ -rastućeg puta uključuje stvaranje  $f$ -nezasićenog stabla  $T$  u mreži  $N$ . Stoga, donosimo sljedeću definiciju:

**Definicija 2.3.1.** *Stablo  $T$  u  $N$  je  $f$ -nezasićeno stablo ako:*

1.  $x \in V(T)$
2. za svaki  $v$  od  $T$ , jedinstveni  $(x, v)$ -put u  $T$  je  $f$ -nezasićen put.

Pri metodi označavanja,  $f$ -rastući put, odnosno  $f$ -nezasićeno stablo  $T$  se inicijalno sastoji samo od izvora  $x$ , a u svakom koraku procesa označavanja, stablo može rasti na jedan od ova dva načina:

1. ako postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid  $a$  u  $(S, \bar{S})$ , pri čemu je  $S = V(T)$ , tada se i  $a$  i njegov završetak (glava) (eng. head) dodaju u  $T$ ;
2. ako postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid  $a$  u  $(\bar{S}, S)$ , tada se i  $a$  i njegov početak (rep) (eng. tail) dodaju u  $T$ .

Očito, svaka od prethodno opisanih procedura rezultira povećanim  $f$ -nezasićenim stablom jer u svakom slučaju stablu dodajemo barem jedan usmjereni brid. U konačnici, ili  $T$  dosegne ponor  $y$  ili prestane rasti prije dostizanja  $y$ . Slučaj kada  $T$  dosegne ponor nazivamo proboj (eng. breakthrough) i tada je  $(x, y)$ -put u  $T$  željeni  $f$ -rastući put te nastavljamo s algoritmom. Ako  $T$  prestane rasti prije dosezanja  $y$ , tada se algoritam zaustavlja.

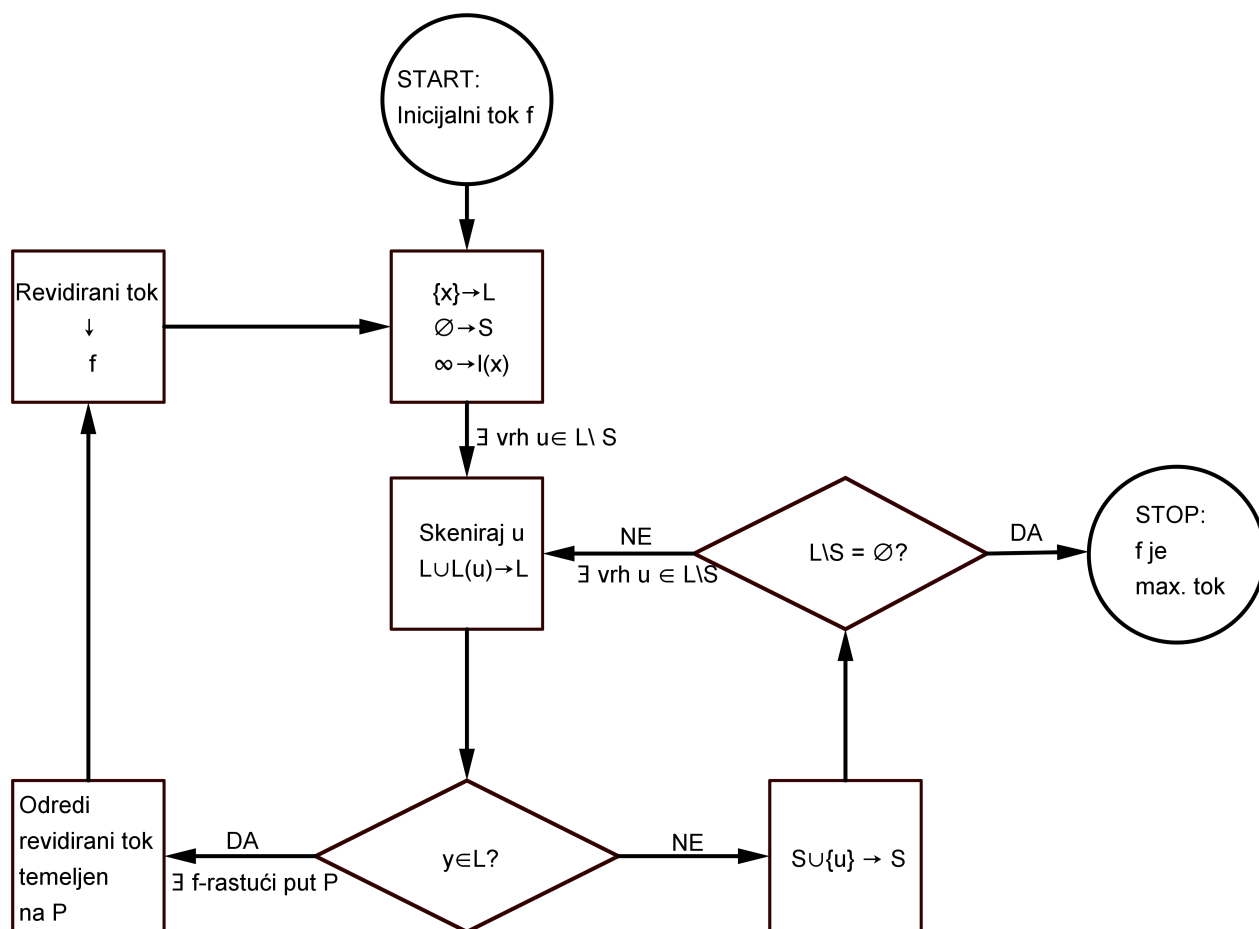
Proces označavanja je sistematičan način stvaranja  $f$ -nezasićenog stabla  $T$ . U procesu stvaranja stabla  $T$  svakom vrhu  $v$  od  $T$  dodjeljuje se oznaka (eng. label)  $l(v) = \iota(P_v)$ , gdje je  $P_v$  jedinstveni  $(x, v)$ -put u  $T$ . Prednost ovakvog označavanja je da, u slučaju proboja, ne samo da imamo  $f$ -rastući put  $P_y$ , nego i kvantitetu  $\iota(P_y)$  na temelju koje se izračuna revidirani tok temeljen na  $P_y$ . Proces označavanja započinje dodjeljivanjem izvoru  $x$  oznake  $l(x) = \infty$ . Nastavlja se prema sljedećim pravilima:

1. Ako je  $a$   $f$ -nezasićen usmjereni brid čiji početak (rep)  $u$  je označen, ali završetak (glava)  $v$  nije označena, tada je oznaka od  $v$   $l(v) = \min\{l(u), c(a) - f(a)\}$ .
2. Ako je  $a$   $f$ -pozitivan usmjereni brid čiji je završetak (glava)  $u$  označena, ali čiji početak (rep)  $v$  nije označen, tada je oznaka od  $v$   $l(v) = \min\{l(u), f(a)\}$ .

U svakom od prethodnih slučajeva,  $v$  je označen na temelju  $u$ . Stoga, uvodimo pojam skeniranja označenog vrha. Skenirati označeni vrh  $u$  znači označiti sve neoznačene vrhove koji mogu biti označeni na temelju  $u$ . Proces označavanja se nastavlja sve dok ponor  $y$  nije označen (proboj) ili kada su skenirani svi označeni vrhovi i nije pronađen niti jedan novi vrh koji se može označiti. Dakle, tijekom jedne iteracije metode označavanja, provodimo sljedeće postupke (možda i više puta) dok se ne dogodi proboj ili dok ne bude vrhova koje možemo označiti:

1. označavanje vrha/vrhova;
2. skeniranje vrha/vrhova;
3. dodjeljivanje oznake svim vrhovima koji su upravo označeni.

Ako se dogodio proboj, odnosno ako smo na prethodno opisan način stvorili  $f$ -nezasićen  $(x, y)$ -put, konstruiramo revidirani tok  $\hat{f}$ . Ukoliko se proboj nije dogodio, algoritam se zaustavlja. Na Slici 2.9 je prikazan dijagram algoritma.  $L$  označava skup



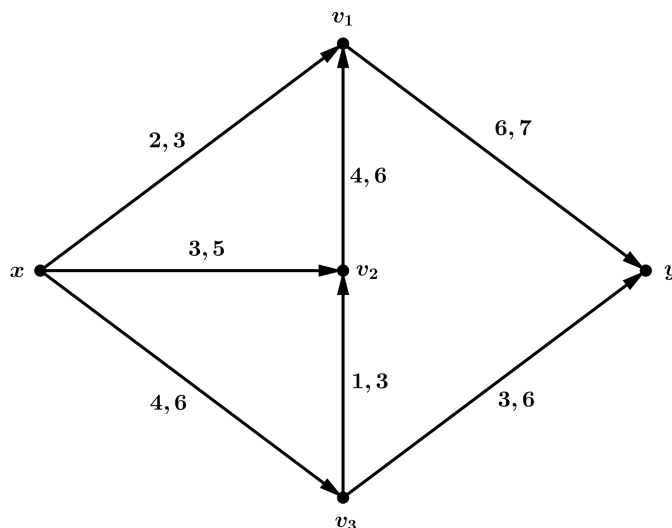
Slika 2.9: Shema metode označavanja

označenih vrhova,  $S$  skup skeniranih vrhova,  $L(u)$  skup vrhova koji su označeni na temelju  $u$ , a  $l(v)$  je oznaka vrhva  $v$ . Pogledajmo na sljedećem primjeru kako metoda označavanja funkcionira.

