Starogrčka geometrijska algebra

Smrk, Ines

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ines Smrk

STAROGRČKA GEOMETRIJSKA ALGEBRA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Franka Miriam Brückler,
doc. dr. sc.

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Zlatnim razdobljem starogrčke matematike smatra se razdoblje od Talesa (oko 600. pr. Kr.) do Apolonija (oko 200. pr. Kr.). Tales iz Mileta, prvi filozof i jedan od „sedam Mudraca" stare Grčke, rođen je u Miletu u antičkoj pokrajini Joniji. Za vrijeme vladavine egipatske XXVI. dinastije putovao je u Egipat, koji se smatrao izvorom mudrosti, i tamo učio od egipatskih svećenika. Da je Egipat bio dobar izvor znanja pokazuje i tradicionalna tvrdnja da je Tales savjetovao Pitagoru, u kojem je vidio puno potencijala, da ode učiti od egipatskih svećenika. Prvi spomen matematike u antičkoj Grčkoj bio je na području Jonije[1]. U početku su koristili uglavnom znanja i elemente matematike koje su usvojili pod utjecajem Egipćana, no ubrzo su počeli stvarati svoje doprinose. Glavnina grčke matematike odnosila se na geometriju i navodno je Tales postavio temelje za njezin razvoj. Prvi sačuvani pisani tragovi o pojavi matematike u Grčkoj su Euklidovi *Elementi* (oko 300. g. pr. Kr.).

Grčki matematičari bavili su se raznim problemima, a mnogi od njih i njihovi načini rješavanja danas se nazivaju geometrijskom algebrom. Naime, radi se o nizu geometrijskih problema koji bi se u suvremeno doba interpretirali, opisivali i rješavali algebarski. U njih posebice spadaju tzv. tri klasična problema starogrčke matematike koji su postavljeni tijekom atenskog razdoblja (5. i 4. st. pr. Kr.) te sadržaj II. knjige *Elemenata*. Jens Høyrup u svome istraživanju [6] navodi da su mnogi matematičari koristili izraz „geometrijska algebra", ali ne u kontekstu u kojem bi trebao biti korišten, već samo u smislu prilagodbe određenog algebarskog postupka. On navodi da danski matematičar Hans Georg Zeuthen taj izraz koristi u pravom smislu riječi u svome djelu *Antička nauka o konikama (Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum)* iz 1886. godine te se zbog toga smatra da upravo od njega potječe naziv geometrijska algebra.

[1] To je područje oko današnjeg turskog grada Izmira.

Ovaj diplomski rad podijeljen je u pet poglavlja. U prvom poglavlju ćemo se osvrnuti na neke klasične konstrukcije ravnalom i šestarom koje su bile poznate u antičko grčko doba. U drugom poglavlju opisuju se izvorni pristupi trima klasičnim problemima i pokušaji njihova rješavanja. U trećem poglavlju posvećujemo se Euklidovim *Elementima*[2], a posebno njihovoj drugoj knjizi. Četvrto poglavlje sadrži dokaz nesumjerljivosti stranice i dijagonale kvadrata te Apolonijevu teoriju konika, dok se u petom poglavlju nalazi Descartesovo shvaćanje geometrijske algebre, dokaz ekvivalencije euklidskih konstrukcija s rješavanjem algebarskih kvadratnih jednadžbi te dokaz nerješivosti tri klasična problema.

[2]Euklidove *Elemente* u ovom ćemo radu označavati pokratom EE. Pojedina knjiga EE bit će označena odgovarajućom rimskom brojkom, npr. EEII za drugu knjigu. Brojka iza označava propoziciju, npr. EEII1 je prva propozicija druge knjige EE; ako se radi o definiciji, umetnut ćemo slovo D između oznake knjige i broja definicije. Postulati i aksiomi bit će označeni odgovarajućim slovom i brojkom, npr. EEP5 je peti Euklidov postulat.

Poglavlje 1

Konstrukcije ravnalom i šestarom

Da bi geometrijska konstrukcija bila valjana, prema pravilu Platonove Akademije[1] ona mora biti izvediva u konačno mnogo koraka samo korištenjem neoznačenog ravnala i šestara. Ravnalo se koristilo samo za spajanje dviju točaka, a šestar za crtanje kružnice koja ima zadano središte i radijus. Točke su se mogle koristiti pri konstrukciji samo ako su nastale kao presjek prethodno konstruiranih pravaca i kružnica ili ako su zadane na početku problema. Danas takve konstrukcije nazivamo euklidskim i iz suvremene perspektive one su ekvivalentne rješavanju kvadratnih algebarskih jednadžbi[2] (vidi poglavlje 5.2).

Neke jednostavnije konstrukcije koje su izvedive korištenjem samo ravnala i šestara i koje su među grčkim matematičarima bile opće poznate u 5. st. pr. Kr. su sljedeće konstrukcije opisane u EE ([7])

- Jednakostranični trokut zadane duljine stranice $|AB|$ (slika 1.1, EEI1). Prema EEP3[3], opišemo kružnicu oko točke A s polumjerom $|AB|$ te oko točke B s istim polumjerom $|BA|$, njihov presjek označimo s C te prema EEP1[4] možemo povuči dužine $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$. Prema EED15[5], $\overline{AC}$ je jednaka $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ je jednaka $\overline{BA}$ pa prema EEA1[6] slijedi

[1] Platon je svoju Akademiju osnovao u Ateni najvjerojatnije 387. g. pr. Kr.

[2] Algebarska jednadžba je polinomijalna jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima. Rješenja algebarskih jednadžbi nazivaju se algebarski brojevi.

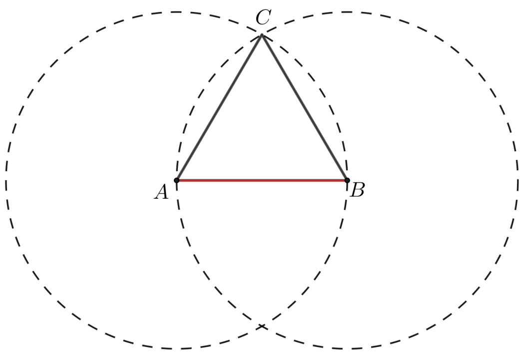
[3] EEP3 – Kružnica je zadana središtem i polumjerom.

[4] EEP1 – Dvije točke određuju dužinu.

[5] EED15 – Krug je lik u ravnini koji je obuhvaćen jednom crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne točke unutar lika međusobno jednake.

[6] EEA1 – Dvije stvari koje su jednake trećoj jednake su i jedna drugoj.

da je $\overline{CA}$ jednaka $\overline{CB}$, odnosno da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan i konstruiran na danoj stranici duljine $|AB|$.



Slika 1.1: Konstrukcija jednakostraničnog trokut

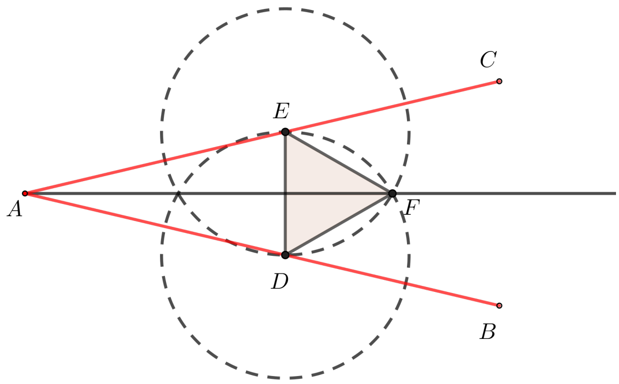
- Bisekcija kuta, odnosno podjela kuta na dva jednaka kuta (slika 1.2, EEI9)

  Neka je dani kut $\angle BAC$. Na AB uzmemo bilo koju točku D i prema EEA3[7] od $\overline{AC}$ oduzmemo $\overline{AE}$ jednaku $\overline{AD}$, spojimo $\overline{DE}$ i nad njom konstruiramo jednakostraničan trokut prema EEI (konstrukciji opisanoj u prethodnoj točki) te spojimo $\overline{AF}$. Dužina $\overline{AD}$ je jednaka $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ je zajednička, a osnovica $\overline{DF}$ jednaka je osnovici $\overline{EF}$ pa je prema EEI8[8] kut $\angle DAF$ jednak kutu $\angle EAF$.

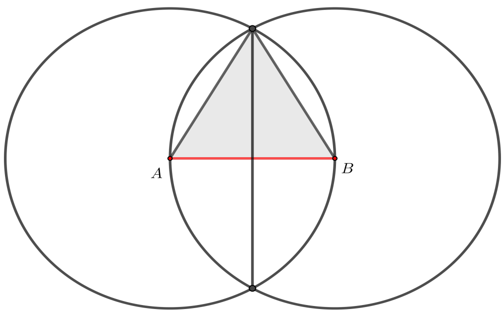
- Bisekcija dužine, odnosno konstrukcija simetrale dužine (slika 1.3, EEI10).

  Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Prema EEI1 na njoj konstruiramo jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ te prema EEI9 (prethodna točka našeg popisa) kut $\angle ACB$ podijelimo na dva jednaka dijela dužinom $\overline{CD}$. Dužina $\overline{AC}$ je jednaka $\overline{CB}$, dužina $\overline{CD}$ je zajednička, kut $\angle ACD$ jednak je kutu $\angle BCD$ pa je prema EEI4[9] i osnovica $\overline{AD}$ jednaka osnovici $\overline{BD}$, odnosno dužina $\overline{AB}$ podijeljena je u točki D na dva jednaka dijela.

[7] EEA3 – Ako od jednakog oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.
[8] EEI8 – SSS-poučak o sukladnosti trokuta.
[9] EEI4 – SKS-poučak o sukladnosti trokuta.



