Primjene matrica u ravninskoj geometriji

Pleše, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Pleše

PRIMJENE MATRICA U RAVNINSKOJ GEOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Rajna Rajić

Zagreb, studeni, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliko hvala mentorici prof. dr. sc. Rajni Rajić, na neizmjernom trudu uloženom u pripremu i pisanje ovog rada. Vaša profesionalnost, sugestije i strpljenje, omogućili su mi produbljivanje znanja, a Vaša toplina, opuštenost i kreativnost. Našu suradnju ću pamtiti kao jedno od najljepših iskustava tijekom studija.

Zahvaljujem i svojim roditeljima Josipu i Ivanki te sestri Mariji i bratu Domagoju, kojima nikada neću moći dovoljno zahvaliti na beskrajnoj podršci i razumijevanju tijekom studija. Bez vas ne bi završila ovaj fakultet i radila posao kojeg zaista volim.

Zahvaljujem svim svojim kolegama i prijateljima, koji su sa mnom odrastali, dijelili sa mnom radost i bol, a uvijek bili izvor samo moje sreće.

Ovaj rad posvećujem Luki Boloniću, prijatelju koji je obogatio moj život više od ikoga. Luka, hvala ti na idejama i znatiželji, na glazbi i riječima te igri i knjigama. Hvala ti na svakom zajedničkom sjećanju.

Sadržaj

Uvod

Jednu od najznačajnijih klasa funkcija u kontekstu linearne algebre, čine linearne transformacije. Linearne transformacije možemo zadati matricama, a takav način zadavanja koristan je u različitim znanstvenim disciplinama, posebno matematici, fizici i računarstvu. Matrice se, u ovisnosti o vektorskom prostoru nad kojim transformacija djeluje, javljaju u različitim dimenzijama. Stoga linearnoj transformaciji u ravnini odgovara matrica reda dva.

U prvom i drugom poglavlju, osim nekih osnovnih svojstava linearnih transformacija, određujemo matrice poznatih specijalnih transformacija ravnine, kao što su centralna i osna simetrija ravnine, rotacija i homotetija ravnine te ortogonalna projekcija na osi apscisa i ordinata. U trećem poglavlju rada određujemo matrice svih projekcija i zrcaljenja ravnine, klasa linearnih transformacija određenih svojstvima idempotentnosti i involucije. Uz to, pokazujemo vezu između projekcija i zrcaljenja ravnine te određujemo nužne uvjete ortogonalnosti projekcije. U posljednjem dijelu rada određujemo matrice izometrije ravnine.

Rezultati u poglavljima popraćeni su primjerima i vizualnom interpretacijom. Prezentirana je ideja kako zamišljati transformacije općenito, njihova svojstva te specijalne linearne transformacije.

Iako je primjena matričnog prikaza linearnih transformacija veća od one demonstrirane radom, zainteresiranom čitatelju on može poslužiti kao dobar početak u daljnjem istraživanju.

Poglavlje 1

Linearne transformacije

1.1 Uvođenje linearne transformacije

Zamislite da u brodu "BS-73 Faust Vrančić", kao zaposlenik Obalne straže Republike Hrvatske, plovite Jadranskim morem, s ciljem nadzora i zaštite prava Republike Hrvatske na moru. Jedna od temeljnih zadaća koju provodite je suzbijanje piratstva i drugih oblika nemiroljubive uporabe otvorenog mora. Kako bi održali komunikaciju s vojnom pomorskom bazom Lora u Splitu, periodično odašiljete koordinate trenutne lokacije na kojoj se nalazite. Budući da je u interesu piratskog broda saznati lokaciju straže, u dogovoru s bazom, odašiljete kriptirane podatke. Za transformaciju stvarne pozicije broda $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, gdje x_1 označava sjevernu zemljopisnu širinu, a x_2 istočnu zemljopisnu dužinu, u kriptirane koordinate $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, koristite idući sustav:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 5x_1 + 3x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 + x_2 & = & y_2 \end{array} \right. . \tag{1.1}$$

Primjer 1.1.1. *Zemljopisne koordinate vašeg broda iznose 44° sjeverne zemljopisne širine i 14° istočne zemljopisne dužine, pa poziciju broda zapisujemo kao* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 14 \end{pmatrix}$. *Kriptirana lokacija tada je oblika*

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 44 + 3 \cdot 14 \\ 2 \cdot 44 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 262 \\ 102 \end{pmatrix}.$$

Općenito, vezu stvarnih i kriptiranih koodrinata broda, možemo zapisati na idući način.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Slika 1: obalna straža

Imenujemo li matricu $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$*, prethodnu jednadžbu zapisujemo kao*

$$\vec{y} = A\vec{x}. \tag{1.2}$$

Transformaciju (1.2) vektora $\vec{x}$ u vektor $\vec{y}$, nazivamo **linearnom transformacijom**, a odgovarajuću matricu A **matricom linearne transformacije**.

Uočimo da smo postupkom iz primjera 1.1.1 iz sustava linearnih jednadžbi (1.1), pomoću Kartezijevog koordinatnog sustava i matrica, opisali pojam linearne transformacije. Iako ćemo se definiranjem i interpretacijom linearne transformacije detaljnije baviti u nastavku, istaknimo **osnovne ideje** koje se kriju u postupku kriptiranja koordinata pozicije broda iz uvodnog primjera.

- Poziciju broda opisujemo uspostavljanjem Kartezijevog koordinatnog sustava $O(x, y)$ i dodjeljivanjem koordinata poziciji broda $T(x_1, x_2)$.
- Točku $T(x_1, x_2)$ poistovjećujemo s radij-vektorom $\vec{x} = \vec{OT} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
- Linearnu tranformaciju opisujemo matricom A.
- Pomoću matrice A preslikamo vektor $\vec{x}$ u vektor $\vec{y}$.
- Linearna transformacija preslikava elemente iz $\mathbb{R}^2$ u elemente iz $\mathbb{R}^2$, gdje središte Kartezijevog koordinatnog sustava ostaje fiksno.

Budući da smo u primjeru 1.1.1 odredili kriptirane koordinate broda, nameće se pitanje kako provesti obrnuti postupak, tj. iz kriptiranih koordinata broda odrediti stvarne. Matematički se pitamo: *Kako iz vektora $\vec{y}$ odrediti vektor $\vec{x}$ koji se u njega preslikao zadanom linearnom transformacijom?* Za postupak određivanja traženog vektora, promotrimo primjer 1.1.2.

Primjer 1.1.2. *Nalazite se u pomorskoj bazi Lora u Splitu i u sustavu obrađujete podatke pristigle s broda "BS-73 Faust Vrančić". Jedan od podataka kojima raspolažete su kriptirane koordinate broda. Vaš je zadatak, s ciljem slanja pomorske prognoze specifične za lokaciju broda, odrediti njegove prave koordinate. Kriptirane koordinate broda kojima raspolažete iznose* $\begin{pmatrix}264\\102\end{pmatrix}$. *Gdje se, prema vašim podatcima, nalazi brod?*

Rješenje. Označimo s $\vec{y} = \begin{pmatrix}264\\102\end{pmatrix}$. *Za određivanje koordinata broda, rješavamo jednadžbu*

$$A\vec{x} = \vec{y},$$

tj. sustav

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 &= 264 \\ 2x_1 + x_2 &= 102 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Neprestano kretanje broda uvjetuje opetovano rješavanje sustava nalik na (1.3)*, pa se javlja potreba za bržim načinom dekodiranja njegovih koordinata. Upoznati s matričnim zapisom sustava i idejom linearne transformacije, pitamo se postoji li inverzna transformacija, koja će dekriptirati pristiglu poziciju broda. Matematički, želimo pronaći transformaciju koja će dekodirati vektor $\vec{y}$ u vektor $\vec{x}$. Kao u primjeru 1.1.1, zapišemo sustav*

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 &= y_1 \\ 2x_1 + x_2 &= y_2 \end{cases}, \tag{1.4}$$

zatim izrazimo nepoznanice x_1 i x_2, a prethodni sustav (1.4) *zapišemo kao*

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_2 &= x_1 \\ 2y_1 - 5y_2 &= x_2 \end{cases}. \tag{1.5}$$

Jednadžbe možemo zapisati kao linearnu transformaciju

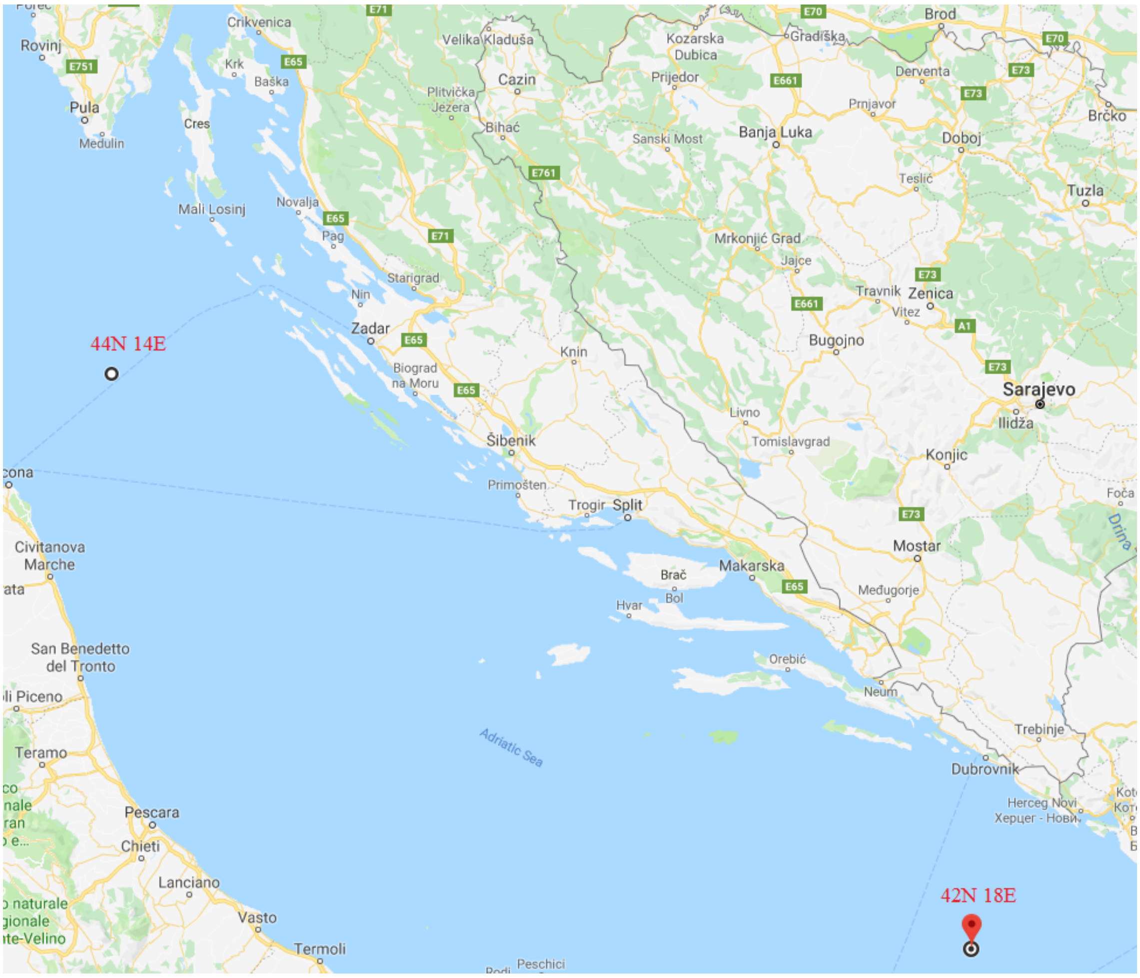
$$B\vec{y} = \vec{x}, \tag{1.6}$$

gdje je $B = \begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & -5\end{pmatrix}$.

Sada lako odredimo tražene koordinate. Nad vektorom $\vec{y} = \begin{pmatrix}264\\102\end{pmatrix}$ *izvršimo transformaciju* (1.6) *i dobivamo*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 264 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 264 + 3 \cdot 102 \\ 2 \cdot 264 - 5 \cdot 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Koordinate broda iz primjera 1.1.1 i primjera 1.1.2, prikazane pomoću mrežne stranice Google Maps, nalaze se na Slici 2.



Slici 2: koordinate pozicija broda

Prethodno opisana transformacija dekriptiranja (1.6) inverzna je transformaciji kriptiranja (1.2), što vrijedi i za njihove pripadne matrice. Dakle, matrica B inverzna je matrici A. Budući da inverz matrice općenito ne mora postojati, pri odabiru matrice kodiranja moramo biti pažljivi.

1.2 Vizualna interpretacija linearnih transformacija

Linearna transformacija općenito

Linearnu transformaciju zadajemo na idući način.

Definicija 1.2.1. *Preslikavanje* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *nazivamo* ***linearnom transformacijom*** *ako je* ***homogeno*** *i* ***aditivno****, tj. ako zadovoljava iduća svojstva:*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{1.7}$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2\,. \tag{1.8}$$

Navedimo dva poznata primjera linearnih transformacija, kojima ćemo se detaljnije baviti u idućem poglavlju, a u idućoj točki vizualno interpretirati.

- **Homotetija**

  Neka je $x \in \mathbb{R}^2$ i $k \in \mathbb{R}$, a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje definirano s $f(x) = kx$. Preslikavanje f nazivamo *homotetija ravnine s centrom u ishodištu koordinatnog sustava i koeficijentom k*. Pokažimo da je homotetija linearna transformacija. Da bismo tvrdnju pokazali, moramo pokazati da vrijede svojstva (1.7) i (1.8). Prema definiciji, za $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

  $$f(\lambda x) = k(\lambda x) = (k\lambda)x = (\lambda k)x = \lambda(kx) = \lambda f(x)\,,$$

  čime smo pokazali da je zadovoljeno svojstvo homogenosti. Analogno, za $x\,, y \in \mathbb{R}^2$ iz definicije homotetije slijedi

  $$f(x + y) = k(x + y) = kx + ky = f(x) + f(y)\,,$$

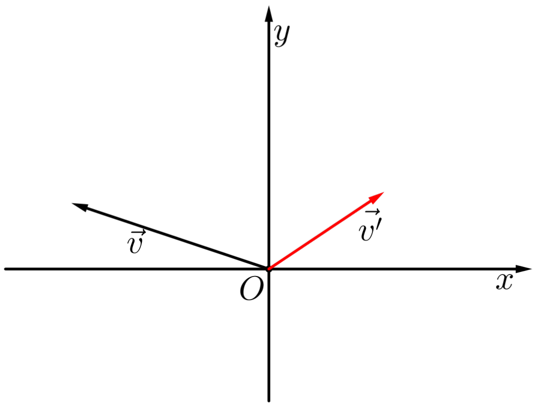
  čime je dokazano i svojstvo aditivnosti.

- **Rotacija** Neka je $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$ a $r_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje definirano s $r_\alpha(x, y) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)$. Preslikavanje r_α nazivamo *rotacija ravnine oko ishodišta koordinatnog sustava za kut α*. Lako se provjeri da je ovako definirano preslikavanje r_α linearna transformacija.

Linearne transformacije ravnine

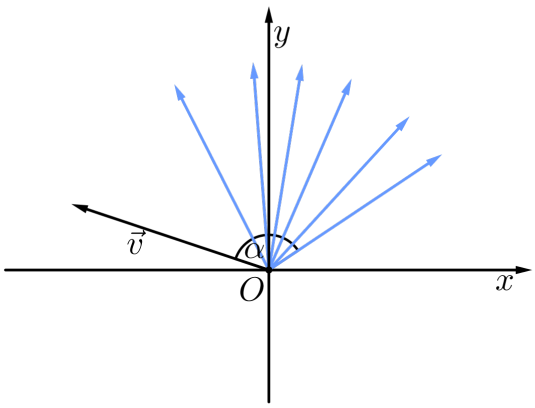
Prethodno opisana linearna transformacija je funkcija koja djeluje nad elementima ravnine $\mathbb{R}^2$ i dobro je o njoj razmišljati u kontekstu pokreta. Umjesto rezultata njezinog djelovanja, u ovoj točki ćemo pokušati vizualizirati ”put” kojeg su elementi ravnine ”prešli” provedbom transformacije.