**Primjer 2.3.1.** Na Slici 2.10 dana je mreža  $N$  i njezin tok  $f$ . Odredite maksimalan tok te mreže koristeći tok dan na slici.

U postupku određivanja maksimalnog toka koristit ćemo oznake koje su navedene u dijagramu algoritma. Dakle,  $L$  označava skup označenih vrhova,  $S$  skup skeniranih vrhova,  $L(u)$  skup vrhova koji su označeni na temelju  $u$ , a  $l(v)$  je oznaka vrhva  $v$ .

Prva iteracija:



Slika 2.10: Primjer 2.3.1

Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_1, v_2, v_3\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(x), c(x, v_1) - f(x, v_1)\} = \min\{\infty, 1\} = 1,$$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 2\} = 2,$$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(x), c(x, v_3) - f(x, v_3)\} = \min\{\infty, 2\} = 2.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_1, v_2, v_3$ .

Skeniranje vrha  $v_1$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_1, v_2, v_3, y\}$
- $y \in L \implies$  postoji  $f$ -rastući put  $P_y \implies x - v_1 - y$

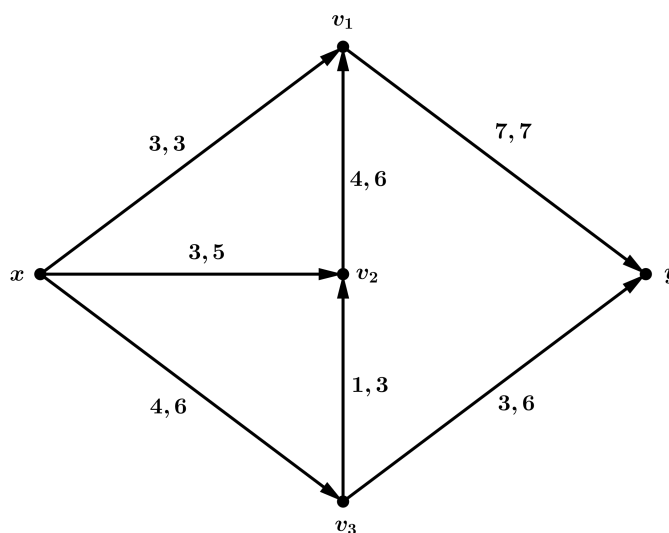
$$l(y) = \iota(P_y) \min\{l(v_1), c(v_1, y) - f(v_1, y)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

Određivanje revidiranog toka,  $\hat{f}$ , temeljenog na  $P_y$ :

$$\hat{f}(x, v_1) = f(x, v_1) + \iota(P_y) = 2 + 1 = 3,$$

$$\hat{f}(v_1, y) = f(v_1, y) + \iota(P_y) = 6 + 1 = 7.$$

Za sve ostale usmjerene bridove mreže vrijedi  $\hat{f}(a) = f(a)$ . Revidirani tok,  $\hat{f}$ , prikazan je na Slici 2.11.



Slika 2.11: Revidirani tok nakon prve iteracije

Druga iteracija:

Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_2, v_3\}$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 1\} = 1,$$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(x), c(x, v_3) - f(x, v_3)\} = \min\{\infty, 2\} = 2,$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_2, v_3$ .

Skeniranje vrha  $v_2$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_1, v_2, v_3\}$

- $y \notin L \implies S = \{x, v_2\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_2) = \{v_1\}$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(v_2), c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1)\} = \min\{2, 2\} = 2.$$

Skeniranje vrha  $v_3$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_1, v_2, v_3, y\}$
- $y \in L \implies$  postoji  $f$ -rastući put  $P_y \implies x - v_3 - y$

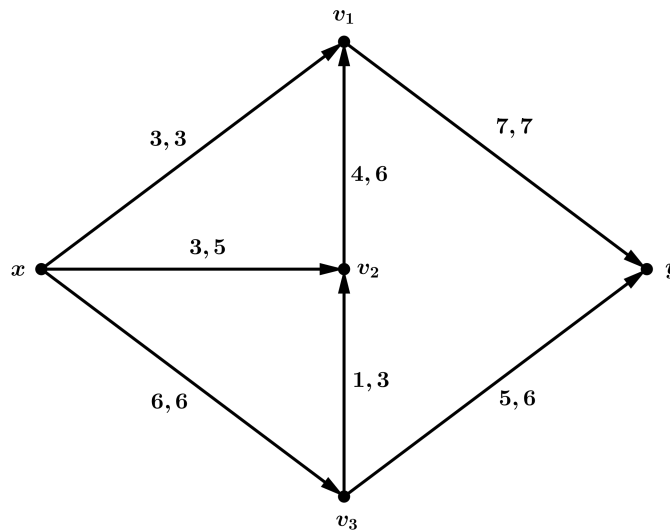
$$l(y) = \iota(P_y) = \min\{l(v_3), c(v_3, y) - f(v_3, y)\} = \min\{2, 3\} = 2$$

Određivanje revidiranog toka,  $\hat{f}$ , temeljenog na  $P_y$ :

$$\hat{f}(x, v_3) = f(x, v_3) + \iota(P_y) = 4 + 2 = 6,$$

$$\hat{f}(v_3, y) = f(v_3, y) + \iota(P_y) = 3 + 2 = 5.$$

Za sve ostale usmjerene bridove mreže vrijedi  $\hat{f}(a) = f(a)$ . Revidirani tok,  $\hat{f}$ , prikazan je na Slici 2.12.



Slika 2.12: Revidirani tok nakon druge iteracije

Treća iteracija:

Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_2\}$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 2\} = 2.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $v_2$ .

Skeniranje vrha  $v_2$ :

- postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L) \implies L = \{x, v_2, v_3\}$
- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3, v_1\}$
- $y \notin L \implies S = \{x, v_2\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_2) = \{v_3, v_1\}$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(v_2), c(v_3, v_2)\} = \min\{2, 1\} = 1,$$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(v_2), c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1)\} = \min\{2, 2\} = 2.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_3, v_1$ .

Skeniranje vrha  $v_3$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3, v_1, y\}$
- $y \in L \implies$  postoji  $f$ -rastući put  $P_y \implies x - v_2 - v_3 - y$

$$l(y) = \iota(P_y) = \min\{l(v_3), c(v_3, y) - f(v_3, y)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

Određivanje revidiranog toka,  $\hat{f}$ , temeljenog na  $P_y$ :

$$\hat{f}(x, v_2) = f(x, v_2) + \iota(P_y) = 3 + 1 = 4,$$

$$\hat{f}(v_3, v_2) = f(v_3, v_2) - \iota(P_y) = 1 - 1 = 0.$$

Za sve ostale usmjerene bridove mreže vrijedi  $\hat{f}(a) = f(a)$ . Revidirani tok,  $\hat{f}$ , prikazan je na Slici 2.13.

Četvrta iteracija:

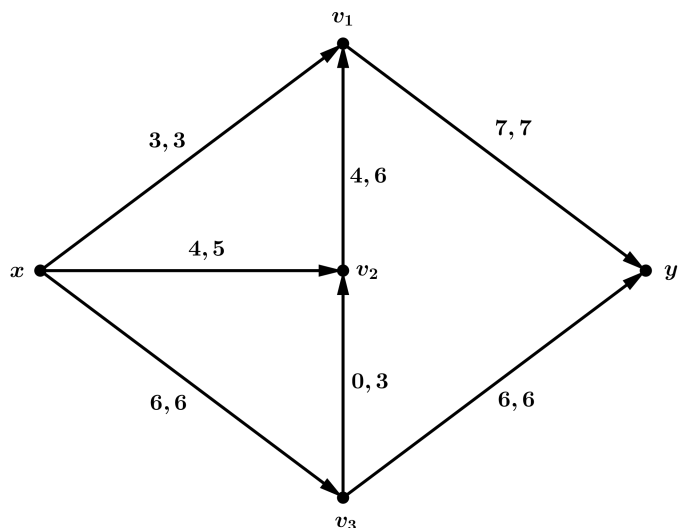
Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2\}$





Slika 2.13: Revidirani tok nakon treće iteracije

- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_2\}$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 1\} = 1.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $v_2$ .