Slika 1.2: Bisekcija kuta



Slika 1.3: Bisekcija dužine

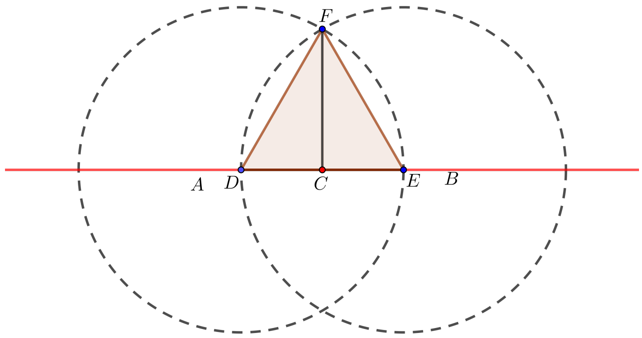
- Okomica na zadani pravac iz točke (slika 1.4)

  – na tom pravcu (EEI11)

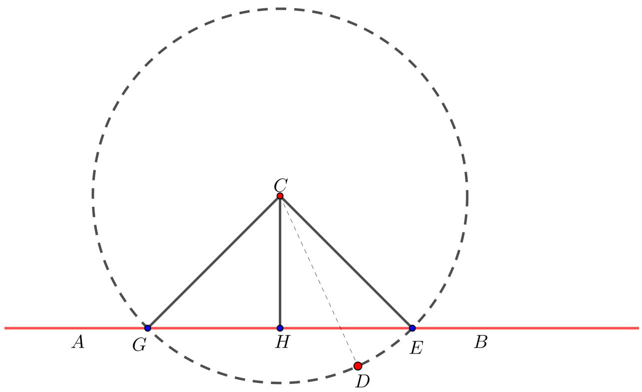
    Neka je AB zadani pravac, a C dana točka na njemu. Prema EEI3[10] na $\overline{AC}$ odaberemo bilo koju točku D i nanesemo $\overline{CE}$ jednaku $\overline{CD}$, nad $\overline{DE}$ konstruiramo jednakostraničan trokut $\triangle FDE$ (EEI1) te spojimo $\overline{FC}$. Dužina $\overline{DC}$ je jednaka $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ je zajednička, osnovica $\overline{DF}$ jednaka je osnovici $\overline{FE}$ pa je prema EEI8 kut $\angle DCF$ jednak kutu $\angle ECF$. Ta dva kuta su susjedna pa je

[10] EEI3 – Od veće od dviju zadanih dužina oduzeti dio jednak kraćoj.

Slika 1.4: Okomica na zadani pravac



(a) iz točke na tom pravcu



(b) iz točke izvan tog pravca

prema EEI D10[11] svaki od njih pravi, odnosno dužina $\overline{CF}$ je povučena pod pravim kutom na dani pravac AB iz dane točke C.

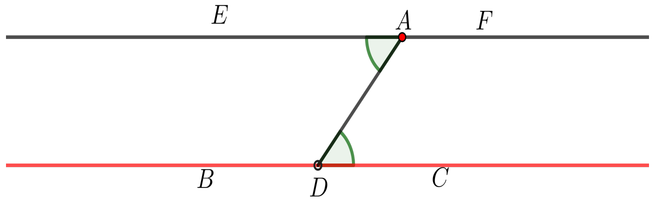
– izvan tog pravca (EEI12)

Neka je AB zadani pravac, a C dana točka izvan njega. Uzmemo točku D s druge strane tog pravca, prema EEP3 sa središtem C i polumjerom $|CD|$

[11] Ako dužina koja stoji na dužini (misli se: kraj jedne dužine nalazi se unutar druge) čini međusobno jednake susjedne kutove, tada je svaki od njih pravi, a dužina koja stoji naziva se okomitom na onu na kojoj stoji.

opišemo krug, prema EEI10 dužinu $\overline{EG}$ podijelimo na dva jednaka dijela u H te prema EEP1 povučemo dužine $\overline{CG}$, $\overline{CH}$, $\overline{CE}$. Dužina $\overline{GH}$ je jednaka $\overline{HE}$, $\overline{HC}$ je zajednička, osnovica $\overline{CG}$ jednaka je osnovici $\overline{CE}$ pa je prema EEI8 kut $\angle CHG$ jednak kutu $\angle EHC$. Iz EEI D10 slijedi da su oba kuta prava, odnosno $\overline{CH}$ je okomica povučena na pravac AB iz točke C izvan tog pravca.

- Paralela sa zadanim pravcem kroz zadanu točku (slika 1.5, EEI31)



Slika 1.5: Paralela sa zadanim pravcem kroz zadanu točku

Neka je BC zadani pravac i A zadana točka. Odaberemo proizvoljno točku D na BC i spojimo $\overline{AD}$, prema EEI23[12] na $\overline{DA}$ nanesemo kut $\angle DAE$ jednak kutu $\angle ADC$, $\overline{AF}$ produžimo s $\overline{EA}$ i tada je prema EEI27[13] pravac EAF paralelan s BC.

Ove temeljne i mnoge druge konstrukcije ravnalom i šestarom bile su poznate već prije Euklida. Danas se sve one mogu interpretirati algebarski, primjerice, bisekcija dužine duljine a odgovara dijeljenju a s 2. Pritom pod algebarskom konstrukcijom podrazumijevamo i analitičkogeometrijsku, primjerice, konstrukcija paralele sa zadanim pravcem kroz zadanu točku odgovara određivanju pravca $y - y_0 = k(x - x_0)$ za zadani pravac $y = kx + l$ i točku (x_0, y_0) u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

[12]EEI23 – Na danoj dužini iz točke na njoj konstruirati pravocrtni kut jednak danom pravocrtnom kutu.

[13]EEI27 – Ako dužina koja siječe dvije dužine čini međusobno jednake izmjenične kutove, onda će te dužine biti međusobno paralelne.

Poglavlje 2

Tri klasična problema

Među mnogim matematičkim problemima koje su stari Grci tijekom 5. st. pr. Kr. pokušavali riješiti korištenjem ravnala i šestara, tri su se problema posebno istakla: problem udvostručenja kocke, problem kvadrature kruga i problem trisekcije kuta. Mnogi matematičari pokušavali su ih riješiti, no korištenjem samo ravnala i šestara ti pokušaji nisu završavali uspješno. Ipak, neki matematičari su probleme uspjeli riješiti kompliciranijim metodama, primjenom presjeka krivulja drugog reda i specijalnih krivulja, te je u tim pokušajima otkriveno mnogo novih matematičkih rezultata.

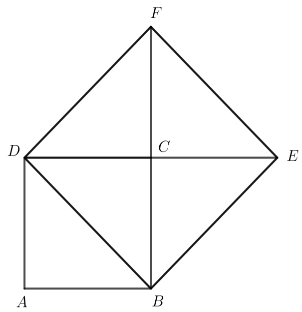
2.1 Problem udvostručenja kocke

O nastanku problema udvostručenja kocke postoje dvije legende.

Prva od njih je prema Eratostenu kojeg je citirao Teon iz Smirne (1.–2. st.) i govori o razdoblju oko otprilike 430. g. pr. Kr. kad je u Grčkoj vladala epidemija kuge. Prema toj priči, Atenjani su tražili savjet proročišta na koji način bi mogli smiriti bogove da prekinu kugu. Proročište im je, navodno, savjetovalo da udvostruče oltar boga Apolona. Atenjani su izgradili oltar oblika kocke, čije su duljine stranica bile dvostruko veće od duljina stranica prethodnog oltara, no proročište je zapravo tražilo da volumen oltara bude dvostruko veći, dok je oltar kojeg su izgradili Atenjani volumenom bio osam puta veći od prethodnog. Zahtjev bogova nije bio ispunjen i gradom je, kažu, nastavila vladati kuga.

Izvor druge legende je Eutocius (5.–6. st.). On je u svojem komentaru Arhimedovog djela *O kugli i valjku* zapisao da kralj Minos nije bio zadovoljan postavljanjem grobnice pjesniku Glaukusu jer mu je djelovala premala, te je zatražio da se grobnica kockastog oblika udvostruči, no i ovdje priča navodi da je izrađena kocka osmerostrukog volumena.

Ipak, kako navodi Heath [5], najvjerojatnije je da je ovaj problem nastao kao generalizacija udvostručenja kvadrata. Konstrukciju udvostručenja kvadrata su vjerojatno znali već i pitagorejci: Neka je $ABCD$ kvadrat kojeg želimo udvostručiti. Produžimo stranicu $\overline{DC}$ i na njoj označimo točku E takvu da je $|DC| = |CE|$. Slično produljimo i stranicu $\overline{BC}$ i na njoj označimo točku F takvu da je $|BC| = |CF|$ (slika 2.1). Tada će kvadrat $BEFD$ imati površinu jednaku dvostrukoj površini kvadrata $ABCD$. Zaista, kvadrat $BEFD$ sastoji se od četiri kongruentna trokuta, dok se kvadrat $ABCD$ sastoji samo od dva tim trokutima kongruentna trokuta.



Slika 2.1: Duplikacija kvadrata

Prema Heathu [5], **Hipokrat s Hiosa** (oko 470.–410. pr. Kr.) je bio prvi matematičar koji je otkrio da kocku stranice a možemo udvostručiti ako uspijemo pronaći način na koji ćemo konstruirati srednje geometrijske proporcionale x i y između a i $2a$, tj. duljine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Provjerimo da je Hipokrat bio u pravu: Budući da iz $a : x = x : y$ slijedi da je $x^2 = ay$, odnosno $y = \dfrac{x^2}{a}$, te iz $a : x = y : 2a$ slijedi $x = \dfrac{2a^2}{y}$, onda je x jednak $x = \dfrac{2a^2}{y}$, odnosno $x = \frac{2a^2}{x^2/a}$. Sređivanjem izraza dobivamo da je $x^3 = 2a^3$, odnosno $x = a\sqrt[3]{2}$.

Nakon Hipokrata, svi pokušaji rješavanja problema udvostručenja kocke bili su pokušaji konstrukcije srednjih geometrijskih proporcionala.