Da bismo pojasnili tu ideju, promotrimo linearnu transformaciju radij-vektora $\vec{v}$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu, prikazanu na Slici 3.

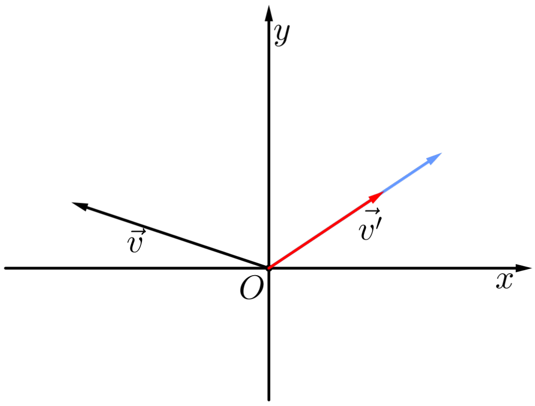


Slika 3: vektor v i njegova slika v'

Linearna transformacija zadanog vektora $\vec{v}$ u vektor $\vec{v'}$, provodi se u dva koraka; rotacijom oko ishodišta koordinatnog sustava za kut α u smjeru kretanja kazaljke na satu, kao na Slici 4 te primjenom homotetije s koeficijentom k, kao na Slici 5.

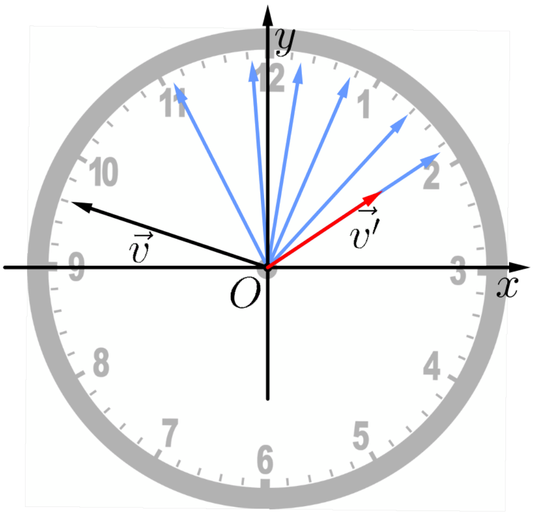


Slika 4: rotacija oko ishodišta za kut α



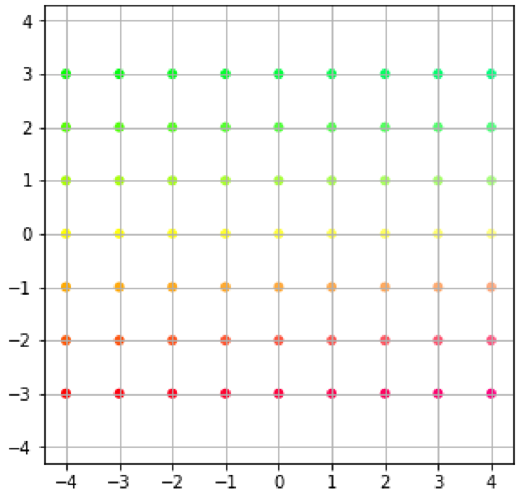
Slika 5: homotetija s centrom u ishodištu koordinatnog sustava i koeficijentom k

”Put” vektora do njegove slike možemo zamisliti kao put *velike kazaljke* na satu, kada bi ona u trenutku u kojem dostiže *malu kazaljku*, poprimila njezinu duljinu, kao na Slici 6.

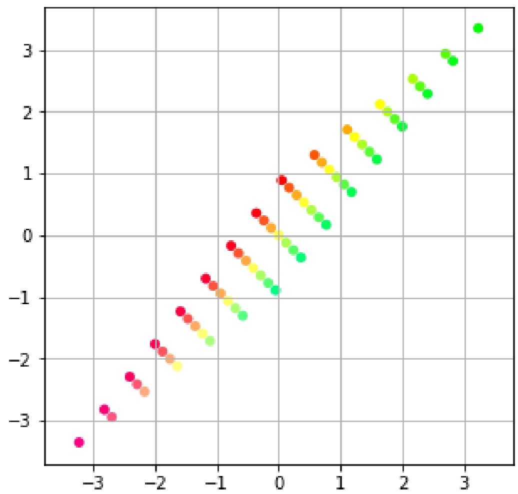


Slika 6: Put velike kazaljke na satu

Linearna transformacija djeluje na sve točke ravnine, pa ju možemo vizualizirati i na većem podskupu elemenata Kartezijevog koordinatnog sustava. Djelovanje jedne linearne transformacije na većem skupu točaka, prikazano u programskom jeziku *Python*, možemo vidjeti na Slikama 7 i 8.

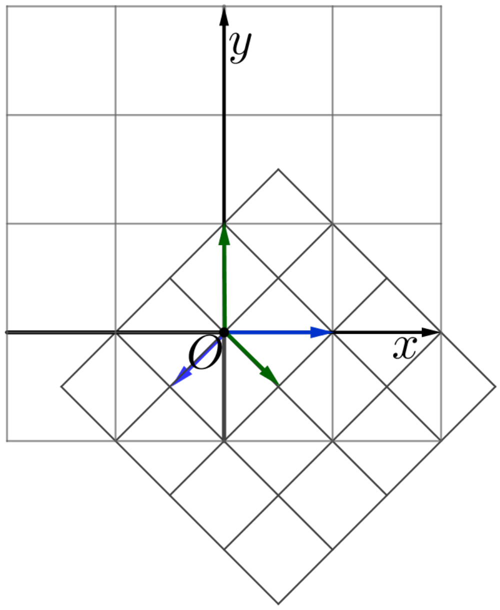


Slika 7: Prije primjene linearne transformacije



Slika 8: Nakon primjene linearne transformacije

Budući da svaki vektor u ravnini možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora baze, za poznavanje djelovanja linearne transformacije dovoljno je poznavati njihove slike. Prikažimo linearnu transformaciju sa Slike 8 u programu *GeoGebra*. Na Slici 9 prikazani su vektori kanonske baze, njihove slike te slike dužina paralelnih s koordinatnim osima. Slike dužina paralelenih s koordinatnim osima nije nužno prikazati, ali one nam olakšavaju vizualizaciju transformacije. Općenito, linearne transformacije imaju svojstvo da pravce u ravnini preslikavaju u pravce.



Slika 9: Linearna transformacija u programu GeoGebra

1.3 Veza linearnih transformacija i matrica

Uspostavljanjem veze između linearnih transformacija i matrica, definiramo jedan od najvažnijih primjera zadavanja linearne transformacije. U prvom redu, ona olakšava provedbu algebarskog računa i općenito je koristan alat u rješavanju problema u ravnini. Matrični zapis linearne transformacije svoju primjenu nalazi u strojnom učenju. Budući da je za efikasnost rada modernih neuronskih mreža presudna veličina skupa podataka za učenje, primjenom linearnih transformacija nad relativno malim skupovima, umjetno se povećava njihov kardinalitet. Uz uštedu računalnih resursa, takvim se pristupom pospješuje rad mreža. Osim u strojnom učenju, matrični zapis linearne transformacije svoju primjenu nalazi u programiranju računalnih igrica te animaciji općenito.

Prije definicije linearne transformacije zadane na $\mathbb{R}^2$, koja će nam u ovom radu biti glavni predmet proučavanja, promotrimo iduće. Svakoj točki $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u koordinatnoj ravnini možemo pridružiti odgovarajući radij-vektor $\vec{OT}$, gdje je točka O ishodište ravnine. Takvo preslikavanje je bijektivno, pa je opravdano poistovjetiti točku $T(x, y)$ s radij-vektorom $\vec{OT} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Definicija 1.3.1. *Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$. Funkciju $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, takvu da*

$$f_A(x, y) = (x', y'), \qquad \text{gdje je} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nazivamo ***linearnom transformacijom*** *definiranom matricom* $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Matrica A određuje linearnu transformaciju f_A. Želimo li da spomenuta veza bude bijektivna, potrebno je odabrati bazu ravnine. Pogodnom se pokazuje kanonska baza $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, gdje je $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. U idućem teoremu uvjerit ćemo se u tvrdnju da je za poznavanje matrice A linearne transformacije dovoljno poznavati slike vektora kanonske baze.

Teorem 1.3.2. *Ako za linearnu transformaciju* $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *gdje* $A \in M_2(\mathbb{R})$, *vrijedi*

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad i \qquad f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

tada je

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Neka je f_A linearna transformacija i $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ matrica. Budući da je

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

slijedi da je

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Analogno,

$$f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Dakle, pokazali smo da vrijedi $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, pa je teorem dokazan. □

Napomena 1.3.3. *Budući da je* f_A *linearna transformacija, ona zadovoljava svojstva* (1.7) *i* (1.8), *što kraće pišemo kao*

$$f_A\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta f_A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

i nazivamo ***linearnost****, odakle linearnoj transformaciji ime.*

Promotrimo li svojstvo linearnosti, zaključujemo da je slika linearne kombinacije vektora u $\mathbb{R}^2$ linearna kombinacija slika tih vektora. Svojstvo linearnosti vizualizirat ćemo u idućem primjeru.

Primjer 1.3.4. (Linearnost transformacije vizualno)
Neka je f_A linearna transformacija na $\mathbb{R}^2$, zadana matricom $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, tj. takva da preslikava $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ u vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, a $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ u vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Neka je vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tada se prema definiciji linearne transformacije vektor $\vec{v}$ preslika u vektor $\vec{v'}$ tako da vrijedi

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

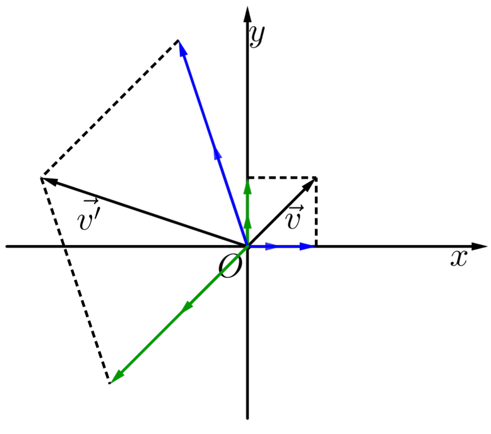
Traženu sliku možemo dobiti i drugačije. Vektor $\vec{v}$ zapišemo kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pa je tada, uz svojstvo (1.9),

$$f_A\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vizualna interpretacija prethodnog računa, prikazana je na Slici 10.



Slika 10: linearnost

Navedimo neka svojstva linearnih transformacija.

- *Nul-vektor* se preslikava u nul-vektor, tj. $f_A(\vec{0}) = \vec{0}$, što slijedi direktno iz definicije.
- *Suprotni vektor* vektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ preslikava se u suprotni vektor njegove slike, tj. $f_A(-\vec{v}) = -f_A(\vec{v})$, što slijedi iz svojstva homogenosti linearne transformacije.
- *Jedinična linearna transformacija.* Budući da je linearna transformacija funkcija, opravdano je pitati se postoji li za nju odgovarajuća funkcija identiteta f_A, takva da vrijedi $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Želimo pronaći matricu transformacije koja vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ preslikava u same sebe. Jedinična matrica reda 2 je $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pa definiramo $f_{I_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Takva linearna transformacija ne ovisi o odabiru baze, pa je matrica koja ju opisuje jedinstvena.

Napomena 1.3.5. ***(Množenje matrice i vektora)***
Uzmemo li u obzir svojstva aditivnosti i homogenosti linearne transformacije, računski možemo opravdati definiciju umnoška matrice i vektora.

Neka je $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *te neka je linearna transformacija* f_A*, takva da vektore baze preslikava na idući način.*

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad i \quad f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Vektor $\vec{v}$ *možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora kanonske baze, tj. kao* $\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Budući da je* f_A *linearna transformacija te kao takva zadovoljava svojstva aditivnosti i homogenosti, vrijedi*

$$f_A(\vec{v}) = f_A\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \end{pmatrix}.$$

S druge strane $f_A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$*. Dakle vrijedi* $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \end{pmatrix}$.

U prethodnoj točki na Slici 6, linearna transformacija je bila razložena na dvije uzastopne transformacije. Iako smo na tom primjeru vidjeli da je linearna transformacija zatvorena s obzirom na kompoziciju, uvjerit ćemo se da to vrijedi općenito.

Teorem 1.3.6. *Ako su $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ i f_A, f_B linearne transformacije određene matricama A i B, tada je funkcija $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija određena matricom AB.*

Dokaz. Neka su $f_B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ i $f_A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$. Tada je

$$(f_A \circ f_B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_A\left(f_B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f_A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

gdje

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

odakle slijedi

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrica AB je matrica linearne transformacije $f_A \circ f_B$. □

Napomena 1.3.7. ***(Množenje matrica)***
Neka su $f_A, f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takve da vrijedi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Promotrimo gdje će se preslikati jedinični vektori $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ u odnosu na $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vektor $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se u odnosu na f_B preslikava u vektor $\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}$. Djelujemo li transformacijom f_A na vektor $\vec{e_1'}$, dobivamo

$$A\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg \\ ce + dg \end{pmatrix},$$

pa je prvi stupac matrice linearne transformacije $f_A \circ f_B$ određen.

Analogno, promatramo vektor $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On se u odnosu na f_B preslikava u vektor $\vec{e_2'} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}$. Djelujemo li transformacijom f_A na vektor $\vec{e_2'}$, dobivamo iduće

$$A\vec{e_2'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af + bh \\ cf + dh \end{pmatrix},$$

pa je drugi stupac matrice linearne transformacije $f_A \circ f_B$ određen.

Promotrimo li matricu linearne transformacije $f_A \circ f_B$, očito je da je ona jednaka umnošku AB. Dakle, linearna transformacija $f_A \circ f_B$ je određena matricom AB, gdje

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

1.4 Jezgra i slika linearnih transformacija

U motivacijskom primjeru obrađenom u točki 1.1 vidjeli smo da sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati matrično. Budući da matricu drugog reda možemo poistovjetiti s linearnom transformacijom ravnine, rješenja sustava linearnih jednadžbi možemo vizualizirati. U primjerima koji slijede, u ovisnosti o broju rješenja sustava, promatramo jezgru i sliku odgovarajuće linearne transformacije.

Definicija 1.4.1. *Skup*

$$\mathrm{Ker} f_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

nazivamo ***jezgrom linearne transformacije*** *f_A, a skup*

$$\mathrm{Im} f_A = \left\{ f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

slikom linearne transformacije *f_A.*

Jezgra i slika linearne transformacije $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ su potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}$, tj.

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f_A$ vrijedi $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f_A$,
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_A$ vrijedi $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_A$.

Primjer 1.4.2. ***(Sustav ima jedinstveno rješenje)***
Neka je zadan sustav

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 &= 3 \end{cases} \tag{1.10}$$

te njegov zapis u obliku

$$A\vec{x} = \vec{y}, \tag{1.11}$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad i \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Na taj način je određena linearna transformacija $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, takva da*

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad tj. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rješavanje sustava (1.10) *svodi se na određivanje vektora* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$*, koji se nakon djelovanja transformacije preslikao u vektor* $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *kao u* (1.11). *Budući da vrijedi* $\det(A) \neq 0$*, postoji* A^{-1} *takva da*

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{y},$$

odakle slijedi

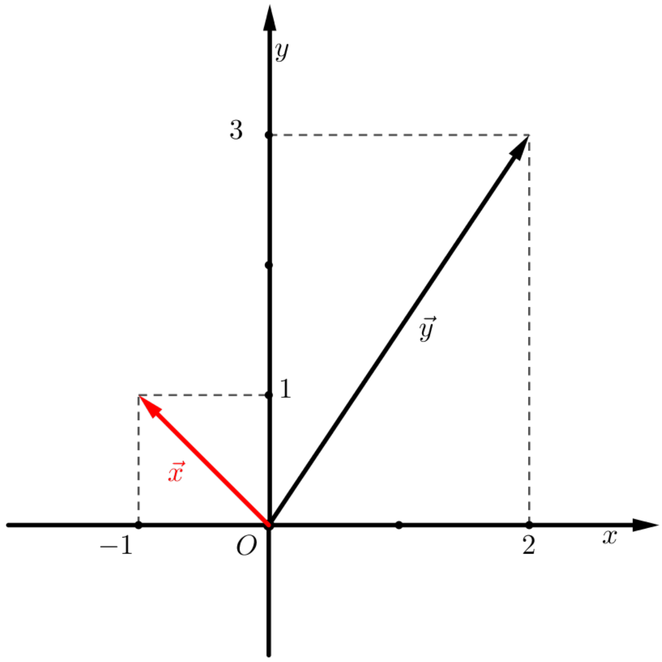
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y},$$

pa je uz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prikaz rješenja sustava nalazi se na Slici 11.