Skeniranje vrha  $v_2$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_1\}$
- $y \notin L \implies S = \{x, v_2\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_2) = \{v_1\}$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(v_2), c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1)\} = \min\{1, 2\} = 1.$$

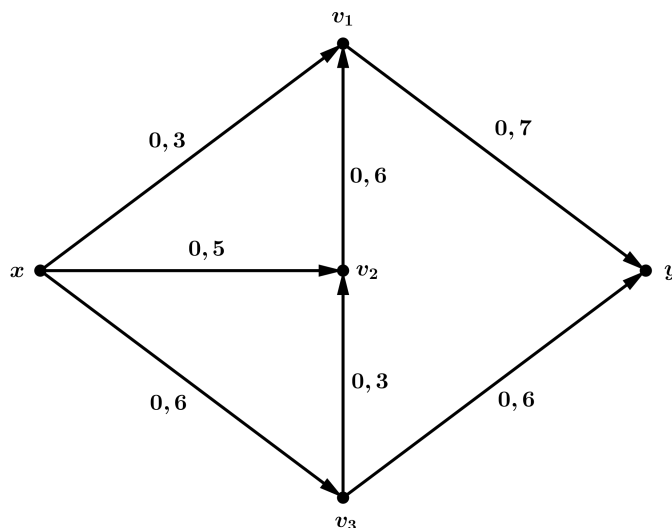
Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $v_1$ .

Skeniranje vrha  $v_1$ :

Ne postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L})$  i ne postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L) \implies \text{STOP}$ .

Dakle, posljednji tok u nizu je maksimalan tok dane mreže (Slika 2.13).

**Primjer 2.3.2.** Na Slici 2.14 je dana mreža. Odredite maksimalan tok te mreže koristeći nul-tok za početni korak algoritma označavanja.



Slika 2.14: Primjer 3

Pri rješavanju primjera koristit ćemo iste oznake kao i u prethodnom primjeru.

Prva iteracija:

Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_1, v_2, v_3\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(x), c(x, v_1) - f(x, v_1)\} = \min\{\infty, 3\} = 3,$$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 5\} = 5,$$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(x), c(x, v_3) - f(x, v_3)\} = \min\{\infty, 6\} = 6.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_1, v_2, v_3$ .

Skeniranje vrha  $v_1$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_1, v_2, v_3, y\}$
- $y \in L \implies$  postoji  $f$ -rastući put  $P_y \implies x - v_1 - y$

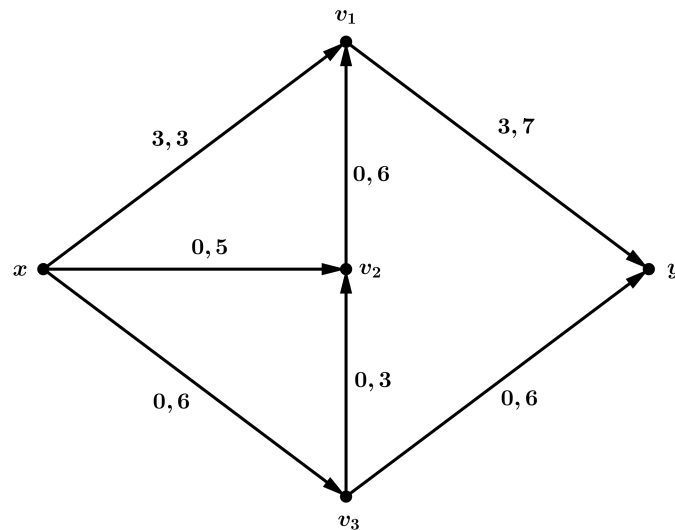
$$l(y) = \iota(P_y) = \min\{l(v_1), c(v_1, y) - f(v_1, y)\} = \min\{3, 7\} = 3$$

Određivanje revidiranog toka,  $\hat{f}$ , temeljenog na  $P_y$ :

$$\hat{f}(x, v_1) = f(x, v_1) + \iota(P_y) = 0 + 3 = 3,$$

$$\hat{f}(v_1, y) = f(v_1, y) + \iota(P_y) = 0 + 3 = 3.$$

Za sve ostale usmjerene bridove mreže vrijedi  $\hat{f}(a) = f(a)$ . Revidirani tok,  $\hat{f}$ , prikazan je na Slici 2.15.



Slika 2.15: Revidirani tok nakon prve iteracije

Druga iteracija:

Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_2, v_3\}$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 5\} = 5,$$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(x), c(x, v_3) - f(x, v_3)\} = \min\{\infty, 6\} = 6,$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_2, v_3$ .

Skeniranje vrha  $v_2$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3, v_1\}$
- $y \notin L \implies S = \{x, v_2\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_2) = \{v_1\}$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(v_2), c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1)\} = \min\{5, 6\} = 5.$$

Skeniranje vrha  $v_3$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3, v_1, y\}$
- $y \in L \implies$  postoji  $f$ -rastući put  $P_y \implies x - v_3 - y$

$$l(y) = \iota(P_y) = \min\{l(v_3), c(v_3, y) - f(v_3, y)\} = \min\{6, 6\} = 6$$

Određivanje revidiranog toka,  $\hat{f}$ , temeljenog na  $P_y$ :

$$\hat{f}(x, v_3) = f(x, v_3) + \iota(P_y) = 0 + 6 = 6,$$

$$\hat{f}(v_3, y) = f(v_3, y) + \iota(P_y) = 0 + 6 = 6.$$

Za sve ostale usmjerene bridove mreže vrijedi  $\hat{f}(a) = f(a)$ . Revidirani tok,  $\hat{f}$ , prikazan je na Slici 2.16.

Treća iteracija:

Početak:  $L = \{x\}, S = \emptyset, l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_2\}$

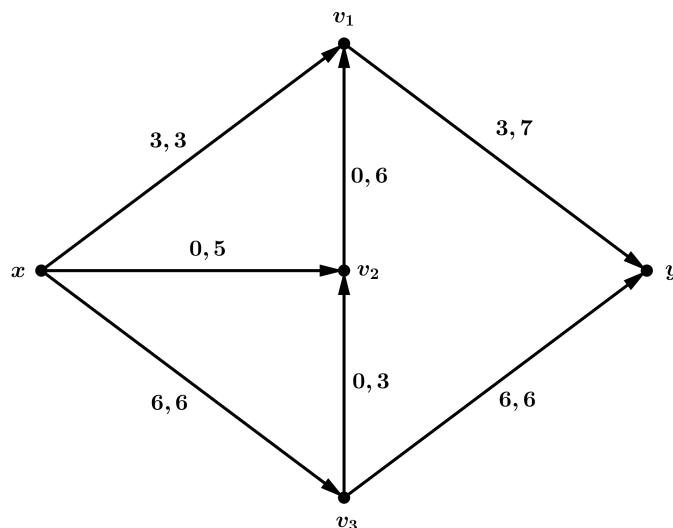
$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 5\} = 5.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $v_2$ .

Skeniranje vrha  $v_2$ :

- postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L) \implies L = \{x, v_2, v_3\}$
- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3, v_1\}$
- $y \notin L \implies S = \{x, v_2\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_2) = \{v_3, v_1\}$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(v_2), c(v_3, v_2)\} = \min\{5, 3\} = 3,$$



Slika 2.16: Revidirani tok nakon druge iteracije

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(v_2), c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1)\} = \min\{5, 6\} = 5.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_3, v_1$ .