Uočimo da se stvarno radi o problemu geometrijske algebre. Naime, ako je zadana kocka brida duljine a, zadatak duplikacije kocke je naći duljinu brida x takvu da je

$$x^3 = 2a^3.$$

Dakle, iz moderne se perspektive radi o geometrijskom rješavanju određene kubne jednadžbe (tj. o konstrukciji $\sqrt[3]{2}$ ako je zadana jedinična duljina).

U svojim pokušajima neki matematičari su dobili korektna rješenja, ali nedozvoljenim konstrukcijama. Među njima se ističu Arhita iz Tarenta, Eudoks s Knida i Menehmo, dok se Platon i Eratosten vežu uz tzv. mehanička rješenja tog problema. Heath [5] u svome djelu detaljno opisuje njihova rješenja.

Arhita iz Tarenta (oko 428.–350. pr. Kr.) je svoje rješenje dobio presjekom konusa, cilindra i torusa. Njegovo rješenje možemo opisati koristeći jednadžbe tih triju ploha (slika 2.2) u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru:[1]:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2,$$

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prva jednadžba predstavlja cilindar polumjera a kojemu je os pravac paralelan z-osi kroz točku $(a, 0, 0)$. Druga jednadžba predstavlja konus s vrhom u ishodištu kojemu je os x-os koordinatnog sustava i kojemu je vršni kut 120°. Treća jednadžba predstavlja torus kojemu je a polumjer poprečnog presjeka, a rupa polumjera 0.

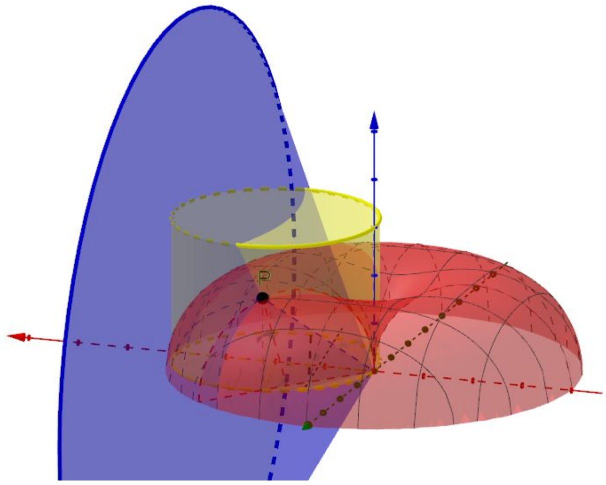
Rješavanjem gornjeg sustava dobije se da za koordinate točke na presjeku tih triju ploha vrijedi:

$$a : \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : 2a$$

Prema tome, tražene geometrijske proporcionale su $\sqrt{x^2 + y^2}$ i $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

No, Arhita na raspolaganju nije imao analitičku geometriju. On je pretpostavio da su $|AB|$ i $|AC|$ dvije duljine između kojih je potrebno pronaći dvije srednje geometrijske proporcionale (slika 2.3) te ih je uzeo jednu kao promjer kruga $(\overline{AC})$, a drugu kao tetivu

[1]Kartezijev koordinatni sustav uveo je R. Descartes u 17. stoljeću. U antičko doba nisu bili poznati nikakvi koordinatni sustavi.



Slika 2.2: Arhitino rješenje problema duplikacije kocke

tog kruga ($\overline{AB}$). Konstruirao je polukrug promjera $\overline{AC}$ u ravnini okomitoj na ravninu u kojoj se nalazi krug ABC, te zamislio da se polukrug okreće oko pravca kroz A okomitog na ravninu u kojoj se nalazi krug ABC čime nastaje polutorus s unutrašnjim polumjerom rupe jednakim 0. Nakon toga, konstruirao je polucilindar kojemu je baza polukrug ABC te u presjeku s ravninom polutorusa dobio određenu krivulju. Na kraju je konstruirao tangentu CD u točki C na krug ABC tako da ona siječe AB u točki D. Pretpostavio je da se trokut ADC okreće oko osi AC te generira kružni konus, pri čemu točka B opisuje polukrug BQE okomit na ravninu kruga ABC s promjerom okomitim na AC, a konus u točki P siječe presječnicu polucilindra i polutorusa (dakle, P je presjek sve tri plohe). Neka je APC' odgovarajuća pozicija polukruga čijom rotacijom je nastao polutorus i neka AC' siječe rub kruga ABC u točki M. Arhita dalje opisuje da povlačenjem okomice PM na ravninu kruga ABC vidimo da ona mora sječi rub kruga ABC jer se točka P nalazi na cilindru s bazom ABC. Neka sada AP siječe rub polukruga BQE u točki Q i neka AC' siječe njegov promjer u točki N. Zatim spaja PC', QM i QN i tada, budući da su oba polukruga okomita na ravninu ABC, njihov presjek QN je također okomit na tu ravnin (EEXI19[2]). Prema tome, iz EEIII35[3] slijedi $|QN|^2 = |BN| \cdot |NE| = |AN| \cdot |NM|$, odnosno da

[2]EEXI19 – Ako su dvije ravnine koje se sijeku okomite na neku ravninu, onda je i njihov presjek okomit na tu istu ravninu.

[3]EEIII35 – Ako se u krugu dvije tetive sijeku, onda je pravokutnik omeđen odsječcima jedne tetive jednak pravokutniku omeđenom odsječcima druge tetive.

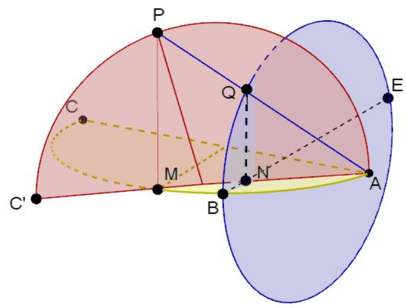
je kut $\angle AQM$ pravi. No, kut $\angle APC'$ je također pravi pa je MQ paralelna $C'P$. Iz sličnosti trokuta slijedi

$$|CA| : |AP| = |AP| : |AM| = |AM| : |AQ|,$$

odnosno,

$$|AC| : |AP| = |AP| : |AM| = |AM| : |AB|,$$

dakle su $|AB|$, $|AM|$, $|AP|$ i $|AC|$ u takvom omjeru da su $|AM|$ i $|AP|$ tražene srednje geometrijske proporcionale.

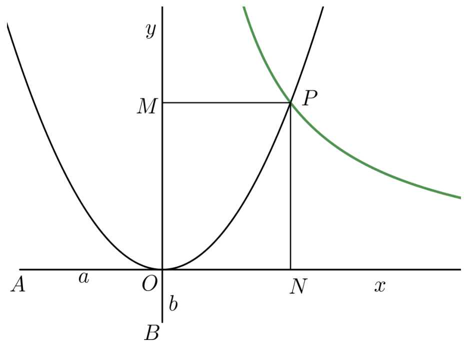


Slika 2.3: Arhitina duplikacija kocke

Eudoks s Knida (oko 408.–355. pr. Kr.) navodno je riješio problem udvostručenja kocke, no rješenje nije sačuvano. Prema Heathu [5], Eutocius je tvrdio da je u Eudoksovom predgovoru navodno stajalo da je problem riješio primjenom krivulja, no u samom rješenju nigdje ih nije koristio. Budući da je rješenje izgubljeno, nije bilo moguće otkriti je li Eudoks negdje pogriješio ili je do greške došlo prilikom prepisivanja njegovog rješenja.

Menehmo (oko 380.–320. pr. Kr.) je tražeći rješenje ovog problema otkrio konike i koristeći ih opisao dva rješenja problema duplikacije kocke koja navodi Heath [5]. Jedno rješenje za određivanje srednjih geometrijskih proporcionala koristi presjek parabole s hiperbolom, a drugo presjek dviju parabola.

U prvome rješenju Menehmo pretpostavlja da su $\overline{AO}$ i $\overline{AB}$ dane dužine takve da je $|AO| > |AB|$ i da u O zatvaraju pravi kut (slika 2.4). Pretpostavimo da je problem riješen i da su $|MO|$ i $|ON|$ tražene srednje geometrijske proporcionale te ih dopunimo do pravokutnika $OMPN$.



Slika 2.4: Rješenje problema udvostručenja kocke kao presjek parabole i hiperbole

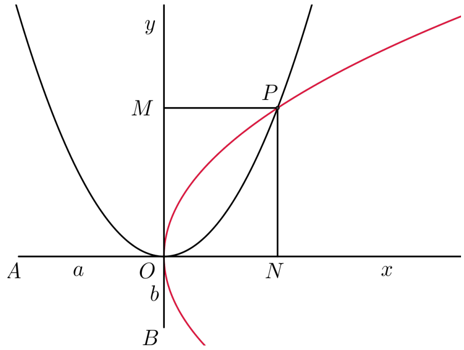
Iz $|AO|:|OM| = |OM|:|ON| = |ON|:|OB|$ slijedi:
(1) $|OM|\cdot|OB| = |ON|^2 = |PM|^2$, pri čemu je P točka krivulje (danas poznate kao parabola) s tjemenom u O, osi OM i *latus rectum*[4] jednakim $|OB|$, te
(2) $|AO|\cdot|OB| = |OM|\cdot|ON| = |PN|\cdot|PM|$, pri čemu je P točka krivulje (danas poznate kao hiperbola) s centrom u O i asimptotama OM i ON.

Dakle, da bismo pronašli točku P moramo konstruirati:
(1) parabolu s tjemenom u točki O, osi OM i *latus rectum* jednakim $|OB|$, te
(2) hiperbolu s asimptotama OM i ON takvu da je pravokutnik obuhvaćen s $\overline{PM}$ i $\overline{PN}$ jednak pravokutniku $|AO|\cdot|OB|$, pri čemu su $\overline{PM}$ i $\overline{PN}$ dužine povučene iz bilo koje točke P parabole takve da su paralelne jednoj, a sijeku drugu asimptotu. Presjek parabole i hiperbole je točka P za koju vrijedi $|AO| : |PN| = |PN| : |PM| = |PM| : |OB|$, iz čega zaključujemo da su $\overline{PN}$ i $\overline{PM}$ tražene srednje geometrijske proporcionale.