Slika 11: sustav ima jedinstveno rješenje

Prema definiciji, slika linearne transformacije f_A sastoji se od svih vektora oblika

$$f_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+3x_2\\-2x_1+x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Budući da su vektori $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ *međusobno linearno nezavisni,* $\mathrm{Im} f_A = \mathbb{R}^2$, *dok se u* $\mathrm{Ker} f_A$ *nalazi samo nul-vektor.*

Primjer 1.4.3. ***(Sustav nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja)***
Promotrimo idući sustav

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= y_1 \\ 2x_1 + 6x_2 &= y_2 \end{cases}. \tag{1.12}$$

Kao i ranije

$$A\vec{x} = \vec{y}, \tag{1.13}$$

gdje

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad i \quad \vec{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

Budući da je $\det(A) = 0$ *inverz matrice A ne postoji. Uz pravilan odabir vektora* $\vec{y}$ *sustav* (1.12) *će imati rješenja.*

Prema definiciji, slika linearne transformacije f_A *sastoji se od svih vektora oblika*

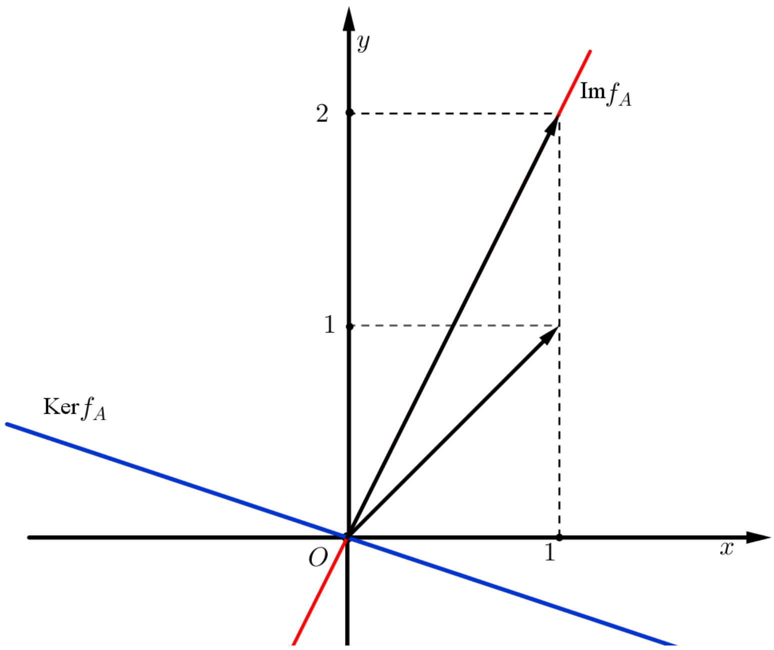
$$f_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 3x_2\\2x_1 + 6x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = (x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Budući da su pravci na kojima leže vektori $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ *paralelni, zaključujemo da je slika linearne transformacije* f_A *pravac određen vektorom* $\vec{y} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Jezgra linearne transformacije f_A*, prema definiciji je skup svih vektora koje dobivamo rješavanjem jednadžbe*

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Rješenje možemo opisati vektorom $\vec{x} = t\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. *Dakle, u jezgri linearne transformacije* f_A *nalaze se svi vektori kolinerni s vektorom* $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. *Sliku i jezgru linearne transformacije* f_A *možemo vidjeti na Slici 12.*



Slika 12: Kerf_A i Imf_A

Na Slici 12 također možemo vidjeti da slika vektora $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *koji se danom linearnom transformacijom preslikava u vektor* $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ne postoji. Početni sustav, u tom slučaju, nema rješenja. S druge strane, postoji vektor koji se danom linearnom transformacijom preslika u* $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*. Štoviše, postoji beskonačno mnogo takvih vektora, pa zaključujemo da početni sustav, u tom slučaju, ima beskonačno mnogo rješenja.*

Poglavlje 2

Matrice specijalnih transformacija

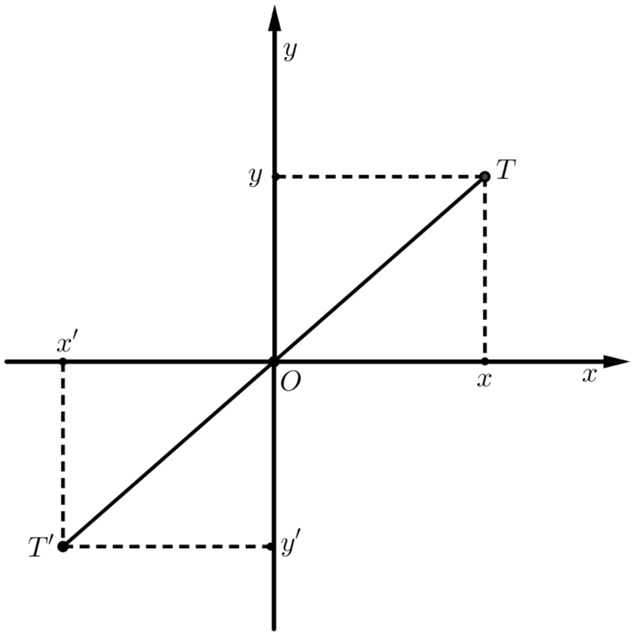
U prethodnom poglavlju, u teoremu 1.3.2, pokazali smo da je za određivanje matrice A linearne transformacije f_A, potrebno odrediti slike vektora kanonske baze $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$. Ovo poglavlje posvećeno je pronalasku matrica osnovnih linearnih transformacija u ravnini.

2.1 Centralna simetrija ravnine

Neka je O ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava. **Centralna simetrija ravnine $\mathbb{R}^2$ s obzirom na ishodište O** je preslikavanje $s_O : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano na sljedeći način: Najprije je $s_O(O) = O$. Neka je $T \neq O$, a $T' \neq T$ točka na pravcu TO takva da $|TO| = |OT'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definiramo $s_O(T) = T'$.

Sa Slike 13 vidimo da za proizvoljnu točku $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi da je njena slika točka $T'(-x, -y)$, pa je **centralna simetrija ravnine s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava** preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano s

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$



Slika 13: centralna simetrija

Pokažimo da je centralna simetrija ravnine s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava linearna transformacija, tj. da zadovoljava uvjet linearnosti (1.9).

Zaista, za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$f\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_2 \\ \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x_1 - \beta x_2 \\ -\alpha y_1 - \beta y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha x_1 \\ -\alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta x_2 \\ -\beta y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Za vektore kanonske baze vrijedi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

pa slijedi da je $f = f_A$ pri čemu je **matrica centralne simetrije s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.1.1. *Dana je kružnica k sa središtem u $S(-3, 3)$ i polumjerom 2 te pravac a, čija jednadžba glasi $y = 2x - 5$. Odredite jednadžbu pravca p, tako da je središte koordinatnog sustava polovište dužine kojoj je jedan kraj na kružnici k, a drugi na pravcu a.*

Rješenje. *Točka $E \in a$ se centralnom simetrijom s obzirom na ishodište koordinatnog sustava preslikala u točku E', pa je prema definiciji centralne simetrije $|EO| = |E'O|$ i točka O polovište dužine EE'. Analogno vrijedi za točku $F \in a$, koja se centralnom simetrijom s obzirom na ishodište preslikala u točku F'.*

Pravac a preslikamo centralnom simetrijom s obzirom na ishodište koordinatnog sustava u pravac a', koji prolazi točkama E' i F'. Taj pravac siječe kružnicu k u niti jednoj, jednoj ili dvije točke. Ako sjecište postoji, kroz točku sjecišta i središte koordinatnog sustava povučemo traženi pravac p.

Jednadžbu pravca a najprije zapišemo u parametarskom obliku.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = t \\ y & = 2t - 5 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R} . \tag{2.1}$$

Odredimo proizvoljnoj točki T pravca a sliku T'. Neka je $T(t, 2t - 5)$ proizvoljna točka pravca a. Točku T' koja je centralno simetrična točki T s obzirom na ishodište koordinatnog sustava dobivamo tako da na nju primijenimo linearnu transformaciju. Za odgovarajući radij-vektor $\vec{OT'}$ vrijedi

$$\vec{OT'} = A \begin{pmatrix} t \\ 2t - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -2t + 5 \end{pmatrix} .$$

Dakle, parametarski oblik jednadžbe pravca a' je

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = -t \\ y & = -2t + 5 \end{array} \right. . \tag{2.2}$$

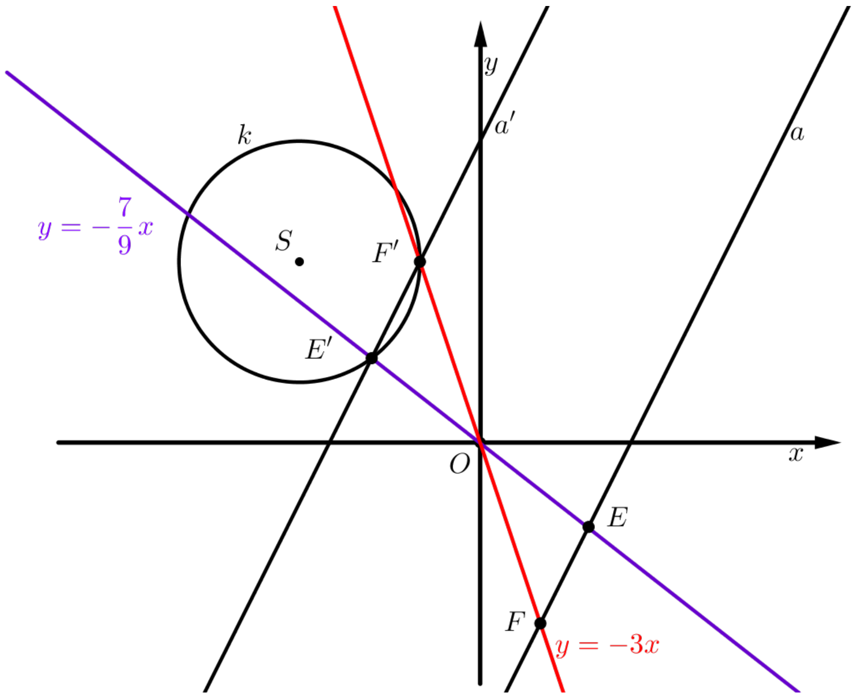
Jednadžbu dane kružnice k sa središtem u $S(-3, 3)$ i polumjerom $r = 2$ zapišemo kao

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 4 . \tag{2.3}$$

Eliminacijom parametra $t \in \mathbb{R}$ u (2.2) dobivamo $y = 2x + 5$, a uvrštavanjem u (2.3) i rješavanjem sustava, da su sjecišta kružnice k i pravca a' točke $E'(-1.8, 1.4)$ i $F'(-1, 3)$. Kroz dobivene točke i središte koordinatnog sustava provučemo traženi pravac p. Budući da je broj sjecišta 2, traženi problem ima 2 rješenja. Jednadžbe traženih pravaca su

$$y = -\frac{7}{9}x \quad i \quad y = -3x .$$

Vizualni prikaz rješenja nalazi se na Slici 14.



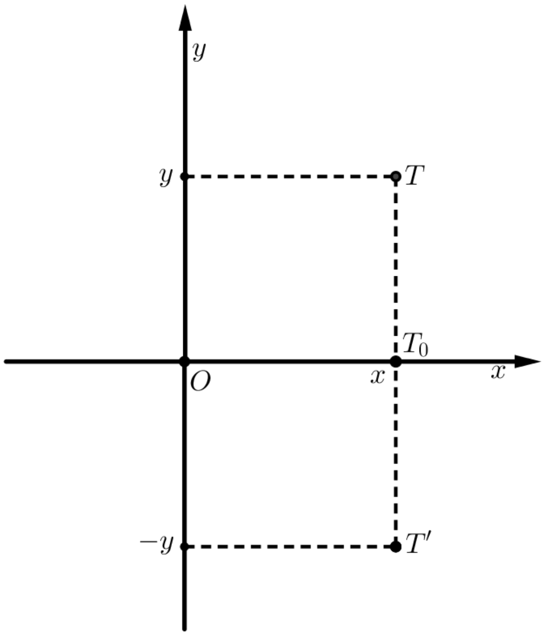
Slika 14: rješenje primjera 2.1.1

2.2 Osna simetrija ravnine

Neka je p pravac u $\mathbb{R}^2$. **Osna simetrija ravnine s obzirom na pravac** p je preslikavanje $s_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano na sljedeći način. Ako točka T leži na pravcu p, definira se $s_p(T) = T$. Ako točka T ne leži na pravcu p, tada okomica kroz T na pravac p siječe p u nekoj točki T_0. Neka je T' točka na pravcu TT_0, različita od T, takva da je $|TT_0| = |T_0T'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $s_p(T) = T'$.

Osna simetrija ravnine s obzirom na os apscisa

Promatramo osnu simetriju ravnine kojoj je pravac apscisa os simetrije.



Slika 15: osna simetrija

Sa Slike 15 vidimo da za proizvoljnu točku $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi da je njena slika točka $T'(x, -y)$, pa je **osna simetrija ravnine s obzirom na os apscisa** preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano s

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Pokažimo da je osna simetrija ravnine s obzirom na os apscisa Kartezijevog koordinatnog sustava linearna transformacija, tj. da zadovoljava uvjet linearnosti (1.9).

Zaista, za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$f\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_2 \\ \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ -\alpha y_1 - \beta y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ -\alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_2 \\ -\beta y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Za vektore kanonske baze vrijedi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

pa slijedi da je $f = f_A$ pri čemu je **matrica osne simetrije ravnine s obzirom na os apscisa Kartezijevog koordinatnog sustava**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.2.1. *Konstruirajte kvadrat tako da mu dva nasuprotna vrha leže na osi apscisa, a dva preostala vrha na kružnicama*

$$k_1 ... x^2 + (y-3)^2 = 16 \quad i \quad k_2 ... (x-4)^2 + (y+5)^2 = 4.$$

Dovoljno je konstruirati jedan takav kvadrat. Zadatak riješite uz pomoć interaktivnog matematičkog softvera GeoGebra.