Skeniranje vrha  $v_3$ :

- ne postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L})$  ili  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L)$

-  $y \notin L$

-  $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_3) = \emptyset$

Skeniranje vrha  $v_1$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_3, v_1, y\}$

-  $y \in L \implies$  postoji  $f$ -rastući put  $P_y \implies x - v_2 - v_1 - y$

$$l(y) = \iota(P_y) = \min\{l(v_1), c(v_1, y) - f(v_1, y)\} = \min\{5, 4\} = 4$$

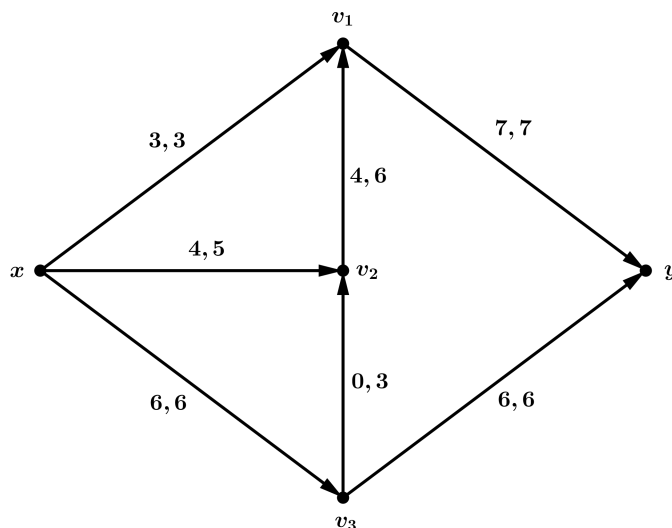
Određivanje revidiranog toka,  $\hat{f}$ , temeljenog na  $P_y$ :

$$\hat{f}(x, v_2) = f(x, v_2) + \iota(P_y) = 0 + 4 = 4,$$

$$\hat{f}(v_2, v_1) = f(v_2, v_1) + \iota(P_y) = 0 + 4 = 4.$$

$$\hat{f}(v_1, y) = f(v_1, y) + \iota(P_y) = 3 + 4 = 7.$$

Za sve ostale usmjerene bridove mreže vrijedi  $\hat{f}(a) = f(a)$ . Revidirani tok,  $\hat{f}$ , prikazan je na Slici 2.17.



Slika 2.17: Revidirani tok nakon treće iteracije

Četvrta iteracija:

Početak:  $L = \{x\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $l(x) = \infty$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $x$ .

Skeniranje vrha  $x$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2\}$
- $y \notin L \implies S = \{x\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(x) = \{v_2\}$

$$l(v_2) = \iota(P_{v_2}) = \min\{l(x), c(x, v_2) - f(x, v_2)\} = \min\{\infty, 1\} = 1.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $v_2$ .

Skeniranje vrha  $v_2$ :

- postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L}) \implies L = L \cup L(x) = \{x, v_2, v_1\}$
- postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L) \implies L = \{x, v_2, v_1, v_3\}$
- $y \notin L \implies S = \{x, v_2\}$
- $L \setminus S \neq \emptyset \implies L(v_2) = \{v_1, v_3\}$

$$l(v_1) = \iota(P_{v_1}) = \min\{l(v_2), c(v_2, v_1) - f(v_2, v_1)\} = \min\{1, 2\} = 1.$$

$$l(v_3) = \iota(P_{v_3}) = \min\{l(v_2), c(v_3, v_2) - f(v_3, v_2)\} = \min\{1, 3\} = 1.$$

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrhovi  $v_1, v_3$ .

Skeniranje vrha  $v_1$ :

Ne postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L})$  i ne postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L)$ .

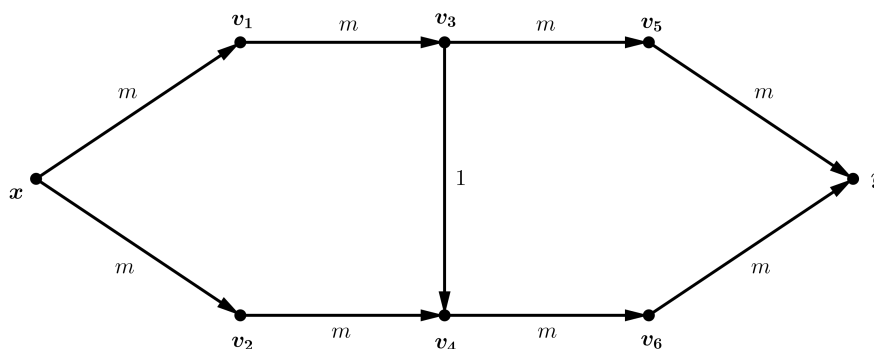
Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Da, vrh  $v_3$ .

Skeniranje vrha  $v_3$ :

Ne postoji  $f$ -nezasićen usmjereni brid u  $(L, \bar{L})$  i ne postoji  $f$ -pozitivan usmjereni brid u  $(\bar{L}, L)$ .

Postoji li vrh u skupu  $L \setminus S$ ? Ne.  $\implies$  STOP.

Dakle, posljednji tok u nizu je maksimalan tok dane mreže (Slika 2.17).



Slika 2.18: Mreža  $N$  i tok  $f$

Opisan algoritam metode označavanja nije dobar algoritam. Pogledajmo mrežu  $N$  na Slici 2.18. Vrijednost maksimalnog toka te mreže je  $2m$ . Ukoliko algoritam alternira između odabira  $x - v_1 - v_3 - v_4 - v_6 - y$  i  $x - v_2 - v_4 - v_3 - v_5 - y$  kao rastućih puteva i ako počinje s nul-tokom, trebat će  $2m + 1$  iteraciju kako bi došao do maksimalnog toka mreže. Odabirom jednog od navedenih puteva kao  $f$ -rastućeg puta, revidirani tok se, u odnosu na prethodni tok, svakom iteracijom povećava za točno 1. Budući da je  $m$  proizvoljan i ne ovisi o broju vrhova i usmjerenih bridova mreže, to algoritam metode označavanja čini sporim algoritmom. Malom preinakom procesa označavanja algoritam metode označavanja postaje dobar algoritam, tj. postaje brži. Ako u procesu označavanja skeniramo prema *prvi-označen prvi-skeniran* (eng. *first-labelled first-scanned*) načelu, uočit ćemo znatno poboljšanje algoritma. Dakle, vrhove koji su prvi označeni, prve i skeniramo. Takav način skeniranja osigurava odabir najkraćeg  $f$ -rastućeg puta u svakom koraku procesa označavanja. Primjenjujući algoritam

metode označavanja na mrežu  $N$  sa Slike 2.18 te koristeći *prvi-označen prvi-skeniran* načelo, do maksimalnog toka doći ćemo nakon dvije iteracije. *Prvi-označen prvi-skeniran* načelo smo; u ovom radu koristili i pri određivanju maksimalnog toka u prethodnim primjerima. U svakom koraku procesa označavanja smo prije skenirali vrhove koji su prije i označeni.



## Poglavlje 3

# Analiza mreža javnog prijevoza

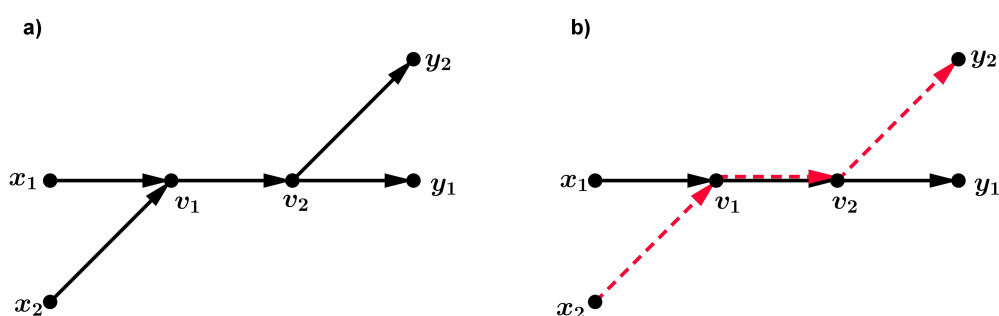
U procesu planiranja javnog prijevoza velik naglasak stavlja se na kreiranje mreža javnog prijevoza koje karakterizira visok stupanj povezanosti njegovih komponenti. Povezanost njegovih komponenti očituje se kao visok stupanj povezanosti različitih trasa, odnosno mogućnost prelaska putnika s jedne trase na drugu na što većem broju stanica. Mreža javnog prijevoza, koja je dizajnirana na taj način, ima velik broj stanica koje su bitno čvorište, što stvara više potencijalno ranjivih točaka mreže. Naime, nedostupnost jedne takve stanice može rezultirati privremenom nepovezanosću dijelova mreže i/ili smanjenjem efikasnosti mreže.

U ovom poglavlju opisat ćemo kako mreže javnog prijevoza možemo reprezentirati grafom, neke mjere mreža koje govore o njihovim svojstvima te dva pristupa u analizi ranjivosti mreža.