Za drugo rješenje Menehmo najprije pretpostavlja da je problem riješen, odnosno da vrijedi $|AO|:|OM| = |OM|:|ON| = |ON|:|OB|$, iz čega slijedi:
(1) $|OM|\cdot|OB| = |ON|^2 = |PM|^2$,
pri čemu je P točka parabole kojoj je točka O tjeme, OM os, a *latus rectum* jednak $|OB|$,te
(2) $|AO|\cdot|ON| = |OM|^2 = |PN|^2$,
pri čemu je P točka parabole kojoj je točka O tjeme, ON os, a *latus rectum* jednak $|OA|$ (slika 2.5). Da bismo pronašli takvu točku P, potrebno je konstruirati dvije parabole čije su osi OM i ON, a $|OB|$ i $|OA|$ redom *latera recta*. Presjek tih dviju parabola je točka P za koju vrijedi

$$|AO|:|PN| = |PN|:|PM| = |PM|:|OB|,$$

[4]Za konike naziv *latus rectum* označava (duljinu) tetive konike paralelnu njezinoj ravnalici.

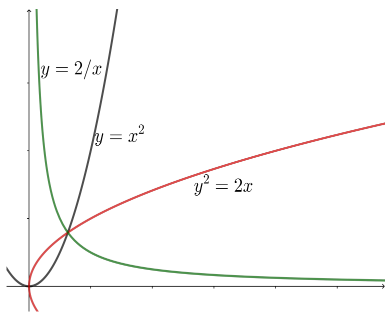


Slika 2.5: Rješenje problema udvostručenja kocke kao presjek dviju parabola

iz čega zaključujemo da su $\overline{PN}$ i $\overline{PM}$ tražene srednje geometrijske proporcionale.

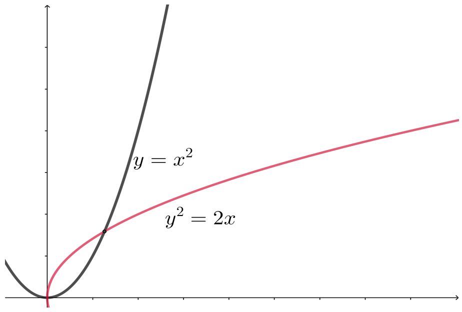
Danas njegova rješenja interpretiramo na sljedeći način: Pretpostavimo da su x i y tražene geometrijske proporcionale između a i b, odnosno da za njih vrijedi $a : x = x : y = y : b$, iz čega slijedi da mora vrijediti i $x^2 = ay$, $y^2 = xb$ i $xy = ab$. Lako prepoznajemo da su to jednadžbe parabola i hiperbole.

U prvom rješenju presjekom krivulja $x^2 = ay$ i $xy = ab$ ili $y^2 = bx$ i $xy = ab$, odnosno jedne od parabola i hiperbole, dobivamo točku s koordinatama (x, y) koje su tražene geometrijske proporcionale. Uzmimo da je $a = 1$ i $b = 2$ (što odgovara duplikaciji kocke stranice 1) i tada rješenje izgleda kao na slici 2.6.



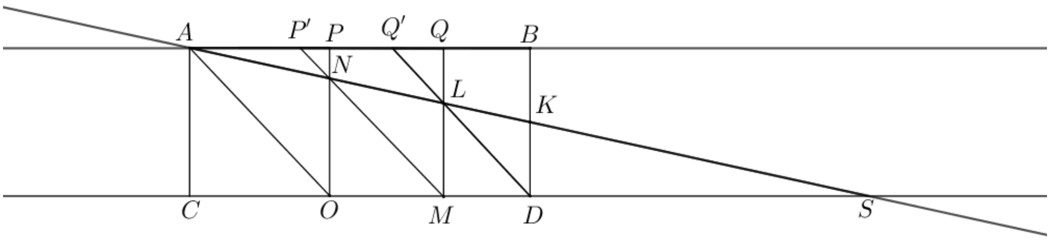
Slika 2.6: Rješenje problema udvostručenja kocke kao presjek parabole i hiperbole

U drugom rješenju koriste se krivulje $x^2 = ay$ i $y^2 = xb$ i istim principom, pretpostavivši da vrijedi ono što želimo dokazati, dolazimo do zaključka da su koordinate točke presjeka upravo tražene geometrijske proporcionale. Uzmimo opet da je $a = 1$ i $b = 2$ pa je rješenje prikazano slikom 2.7:



Slika 2.7: Rješenje problema udvostručenja kocke kao presjek dviju parabola

Jedno od najpoznatijih mehaničkih rješenja problema udvostručenja kocke poznato je kao Eratostenov mezolabij. Autor tog rješenja je **Eratosten iz Kirene** (otprilike 275.–195. pr. Kr.). Koristeći dva paralelna pravca i tri sukladna pravokutna trokuta Eratosten



Slika 2.8: Eratostenov mezolabij

je osmislio mehanizam za određivanje srednjih geometrijskih proporcionala. Fiksirao je dva paralelna pravca, nazovimo ih AB i CD, te na njih pričvrstio tri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta APO, PQM i QBD položivši im po jednu katetu na pravac AB (slika 2.8). Tražimo srednju geometrijsku proporcionalu između $|AC|$ i $|KD|$, gdje je K polovište stranice $\overline{BD}$ (dakle, $|KD| = \frac{1}{2}|AC|$). Prethodno postavljeni trokuti mogu se micati između fiksiranih pravaca. Pomaknemo trokute tako da se djelomično preklapaju (dobivamo trokute $APM, P'QM$ i QBD). Neka je N sjecište $\overline{PO}$ i $\overline{P'M}$ te L sjecište $\overline{QM}$ i $\overline{Q'D}$. Trokute zaustavimo u poziciji u kojoj su točke A, N, L i K kolinearne. Označimo sjecište AK i CD sa S. Tada, jer je $|OS| : |SM| = |NO| : |LM|$, vrijedi

$$|CS| : |SO| = |AS| : |SN| = |SO| : |SM|$$

i

$$|CS| : |SO| = |AC| : |NO|$$

iz čega slijedi $|AC| : |NO| = |NO| : |LM|$. Slično se pokaže da vrijedi i $|NO| : |LM| = |LM| : |KD|$ iz čega zaključujemo da su $|NO|$ i $|LM|$ tražene srednje geometrijske proporcionale.

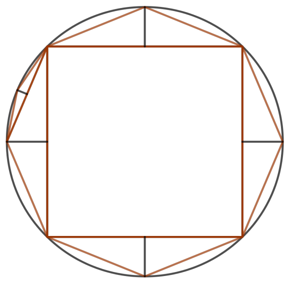
2.2 Problem kvadrature kruga

Problem kvadrature kruga kroz povijest je privukao pažnju velikih matematičara, ali i onih koji su se matematikom bavili samo iz zabave, te se zbog toga smatra najpoznatijim među trima problemima. To je problem konstrukcije kvadrata koji ima istu površinu kao zadani krug, koristeći samo ravnalo i šestar.

Kako navodi Heath [5], prvi matematičar čije se ime veže uz problem kvadrature kruga je **Anaksagora iz Klazomene** (499.–428. pr. Kr.), koji je tvrdio da se tim problemom bavio u zatvoru u kojem je završio zbog tvrdnje da Sunce nije bog, te da Mjesec reflektira Sunčeve zrake. Prvi ozbiljniji pokušaj rješavanja ovog problema datira iz druge polovice 5. st. pr. Kr. , a da je problem postao jako popularan vidljivo je iz činjenice da se spominje u Aristofanovoj drami *Ptice* (414. pr. Kr.).

Antifont iz Atene (480.–411. pr. Kr.) problem je pokušao riješiti metodom upisivanja pravilnih mnogokuta u krug. Heath [5] navodi da je, prema Temistiju, Antifont najprije u krug upisao jednakostranični trokut, dok je prema Simplikiju krenuo od kvadrata, a zatim na svakoj stranici bilo trokuta, bilo kvadrata, konstruirao jednakokračan trokut kojemu se vrh nalazi na manjem luku kružnice nad stranicom. Time je udvostručio broj stranica mnogokuta i dobio šesterokut, odnosno osmerokut (slika 2.9). Ponavljao je ovaj postupak udvostručujući broj stranica mnogokuta te smatrao da će u nekom trenutku, za dovoljno velik broj stranica mnogokuta, površina između mnogokuta i kruga nestati, odnosno da će mnogokut prijeći u krug te je tako pogrešno pomislio da je riješio problem (naime, svaki se mnogokut može kvadrirati, vidi poglavlje 3.2.).

Hipokrat s Hiosa je pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga otkrio da se neki mjesecoliki likovi mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Mjesec je geometrijski lik koji je omeđen lukovima dviju kružnica različitih središta i polumjera, a oni mjeseci koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom nazivaju se Hipokratovim. Heath navodi [5] da je Hipokratov rad izgubljen, no Simplikije je u svome komentaru o Aristotelovoj *Fizici* sačuvao odlomak iz Eudemusove *Povijesti geometrije* u kojem je on iskazao Hipokratovu ideju kvadrature tri tipa mjeseca. U svojim je dokazima Hipokrat koristio činjenicu



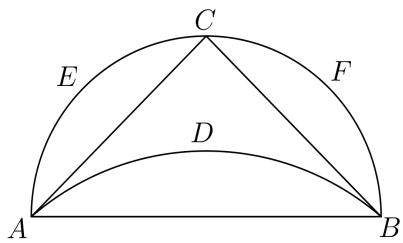
Slika 2.9: Antifontova kvadratura kruga

koju je, čini se, on prvi znao (a možda i dokazao): Površine krugova odnose se kao površine kvadrata nad njihovim polumjerima (odnosno, površine kružnih isječaka ili pak odsječaka s istim središnjim kutom su razmjerne).