Rješenje. *Kružnicu k_1 preslikamo u kružnicu k_1' osnosimetričnu s obzirom na x os. Kružnice k_1' i k_2 sijeku se u dvije točke. Bez smanjenja općenitosti jedno od sjecišta T preslikamo u T' osnosimetrično s obzirom na x os. Time su određena dva nasuprotna vrha traženog kvadrata, tj. njegova dijagonala TT'. Oko polovišta P dužine određene točkama T i T' opišemo kružnicu k_3 radijusa $|PT|$. Točke presjeka kružnice k_3 i osi apscisa su preostali vrhovi traženog kvadrata.*

Koristeći algebarsku reprezentaciju kružnica k_1 i k_2, pomoću trake za unos upisujemo njihove odgovarajuće jednadžbe.
Unosimo redom:

```
x^2 + (y - 3)^2 = 16
(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 4
```

te svaki od unosa potvrđujemo pritiskom na tipku <Enter>. Za unos matrice A također koristimo traku za unos u koju upisujemo

```
A = {{1, 0}, {0, -1}}.
```

Da bismo kružnicu k_1 preslikali u kružnicu k_1', na nju primijenimo osnu simetriju s obzirom na os apscisa, određenu matricom A. Preslikavanje kružnice k_1 obavljamo pomoću naredbe PrimijeniMatricu. Naredba na prvom mjestu prima ime odgovarajuće matrice, dok je drugo rezervirano za objekt nad kojim se vrši transformacija. Čitava nareba glasi PrimijeniMatricu[$< matricaM >, < objektO >$].
U traku za unos pišemo

```
PrimijeniMatricu[ A, k_1 ]
```

te dobivamo kružnicu k_1', koja je osnosimetrična kružnici k_1 s obzirom na os apscisa. Njezina jednadžba je

$$k_1' ... x^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Za određivanje presjeka kružnice k_1' i k_2 koristimo Sjecište$[< konika\, c1 >, < konika\, c2 >]$, *tj. za konkretne konike*

```
Sjecište[ k_1', k_2].
```

Bez smanjenja općenitosti, na točku presjeka $T(4, -3)$ *ponovo primijenimo naredbu Primijeni matricu*

```
PrimijeniMatricu[ A, T ]
```

i tako dobivamo točku T'. Konačno, za određivanje preostale dvije točke kvadrata, koristimo Polovište [<*točka*>, <*točka*>]. *Unosimo*

```
Polovište[ T, T' ]
```

a zatim oko polovišta P opišemo kružnicu kroz točku T

```
Kružnica[P, T]
```

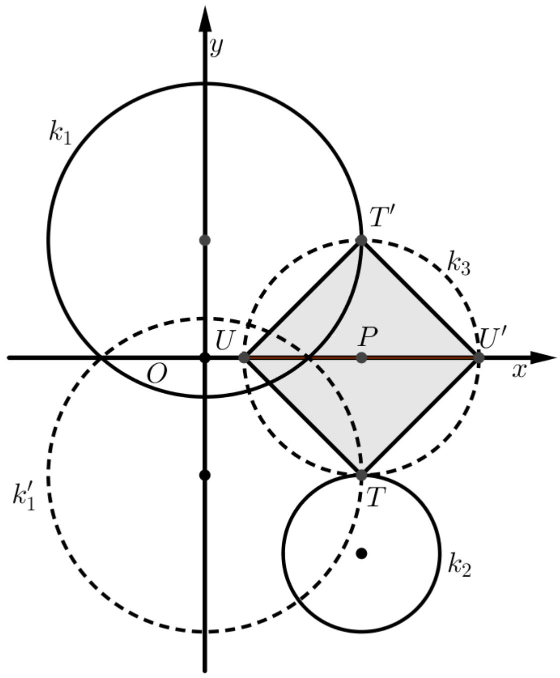
te pomoću naredbe Sjecište pronađemo sjecišta U i U' netom konstruirane kružnice k_3 i osi apscisa

```
Sjecište[xOs, k_3].
```

Time smo odredili sve točke potrebne za konstrukciju kvadrata. Pomoću naredbe Mnogokut u traku za unos upisujemo imena vrhova kvadrata

```
Mnogokut[ U, T, U', T' ].
```

Kako izgleda rješenje možemo vidjeti na Slici 16.



Slika 16: rješenje primjera 2.2.1

Osna simetrija ravnine s obzirom na os ordinata

Osna simetrija ravnine kojoj je pravac ordinata os simetrije analogna je prethodnoj, pa se lako pokaže da je **osna simetrija ravnine s obzirom na os ordinata Kartezijevog koordinatnog sustava** linearna transformacija $f = f_A$ pri čemu je

$$f_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

odakle slijedi da je **matrica osne simetrije ravnine s obzirom na os ordinata**

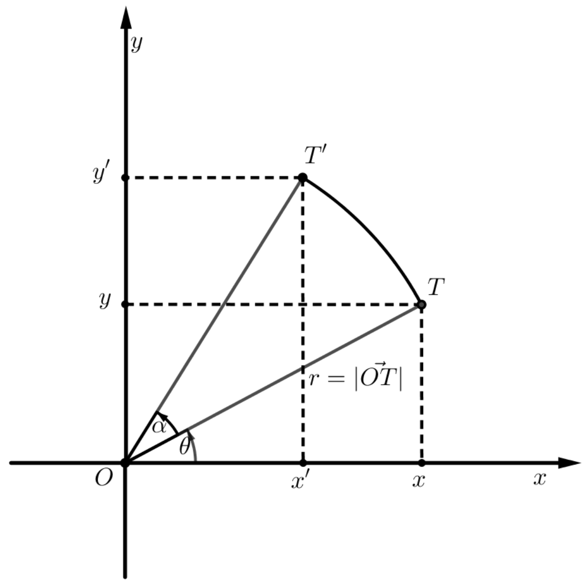
$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.3 Rotacija ravnine

Neka je α dani kut i točka O središte Kartezijevog koordinatnog sustava. **Rotacija ravnine oko čvrste točke O za dani kut α** je transformacija definirana na sljedeći način. Točka

O je čvrsta točka u odnosu na transformaciju. Za točku T različitu od O vrijedi da se preslikava u točku T', tako da $|OT| = |OT'|$, a kut $\widehat{TOT'}$ iste mjere i orijentacije kao kut α. Za $\alpha > 0$ rotacija je u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu i tada kažemo da se rotacija odvija u pozitivnom smjeru. Za $\alpha < 0$ rotacija je u smjeru kretanja kazaljke na satu i tada kažemo da se rotacija odvija u negativnom smjeru.

Za danu točku $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nađimo koordinate točke $T'(x', y') \in \mathbb{R}^2$ u koju će se pri ovoj rotaciji preslikati točka T. Označimo s θ kut kojeg vektor $\vec{OT}$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x, kao na Slici 17.



Slika 17: rotacija ravnine oko točke O za kut α

Tada vrijedi

$$x = r\cos\theta\,,$$
$$y = r\sin\theta\,,$$

dok je

$$x' = r\cos(\theta + \alpha),$$
$$y' = r\sin(\theta + \alpha).$$

Slijedi

$$x' = r\cos(\theta + \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha\,,$$
$$y' = r\sin(\theta + \alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha = y\cos\alpha + x\sin\alpha\,.$$

Rotacija ravnine oko ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava za kut α je preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano s

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Za vektore kanonske baze vrijedi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix},$$

pa slijedi da je $f = f_A$ pri čemu je **matrica rotacije ravnine oko ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava za kut** α oblika

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.3.1. *Pronađite sliku nastalu rotacijom pravca* $y = 2x - 1$ *oko ishodišta za kut od* 45° *u pozitivnom smjeru.*

Rješenje. *Jednadžbu pravca* $y = 2x - 1$ *zapisat ćemo u parametarskom obliku.*

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Kutu $\alpha = 45^\circ$ *odgovara matrica rotacije*

$$A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pogledajmo kamo će se pri opisanoj rotaciji preslikati proizvoljna točka $T(t, 2t - 1)$ *zadanog pravca. Za* $t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

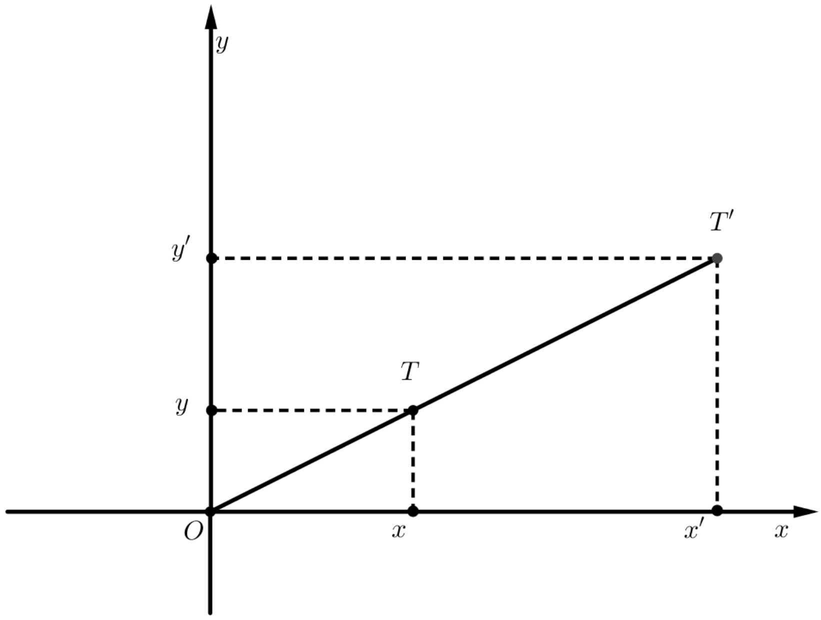
pa je $T'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *slika točke* T. *Zadani pravac se preslikava u pravac* *čije parametarske jednadžbe glase*

$$\begin{cases} x &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}t + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= \dfrac{3\sqrt{2}}{2}t - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Eliminacijom parametra t u (2.5) *dobivamo* $y = -3x + \sqrt{2}$.

2.4 Homotetija ravnine

Neka je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Linearna transformacija koja proizvoljnoj točki $T \neq O$ pridružuje točku T' , takvu da vrijedi $\vec{OT'} = k\vec{OT}$, gdje je O ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, naziva se **homotetija ravnine s centrom** O **i koeficijentom** k.



Slika 18: homotetija ravnine s centrom O i koeficijentom k

Slika točke $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pri ovoj homotetiji je točka $T'(kx, ky)$. Stoga je homotetija s centrom u ishodištu Kartezijevog koordinatnog sustava i koeficijentom k preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano s

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Za vektore kanonske baze vrijedi

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix},$$

pa slijedi da je $f = f_A$ pri čemu je **matrica homotetije ravnine s centrom u ishodištu Kartezijevog koordinatnog sustava i koeficijentom** k oblika

$$A=\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}.$$

Napomena 2.4.1. *Za $k = -1$ određena je centralna simetrija s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava. Dakle, centralna simetrija je poseban slučaj homotetije.*

Primjer 2.4.2. *U trokut omeđen pravcima $y = -\frac{5}{2}x + 15$, $y = x$ i $y = 0$ upišite kvadrat tako da dva njegova vrha leže na osi x, jedan vrh na pravcu $y = -\frac{5}{2}x + 15$ i jedan vrh na pravcu $y = x$.*

Rješenje. *Konstruiramo kvadrat $A'B'C'D'$ takav da zadovoljava 2 od 3 tražena uvjeta, tj. takav da vrijedi da je A' element pravca $y = x$, a točke B' i C' leže na x osi. Točka D' je s obzirom na opisanu konstrukciju određena. Odredimo točku D, koja je presjek pravca kroz ishodište koordinatnog sustava i točku D' s pravcem $y = -\frac{5}{2}x + 15$. Točke D i D' određuju koeficijent homotetije s centrom u ishodištu koordinatnog sustava. Preostale točke A', B' i C' preslikamo s obzirom na tu homotetiju u vrhove A, B i C respektivno.*

Neka je $A'(1,1)$ točka na pravcu $y = x$. Tada je njezina ortogonalna projekcija na os x vrh $B'(1,0)$. Za vrh C' tada vrijedi da leži na x osi i da je za 1 udaljen od vrha B', pa je $C'(2,0)$. Lako slijedi da je $D'(2,1)$.

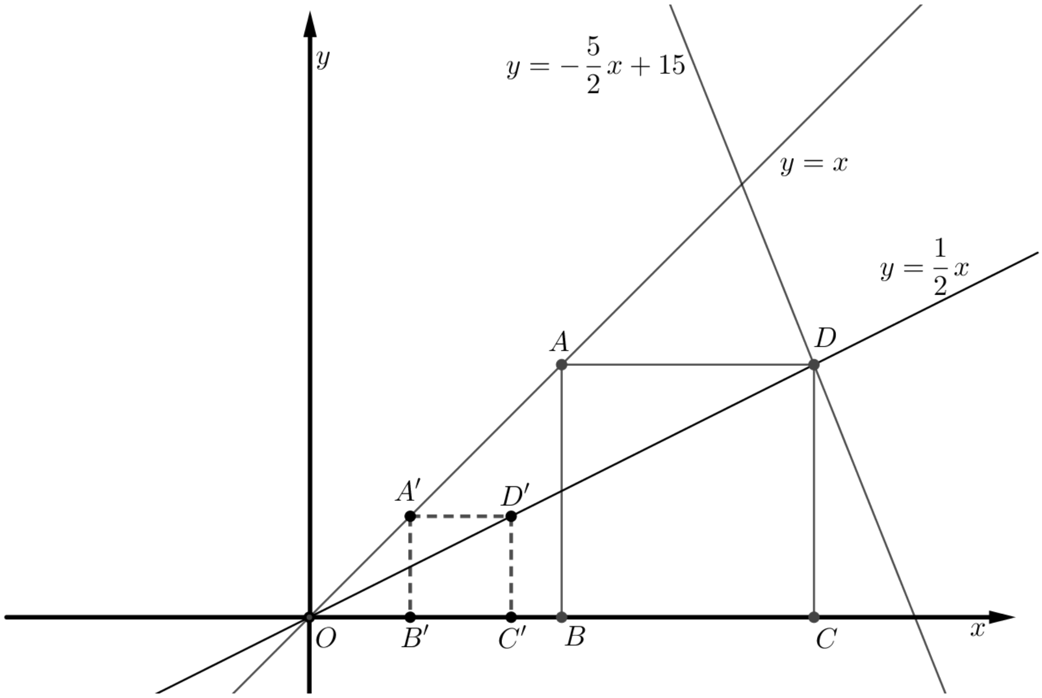
Provucimo pravac kroz ishodište koordinatnog sustava i točku D'. Slijedi da je jednadžba tog pravca

$$y = \frac{1}{2}x\,.$$

Presjek pravca $y = -\frac{5}{2}x + 15$ s pravcem $y = \frac{1}{2}x$ je vrh $D\left(5, \frac{5}{2}\right)$. Udaljenost vrha D od ishodišta je $k_1 = \frac{5\sqrt{5}}{2}$, a udaljenost vrha D' od ishodišta $k_2 = \sqrt{5}$. Koeficijent homotetije sa središtem u ishodištu O, koji preslikava točku D' u D je $k = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{2}$, pa je njezina *matrica*

$$K = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Preostali vrhovi preslikaju se na idući način. A' se preslika u $A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, B' u $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ i C' u $C(5,0)$.



Slika 19: rješenje primjera 2.4.2

2.5 Ortogonalna projekcija na osi apscisa i ordinata

Ortogonalna projekcija na os apscisa

Ortogonalna projekcija točke $T \in \mathbb{R}^2$ na os apscisa Kartezijevog koordinatnog sustava je nožište T' okomice na os apscisa kroz toču T. Točka $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se preslikava u točku

$T'(x, 0)$, čime je definirano preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano s

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za vektore kanonske baze vrijedi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pa je $f = f_A$, pri čemu je **matrica ortogonalne projekcije na os apscisa** dana s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ortogonalna projekcija na os ordinata

Ortogonalna projekcija točke $T \in \mathbb{R}^2$ na os ordinata Kartezijevog koordinatnog sustava je nožište T' okomice na os ordinata kroz toču T. Točka $T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se preslikava u točku $T'(0, y)$, čime je definirano preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano s

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Za vektore kanonske baze vrijedi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pa je $f = f_A$, pri čemu je **matrica ortogonalne projekcije na os ordinata** dana s

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poglavlje 3

Projekcije, zrcaljenja i izometrije ravnine

Projekcije i zrcaljenja ravnine klase su linearnih transformacija određenih svojstvima idempotentnosti i involucije. Ta svojstva koristimo u određivanju odgovarajućih matrica linearnih transformacija. U prethodnom poglavlju smo se bavili posebnim slučajevima projekcija i zrcaljenja ravnine, dok u ovom određujemo sve takve linearne transformacije. Osna simetrija, rotacija i centralna simetrija ravnine, također opisane u prethodnom poglavlju, pripadaju klasi izometrija ravnine, koje ćemo definirati u posljednjoj točki.