### 3.1 Reprezentacija mreže javnog prijevoza grafom i mjere mreže

Glavni elementi mreže javnog prijevoza mogu biti reprezentirani grafom, odnosno mrežom. Ideja reprezentiranja mreže javnog prijevoza grafom je intuitivna, stanice su reprezentirane vrhovima grafa, a veze koje postoje među njima su reprezentirane bridovima grafa. Na taj način su dane potpune informacije o mreži s  $n$  stanica i  $m$  trasa pomoću skupa uređenih lista. Svakoj trasi mreže javnog prijevoza (ili jednom smjeru trase) odgovara jedna lista tog skupa. U takvoj listi moguće je više ulaza u jednu stanicu jer je moguće da je ta stanica dio više trasa. Jednostavan graf koji reprezentira takvu situaciju dan je na Slici 3.1 pod a). Svaki vrh tog grafa odgovara jednoj stanici mreže, a poveznica među dvama vrhovima označava da postoji barem jedna trasa koja povezuje ta dva vrha. Dva vrha koja su incidentna (susjedna) su

povezani točno jednim bridom iako je moguće da su odgovarajuće stanice povezane s više trasa. Prostor takvih tipova grafa se naziva  $L$  – prostor. Ako dopustimo da dva incidentna vrha povezuje više bridova, ovisno o broju trasa koje povezuju dvije odgovarajuće stanice, tada dobivamo graf prikazan na Slici 3.1 pod b). Na grafu su prikazane dvije trase mreže koje su označene različitim bojama. Stanice kojima odgovaraju vrhovi grafa  $v_1$  i  $v_2$  povezuju dvije trase pa su stoga i ta dva vrha povezana dvama bridovima. Prostor takvih tipova grafa naziva se  $L'$  – prostor te ćemo taj prostor koristiti u ovom poglavlju.



Slika 3.1: Prikaz dviju trasa mreže javnog prijevoza: a)  $L$ -prostor, b)  $L'$ -prostor

Mjere mreže predstavljaju važne karakteristike mreže javnog prijevoza. *Središnji stupanj mreže* (eng. the degree centrality) ukazuje na važnost određene stanice, tj. pokazuje u kolikoj je mjeri određena stanica povezana s drugim stanicama i/ili linijama. Središnji stupanj odnosi se na stupanj vrha pripadajućeg grafa mreže. Definiramo ga kao  $D_c(v) = d_G(v), v \in V(G)$ . Promatranje središnjeg stupnja je temeljeno na ideji da važni vrhovi grafa imaju veći broj poveznica, odnosno većeg su stupnja.

*Središnji stupanj povezivanja* (eng. the betweenness centrality) interpretiramo kao mjeru količine putnika koji prolaze nekom stanicom. Središnji stupanj povezivanja pokazuje koliko puta se određeni vrh mreže ponaša kao most duž najkraćeg puta između neka dva druga vrha. Definiramo ga kao:

$$B_c(v) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{v \neq u \neq z} \frac{\sigma_{uz}(v)}{\sigma_{uz}},$$

pri čemu je  $\sigma_{uz}$  broj najkraćih puteva od vrha  $u$  do vrha  $z$ , a broj  $\sigma_{uz}(v)$  je broj takvih puteva koji prolaze kroz  $v$ .

Pretpostavljamo da putnik uvijek bira najkraći mogući put od mjesta polaska do odredišta. Uočimo da visok središnji stupanj povezivanja, tj. velik broj putnika koji

prolazi tom stanicom, ne znači uvijek visok stupanj međupovezanosti te stanice (odnosno visok središnji stupanj). Moguće je da se promatrana stanica nalazi na mostu koji povezuje dva dijela grada te je zbog tog količina putnika koji prolaze tom stanicom velika.

Mjeru *relativne veličine najveće komponente povezanosti* grafa označavamo sa  $S$  te imamo  $S = \frac{N_1}{N}$ , pri čemu je  $N_1$  broj vrhova najveće povezane komponente, a  $N$  je broj vrhova grafa pripadne mreže. Očito,  $S = 1$  znači da je graf povezan te je  $S = \frac{1}{N}$  ukoliko promatrani graf nema nijedan brid.

*Efikasnost mreže*, u oznaci  $E$ , definiramo kao

$$E = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{v_i, v_j \in V \\ v_i \neq v_j}} \frac{1}{d(v_i, v_j)},$$

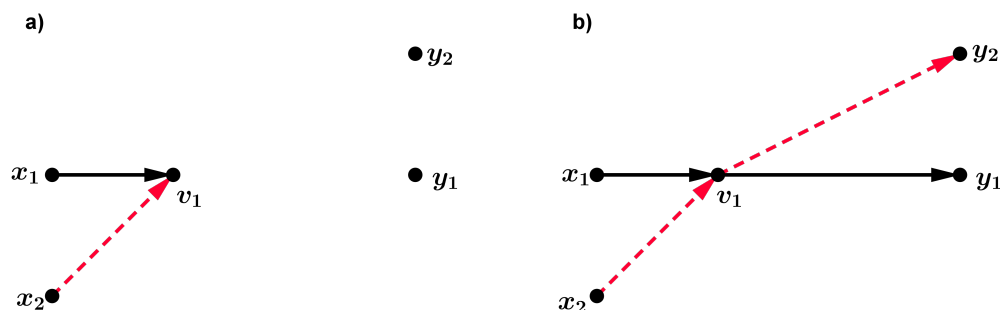
pri čemu  $d(v_i, v_j)$  predstavlja udaljenost vrhova  $v_i$  i  $v_j$ . Normalizacija  $\frac{1}{n(n-1)}$  osigurava da je  $E \leq 1$ . Mala vrijednost veličine  $E$  znači da je prosječna duljina puta između dviju stanica velika, tj. između njih se nalazi velik broj međustanica.

## 3.2 Prekidi u mrežama javnog prijevoza

Prekidi u mrežama javnog prijevoza se događaju iz različitih razloga (nesreće, radovi na infrastrukturi, napadi...) te mogu imati različit utjecaj na kvalitetu usluge javnog prijevoza. U ovom odjeljku, preko modifikacije grafa mreže javnog prijevoza, iznijet ćemo dva pristupa jednom takvom događaju: nedostupnosti stanice.

Klasična simulacija nedostupnosti stanice na grafu mreže javnog prijevoza je uklanjanje vrha grafa koji odgovara stanici koja je nedostupna te uklanjanje svih bridova grafa kojima je nedostupna stanica početak ili kraj. Neka je graf  $G$  pripadajući graf neke mreže javnog prijevoza. Označimo sa  $V$  skup vrhova grafa  $G$  te sa  $B$  skup bridova grafa  $G$ . Neka je  $v_k \in V$  vrh koji odgovara nedostupnoj stanici. Nakon uklanjanja vrha  $v_k$  iz grafa  $G$ , dobivamo rezultirajući graf  $G'$ . Skup vrhova grafa  $G'$  je  $V' = V \setminus \{v_k\}$ , a skup bridova grafa  $G'$  je  $B' = B \setminus \hat{B}$ , pri čemu je  $\hat{B} = \{(v_i, v_j) : v_i = v_k \text{ ili } v_j = v_k\}$ . Na Slici 3.2 pod a) prikazan je graf mreže sa Slike 3.1 nakon nedostupnosti stanice  $v_2$ .

Drugi način simulacije nedostupnosti stanice na grafu mreže javnog prijevoza je uklanjanje vrha grafa koji odgovara nedostupnoj stanici, zatim uklanjanje svih bridova grafa čiji je početak ili kraj vrh koji odgovara nedostupnoj stanici te dodavanje bridova koji povezuju odgovarajuće stanice koje prethode nedostupnoj stanici sa stanicama koja slijede nakon nje. Bridove dodajemo kako se trasa ne bi u potpunosti prekinula i pod pretpostavkom da putnik nedostupnu stanicu može zaobići. Na primjer, radovi na stanici podzemene željeznice onemogućuju izlazak i ulazak putnika, ali



Slika 3.2: Dva načina simulacije nedostupnosti stanice

željeznica može nesmetano proći tom stanicom, tj. pruga nije oštećena. Primjenimo opisani postupak na graf  $G$ . Rezultirajući graf nakon prethodno opisanog postupka je graf  $G''$ , čiji je skup vrhova  $V'' = V \setminus \{v_k\}$ , a skup bridova je  $B'' = (B \setminus \dot{B}) \cup \ddot{B}$ , pri čemu je  $\dot{B} = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, (v_i, v_k) \in B \text{ i } (v_k, v_j) \in B\}$ . Na Slici 3.2 pod b) prikazan je graf mreže sa Slike 3.1 nakon nedostupnosti stanice  $v_2$ .

Prvi pristup se smatra klasičnim pristupom analizi nedostupnosti stanice te se naziva i statičan pristup, a drugi opisani pristup se naziva postupna propast mreže (eng. cascading failure) te se smatra dinamičnim pristupom.