Izvorna tri tipa Hipokratovih mjeseca su sljedeći:

1. Jedan mjesec čiji središnji kut vanjskog luka je dvostruki pravi kut (slika 2.10)

   Neka je $\triangle ABC$ jednakokračni pravokutni trokut. Konstruirajmo polukružnicu kroz njegove vrhove te nad njegovom hipotenuzom $\overline{AB}$ opišemo luk kružnice $\widehat{ADB}$ sličan onima koje u polukružnici odsijecaju stranice $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$, odnosno odsječak ADB je sličan odsječcima AEC i BFC.



Slika 2.10: Mjesec čiji središnji kut vanjskog luka je dvostruki pravi kut

Koristeći činjenicu da se površine krugova odnose kao površine kvadrata nad njihovim polumjerima, Hipokrat je najprije dokazao da se površine sličnih odsječaka odnose kao površine kvadrata nad njihovim bazama. Iz toga slijedi:

$$P(AEC) : P(ADB) = |AC|^2 : |AB|^2 \tag{2.1}$$

te

$$P(BFC) : P(ADB) = |BC|^2 : |AB|^2. \tag{2.2}$$

Budući da je trokut $\triangle ABC$ jednakokračan i pravokutan vrijedi $|AC| = |BC|$ pa iz Pitagorina poučka slijedi $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, odnosno $|AB|^2 = 2|AC|^2$. Prema tome je

$$|AB|^2 : |AC|^2 = 1 : 2. \tag{2.3}$$

Prema (2.1) i (2.3) vrijedi

$$P(AEC) : P(ADB) = 1 : 2,$$

odnosno

$$P(ADB) = \frac{1}{2} P(AEC).$$

Također je zbog (2.2) i (2.3)

$$P(CFB) : P(ADB) = 1 : 2,$$

odnosno

$$P(BFC) = \frac{1}{2} P(AEC).$$

Iz toga slijedi:

$$P(ABC) + P(BFC) = \frac{1}{2} P(AEC) + \frac{1}{2} P(AEC) = P(AEC),$$

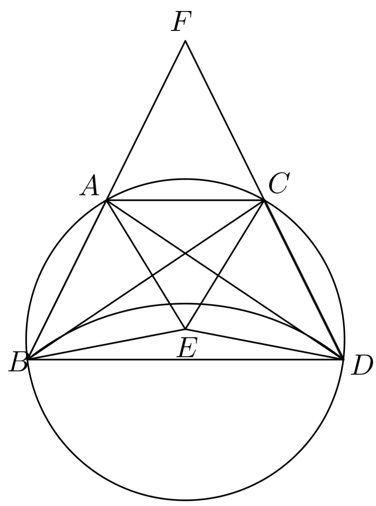
odnosno da je površina odsječka ADB jednaka zbroju površina odsječaka AEC i CFB. Dodamo li dio trokuta koji se nalazi iznad odsječka ADB i površini tog odsječka i zbroju površina druga dva odsječka, površina mjeseca ADB biti će jednaka površini trokuta ABC. Iz činjenice da trokut možemo kvadrirati zaključujemo da možemo kvadrirati i mjesec ADB.

2. Jedan mjesec čiji središnji kut vanjskog luka je veći od dva prava kuta (slika 2.11)

   Neka je $BDCA$ jednakokračni trapez s osnovicom $\overline{BD}$. Također, neka vrijedi da je površina kvadrata nad osnovicom jednaka trostrukoj površini kvadrata nad bilo kojom od ostalih stranica, odnosno

$$|BD|^2 = 3|BA|^2 = 3|AC|^2 = 3|CD|^2. \tag{2.4}$$

Oko trapeza $BDCA$ opišemo kružnicu $BACD$ sa redištem E te nad osnovicom trapeza $\overline{BD}$ opišemo odsječak BED sličan odsječcima koje stranice trapeza odsijecaju u polukrugu, odnosno sličan odsječcima nad $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$. Površina odsječka $BACD$ veća je od površine polukruga $BACD$: Produžimo stranice trapeza $\overline{BA}$ i $\overline{CD}$ i njihovo sjecište označimo s F. Tada je u jednakokračnom trokutu $\triangle FAC$ kut $\angle FAC$ šiljast, iz čega zaključujemo da je kut $\angle BAC$ tupi te da je najdulja stranica trokuta $\triangle BAC$ stranica $\overline{BC}$. Iz činjenice da se slični odsječci kruga odnose kao



Slika 2.11: Mjesec čiji središnji kut vanjskog luka je veći od dva prava kuta

kvadrati nad njihovim bazama slijedi:

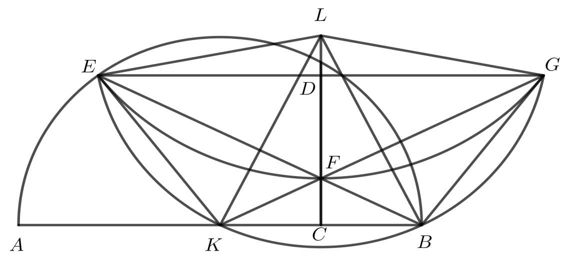
$$|BD|^2 = 3|BA|^2,$$

(odsječak nad $\overline{BD}$) = 3 (odsječak nad $\overline{BA}$) = (odsječak nad $\overline{BA}$) + (odsječak nad $\overline{AC}$) + (odsječak nad $\overline{CD}$). Na obje strane jednakosti dodamo područje omeđeno dužinama $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ te lukom odsječka nad $\overline{BD}$, dobivamo da je površina trapeza jednaka površini mjeseca $BACD$.

3. Jedan mjesec čiji središnji kut vanjskog luka je manji od dva prava kuta (slika 2.12)

   Neka je zadan krug promjera $|AB|$ sa središtem u K te neka je CD simetrala od $\overline{BK}$ (i $C \in AB$). Neka je $\overline{EF}$ dužina takva da se točka E nalazi na kružnici, a F na dužini

$\overline{CD}$, takva da pravac EF prolazi točkom B, te takva da je površina kvadrata nad tom dužinom jednaka $1\frac{1}{2}$ površine kvadrata nad polumjerom početnog kruga.



Slika 2.12: Mjesec čiji središnji kut vanjskog luka je manji od dva prava kuta

Povučemo pravac EG paralelan s AB i spojimo E i K te F i K. Produljimo $\overline{KF}$ i neka KF siječe EG u točki G, a zatim spojimo B i F te B i G. Tada vrijedi da je $|BG|$=$|EK|$. Hipokrat tvrdi da je tada moguće opisati kružnicu oko trapeza $EKBG$. Stranice trapeza u tom krugu odsijecaju odsječke nad $\overline{EK}$, $\overline{KB}$ i $\overline{BG}$. Opišimo kružnicu i oko trokuta $\triangle EFG$. Tada je svaki od odsječaka nad $\overline{EF}$ i $\overline{FG}$ koje stranice trokuta odsijecaju u posljednjem krugu sličan svakom od odsječaka nad $\overline{EK}$, $\overline{KB}$ i $\overline{BG}$ u prvome. Iz toga slijedi da je površina mjeseca $EKGB$ jednaka površini mnogokuta $BGFEK$. Naime, prema pretpostavci o odabiru E i F te G i K imamo:

$$2|EF|^2 = 3|EK|^2 = |EK|^2 + |KB|^2 + |BG|^2,$$

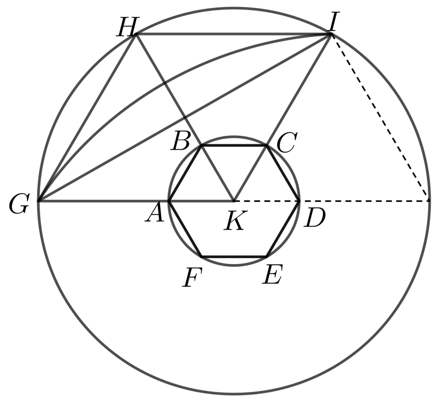
odnosno,

$$|EF|^2 (= |FG|^2) = \frac{3}{2}|EK|^2.$$

Prema tome, imamo:
P(mjeseca) = P(odsječak nad $\overline{EK}$) + P(odsječak nad $\overline{KB}$) + P(odsječak nad $\overline{BG}$) + ($P(BGFEK)$ − P(odsječak nad $\overline{EF}$) − P(odsječak nad $\overline{FG}$)), odnosno,

$$P(\text{mjeseca}) = P(BGFEK).$$

Neki autori navode da je Hipokrat, možda, temeljem dokazana tri tipa kvadrature mjeseca pomislio da je riješio kvadraturu kruga. Navodi se sljedeća navodna argumentacija: Neka su zadana dva kruga sa središtem K, takva da je površina kvadrata nad promjerom vanjskog kruga jednaka šesterostrukoj površini kvadrata nad promjerom unutarnjeg kruga (slika 2.13). Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut upisan u unutarnji krug. Povucimo dužine $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$ i produljimo ih do ruba vanjskog kruga. Točke sjecišta označimo redom s G, H, I. Zatim povucimo i dužine $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ i $\overline{GI}$.