3.1 Projekcije ravnine

Definicija 3.1.1. *Linearna transformacija $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi $P \circ P = P$, naziva se* ***projekcija ravnine****.*

Napomena 3.1.2. *Za svaki $n \geqslant 2$ projekcija ravnine je idempotentna transformacija, tj. vrijedi $\underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n \text{ puta}} = P$.*

Teorem 3.1.3. *Ako je $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija definirana matricom A, onda je P_A projekcija ravnine ako i samo ako je matrica A idempotentna, tj. vrijedi $A^2 = A$.*

Dokaz. Neka je $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija definirana matricom A. Prema teoremu 1.3.6, $P_A \circ P_A$ je linearna transformacija određena matricom $AA = A^2$. Budući da je P_A projekcija ravnine, vrijedi $P_A \circ P_A = P_A$, pa slijedi da je $A^2 = A$, tj. matrica A je idempotentna. Obrnuto, pretpostavimo da je $A^2 = A$ i $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija definirana matricom A. Prema teoremu 1.3.6, linearna transformacija $P_A \circ P_A$ je određena matricom $A^2 = A$, pa slijedi $P_A \circ P_A = P_A$, tj. P_A je projekcija ravnine. □

Prije definiranja svih projekcija ravnine, određujemo izgled njihovih odgovarajućih matrica. Budući da će za projekcije vrijediti da su određene idempotentnim matricama, u idućem teoremu određujemo sve takve matrice.

Teorem 3.1.4. *Matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ je idempotentna ako i samo ako je jednog od idućih oblika:*

1. $A_1 = O_2$;
2. $A_2 = I_2$;
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$;
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$;
5. $A_5 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dokaz. Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Da bi matrica A bila idempotentna, mora vrijediti $A^2 = A$, tj.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

odakle množenjem matrica dobivamo

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Slijedi

$$\begin{cases} a^2+bc &= a \\ b(a+d) &= b \\ c(a+d) &= c \\ bc+d^2 &= d \end{cases}. \tag{3.1}$$

Prebacimo li nepoznanice u svim jednadžbama sustava (3.1), osim u prvoj s desne na lijevu stranu, dobivamo

$$\begin{cases} a^2+bc &= a \\ b(a+d-1) &= 0 \\ c(a+d-1) &= 0 \\ (a-d)(a+d-1) &= 0 \end{cases}. \tag{3.2}$$

Ako u (3.2) vrijedi $a + d - 1 \neq 0$, tada je $b = 0$, $c = 0$ i $a = d \in \{0, 1\}$. Za $a = d = 0$ matrica A je oblika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je $A = A_1 = O_2$. Za $a = d = 1$ matrica A je oblika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je $A = A_2 = I_2$.

Ako u (3.2) vrijedi $a + d - 1 = 0$, sustav se svodi na jednadžbu

$$a^2 + bc = a. \tag{3.3}$$

Za $b \neq 0$, u (3.3) dobivamo $c = \dfrac{a - a^2}{b}$, pa je za $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ matrica A oblika

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a - a^2}{b} & 1 - a \end{pmatrix},$$

odnosno $A = A_5$.

Za $b = 0$, u (3.3) dobivamo $a = 0$ ili $a = 1$, pa je za $a = 0$ i $c \in \mathbb{R}$ matrica A oblika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $A = A_3$, dok za $a = 1$ i $c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $A = A_4$. □

U idućem teoremu određujemo sve projekcije ravnine zadane idempotentnim matricama iz teorema 3.1.4.

Teorem 3.1.5. *Projekcije ravnine su linearne transformacije $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirane s:*

1. $P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2. $P_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

3. $P_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx + y \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R};$

4. $P_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R};$

5. $P_5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \dfrac{a - a^2}{b}x + (1 - a)y \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Dokaz. Ako je P projekcija ravnine definirana matricom A, onda je prema teoremu 3.1.3 matrica A idempotentna, pa poprima neki od pet oblika, navedenih u teoremu 3.1.4. Stoga razlikujemo sljedeće slučajeve.

1. Neka je $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadana s $P_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lako se provjeri da je pripadna matrica linearne transformacije oblika $A_1 = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Prema teoremu 1.3.6, matrica linearne transformacije $P_1 \circ P_1$ je matrica A_1^2. Matrica A_1 je idempotentna, tj. $A_1^2 = A_1$. Sada za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(P_1 \circ P_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odakle, prema definiciji 3.1.1, slijedi da je P_1 projekcija ravnine.

2. Neka je $P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadana s $P_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Lako se provjeri da je pripadna matrica linearne transformacije oblika $A_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prema teoremu 1.3.6, matrica linearne transformacije $P_2 \circ P_2$ je matrica A_2^2. Matrica A_2 je idempotentna, tj. $A_2^2 = A_2$. Sada za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(P_2 \circ P_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_2^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

odakle, prema definiciji 3.1.1, slijedi da je P_2 projekcija ravnine.

3. Neka je $P_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadana s $P_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx + y \end{pmatrix}$. Lako se provjeri da je pripadna matrica linearne transformacije oblika $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$. Prema

teoremu 1.3.6, matrica linearne transformacije $P_3 \circ P_3$ je matrica A_3^2. Matrica A_3 je idempotentna, tj. $A_3^2 = A_3$. Sada za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(P_3 \circ P_3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_3^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx + y \end{pmatrix},$$

odakle, prema definiciji 3.1.1, slijedi da je P_3 projekcija ravnine.

4. Neka je $P_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadana s $P_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx \end{pmatrix}$. Lako se provjeri da je pripadna matrica linearne transformacije oblika $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Prema teoremu 1.3.6, matrica linearne transformacije $P_4 \circ P_4$ je matrica A_4^2. Matrica A_4 je idempotentna, tj. $A_4^2 = A_4$. Sada za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(P_4 \circ P_4)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_4^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx \end{pmatrix},$$

odakle, prema definiciji 3.1.1, slijedi da je P_4 projekcija ravnine.

5. Neka je $P_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadana s $P_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \frac{a - a^2}{b} x + (1 - a)y \end{pmatrix}$. Lako se provjeri da je pripadna matrica linearne transformacije oblika $A_5 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a - a^2}{b} & 1 - a \end{pmatrix}$. Prema teoremu 1.3.6, matrica linearne transformacije $P_5 \circ P_5$ je matrica A_5^2. Matrica A_5 je idempotentna, tj. $A_5^2 = A_5$. Sada za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(P_5 \circ P_5)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_5^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a - a^2}{b} & 1 - a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \frac{a - a^2}{b} x + (1 - a)y \end{pmatrix},$$

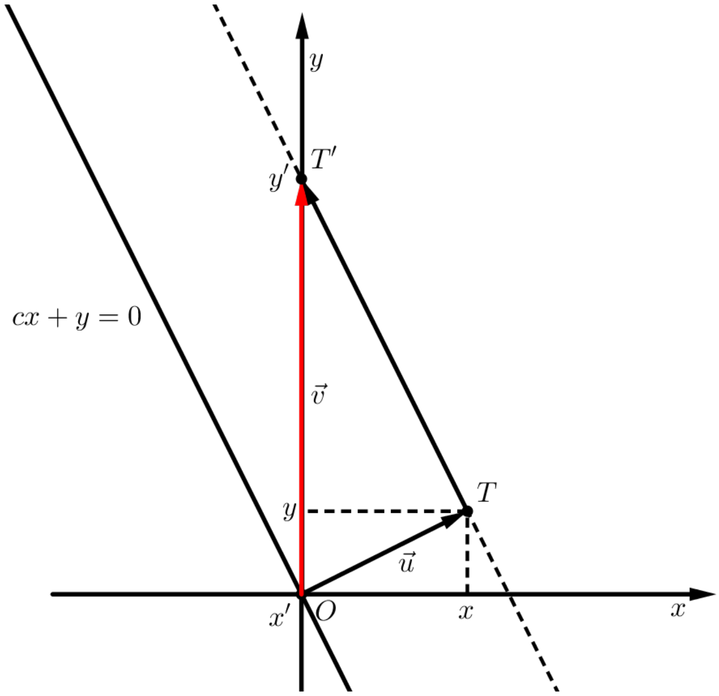
odakle, prema definiciji 3.1.1, slijedi da je P_5 projekcija ravnine. □

Napomena 3.1.6. *Geometrijski gledano, projekcije ravnine definirane u teoremu 3.1.5 možemo interpretirati na idući način.*

Neka je $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *projekcija ravnine zadana s* $P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Takva projekcija sve točke ravnine preslikava u nul-vektor, tj. u ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava.*

Neka je $P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projekcija ravnine zadana s $P_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Takva projekcija djeluje kao identiteta, tj. preslikava sve točke ravnine u njih same.

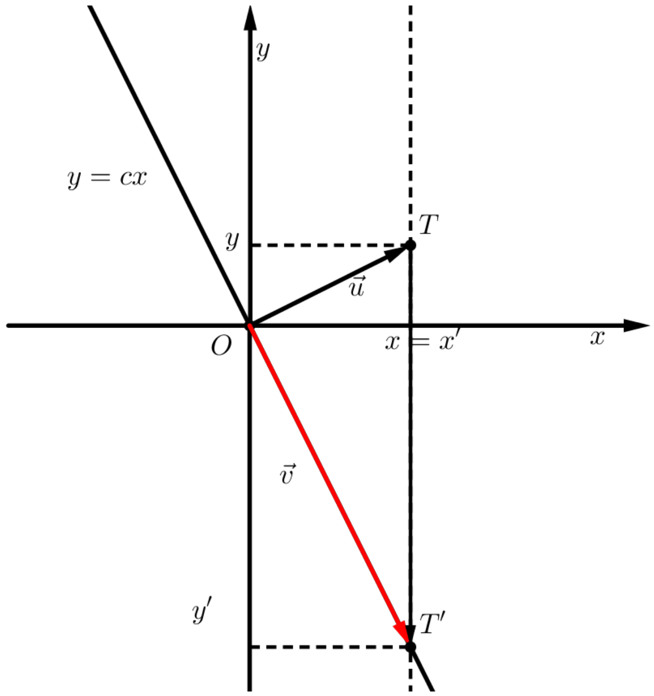
Neka je $P_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projekcija ravnine zadana s $P_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx+y \end{pmatrix}$. Zadanom se projekcijom vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ preslikava u vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ cx+y \end{pmatrix}$, kao na Slici 20.



Slika 20: kosa projekcija na y-os u smjeru pravca $cx + y = 0$

Neka je $\vec{u} = \vec{OT}$ i $\vec{v} = \vec{OT'}$. Za koeficijent k pravca TT', vrijedi $k = \dfrac{cx + y - y}{0 - x} = -c$ pa je smjer vektora $\vec{TT'}$ određen smjerom pravca $cx + y = 0$. Projekciju P_3 nazivamo ***kosa projekcija na y-os u smjeru pravca*** *$cx + y = 0$.*

Neka je $P_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projekcija ravnine zadana s $P_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx \end{pmatrix}$. Zadanom se projekcijom vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ preslikava u vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ cx \end{pmatrix}$, kao na Slici 21.



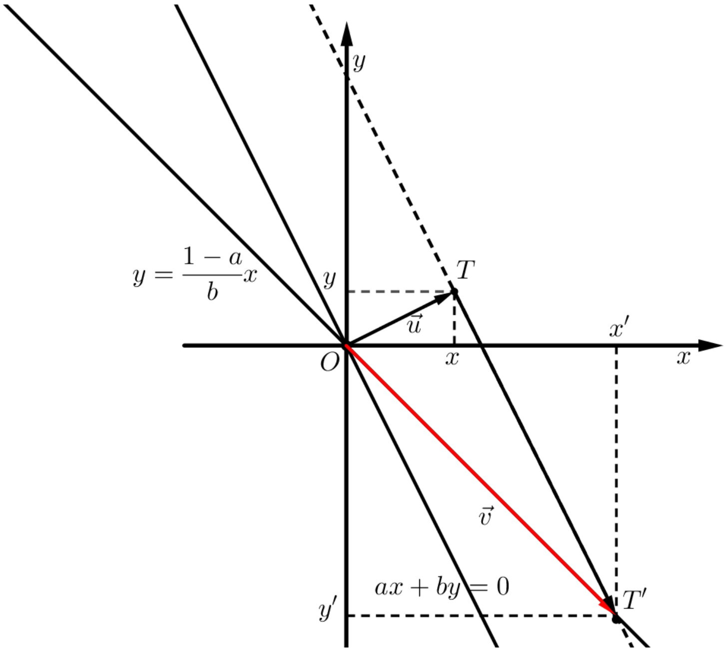
Slika 21: vertikalna projekcija u smjeru y-osi na pravac $y = cx$

Neka je $\vec{x} = \vec{OT}$ *i* $\vec{y} = \vec{OT'}$. *Točka* $T(x, y)$ *i njena slika* $T'(x, cx)$ *leže na istom pravcu okomitom na x-os, pa se zadana projekcija naziva* ***vertikalna projekcija na pravac*** $y = cx$.

Neka je $P_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *projekcija ravnine zadana s* $P_5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \dfrac{a - a^2}{b}x + (1 - a)y \end{pmatrix}$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *se zadanom projekcijom preslika u vektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \dfrac{a - a^2}{b}x + (1 - a)y \end{pmatrix}$, *kao na Slici 22. Stavimo li* $t = ax + by$, *onda je* $\dfrac{a - a^2}{b}x + (1 - a)y = \dfrac{1 - a}{b}t$, *pa je*

$\mathrm{Im}P_5 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \dfrac{1 - a}{b}t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$, *odnosno slika projekcije* P_5 *je pravac* $y = \dfrac{1 - a}{b}x$.



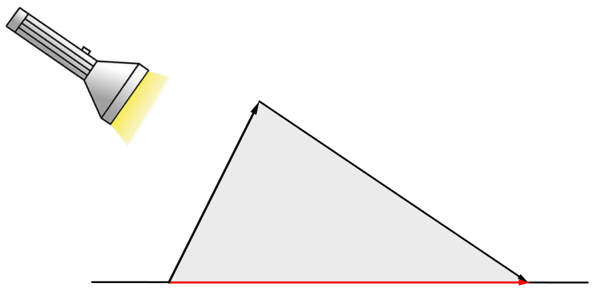
Slika 22: kosa projekcija na pravac $y = \dfrac{1-a}{b}x$ u smjeru pravca $ax + by = 0$

Ako je $\vec{u} = \vec{OT}$ i $\vec{v} = \vec{OT'}$, točka $T(x, y)$ i njena slika $T'(x', y')$ leže na pravcu čiji je koeficijent smjera k jednak

$$k = \frac{y'-y}{x'-x} = \frac{\frac{a-a^2}{b}x + (1-a)y - y}{ax + by - x} = \frac{\frac{a(1-a)}{b}x + (1-a-1)y}{-((1-a)x - by)} = \frac{\frac{a}{b}((1-a)x - by)}{-((1-a)x - by)} = -\frac{a}{b}\,.$$

*Dakle, projekcija P_5 je **projekcija na pravac** $y = \dfrac{1-a}{b}x$ **u smjeru pravca** $ax + by = 0$.*

Općenito, prethodne projekcije možemo zamišljati kao sjenu koju bi predmet bacao na dane pravce, kada bismo u njega uperili svjetiljku paralelno s odgovarajućim pravcima, kao na Slici 23.



Slika 23: projekcije ravnine

Kao i ranije, za projekciju $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slijedi $P = P_A$ pri čemu je A odgovarajuća idempotentna matrica. U idućem teoremu promatramo fundamentalna svojstva projekcija ravnine.

Teorem 3.1.7. *Neka je* $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, $A \neq O_2$ *i* $A \neq I_2$. *Neka je*

$$P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad P_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. $\mathrm{Ker} P_A$ *je pravac.*

2. $\mathrm{Im} P_A$ *je pravac.*

3. P_A *preslikava vektor* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *na pravac* $\mathrm{Im} P_A$ *u smjeru pravca* $\mathrm{Ker} P_A$.

4. *Svaki vektor* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *može se jedinstveno prikazati kao suma dvaju vektora koji leže na pravcima* $\mathrm{Ker} P_A$ *i* $\mathrm{Im} P_A$.