U kontekstu javnog prijevoza, postupna propast mreže javnog prijevoza predstavlja domino-efekt nedostupnosti sve više stanica. Zatvaranje jedne stanice dovodi do redistribucije putnika koji su tom stanicom trebali proći, na druge stanice. To dovodi do povećanja broja putnika nekim stanicama mreže. Ukoliko novi broj putnika premašuje kapacitet određene stanice, ta stanica također postaje nedostupna. Time se broj nedostupnih stanica povećao te se ponovno događa redistribucija putnika među dostupnim stanicama. Broj putnika nekih od tih stanica, ponovno, premašuje kapacitete tih stanica što dovodi do nedostupnosti još većeg broja stanica. Na taj način se lančano povećava broj nedostupnih stanica što na kraju rezultira podjelom mreže na nekoliko nepovezanih komponenti. U sljedećim odjeljcima opisati ćemo dva takva scenarija.

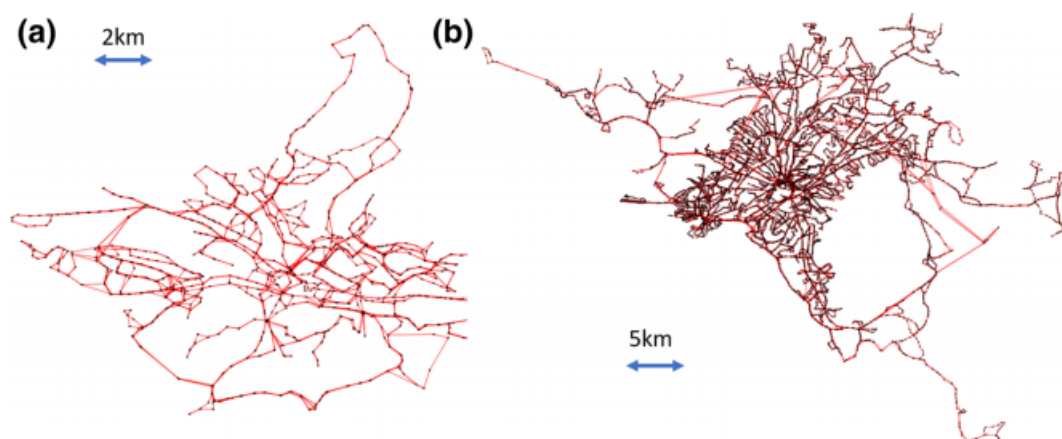
### 3.3 Analiza primjera

U ovom odjeljku opisat ćemo dvije mreže javnog prijevoza koje će biti analizirane. Mreže ćemo reprezentirati usmjerenim multigrafovima zato što dvije stanice javnog prijevoza može povezivati više trasa.

Prva promatrana mreža je mreža javnog prijevoza Firence. Firenca je jedan od većih

gradova središnje Italije. Ima oko 400000 stanovnika i površinu od oko 100km<sup>2</sup>. Djelatnost javnog prijevoza obavlja samo jedan operater, a mreža javnog prijevoza se sastoji od 50 autobusnih linija (trasa) s ukupno 999 stanica. Na Slici 3.3 <sup>1</sup> pod a) prikazan je graf koji odgovara mreži javnog prijevoza Firence. Graf se sastoji od 999 vrhova i 3226 bridova. Na slici nisu naznačeni multi-bridovi kako bi se sačuvala vidljivost.

Druga promatrana mreža je mreža javnog prijevoza regije Atika u Grčkoj. Regija Atika je površine od 3808km<sup>2</sup> te ima oko 3750000 stanovnika, od kojih 95% živi u Ateni i njezinoj užoj okolini. Javni prijevoz Atike uključuje autobus, tramvaj i podzemnu željeznicu. Sastoji se od ukupno 277 linija (trasa) i 7681 stanice. Na Slici 3.3 <sup>2</sup> pod b) prikazan je graf koji predstavlja mrežu javnog prijevoza Atike. Graf se sastoji od 7681 stanice i 18128 bridova. Na slici nisu naznačeni multi-bridovi kako bi se sačuvala vidljivost.



Slika 3.3: Graf mreže javnog prijevoza Firence pod a) i graf mreže javnog prijevoza Atike pod b)

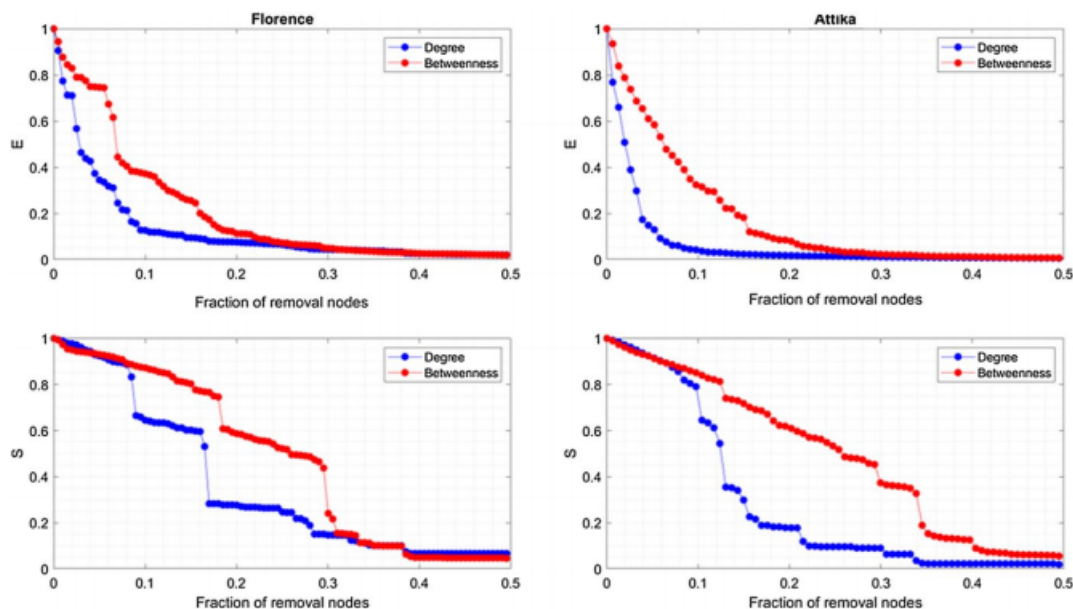
### 3.3.1 Simulacija ciljanog napada na mrežu u statičnom kontekstu

Da bismo simulirali mogući ciljani napad u statičkom kontekstu, simuliramo nedostupnost određenog broja stanica na način koji je ranije opisan. Nedostupne stanice

<sup>1</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 39.

<sup>2</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 39.

su birane na dva načina: stanice s najvećim središnjim stupnjem i stanice s najvećim središnjim stupnjem povezivanja. U analizi ćemo promatrati promjene veličina  $S$  i  $E$ . Na Slici 3.4<sup>3</sup> prikazane su promjene vrijednosti veličina  $S$  i  $E$ , koje su definirane



Slika 3.4: Promjene veličina  $S$  i  $E$  nakon ciljanih napada na mreže javnog prijevoza Firenze (eng. Florence) i Atike (eng. Attika)

na početku poglavlja, za mreže javnog prijevoza koje su dane kao funkcije u ovisnosti o postotku nedostupnih vrhova mreže. Plava krivulja predstavlja napad temeljen na središnjem stupnju, a crvena krivulja predstavlja napad temeljen na središnjem stupnju povezivanja. Prikazani su rezultati za najviše 50% nedostupnih vrhova mreže. Značajnije smanjenje broja bridova (veličina  $E$ ) vidljivo je u slučaju napada temeljenog na središnjem stupnju, što znači da ciljani napad značajno smanjuje efikasnost mreže ukoliko su uklonjeni vrhovi što većeg stupnja. Uočimo: smanjenje od  $E$  teži eksponencijalnom smanjenju kod obje mreže i napada te se broj bridova (vrijednost od  $E$ ) brže smanjuje na grafu Atike nego na grafu Firenze.

Smanjenje od  $S$  se odvija drugačije. Možemo reći da je smanjenje od  $S$  približno linearno. Za oba napada smanjenje je slično do određenog postotka nedostupnih vrhova (0.08 za obje mreže). Stoga zaključujemo da napad temeljen na središnjem stupnju predstavlja značajniju prijetnju u odnosu na drugi napad.