Slika 2.13: Kvadratura mjeseca i kruga

Tada su očito $\overline{GH}$ i $\overline{HI}$ stranice šesterokuta upisanog u vanjski krug. Nad $\overline{GI}$ neka je opisan odsječak sličan odsječku kojeg $\overline{GH}$ odsijeca u vanjskom krugu. Tada je $|GI|^2 = 3|GH|^2$ pa je

$$|GI|^2 + (\text{stranica vanjskog šesterokuta})^2 = (\text{promjer vanjskog kruga})^2 = 4|GH|^2.$$

Također, vrijedi da je $|GH|^2 = 6|AB|^2$. Prema tome,

$$P(\text{odsječak nad } \overline{GI}) = 2P(\text{odsječak nad } \overline{GH}) + 6P(\text{odsječak nad } \overline{AB})$$

$$= P(\text{odsječak nad } \overline{GH}) + P(\text{odsječak nad } \overline{HI}) + P(\text{odsječci u unutarnjem krugu})$$

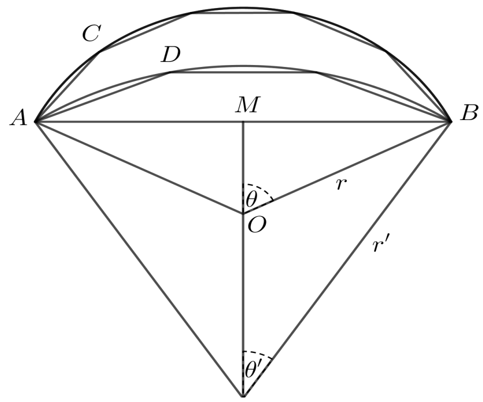
Nadalje, dodamo li na obje strane prethodne jednakosti površinu omeđenu dužinama $\overline{GH}, \overline{HI}$ i lukom GI, dobivamo da vrijedi

$P(\triangle GHI) = P(\text{mjesec } GHI) + P(\text{odsječci unutarnjeg kruga.})$ Dodamo li na obje strane šesterokut upisan u unutarnji krug, dobivamo:

$$P(\triangle GHI) + P(\text{unutarnji šesterokut}) = P(\text{mjesec } GHI) + P(\text{unutarnji krug}).$$

Dakle, budući da zbroj dva mnogokuta može biti kvadriran, zaključilo bi se da može biti kvadriran i zbroj kruga i mjeseca. Ako je Hipokrat mislio da se svi tipovi mjeseca mogu kvadrirati, mogao je pomisliti da se može kvadrirati i krug. No, iako je točno da iz gornje argumentacije slijedi kvadratura unije unutrašnjeg kruga skupa s mjesecom GHI, posljednji se ne može kvadrirati (nije Hipokratov mjesec).

Danas bismo korištenjem trigonometrije mogli pronaći sve tipove Hipokratovih mjeseca koji se mogu kvadrirati korištenjem ravnala i šestara. Neka je ABC vanjski, a ADB unutarnji rub jednog takvog mjeseca. Označimo sa r i r' polumjere, a sa O i O' središta dvaju kružnih lukova. θ i θ' neka su kutovi jednaki polovini središnjih kutova pripadnih lukova (slika 2.14).



Slika 2.14: Opis Hipokratovih mjeseca pomoću trigonometrije

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} P(\text{mjeseca}) &= P(\text{odsječak } ACB) - P(\text{odsječak } ADB) \\ &= P(\text{isječak } OACB) - P(\triangle AOB) - (P(\text{isječak } O'ACB) - P(\triangle AO'B)) \\ &= r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta - ((r')^2\theta' - \frac{1}{2}(r')^2 \sin 2\theta') \\ &= r^2\theta - (r')^2\theta' + \frac{1}{2}((r')^2 \sin 2\theta' - r^2 \sin 2\theta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Također, imamo $r\sin\theta = \frac{1}{2}AB = r'\sin\theta'$. Hipokrat je uočio da bismo izraze koje danas bilježimo kao $r^2\theta$ i $(r')^2\theta'$ mogli eliminirati ako bi oni bili jednaki pa je promatrao samo takve slučajeve. Dakle, mora vrijediti uvjet $r^2\theta = (r')^2\theta'$. Zatim pretpostavlja da je $\theta = m\theta'$, iz čega slijedi $r' = \sqrt{m} \cdot r$. Prema tome, površina postaje jednaka

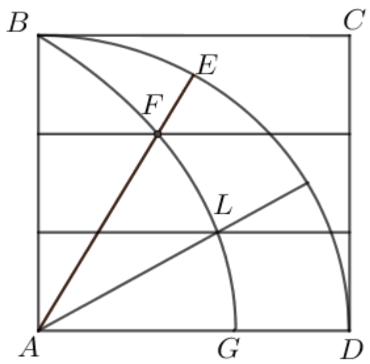
$$\frac{1}{2}r^2(m \sin 2\theta' - \sin 2m\theta')$$

i preostaje još riješiti jednadžbu

$$r \sin\theta = \frac{1}{2}|AB| = r' \sin\theta'$$

koja sada postaje jednaka $\sin m\theta' = \sqrt{m} \cdot \sin\theta'$. Prethodna jednadžba svodi se na algebarsku kvadratnu jednadžbu samo ako je m jednak 2, 3, $\frac{3}{2}$, 5, $\frac{5}{3}$. Hipokratova rješenja dobivaju se za $m = 2$, $m = 3$ i $m = \frac{3}{2}$ (odnosno, kvadratura mjeseca je izvediva samo u tim slučajevima, vidi poglavlje 5.2 za ekvivalenciju euklidskih konstrukcija i algebarskih kvadratnih jednadžbi).

Hipija iz Elide (oko 460.–400. pr. Kr.) je u matematici poznat po otkriću krivulje kvadratise (slika 2.15) koja se može iskoristiti za rješenje problema kvadrature kruga i trisekcije kuta. Kvadratisa je definirana kao geometrijsko mjesto točaka F i L koje su sjecišta stranice kvadrata $\overline{BC}$ koja se jednolikom brzinom spušta na stranicu $\overline{AD}$ te stranice istog tog kvadrata $\overline{AB}$ koja rotira do položaja $\overline{AD}$ jednolikom brzinom, pri čemu su te brzine konstantne i takve da stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ istovremeno krenu i istovremeno padnu na stranicu $\overline{AD}$ (slika 2.15).



Slika 2.15: Hipijina kvadratisa

Problem kvadrature kruga pokušao je riješiti i **Dinostratus** (oko 390.–320. pr. Kr.) koristeći krivulju kvadratisu, a kako navodi Heath [5], njegovo rješenje opisao je Papus.

Pri rješavanju problema potrebno je znati točan položaj točke G, odnosno točke u kojoj kvadratisa presijeca AD. Dakle, pretpostavimo li da kvadratisa siječe AD u točki G, problem svodimo na dokaz da za duljinu luka BED vrijedi (slika 2.15):

$$|(\widehat{BED})| : |AB| = |AB| : |AG|.$$

Tim dokazom rektificirali smo luk kružnice, odnosno opseg kruga ($|AG|$ je četvrtina opsega kruga s polumjerom $|AB|$). Sada je još potrebno kvadrirati krug, što slijedi iz prve propozicije Arhimedova spisa *Mjerenja kruga*: površina kruga jednaka je površini pravokutnog trokuta čije su duljine kateta jednake $4|(\widehat{BED})|$ i $|AB|$.

U suvremenom je zapisu Hipijina kvadratisa dio jedne grane grafa funkcije

$$y = x\text{ctg}\left(\pi\frac{x}{2}\right).$$

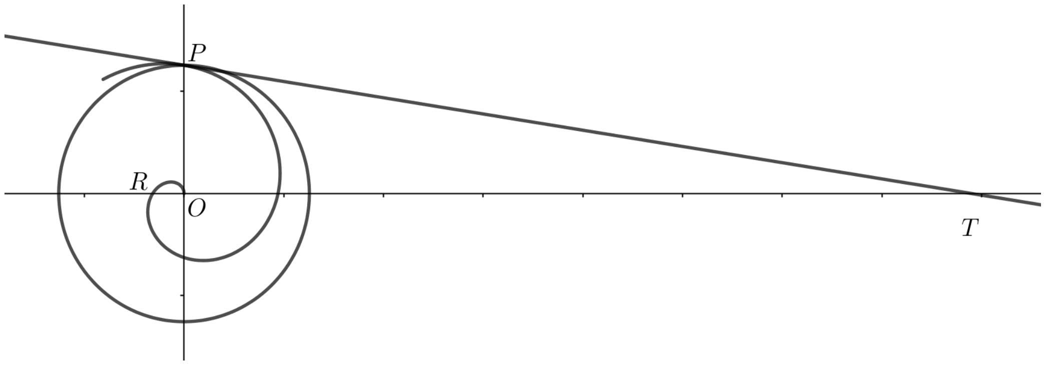
Neka su AD i AB x i y-os. Koristeći identitet $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, i supstitucijom $\alpha = \pi\frac{x}{2}$ dobivamo sljedeće:

$$y = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kad α teži nuli, $\cos\alpha$ i $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ teže k 1. Prema tome, x-koordinata točke G u kojoj kvadratisa siječe x-os je $\frac{\pi}{2}$, odnosno $x = \frac{\pi}{2}$. Dakle, pomoću dužine $\overline{AG}$ možemo konstruirati dužinu duljine $x = \frac{\pi}{2}$ pa tako i $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, odnosno $\sqrt{\pi}$ i time konstruirati kvadrat čija je površina jednaka π.

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.) je, kako navodi Heath [5], pri rješavanju problema kvadrature kruga koristio spiralu koju danas nazivamo po njemu. Spirala je generirana na sljedeći način: Pretpostavimo da polupravac rotira jednoliko oko svoje početne točke, dok se točka jednoliko giba po tom polupravcu krenuvši iz njegovog početka. Krivulja koja nastaje tim gibanjem naziva se Arhimedovom spiralom (slika 2.16). Pretpostavimo da tangenta u nekoj točki P spirale u točki T siječe pravac iz ishodišta O okomit na radij-vektor $\overline{OP}$. Tada se OT naziva polarna subtangenta. Prema Heathu [5], Arhimed u svome djelu *O spiralama* objašnjava: Ako je o opseg kruga polumjera $|OP|$ te ako taj krug siječe početni pravac u točki K i ako je n broj namotaja spirale, tada je $|OT| = (n-1)o+\widehat{KP}$ (gleda se luk od K do P u smjeru kazaljke na satu). Ako je P završetak prvog namotaja, jednakost se svodi na $|OT| = o$ (slika 2.16). Time smo pokazali da je moguće rektificirati luk spirale, odnosno opseg kruga. Sada iz prve propozicije Arhimedova spisa *Mjerenja kruga* slijedi da možemo odrediti trokut površine jednake površini kruga.