5. *Jordanova kanonska forma idempotentne matrice A, sa svojstvom* $A \neq O_2$ *i* $A \neq I_2$ *dana je s* $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dokaz. 1. i 2. Neka je $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija i $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrica linearne transforamacije P_A, sa svojstvom $A \neq O_2$ i $A \neq I_2$. Pokažimo da rang $\mathrm{r}(A)$ matrice A iznosi 1. Kada bi rang matrice A bio 2, matrica A bila bi regularna, odakle bi slijedilo $A = A^2 A^{-1} = AA^{-1} = I_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $A \neq I_2$. Također, rang od A nije 0, jer je $A \neq O_2$. Kako je $\dim(\mathrm{Im} P_A)=\mathrm{r}(A)= 1$, slijedi da je $\mathrm{Im} P_A$ pravac. Budući da su $\mathrm{Ker} P_A$ i $\mathrm{Im} P_A$ potprostori od $\mathbb{R}^2$, prema teoremu o rangu i defektu vrijedi $\dim(\mathrm{Ker} P_A)+\dim(\mathrm{Im} P_A)= 2$. Odavde slijedi $\dim(\mathrm{Ker} P_A)= 1$, tj. $\mathrm{Ker} P_A$ je također pravac. Jasno je da oba pravca prolaze kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava.

3. Jasno je da P_A preslikava vektore iz $\mathbb{R}^2$ na pravac $\mathrm{Im} P_A$. Preostaje pokazati da se projekcija odvija u smjeru pravca $\mathrm{Ker} P_A$. Neka je $T \in \mathbb{R}^2$ točka i $T' \in \mathbb{R}^2$ njezina slika u odnosu na danu transformaciju P_A. Neka je $\vec{u} = \overrightarrow{OT}$, gdje je O ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava. Vrijedi da je $P_A(\vec{u}) = A\vec{u} = A(\overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{OT'}$. Budući da je

$$\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OT'} = -\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OT'} = -\vec{u} + A\vec{u} = (A - I_2)\vec{u}$$

slijedi

$$P_A(\overrightarrow{TT'}) = A(\overrightarrow{TT'}) = A((A - I_2)\vec{u}) = A(A - I_2)\vec{u} = (A^2 - A)\vec{u} = (A - A)\vec{u} = \vec{0}.$$

Dakle, $\vec{TT'} \in \mathrm{Ker}P_A$, odakle zaključujemo da se projekcija točke T u točku T' odvija u smjeru pravca $\mathrm{Ker}P_A$.

4. Uočimo da se svaki vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ može zapisati kao zbroj dvaju vektora $\vec{u_1} = \vec{u} - P_A(\vec{u})$ i $\vec{u_2} = P_A(\vec{u})$. Pritom je

$$P_A(\vec{u_1}) = P_A(\vec{u} - P_A(\vec{u})) = P_A(\vec{u}) - (P_A \circ P_A)(\vec{u}) = P_A(\vec{u}) - P_A(\vec{u}) = \vec{0}$$

pa je $\vec{u_1} \in \mathrm{Ker}P_A$. Jasno je da je $\vec{u_2} \in \mathrm{Im}P_A$. Preostaje pokazati da je rastav vektora $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ na zbroj dvaju vektora, od kojih jedan pripada $\mathrm{Ker}P_A$ a drugi $\mathrm{Im}P_A$, jedinstven. Neka je $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi $\vec{u} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, gdje $x_1 \in \mathrm{Ker}P_A$ i $x_2 \in \mathrm{Im}P_A$ te $\vec{u} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$, gdje $y_1 \in \mathrm{Ker}P_A$ i $y_2 \in \mathrm{Im}P_A$. Iz

$$\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$$

slijedi

$$\vec{x_1} - \vec{y_1} = \vec{y_2} - \vec{x_2}\,,$$

gdje

$$\vec{x_1} - \vec{y_1} \in \mathrm{Ker}P_A, \quad \vec{y_2} - \vec{x_2} \in \mathrm{Im}P_A\,.$$

Znamo da je $\mathrm{Ker}P_A \cap \mathrm{Im}P_A = \{\vec{0}\}$, pa je

$$\vec{x_1} - \vec{y_1} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \vec{y_2} - \vec{x_2} = \vec{0}$$

tj.

$$\vec{x_1} = \vec{y_1} \quad \text{i} \quad \vec{y_2} = \vec{x_2}\,,$$

pa je prikaz jedinstven, što je i trebalo pokazati.

5. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A. Tada postoji $\vec{x} \neq \vec{0}$ takav da vrijedi $P_A(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Odavde slijedi

$$A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda^2\vec{x}.$$

S druge strane,

$$A^2\vec{x} = A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

pa slijedi da je $\lambda^2\vec{x} = \lambda\vec{x}$, tj. $\lambda^2 = \lambda$. Dakle, $\lambda \in \{0, 1\}$. Pretpostavimo da su obje svojstvene vrijednosti matrice A jednake nuli. Tada je matrica A slična matrici $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, gdje je $t = 0$ ili $t = 1$. Slijedi da je matrica A^2 slična matrici $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Budući da je $A^2 = A$, matrica A je slična nul-matrici, tj, $A = O_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. Ako su obje svojstvene vrijednosti matrice A jednake 1, onda je A slična matrici

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gdje je $t = 0$ ili $t = 1$. Dakle, postoji $T \in M_2(\mathbb{R})$ takva da je $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tada je

$$T^{-1}(A - I_2)T = T^{-1}AT - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je

$$T^{-1}(A - I_2)^2T = (T^{-1}(A - I_2)T)(T^{-1}(A - I_2)T) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odakle slijedi $(A - I_2)^2 = O_2$ tj. $A^2 - 2A + I_2 = O_2$. Budući da je $A^2 = A$ imamo $A - 2A + I_2 = O_2$, tj. $A = I_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema da je $A \neq I_2$. Zaključujemo da je jedna svojstvena vrijednost matrice A jednaka 0, a druga 1, pa je $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

Primjer 3.1.8. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi da je $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Da bi dana matrica bila matrica projekcije ravnine, mora vrijediti da je A idempotentna, tj. da je $A^2 = A$. Tada je*

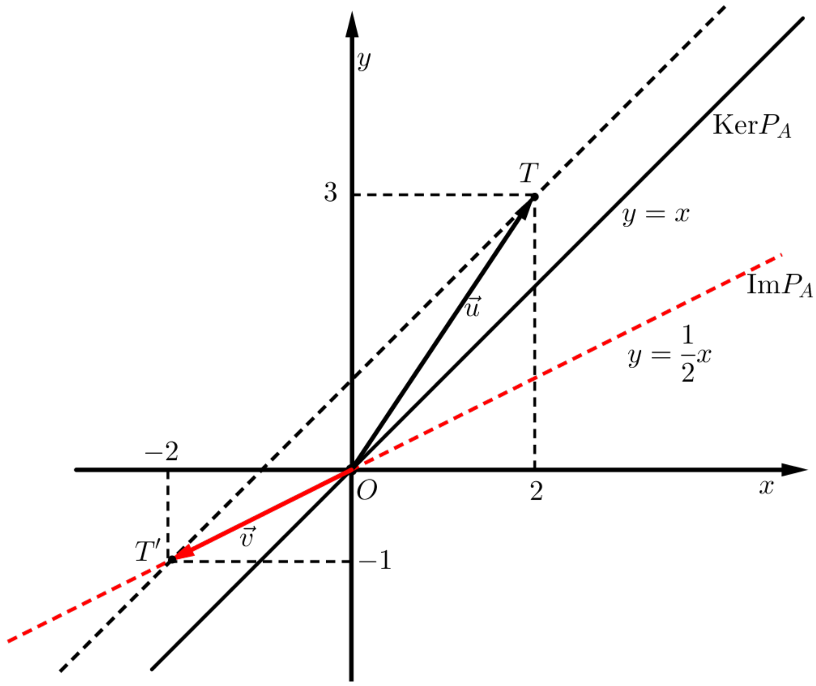
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + a & 2a + ab \\ 2 + b & a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = A,$$

odakle lako slijedi $a = -2$, $b = -1$.

Tada je prema teoremu 3.1.5 definirana projekcija $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takva da je

$$P_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x - y \end{pmatrix},$$

pa je P_A projekcija na pravac $y = \frac{1}{2}x$ u smjeru pravca $y = x$. Kako izgleda slika $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektora $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, prikazano je na Slici 24.



Slika 24: rješenje primjera 3.1.8

3.2 Zrcaljenja ravnine

Definicija 3.2.1. *Linearna transformacija $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi $S \circ S = I_{\mathbb{R}^2}$, tj. $S = S^{-1}$ naziva se* ***involucija*** *ili* ***zrcaljenje ravnine****.*

Teorem 3.2.2. *Ako je $S_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija definirana matricom A, onda je S_A zrcaljenje ravnine ako i samo ako je A matrica involucije tj. vrijedi $A^2 = I_2$.*

Dokaz. Neka je $S_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija definirana matricom A. Prema teoremu 1.3.6, $S_A \circ S_A$ je linearna transformacija određena matricom $AA = A^2$. Budući da je S_A zrcaljenje ravnine, vrijedi $S_A \circ S_A = I_{\mathbb{R}^2}$, pa je matrica linearne transformacije $S_A \circ S_A$ matrica I_2. Slijedi da je $A^2 = I_2$. Obrnuto, neka je $A^2 = I_2$ i $S_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija definirana matricom S_A. Prema teoremu 1.3.6 linearna transformacija $S_A \circ S_A$ je određena matricom $A^2 = I_2$, pa slijedi $S_A \circ S_A = I_{\mathbb{R}^2}$, tj. S_A je zrcaljenje ravnine. □

Prije definiranja svih zrcaljenja ravnine, određujemo izgled njihovih odgovarajućih matrica. Budući da će za zrcaljenja ravnine vrijediti da su određene matricama involucije, u idućem teoremu određujemo sve takve matrice.

Teorem 3.2.3. *Matrica* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *je matrica involucije ako i samo ako je jednog od idućih oblika:*

1. $A_1 = -I_2$*;*
2. $A_2 = I_2$*;*
3. $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$*;*
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$*;*
5. $A_5 = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$

Dokaz. Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Da bi matrica A bila matrica involucije, mora vrijediti $A^2 = I_2$, tj.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdje množenjem matrica dobivamo

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odakle slijedi sustav

$$\begin{cases} a^2+bc &= 1 \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \\ bc+d^2 &= 1 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Ako u (3.4) vrijedi $a + d \neq 0$, tada je $b = c = 0$, $a^2 = d^2 = 1$ tj. $a, d \in \{-1, 1\}$. Za $a = d = 1$, slijedi da je matrica A oblika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je $A = A_2 = I_2$.

Za $a = d = -1$ matrica A je oblika

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pa je $A = A_1 = -I_2$.

Ako u (3.4) vrijedi $a + d = 0$, tada je $d = -a$. Za $b = 0$ slijedi da $a^2 = d^2 = 1$, pa je uz $a = -1$ i $d = 1$ matrica A oblika

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

pa je $A = A_3$.

Za $a = 1$ i $d = -1$ matrica A je oblika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

pa je $A = A_4$.

Za $b \neq 0$, u (3.4) dobivamo $c = \dfrac{1-a^2}{b}$, pa je za $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ matrica A oblika

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix},$$

odnosno $A = A_5$. □

Teorem 3.2.4. *Zrcaljenja ravnine su linearne transformacije* $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definirane s:*

1. $S_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$;

2. $S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

3. $S_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ cx + y \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$;

4. $S_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx - y \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$;

5. $S_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \dfrac{1-a^2}{b}x - ay \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

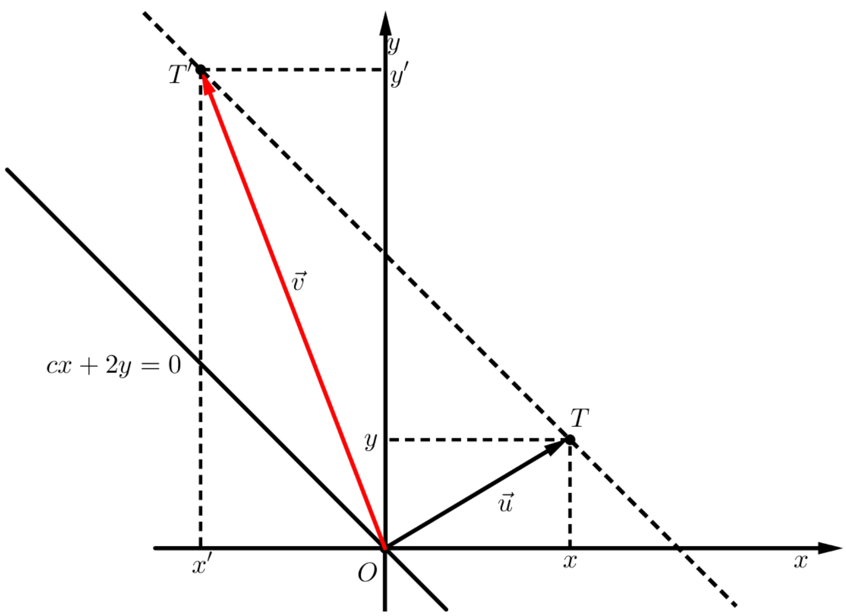
Dokaz. Analogno kao i u dokazu teorema 3.1.5 lako se pokaže da su navedene linearne transformacije zrcaljenja ravnine. □

Napomena 3.2.5. *Geometrijski gledano, zrcaljenja ravnine definirana u teoremu 3.2.4 možemo interpretirati na idući način.*

Neka je $S_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zrcaljenje ravnine zadano s* $S_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. *Kao što smo u prethodnom poglavlju vidjeli, na ovaj način je definirana centralna simetrija s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava.*

Neka je $S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zrcaljenje ravnine zadano s* $S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Takvo zrcaljenje je identiteta koja preslikava sve točke ravnine u njih same.*

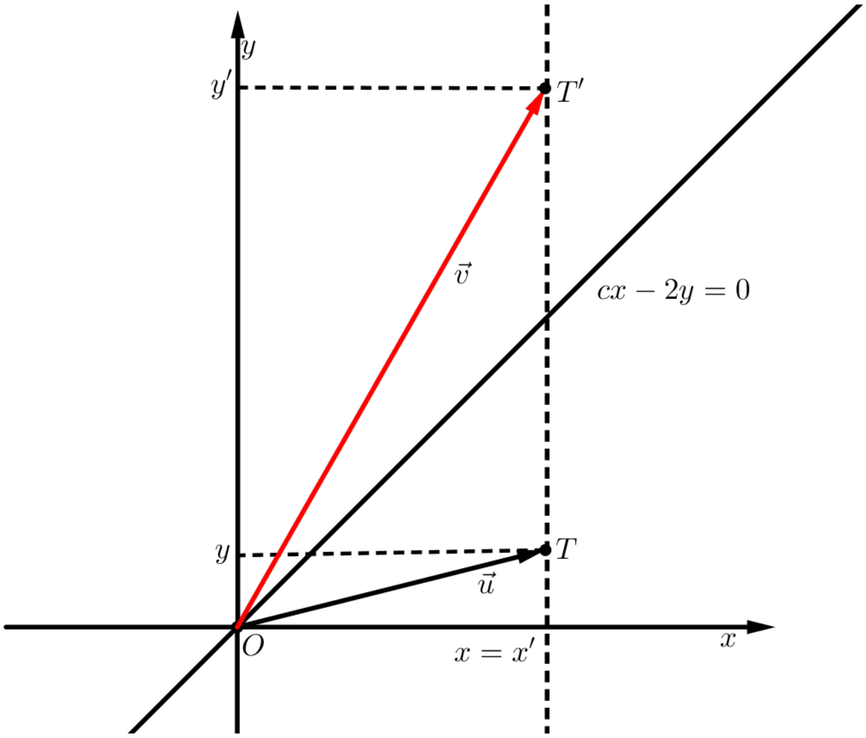
Neka je $S_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zrcaljenje ravnine zadano s* $S_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ cx + y \end{pmatrix}$. *Vektor* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *se zadanim zrcaljenjem preslikava u vektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ cx + y \end{pmatrix}$, *kao na Slici 25.*



Slika 25: zrcaljenje u odnosu na y-os u smjeru pravca $cx + 2y = 0$

Lako se provjeri da je S_3 ***zrcaljenje u odnosu na*** y***-os u smjeru pravca*** $cx + 2y = 0$.