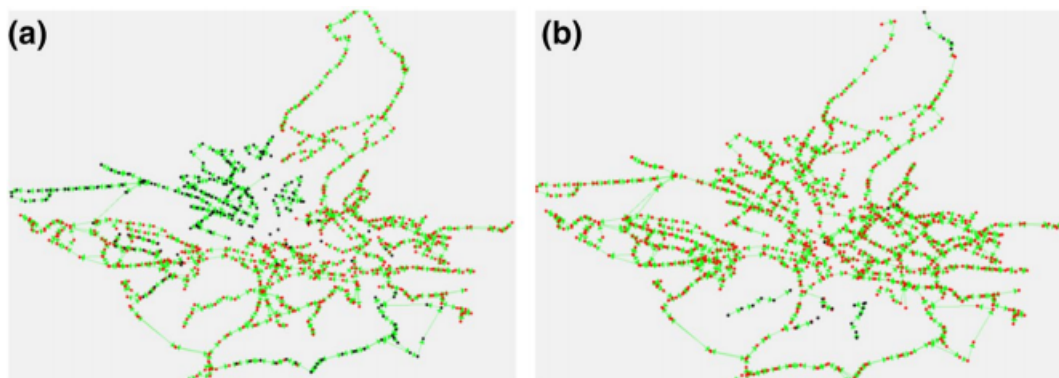
Na Slikama 3.5 i 3.6<sup>4</sup> prikazani su grafovi mreža javnog prijevoza Firenze i Atike

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 42.

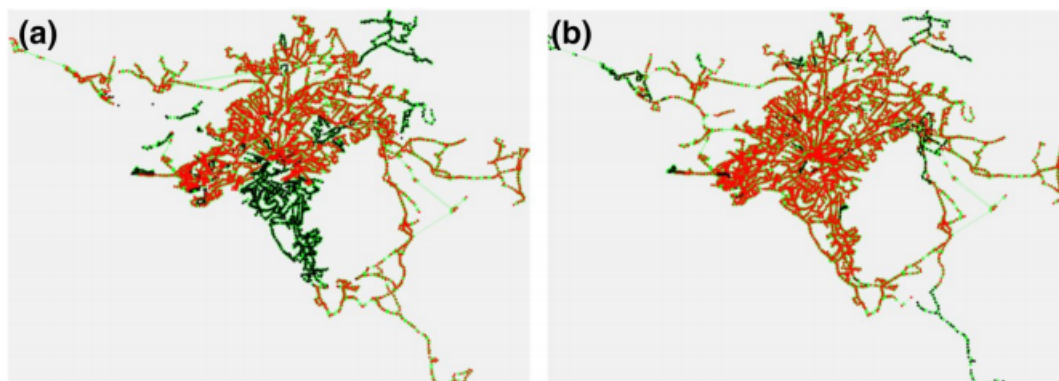
<sup>4</sup>Slike 3.5 i 3.6 su preuzete iz [3], stranica 43.

nakon ciljanih napada kojima je nedostupno postalo 10% vrhova (stanica). Crveno su označeni vrhovi koji pripadaju najvećim povezanim komponentama.

Dakle, obje mreže su ranjivije na napad temeljen na centralnom stupnju nego na na-



Slika 3.5: Mreža javnog prijevoza Firence nakon ciljanog napada temeljenog na a) središnjem stupnju, b) središnjem stupnju povezanosti

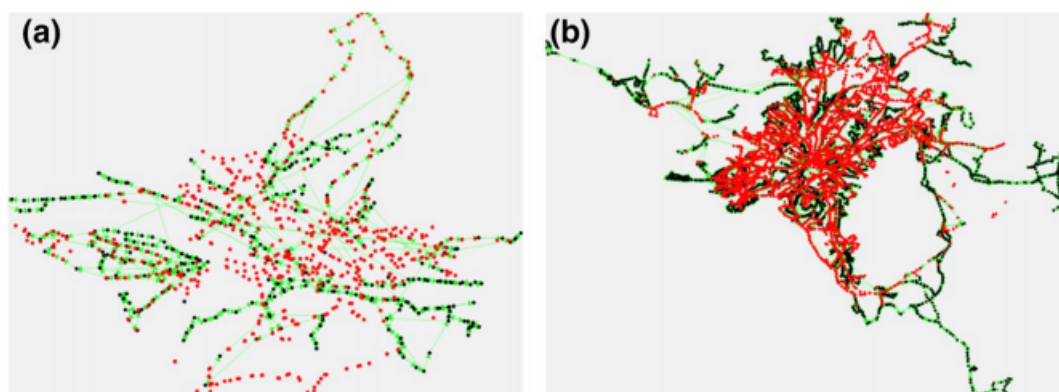


Slika 3.6: Mreža javnog prijevoza Atike nakon ciljanog napada temeljenog na a) središnjem stupnju, b) središnjem stupnju povezanosti

pad temeljen na središnjem stupnju povezanosti. Nedostupnost malog dijela stanica (10%) može rezultirati značajnim smanjenjem efikasnosti mreže. Možemo zaključiti da su obje mreže poprilično otporne na obje vrste napada jer se njihova povezanost ( $S$ ) nije značajno promijenila u odnosu na povezanost mreža prije napada. Nadalje, kada je dovoljno velik broj stanica s visokim centralnim stupnjem, u mrežama nastaje više velikih komponenti povezanosti.

### 3.3.2 Simulacija postupnog propasta mreže

Kako bismo simulirali moguću postupnu propast mreže, simulirat ćemo nedostupnost stanice s najvećim središnjim stupnjem povezanosti. Vrh ćemo ukloniti iz grafa koristeći ranije opisan dinamički pristup. Nakon uklanjanja prvog vrha iz grafa, ponovno se računa središnji stupanj povezanosti svih preostalih vrhova. Na temelju izračunatih vrijednosti uklanjaju se drugi vrhovi grafa. Uklanjammo vrhove čiji je kapacitet niži od trenutnog opterećenja tog vrha. Nakon uklanjanja novih vrhova iz grafa, proces se nastavlja sve dok više ne bude vrhova koji se mogu ukloniti. Slika 3.7



Slika 3.7: Grafovi mreža javnog prijevoza nakon simulacije postupnog propasta mreže javnog prijevoza a) Firence, b) Atike

<sup>5</sup> prikazuje dva pripadna grafa mreža nakon postupnog propasta mreže. Vrhovi koji su uklonjeni iz grafa su crvene boje. U Firenci, većina uklonjenih vrhova nalazi se u središnjem dijelu, u blizini vrha kojim smo započeli postupak. Za razliku od Firence, u Atiki se vrh kojim smo započeli postupak nalazi u rubnom dijelu grafa (onom dijelu grafa koji odgovara perifernom dijelu regije). Unatoč tomu, najveći broj uklonjenih vrhova je u centru regije, što odgovara gradu Ateni.

Na Slici 3.8 <sup>6</sup> prikazane su vrijednosti  $E$  i  $S$  izračunate tijekom postupnog propasta mreže. Crvena krivulja prikazuje vrijednosti mreže javnog prijevoza Firence, a crna krivulja prikazuje vrijednosti za Atiku.

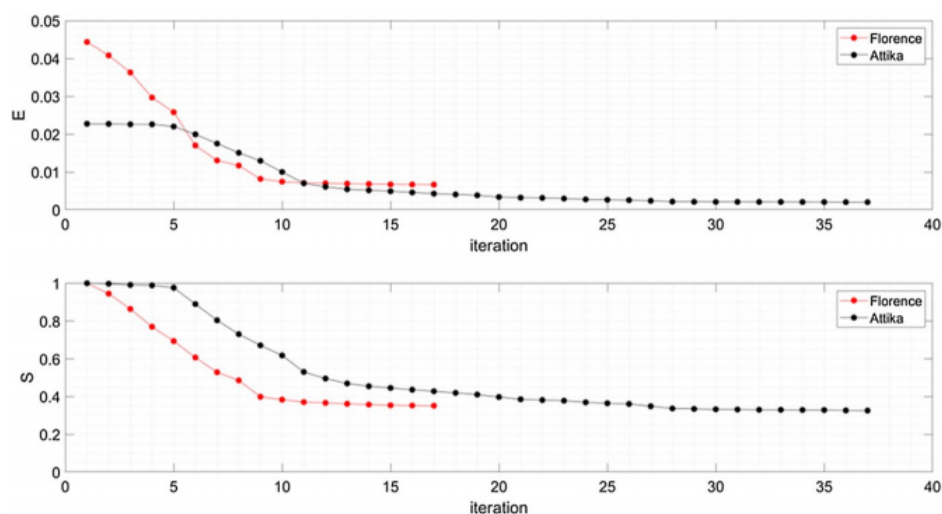
U mreži javnog prijevoza Firence uočavamo smanjenje vrijednosti  $S$  sa 1 na 0.35 i smanjenje vrijednosti  $E$  sa 0.044 na 0.007. Duljina postupnog propasta mreže je 17 iteracija. Uočimo da se vrijednosti  $S$  i  $E$  smanjuju brže od prve do desete iteracije u odnosu na smanjivanje od desete do zadnje iteracije. Na Slici 3.9 <sup>7</sup> prikazani su

<sup>5</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 44.

<sup>6</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 45.

<sup>7</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 45.