Trokut možemo kvadrirati pa zaključujemo da možemo kvadrirati i krug, odnosno da je pomoću spirale moguće kvadrirati bilo koji krug. Ipak, budući da se Arhimedova spirala ne može konstruirati ravnalom i šestarom, Arhimedovo rješenje, iako točno, nije u skladu s uvjetima problema.



Slika 2.16: Arhimedova spirala

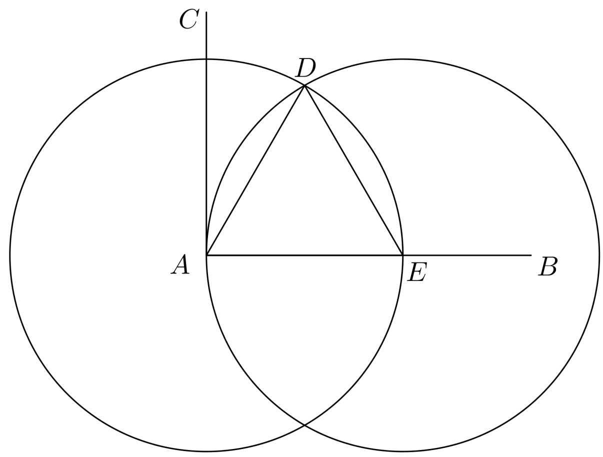
2.3 Problem trisekcije kuta

Problem trisekcije kuta vjerojatno se javio pri pokušajima konstrukcije pravilnih mnogokuta i zapravo se svodi na traženje postupka kojim bismo ravnalom i šestarom mogli konstruirati trećinu proizvoljnog kuta. S obzirom na to da se svaki tupi kut može rastaviti na zbroj triju pravih kutova i jednog šiljastog kuta, a pravi kut možemo podijeliti na tri jednaka dijela, problem se svodi na trisekciju šiljastih kutova

Pokažimo prvo kako se provodi trisekcija pravog kuta. Neka je dani pravi kut $\angle CAB$ (slika 2.17). Nacrtajmo kružnicu sa središtem u A tako da siječe AB u E te oko E nacrtajmo kružnicu istog polumjera koja siječe prvu kružnicu u D. Tada je trokut $\triangle DAE$ jednakostraničan pa je kut $\angle DAE$ jednak $60°$, a kut $\angle DAC$ je $30°$. Dakle, kut $\angle CAB$ podijeljen je na tri jednaka dijela.

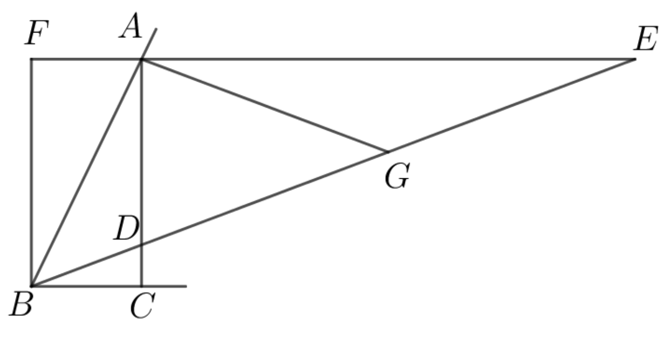
Trisekcija šiljastog kuta se razlikuje od problema udvostručenja kocke i kvadrature kruga jer je u nekim slučajevima rješiva konstrukcijom ravnalom i šestarom (primjerice, kutovi $\frac{360°}{n}$ gdje n nije djeljiv s 3 (prema [10]).

Prvi matematičar kojeg poimence vežemo uz rješavanje ovog problema je **Hipokrat s Hiosa**. On je problem riješio tzv. mehaničkom konstrukcijom: Neka je $\angle ABC$ zadani



Slika 2.17: Trisekcija pravog kuta

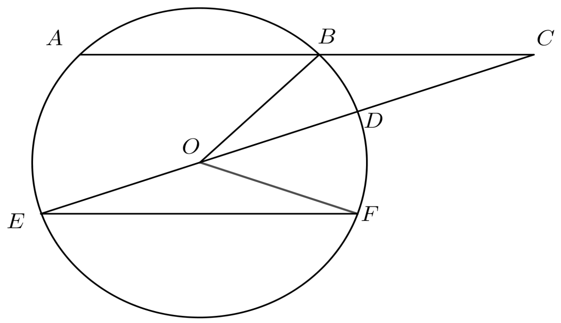
kut i AC okomita na BC. Dobiveni lik dopuni se do pravokutnika $ACBF$ te se stranica FA produlji do točke E. Točku E odabiremo tako da vrijedi $|DE| = 2|AB|$, pri čemu je D sjecište BE i AC. Taj postupak nije moguće provesti samo ravnalom i šestarom, ali je moguće izvesti mehaničkom konstrukcijom s ravnalom na kojem su označene tri točke s razmacima $|AB|$. Označimo s G polovište dužine $\overline{DE}$, spojimo A i G i tada vrijedi $|DG| = |GE| = |AG| = |AB|$. Kako su $\overline{FE}$ i $\overline{BC}$ paralelne, slijedi da je $\angle ABG = \angle AGB = 2\angle AEG = 2\angle DBC$, odnosno da je kut $\angle EBC$ jednak trećini kuta $\angle ABC$ (slika 2.18). Dakle, problem trisekcije kuta svodi se na crtanje dužine $\overline{BE}$ koja siječe $\overline{AC}$ i $\overline{AE}$ tako da vrijedi $|DE| = 2|AB|$.



Slika 2.18: Hipokratova trisekcija kuta

Najpoznatije mehaničko rješenje ovog problema je **Arhimedovo** koje glasi ovako:

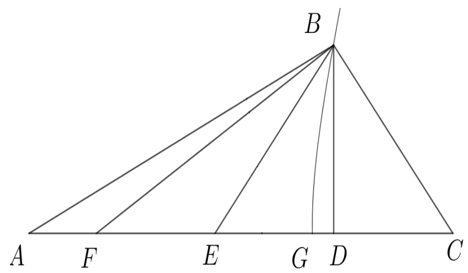
Neka je $\overline{AB}$ bilo koja tetiva kruga sa središtem u O. Produljimo $\overline{AB}$ do C tako da je $|BC|$ jednaka polumjeru i neka CO siječe krug u točkama D i E. Tada je duljina luka $\widehat{AE}$ jednaka trostrukoj duljini luka $\widehat{BD}$. Povučemo tetivu $\overline{EF}$ paralelnu $\overline{AB}$ te spojimo $\overline{OB}$ i $\overline{OF}$ (slika 2.19). Budući da je $|BO| = |BC|$, vrijedi da je $\angle BOC = \angle BCO$. Sada je $\angle COF = 2\angle OEF$ i $2\angle OEF = 2\angle BCO$ jer su to kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca pa iz toga slijedi $\angle COF = 2\angle BOC$. Iz toga zaključujemo $\angle BOF = 3\angle BOD$ te $\widehat{BF} = \widehat{AE} = 3\widehat{BD}$, dakle ako je zadan kut $\alpha = \angle BOF$, onda je kut $\angle BOD$ jednak trećini kuta α.



Slika 2.19: Arhimedova trisekcija kuta

Papus (4. st.) je, prema Heathu [5], dao dva rješenja problema trisekcije kuta koristeći konike.

U prvome rješenju najprije povlači dužinu $\overline{AC}$ i određuje točku B izvan te dužine takvu da je, kada spojimo $\overline{BA}$ i $\overline{BC}$, kut $\angle BCA$ dvostruko veći od kuta $\angle BAC$. Nakon toga povlači dužinu $\overline{BD}$ okomitu na $\overline{AC}$, na $\overline{DA}$ označava točku E takvu da je $|DE| = |DC|$ i na kraju spaja $\overline{BE}$ (slika 2.20).



Slika 2.20: Prvi način trisekcije kuta

Tada, budući da je $|BE| = |BC|$ (jer je $|DE| = |DC|$ i BD okomita na AC), vrijedi

$$\angle BEC = \angle BCE.$$

No, budući da je $\angle BEC$ vanjski kut trokuta $\triangle AEB$, vrijedi

$$\angle BEC = \angle BAE + \angle EBA$$

pa je

$$\angle BCE = \angle BAE + \angle EBA.$$

Također, iz pretpostavke je

$$\angle BCE = 2\angle BAE,$$

iz čega slijedi

$$\angle BAE + \angle EBA = 2\angle BAE.$$

Prema tome je

$$\angle BAE = \angle ABE,$$

odnosno,

$$|AE| = |BE|.$$

Sada na $\overline{AC}$ označimo točku G takvu da je $|AG| = 2|GC|$, odnosno $|CG| = \frac{1}{3}|AC|$. Također, neka je F točka na $\overline{AC}$ takva da je $|FE| = |ED|$ i $|CD| = \frac{1}{3}|CF|$. Iz toga slijedi da je

$$|GD| = \frac{1}{3}(|AC| - |CF|) = \frac{1}{3}|AF|.$$

Sada je

$$|BD|^2 = |BE|^2 - |ED|^2 = |BE|^2 - |EF|^2.$$

Također, iz EEII6[5] slijedi

$$|DA| \cdot |AF| = |AE|^2 - |EF|^2 = |BE|^2 - |EF|^2.$$

Prema tome, vrijedi

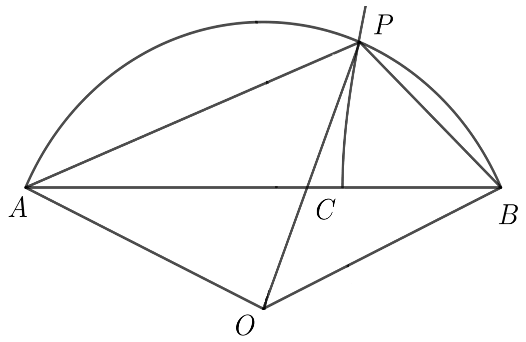
$$|BD|^2 = |DA| \cdot |AF| = 3|AD| \cdot |DG|$$