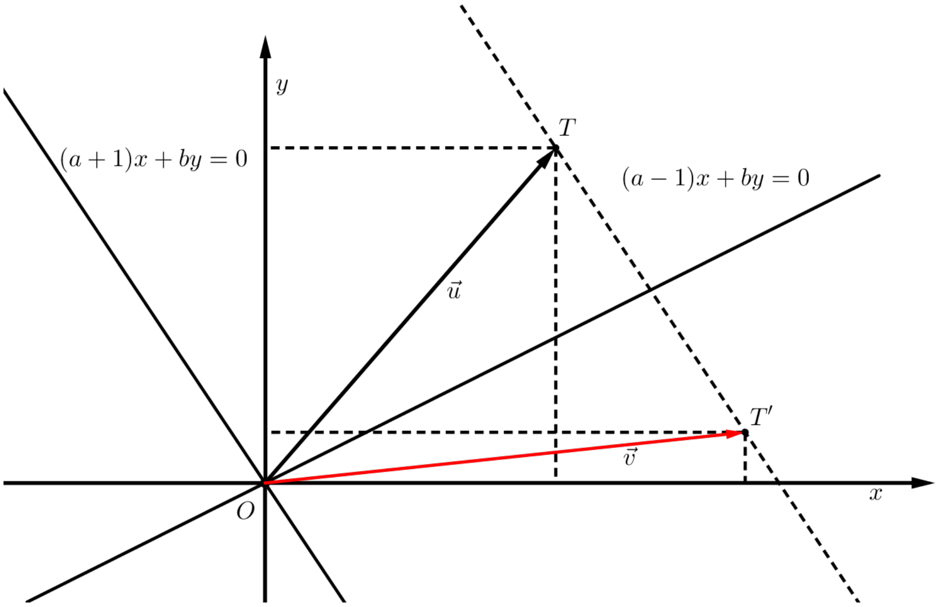
Neka je $S_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zrcaljenje ravnine zadano s* $S_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx - y \end{pmatrix}$. *Vektor* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *se zadanim zrcaljenjem preslikava u vektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ cx - y \end{pmatrix}$, *kao na Slici 26.*



Slika 26: zrcaljenje u odnosu na pravac $cx - 2y = 0$ u smjeru y osi

Lako se provjeri da je S_4 ***zrcaljenje u odnosu na pravac*** $cx - 2y = 0$ ***u smjeru*** y ***osi****.*

Neka je $S_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje ravnine zadano s $S_5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \frac{1-a^2}{b}x - ay \end{pmatrix}$. Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se zadanim zrcaljenjem preslikava u vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \frac{1-a^2}{b}x - ay \end{pmatrix}$, kao na Slici 27.



SLlika 27: zrcaljenje u odnosu na pravac $(a-1)x+by=0$ u smjeru pravca $(a+1)x+by=0$

Lako se provjeri da je S_5 ***zrcaljenje u odnosu na pravac*** $(a-1)x+by=0$ ***u smjeru pravca*** $(a+1)x+by=0$.

Teorem 3.2.6. *Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A^2 = I_2$, $A \neq I_2$ i $A \neq -I_2$. Neka je*

$$S_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad S_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tada vrijede iduće tvrdnje.

1. $\mathrm{Inv}S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : S_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \right\}$ *je pravac.*

2. $\mathrm{Fix}S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : S_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ *je pravac.*

3. *S_A je zrcaljenje ravnine s obzirom na pravac* $\mathrm{Fix}S_A$ *u smjeru pravca* $\mathrm{Inv}S_A$.

4. *Svaki vektor* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *može se jedinstveno prikazati kao suma dvaju vektora koji leže na pravcima* $\mathrm{Fix}S_A$ *i* $\mathrm{Inv}S_A$.

5. *Jordanova kanonska forma matrice involucije A, sa svojstvom $A \neq I_2$ $A \neq -I_2$ dana je s* $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dokaz. 1. Promatramo matricu $A + I_2$. Ako je $\mathrm{r}(A + I_2) = 2$, onda je $A + I_2$ regularna, pa postoji $(A + I_2)^{-1}$. Vrijedi

$$(A + I_2)(A + I_2)^{-1} = I_2 \,. \tag{3.5}$$

Pomnožimo li jednadžbu (3.5) slijeva s $(A + I_2)$, dobivamo

$$(A + I_2)^2(A + I_2)^{-1} = A + I_2 \,,$$

pa je

$$\begin{aligned}(A^2 + 2A + I_2)(A + I_2)^{-1} &= A + I_2,\\ (2A + 2I_2)(A + I_2)^{-1} &= A + I_2,\\ 2(A + I_2)(A + I_2)^{-1} &= A + I_2,\\ 2I_2 &= A + I_2,\end{aligned}$$

odakle slijedi da je $A = I_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $A \neq I_2$. Kako je osim toga $A + I_2 \neq O_2$, zaključujemo da je $\mathrm{r}(A + I_2) = 1$. Prema teoremu o rangu i defektu, slijedi $\dim(\mathrm{Ker}(S_A + I_2))= 1$, pa postoji $\vec{n_0} \neq \vec{0}$ takav da vrijedi $(S_A + I_2)\vec{n_0} = \vec{0}$. Sada je

$$(S_A + I_2)\vec{n_0} = \vec{0} \iff S_A\vec{n_0} = -I_2\vec{n_0} \iff S_A\vec{n_0} = -\vec{n_0} \,.$$

Stoga je $\mathrm{Ker}(S_A + I_2) = \{\alpha\vec{n_0} : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Tvrdimo da je $\mathrm{Inv}S_A = \{\alpha\vec{n_0} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, tj. da je $\mathrm{Inv}S_A$ pravac.

Neka je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Inv}S_A$. Tada je $S_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Slijedi da je $(S_A + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(S_A + I_2)$. Za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\vec{n_0}$.

Obrnuto, neka je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\vec{n_0}$, za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(S_A + I_2)$, pa je $(S_A + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. $S_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Slijedi da je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Inv}S_A$, čime je pokazana tvrdnja. Dakle, $\mathrm{Inv}S_A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : S_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}\right\}$ je pravac.

2. Budući da je $A \neq \pm I_2$, zaključujemo da je $\mathrm{r}(A - I_2) = 1$, pa je $\mathrm{Ker}(S_A - I_2) = \{\alpha\vec{n_0} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, za neki $\vec{n_0} \neq \vec{0}$. Definiramo skup $\mathrm{Fix}S_A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : S_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\}$ te lako pokažemo da je $\mathrm{Ker}(S_A - I_2) = \mathrm{Fix}S_A$, tj. tvrdnju da je $\mathrm{Fix}S_A$ pravac.

3. Neka je $T \in \mathbb{R}^2$ točka i $T' \in \mathbb{R}^2$ njezina slika u odnosu na danu transformaciju S_A. Neka je $\vec{u} = \vec{OT}$, gdje je O ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava. Vrijedi da je $S_A(\vec{u}) = A\vec{u} = A(\vec{OT}) = \vec{OT'}$. Budući da je

$$\vec{TT'} = \vec{TO} + \vec{OT'} = -\vec{OT} + \vec{OT'} = -\vec{u} + A\vec{u} = (A - I_2)\vec{u}$$

slijedi

$$S_A(\vec{TT'}) = A(\vec{TT'}) = A((A - I_2)\vec{u}) = A(A - I_2)\vec{u} = (A^2 - A)\vec{u} = (I_2 - A)\vec{u} = -\vec{TT'}.$$

Dakle, $\vec{TT'} \in \mathrm{Inv}S_A$, odakle zaključujemo da se zrcaljenje točke T u točku T' odvija u smjeru pravca $\mathrm{Inv}S_A$. Preostaje pokazati da se zrcaljenje odvija s obzirom na pravac $\mathrm{Fix}S_A$. Neka je P polovište dužine $\overline{TT'}$. Dovoljno je pokazati da $\vec{OP} \in \mathrm{Fix}S_A$. Kako je $\vec{OP} = \frac{1}{2}\Big(\vec{OT} + \vec{OT'}\Big)$, slijedi

$$S_A(\vec{OP}) = A(\vec{OP}) = A\Big(\frac{1}{2}(\vec{OT} + \vec{OT'})\Big) = A\Big(\frac{1}{2}(\vec{OT} + A(\vec{OT}))\Big) = \frac{1}{2}\Big(A(\vec{OT}) + A^2(\vec{OT})\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\vec{OT'} + \vec{OT}\Big) = \vec{OP}$$

tj. $\vec{OP} \in \mathrm{Fix}S_A$.

4. Neka je $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Stavimo $\vec{x_1} = \frac{1}{2}(\vec{x} - S_A(\vec{x}))$, $\vec{x_2} = \frac{1}{2}(\vec{x} + S_A(\vec{x}))$. Tada je $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ te vrijedi

$$S_A(\vec{x_1}) = S_A\Big(\frac{1}{2}(\vec{x} - S_A(\vec{x}))\Big) = \frac{1}{2}\Big(S_A(\vec{x}) - (S_A \circ S_A)(\vec{x})\Big) = \frac{1}{2}\Big(S_A(\vec{x}) - \vec{x}\Big) = -\vec{x_1},$$

$$S(\vec{x_2}) = S_A\Big(\frac{1}{2}(\vec{x} + S_A(\vec{x})\Big) = \frac{1}{2}\Big(S_A(\vec{x}) + (S_A \circ S_A)(\vec{x})\Big) = \frac{1}{2}\Big(S_A(\vec{x}) + \vec{x}\Big) = \vec{x_2},$$

pa je $\vec{x_1} \in \mathrm{Inv}S_A$ i $\vec{x_2} \in \mathrm{Fix}S_A$. Preostaje pokazati da je takav prikaz jedinstven. Neka je $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, gdje $x_1 \in \mathrm{Inv}S_A$ i $x_2 \in \mathrm{Fix}S_A$ te $\vec{x} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$, gdje $y_1 \in \mathrm{Inv}S_A$ i $y_2 \in \mathrm{Fix}P_A$. Iz

$$\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$$

slijedi

$$\vec{x_1} - \vec{y_1} = \vec{y_2} - \vec{x_2}, \tag{3.6}$$

gdje $\vec{x_1} - \vec{y_1} \in \mathrm{Inv}S_A$, $\vec{y_2} - \vec{x_2} \in \mathrm{Fix}S_A$. Budući da je $\mathrm{Inv}S_A \cap \mathrm{Fix}(S_A) = \{0\}$, slijedi

$$\vec{x_1} - \vec{y_1} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \vec{y_2} - \vec{x_2} = \vec{0}$$

pa je

$$\vec{x_1} = \vec{y_1} \quad \text{i} \quad \vec{y_2} = \vec{x_2}\,,$$

tj. prikaz jedinstven, što je i trebalo pokazati.

5. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A. Tada postoji $\vec{x} \neq \vec{0}$ takav da vrijedi $S_A(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Budući da je matrica A matrica involucije, slijedi

$$A^2\vec{x} = \vec{x}\,.$$

S druge strane,

$$A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda^2\vec{x}\,.$$

pa slijedi da je $\lambda^2\vec{x} = \vec{x}$, tj. $\lambda \in \{-1, 1\}$. Pretpostavimo da su obje svojstvene vrijednosti marice A jednake -1. Tada je matrica A slična matrici $\begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, gdje je $t = 0$ ili $t = 1$. Slijedi da je A^2 slična matrici $\begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. No, $A^2 = I_2$, pa mora biti $-2t = 0$, tj. $t = 0$. Tada je $A = -I_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Ako su obje svojstvene vrijednosti matrice A jednake 1, onda je A slična matrici $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, gdje je $t = 0$ ili $t = 1$. Slijedi da je A^2 slična matrici $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Međutim, $A^2 = I_2$, pa slijedi $t = 0$. Tada je $A = I_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Zaključujemo da je jedna svojstvena vrijednost matrice A jednaka 1 a druga -1, pa je $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordanova kanonska forma matrice A. □

3.3 Još neki rezultati o projekcijama i zrcaljenjima ravnine

Teorem 3.3.1. *Ako je $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projekcija ravnine, tada je $S_B = 2P_A - I_{\mathbb{R}^2}$ involucija i obrnuto, ako je $S_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje ravnine, tada je $P_A = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{R}^2} + S_B)$ projekcija ravnine, gdje je $I_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identiteta.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrica projekcije P_A. Tada vrijedi $A^2 = A$. Ako je $B = 2A - I_2$ tada je

$$B^2 = 4A^2 - 4A + I_2 = 4A - 4A + I_2 = I_2\,,$$

pa je matrica B matrica involucije S_B. S druge strane, ako je $B \in M_2(\mathbb{R})$ matrica involucije S_B, tada za $A = \frac{1}{2}(I_2 + B)$ vrijedi

$$A^2 = \frac{1}{4}(I_2 + 2B + B^2) = \frac{1}{4}(I_2 + 2B + I_2) = \frac{1}{2}(I_2 + B) = A\,,$$

pa je A matrica projekcije P_A. Time je teorem dokazan. $\square$

Teorem 3.3.2. *Neka su $p_1 \ldots ax + by = 0$ i $p_2 \ldots cx + dy = 0$ pravci kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, takvi da vrijedi $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$. Tada vrijedi iduće.*

1. *Projekcija ravnine na pravac p_1 u smjeru pravca p_2 je linearna transformacija $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana s*
$$P_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-bcx - bdy}{ad - bc} \\ \dfrac{acx + ady}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$
2. *Zrcaljenje ravnine s obzirom na pravac p_1 u smjeru pravca p_2 je linearna transformacija $S_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana s*
$$S_B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-(ad + bc)x - 2bdy}{ad - bc} \\ \dfrac{2acx + (ad + bc)y}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Prema teoremu 3.1.7, za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ postoje jedinstveni $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in p_1$ te $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in p_2$ takvi da vrijedi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Budući da vrijedi $\mathrm{Im}P_A = \mathrm{Fix}S_B = p_1$ te $\mathrm{Ker}P_A = \mathrm{Inv}S_B = p_2$, slijedi $P_A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $P_A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ te $S_B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i $S_B\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, pa je

$$P_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad S_B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Rješavanjem sustava

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax_1 + by_1 & = & 0 \\ cx_2 + dy_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & x \\ y_1 + y_2 & = & y \end{array} \right., \tag{3.7}$$

dobivamo

$$x_1 = \frac{-bcx - bdy}{ad - bc}, \qquad y_1 = \frac{acx + ady}{ad - bc}, \qquad x_2 = \frac{adx + bdy}{ad - bc}, \qquad y_2 = \frac{-acx - bcy}{ad - bc},$$

odakle slijedi

$$P_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-bcx - bdy}{ad - bc} \\ \dfrac{acx + ady}{ad - bc} \end{pmatrix} \quad \text{te} \quad S_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-(ad + bc)x - 2bdy}{ad - bc} \\ \dfrac{2acx + (ad + bc)y}{ad - bc} \end{pmatrix}.$$

Slijedi da su matrice A i B oblika

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -bc & -bd \\ ac & ad \end{pmatrix} \quad \text{te} \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -(ad + bc) & -2bd \\ 2ac & ad + bc \end{pmatrix}.$$

□

U daljnjem tekstu s A^T označavamo transponiranu matricu matrice A.

Teorem 3.3.3. *Neka su p_1, p_2, p_3 i p_4 pravci kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, takvi da $p_1 \perp p_3$ i $p_2 \perp p_4$.*

1. *Ako je A matrica projekcije ravnine na pravac p_1 u smjeru pravca p_2, onda je A^T matrica projekcije ravnine na pravac p_4 u smjeru pravca p_3.*
2. *Ako je B matrica zrcaljenja ravnine s obzirom na pravac p_1 u smjeru pravca p_2, onda je B^T matrica zrcaljenja ravnine s obzirom na pravac p_4 u smjeru pravca p_3.*

Dokaz. Neka su p_1, p_2, p_3 i p_4 pravci kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, takvi da $p_1 \perp p_3$ i $p_2 \perp p_4$. Za $p_1 \ldots ax + by = 0$ i $p_2 \ldots cx + dy = 0$ slijedi $p_3 \ldots -bx + ay = 0$ i $p_4 \ldots -dx + cy = 0$.