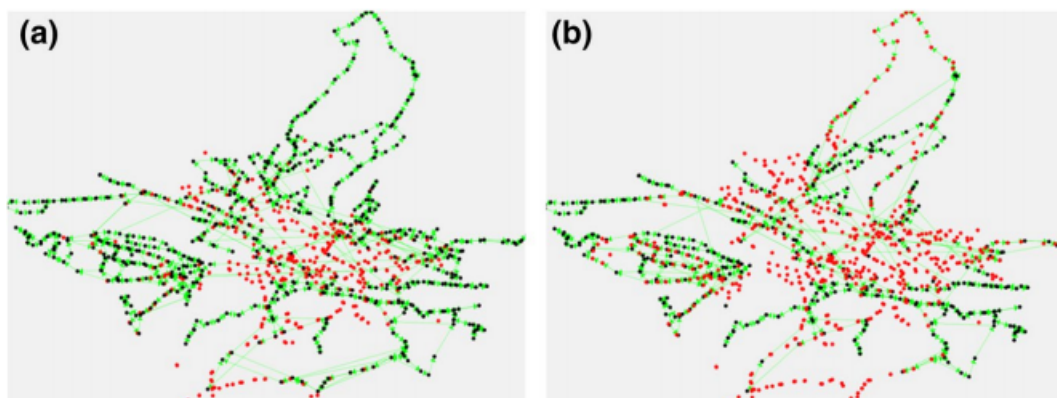




Slika 3.8: Vrijednosti veličina  $E$  i  $S$  tijekom postupnog propasta mreže

grafovi koji odgovaraju mreži javnog prijevoza Firence nakon pete i desete iteracije postupne propasti mreže. Nedostupni vrhovi su označeni crvenom bojom.

U mreži javnog prijevoza Atike uočavamo smanjenje vrijednosti  $S$  sa 1 na 0.32 i

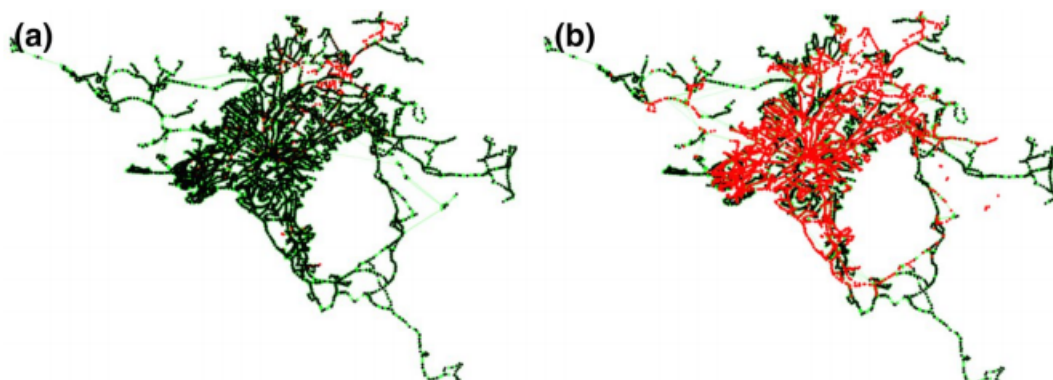


Slika 3.9: a) Graf mreže javnog prijevoza Firence nakon pete iteracije postupne propasti mreže; b) Graf mreže javnog prijevoza Firence nakon desete iteracije postupne propasti mreže

smanjenje vrijednosti  $E$  sa 0.023 na 0.002. Duljina postupnog propasta mreže je 37 iteracija. Uočimo da se vrijednosti veličina  $S$  i  $E$  ne smanjuju značajno od prve do četvrte iteracije, zatim od pete do jedanaeste iteracije slijedi pojačano smanjenje te od dvanaeste do zadnje iteracije slijedi ponovno malo smanjenje. Takav scenarij

možemo objasniti time što se prva nedostupna stanica nalazi u rubnom području regije što se u početku odrazilo samo na obližnje stanice mreže, a tek kasnije i na središnji dio mreže. Na Slici 3.10<sup>8</sup> prikazani su grafovi koji odgovaraju mreži javnog prijevoza Atike nakon pete i desete iteracije postupne propasti mreže. Također, nedostupni vrhovi označeni su crvenom bojom.

Iako se, u početku, mreža javnog prijevoza Atike čini otpornija postupnoj propasti



Slika 3.10: a) Graf mreže javnog prijevoza Atike nakon pete iteracije postupne propasti mreže; b) Graf mreže javnog prijevoza Atike nakon desete iteracije postupne propasti mreže

nego mreža Firence, na kraju su vrijednosti  $S$  i  $E$  mreže Atike niže nego vrijednosti mreže Firence. Sporije smanjenje vrijednosti  $S$  i  $E$  u mreži Atike se u početku događa zbog lokacije stanice koju prvu uklanjamo iz mreže.

### 3.3.3 Zaključak

Rezultati analiza mreža javnog prijevoza, posebno ranjivosti mreža, ukazuju na *slabe* dijelove mreže. Možemo ih iskoristiti u razne svrhe, npr. kao pokazatelj na kojim dijelovima mreže treba poraditi kako bi se povećala efikasnost mreže u izvanrednim situacijama; kao pokazatelj potencijalnih meta raznih napada itd. Pri planiranju i dizajniranju mreža javnog prijevoza, analize ranjivosti nisu značajno zastupljene. Naglasak je najčešće na kreiranju mreža koje će imati visok stupanj povezanosti.

---

<sup>8</sup>Slika je preuzeta iz [3], stranica 46.

# Bibliografija

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1976.
- [2] I. Nakić, Diskretna matematika, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf> (studeni 2019.)
- [3] F. Archetti, A. Candelieri, B. G. Galuzzi, I. Giordani, Vulnerability of public transportation networks against directed attacks and cascading failures, Public Transport, Springer, Berlin, Heidelberg, 2019., 28-48
- [4] F. M. Brückler, Nastanak topologije, teorije skupova i matematičke logike, dostupno na <http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat13-2017.pdf> (studeni 2019.)

# Sažetak

U ovom radu iznesene su osnovne definicije i rezultati vezani za mreže. Glavni dio teorije o mrežama je Teorem o maksimalnom toku i minimalnom rezu te Algoritam metode označavanja. Algoritmom metode označavanja konstruiramo niz tokova dane mreže rastuće vrijednosti, a izneseni teorijski rezultati osiguravaju da je posljednji tok u nizu maksimalan tok dane mreže. Teoremom o maksimalnom toku i minimalnom rezu dana je veza vrijednosti maksimalnog toka i kapaciteta minimalnog reza mreže. Preciznije, dokazano je da su te dvije veličine jednake. Zahvaljujući tom rezultatu, nakon primjene algoritma metode označavanja i određivanja maksimalnog toka mreže, lako se odredi i kapacitet minimalnog reza mreže.

U drugom dijelu rada iznose se rezultati analize mreža javnog prijevoza Firenze i Atike. Na primjeru tih mreža opisane su dvije vrste simulacije ciljanog napada na mreže javnog prijevoza: simulacija u statičnom i dinamičnom kontekstu. Takve simulacije omogućuju proučavanje ranjivosti mreže te, eventualno, pronalazak njezinih slabih točaka.

# Summary

In this paper we presented the main definitions and results related to networks. The most important results related to network theory, in this paper, are the max-flow min-cut theorem and the labelling method algorithm. By the labelling method algorithm, the sequence of flows of increasing value is constructed and network theory ensures that algorithm terminates with the max-flow of a network. In the max-flow min-cut theorem, we can see relation between max-flow value and min-cut capacity of a network. To be more specific, it is proven that those two values are equal. This results ensure that if we apply the labelling method algorithm and find max-flow of a network, we can determine capacity of a min-cut.

In the second part of this paper, the results of public transportation network analyses are shown. The analysis are based on two public transportation networks (PTNs), PTN of Florence and PTN of Attika region. In those analyses, two approaches in simulations of targeted attacks on PTNs are described: simulation in static context and simulation in dynamic context. Those simulations give us possibility to study vulnerability of PTNs and, eventually, determination of its weaknesses.

# Životopis

Marija Mihaljević rođena je 21. veljače 1995. godine u Sinju. Pohađala je Osnovnu školu fra Pavla Vučkovića u Sinju. 2009. godine upisuje Opću gimnaziju Dinka Šimunovića u Sinju koju završava 2013. Iste godine upisuje preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2017. godine upisuje diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na istom odsjeku. Tijekom studiranja je obavljala više studentskih poslova, a prije šest mjeseci je počela raditi za firmu Asseco SEE na poziciji Support Specialist.