1. Prema teoremu 3.3.2, slijedi da je

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -bc & -bd \\ ac & ad \end{pmatrix}$$

matrica projekcije ravnine na pravac p_1 u smjeru pravca p_2.

Označimo s M matricu projekcije ravnine na pravac p_4 u smjeru pravca p_3. Tada je prema teoremu 3.3.2 ona oblika

$$M = \frac{1}{-ad + bc} \begin{pmatrix} bc & -ac \\ bd & -ad \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -bc & ac \\ -bd & ad \end{pmatrix}.$$

Očito slijedi da je $M = A^T$.

2. Analogno se dokazuje druga tvrdnja teorema. □

Pitamo se kada je linearna transformacija ortogonalna projekcija.

Teorem 3.3.4. *Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$, takva da $A \neq O_2$ i $A \neq I_2$. Projekcija $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonalna ako i samo ako je $A = A^T$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je P_A ortogonalna projekcija na pravac p_1 u smjeru pravca p_2. Tada je $p_1 \perp p_2$. Stavimo $p_3 := p_1$, $p_4 := p_1$. Tada je, prema teoremu 3.3.3, A^T matrica projekcije ravnine na pravac $p_4 (= p_1)$ u smjeru pravca $p_3 (= p_2)$. Dakle, $A = A^T$.

Obratno, neka je $P_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projekcija ravnine na pravac p_1 u smjeru pravca p_2, takva da vrijedi $A = A^T$. Neka su p_3 i p_4 pravci kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava takvi da je $p_1 \perp p_3$ i $p_2 \perp p_4$. Budući da je $A = A^T$, prema teoremu 3.3.3, matrica projekcije ravnine na pravac p_1 u smjeru pravca p_2 jednaka je matrici projekcije ravnine na pravac p_4 u smjeru pravca p_3. Stoga je $p_1 = p_4$ i $p_2 = p_3$, pa je $p_1 \perp p_2$, odnosno P_A je ortogonalna projekcija. □

Korolar 3.3.5. *Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$, takva da $A \neq O_2$ i $A \neq I_2$. Linearna transformacija $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ortogonalna projekcija ako i samo ako vrijedi $AA^T = A$.*

Dokaz. Ako je f_A ortogonalna projekcija, onda je, prema teoremu 3.1.3, $A^2 = A$ te prema teoremu 3.3.4 vrijedi $A = A^T$. Stoga je $AA^T = A$.

Obratno, pretpostavimo da je $AA^T = A$. Transponiranjem obiju strana ove jednakosti dobije se $AA^T = A$. Stoga je $A = A^T$ te $A^2 = A$. Prema teoremima 3.1.3 i 3.3.4 zaključujemo da je f_A ortogonalna projekcija. □

3.4 Izometrije ravnine

Linearnu transformaciju $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, zadanu s $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, sa svojstvom da za svaki $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, nazivamo **linearnom izometrijom ravnine**.

U nastavku ćemo pokazati da su linearne izometrije ravnine klasa linearnih transformacija koje čuvaju skalarni produkt, kutove između vektora te njihove duljine.

Za $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, takve da $T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$ i $T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}$, tvrdimo da je

$$x_1x_2 + y_1y_2 = x_1'x_2' + y_1'y_2' .$$

Budući da je

$$T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ y_1' + y_2' \end{pmatrix} ,$$

prema definiciji linearne izometrije slijedi

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (x_1' + x_2')^2 + (y_1' + y_2')^2 .$$

Odavde dobivamo

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = x_1'^2 + 2x_1'x_2' + x_2'^2 + y_1'^2 + 2y_1'y_2' + y_2'^2 .$$

Budući da je $x_1^2 + y_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2$ i $x_2^2 + y_2^2 = x_2'^2 + y_2'^2$ slijedi

$$x_1x_2 + y_1y_2 = x_1'x_2' + y_1'y_2' , \tag{3.8}$$

pa zaključujemo da linearna izometrija čuva skalarni produkt. Označimo li s α kut između vektora $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ te s α' kut između vektora $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$ i $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}$, tada je

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad \text{i} \quad \cos\alpha' = \frac{x_1'x_2' + y_1'y_2'}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}} .$$

Iz (3.8) i definicije linearne izometrije, slijedi jednakost mjera kutova α i α'.

Želimo li pokazati da linearna izometrija čuva duljine vektora, dovoljno je pokazati da ona čuva udaljenosti između njihovih krajnjih točaka. Neka su dane točke $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ koje se linearnom izometrijom T preslikaju u točke $E'(x_1', y_1')$ i $F'(x_2', y_2')$. Tada vrijedi $\mathrm{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \mathrm{d}((x_1', y_1'), (x_2', y_2'))$ ako i samo ako $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2$, što slijedi iz (3.8).

Pitamo se koja svojstva matrica linearne transformacije mora zadovoljavati da bi linearna transformacija bila izometrija.

Teorem 3.4.1. *Linearna transformacija $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je izometrija ako i samo ako je matrica A linearne transformacije T_A oblika*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \textit{ili} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Dokaz. Neka je $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija takva da je T_A izometrija i njezina matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, gdje $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Za svaki $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ slijedi $T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$. Budući da je T_A izometrija, slijedi

$$x^2 + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 ,$$

pa je

$$x^2 + y^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2,$$

tj.

$$x^2 + y^2 = (a^2 + c^2)x^2 + (2ab + 2cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 \,.$$

Slijedi da je $a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1$ te $ab + cd = 0$, pa postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$ te $b = \sin\beta$, $d = \cos\beta$. Iz jednakosti $ab + cd = 0$ sada je

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = 0 \iff \sin(\alpha+\beta) = 0\,,$$

pa je $\alpha + \beta \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Za $\alpha + \beta = 0$ slijedi $\alpha = -\beta$, tj. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Za $\alpha + \beta = \pi$, tj. $\alpha = \pi - \beta$, matrica A je oblika $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Jasno je da vrijedi obrat ove tvrdnje, pa je time teorem dokazan. □

U prethodnom poglavlju smo pokazali da je izometrija opisana matricom $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, rotacija oko ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava za kut α. Izometriju opisanu matricom $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ poistovjećujemo s kompozicijom zrcanjenja u odnosu na x-os u smjeru y-osi i rotacije oko ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava za kut α, tj. $A = A_1A_2$ gdje je $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ i $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Općenito, funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, koja čuva udaljenost između točaka, ne nužno linearnu transformaciju, nazivamo **izometrijom ravnine**. Jedan primjer izometrije ravnine, koja nije linearna transformacija je translacija ravnine za dani vektor. Translacijom se ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava ne preslikava u samo sebe, pa ono više nije fiksna točka transformacije. Komponiranjem translacija i linearnih izometrija, definiramo novu klasu transformacija ravnine koju nazivamo afine transformacije.

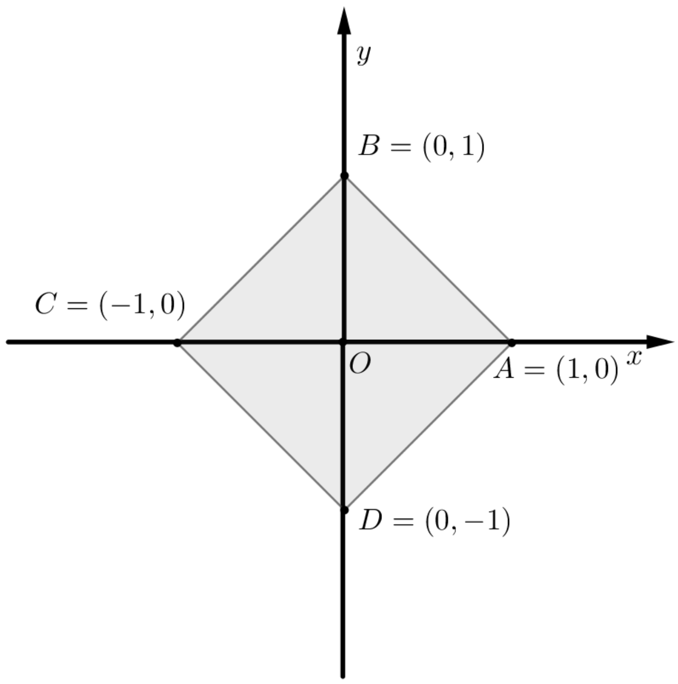
Primjer 3.4.2. *Pokažimo da je izometrija ravnine u potpunosti određena slikama triju nekolinearnih točaka.*

Označimo s $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^2$ tri nekolinearne točke u ravnini. Pokažimo najprije da je jedina izometrija F, koja zadovoljava svojstva $F(A_1) = A_1$, $F(A_2) = A_2$, $F(A_3) = A_3$, identiteta. Neka je $M \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna točka ravnine te r_1, r_2 i r_3 redom udaljenosti točke M od točaka A_1, A_2 i A_3. Budući da je $d(F(M), F(A_i)) = d(M, A_i) = r_i$, gdje je $i = 1, 2, 3$, slijedi da $F(M)$ dobivamo kao sjecište kružnica radijusa r_1, r_2 i r_3 sa središtima u A_1, A_2 i A_3. Budući da su središta opisanih kružnica nekolinearne točke, sjecište je jedinstveno, pa slijedi $F(M) = M$. Pretpostavimo da postoje dvije izometrije F_1 i F_2, za koje vrijedi $F_1(A_i) = F_2(A_i)$, gdje je $i = 1, 2, 3$. Tada je $(F_1^{-1} \circ F_2)(A_i) = A_i$, gdje je $i = 1, 2, 3$, pa je $F_1 = F_2$.

U idućem primjeru odredit ćemo izometrije kvadrata.

Primjer 3.4.3. *Neka je $\mathcal{S}$ skup svih točaka ravnine koje leže unutar kvadrata $ABCD$ ili na njegovim stranicama. Odredimo sve izometrije $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ kvadrata $ABCD$.*

Bez smanjenja općenitosti, kvadrat $ABCD$ smještamo u Kartezijev koordinatni sustav, tako da vrhovi kvadrata imaju koordinate $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ i $D(0,-1)$, kao na Slici 28.



Slika 28: primjer 3.4.3

Sa slike vidimo da je $\mathrm{d}(A,C) = \mathrm{d}(B,D) = 2$*, pa za traženu izometriju f mora vrijediti* $\mathrm{d}(f(A), f(C)) = \mathrm{d}(f(B), f(D)) = 2$*. Dakle, vrhovi kvadrata $ABCD$ preslikavaju se u $f(A), f(C)$ te $f(B), f(D)$, u parovima nasuprotne vrhove kvadrata. Za odabir slike $f(A)$ iz skupa $\{A, B, C, D\}$ imamo 4 načina. Budući da je $f(C)$ vrh nasuprotan vrhu $f(A)$ slijedi da za odabir vrha $f(B)$ imamo 2 načina. Posljednji vrh $f(D)$ je opisanim postupkom određen. Na taj način odredili smo* $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ *različitih izometrija kvadrata $ABCD$.*

Neka je točka $M \in \mathcal{S}$ *takva da* $M \notin \{A, B, C, D\}$. *Budući da je izometrija ravnine u potpunosti određena slikama triju nekolinearnih točaka, slijedi da je točka M u potpunosti određena udaljenostima do vrhova A, B i C.*

Neka je $d(M, A) = a$, $d(M, B) = b$ *te* $d(M, C) = c$. *Točka M je presjek kružnica sa središtima u* A, B *i* C *te radijusima* a, b *i* c *respektivno. Slijedi da je točka* $f(M)$ *presjek kružnica sa središtima u* $f(A), f(B)$ *i* $f(C)$, *radijusa* a, b *i* c *respektivno. Dakle, sva preslikavanja točaka unutar kvadrata, prikazujemo pomoću 8 izometrija vrhova, a to su:*

1. $f(A) = A, f(C) = C, f(B) = B$ *i* $f(D) = D$, *pa je* f *identiteta;*

2. $f(A) = A, f(C) = C, f(B) = D$ *i* $f(D) = B$, *pa je* f *zrcaljenje s obzirom na x-os u smjeru y-osi;*

3. $f(A) = C, f(C) = A, f(B) = B$ *i* $f(D) = D$, *pa je* f *zrcanjenje s obzirom na y-os u smjeru x-osi;*

4. $f(A) = C, f(C) = A, f(B) = D$ *i* $f(D) = B$, *pa je* f *centralna simetrija s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava;*

5. $f(A) = B, f(C) = D, f(B) = A$ *i* $f(D) = C$, *pa je* f *zrcaljenje s obzirom na pravac* $y = x$ *u smjeru pravca* $y = -x$;

6. $f(A) = B, f(C) = D, f(B) = C$ *i* $f(D) = A$, *pa je* f *rotacija oko ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava za kut* $\frac{\pi}{2}$;

7. $f(A) = D, f(C) = B, f(B) = C$ *i* $f(D) = A$, *pa je* f *zrcaljene s obzirom na pravac* $y = -x$ *u smjeru pravca* $y = x$;

8. $f(A) = D, f(C) = B, f(B) = A$ *i* $f(D) = C$, *pa je* f *rotacija oko ishodišta Kartezijevog koordinatnog sustava za kut* $-\frac{\pi}{2}$.

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, E. Špalj i J. Anić, *1. vježbenica: Geometrija 1 i Geometrija 2*, XV gimnazija, 2016, https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/1_vjezbenica_USB.pdf.

[2] T. Bedeković, B. Jandras i D. Žubrinić, *Matrične transformacije ravnine*, Math.e **1** (2004).

[3] O. Bretscher, *Linear Algebra with Applications*, Pearson Education Inc., 2013.

[4] N. Elezović, *Primijenjena matematika 1 - Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1995.

[5] D.C. Lay, S.R. Lay i J.J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, 2016.

[6] V. Pop i O. Furdui, *Square Matrices of Order 2: Theory, Applications, and Problems*, Springer, 2017.

[7] G. Sanders, *3Blue1Brown: Essence of Linear Algebra*, 2019, https://www.3blue1brown.com/, posjećena 6. 11. 2019.

[8] R. Scitovski, I. Kuzmanović i Z. Tomljanović, *Linearni operatori u ravnini*, http://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo_2.pdf, posjećena 6. 11. 2019.

[9] F. Zhang, *Matrix theory: Basic Results and Techniques*, Springer Science & Business Media, New York, 2011.

Sažetak

Iz veze linearnih transformacija i matrica proizlaze najvažnije primjene linearnih transformacija u rješavanju problema u ravnini. U prva dva poglavlja rada, određujemo matrice specijalnih linearnih transformacija ravnine kao što su centralna i osna simetrija ravnine, rotacija i homotetija te ortogonalna projekcija ravnine. U posljednjem poglavlju opisujemo sve projekcije i zrcaljenja ravnine te njihovu vezu s idempotentnim matricama i matricama involucije. Na kraju rada, opisujemo linearne izometrije ravnine.

Summary

The most important applications of linear transformations in plane geometry, arise from describing them using matrices. In first two chapters, we determine matrix representations of special linear transformations of the plane, such as central and axial symmetry of the plane, rotation, uniform scaling and orthogonal projection. In the last chapter we describe projections and reflections of the plane and their connection to idempotent and involutory matrices. In the last section we describe linear isometries of the plane.

Životopis

Rođena sam 18. lipnja 1989. godine u Zagrebu. Odrasla sam u Zaprešiću, gdje sam završila Osnovnu školu Antuna Augustinčića. Srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u Gimnaziji Lucijana Vranjanina u Zagrebu, gdje sam završila jezični smjer. 2008. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike, na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2012. godine mijenjam smjer i upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički. Studij završavam 2016. godine te upisujem diplomski sveučilišni studij matematike i informatike, smjer nastavnički. Trenutno sam zaposlena u Osnovnoj školi Antuna Augustinčića, na mjestu učiteljice matematike.