[5]Ako danu dužinu podijelimo na pola i proizvoljno produžimo, zbroj (površina) pravokutnika obuhvaćenog novodobivenom dužinom i produžetkom dane dužine i kvadrata nad polovicom dane dužine jednak je (površini) kvadrata nad dužinom koju čine polovica dane dužine i produžetak.

pa je

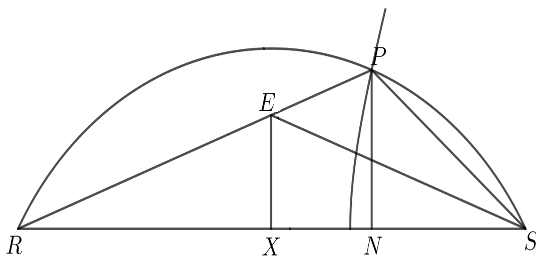
$$|BD|^2 : (|AD| \cdot |DG|) = 3 : 1 = 3|AG|^2 : |AG|^2.$$

Dakle, točka D leži na hiperboli kojoj je $|AG|$ glavna, a dužina duljine $\sqrt{3}|AC|$ sporedna os. Pretpostavimo sada da želimo luk $\widehat{AB}$ kružnice sa središtem u O (slika 2.21) podijeliti na tri dijela. Povucimo tetivu $\overline{AB}$, na njoj odredimo točku C takvu da je $|AC| = 2|CB|$ i konstruirajmo hiperbolu kojoj je $|AC|$ glavna os, a dužina duljine $\sqrt{3}|AC|$ sporedna os. Neka hiperbola siječe kružni luk u točki P. Spojimo $\overline{PA}$, $\overline{PO}$, $\overline{PB}$. Sada je, kako smo ranije



Slika 2.21: Papusova podjela kružnog luka na tri jednaka dijela

pokazali, $\angle PBA = 2\angle PAB$ pa vrijedi i $\angle POA = 2\angle POB(\angle POA = \angle PBA$ i $\angle PAB = \angle POB)$ jer su to obodni kutovi nad istim kružnim lukom. Iz toga zaključujemo da OP dijeli kružni luk $\widehat{APB}$ na tri jednaka dijela pa prema tome dijeli i kut $\angle AOB$.



Slika 2.22: Drugi Papusov način trisekcije kuta

U drugome rješenju trisekcija kuta provedena je na sljedeći način: Neka je $\widehat{RPS}$ kružni luk kojeg želimo podijeliti na tri jednaka dijela. Pretpostavimo da smo to učinili i neka je $\widehat{SP}$ jedna trećina kružnog luka $\widehat{SPR}$. Spojimo $\overline{RP}$ i $\overline{SP}$. Tada je kut $\angle RSP$ jednak dvostrukom kutu $\angle SRP$. Neka je $\overline{SE}$ dužina koja raspolavlja kut $\angle RSP$ takva da siječe $\overline{RP}$

u točki E. Sada povucimo okomice $\overline{EX}$ i $\overline{PN}$ na $\overline{RS}$ (slika 2.22). Tada je $\angle ERS = \angle ESR$ pa je i $|RE| = |ES|$. Iz toga slijedi da je i $|RX| = |XS|$. Budući da je

$$|RS| : |SP| = |RE| : |EP| = |RX| : |XN|,$$

slijedi da je $|RS| : |RX| = |SP| : |NX|$. No, zbog $|RS| = 2|RX|$ vrijedi i $|SP| = 2|NX|$. Prema tome, P leži na hiperboli kojoj je točka S fokus, XE direktrisa i linearni ekscentricitet 2. Dakle, kako bismo kružni luk podijelili na tri dijela, potrebno je podijeliti dužinu $\overline{RS}$ na dva jednaka dijela točkom X, povući $\overline{XE}$ okomitu na $\overline{RS}$ i tada konstruirati hiperbolu s fokusom S, direktrisom XE i linearnim ekscentricitetom 2.

Poglavlje 3

Euklidovi *Elementi*

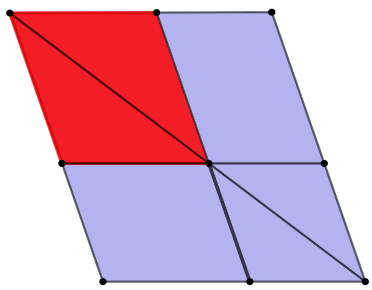
3.1 O Euklidu

O Euklidovom je životu poznato je jako malo podataka. Točni podaci o njegovom datumu rođenja nisu poznati, no temeljem činjenica o njegovom djelovanju i spomenu u djelima drugih matematičara smješta ga se, prema Heathu [5], u razdoblje od otprilike 330. –275. pr. Kr. Često ga se naziva „ocem geometrije", a Heath navodi da je svoja znanja Euklid vrlo vjerojatno stekao od Platonovih učenika te nakon toga došao u Aleksandriju koja je bila glavni znanstveni centar toga doba. Heath također zaključuje, na temelju Papusovih komentara, da je Euklid radio u Aleksandrijskoj sveučilišnoj biblioteci poznatoj pod imenom *museion* u kojoj je matematika doživjela veliki procvat. Citirajući Proklosa, Heath pripisuje da je Euklid sastavio *Elemente* skupivši mnoge Eudoksove teoreme, usavršivši neke Teetetove teoreme te pobliže objasnivši činjenice koje su samo površno dokazali njegovi prethodnici. Euklidovi *Elementi* podijeljeni su u 13 knjiga koje zapravo objedinjuju većinu tada poznate matematike, a kasnije su im dodane još dvije knjige. Sadržaj Euklidovih *Elemenata* čini planimetrija i stereometrija, te aritmetika i teorija brojeva (interpretirana geometrijski). Važnost ovog djela je manje u sadržaju, a više u njegovoj logičkoj strukturi. Počevši s jednostavnim definicijama, aksiomima (općematematičkim pretpostavkama) i postulatima (geometrijskim pretpostavkama), Euklid je organizirao knjige tako da svaka propozicija slijedi isključivo iz prethodno dokazanih tvrdnji ili iz definicija, aksioma i postulata. Za same propozicije se većinom smatra da nisu izvorno Euklidove, već su uglavnom prikazani rezultati drugih matematičara. Ipak, Euklidova deduktivna struktura čini ovo djelo prijelomnim u povijesti matematike te se uzima da je s njime matematika postala egzaktna znanost temeljena na logičkom dokazivanju tvrdnji. Propozicije iz EE ovdje ćemo iskazati i dokazati prema [7].

3.2 Druga knjiga Euklidovih *Elemenata*

EEII sadrži dvije definicije i 14 propozicija geometrijske algebre. Definicije su sljedeće:

1. Za pravokutnik kažemo da je obuhvaćen svojim stranicama koje čine pravi kut.
2. U svakom paralelogramu se svaki paralelogram koji s polaznim dijeli dio dijagonale skupa s dopunama s obje strane naziva gnomonom (slika 3.1).

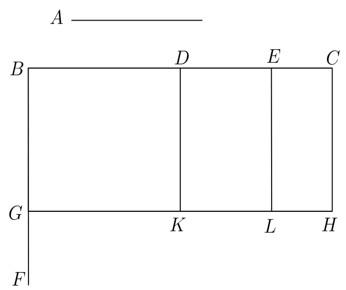


Slika 3.1: Gnomon

Prva propozicija EEII je iz moderne perspektive distributivnost množenja (pozitivnih) realnih brojeva. U njoj se također očituje tipična karakteristika geometrijske algebre, a to je poistovjećivanje lika (ovdje: pravokutnika) s njegovom mjerom (ovdje: površinom).

Propozicija 3.2.1. *Ako su dane dvije dužine i jedna od njih je podijeljena na ma koliko dijelova, onda je pravokutnik obuhvaćen polaznim dužinama jednak zbroju pravokutnika obuhvaćenih nepodijeljenom dužinom i svakim od dijelova.*

Dokaz. Neka su $\overline{A}$ i $\overline{BC}$ dvije dane dužine. Podijelimo $\overline{BC}$ proizvoljno točkama D i E. Tvrdimo da je pravokutnik obuhvaćen zadanim dužinama jednak (suvremeno rečeno: sukladan) zbroju (suvremeno rečeno: uniji) pravokutnika obuhvaćenih dužinama $\overline{A}$ i $\overline{BD}$, $\overline{A}$ i $\overline{DE}$ te $\overline{A}$ i $\overline{EC}$ (slika 3.2).



Slika 3.2: EEII1

Iz točke B konstruirajmo dužinu $\overline{BF}$ okomitu na $\overline{BC}$ (to možemo po EEI11). Označimo na njoj točku G tako da je $\overline{BG}$ jednako $\overline{A}$, zatim kroz G povucimo dužinu $\overline{BH}$ paralelnu s $\overline{BC}$ te točkama D, E i C povucimo dužine $\overline{DK}$, $\overline{EL}$ i $\overline{CH}$ paralelne s $\overline{BG}$ (to možemo po EEI31). Tada je pravokutnik *BH* jednak zbroju pravokutnika *BK*, *DL* i *EH*. Budući da je $\overline{BG}$ jednako $\overline{A}$, slijedi da je pravokutnik *BH*, obuhvaćen dužinama $\overline{BG}$ i $\overline{BC}$, jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{A}$ i $\overline{BC}$. Također, jer je $\overline{BG}$ jednako $\overline{A}$, slijedi da je pravokutnik *BK*, obuhvaćen dužinama $\overline{BG}$ i $\overline{BD}$, jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{A}$ i $\overline{BD}$. Budući da je $\overline{DK}$ jednako $\overline{BG}$, a $\overline{BG}$ jednako $\overline{A}$, slijedi da je i $\overline{DK}$ jednako $\overline{A}$ pa je pravokutnik *DL*, obuhvaćen dužinama $\overline{DK}$ i $\overline{DE}$, jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{A}$ i $\overline{DE}$. Slično, pravokutnik *EH*, obuhvaćen dužinama $\overline{EL}$ i $\overline{EC}$, jednak je pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{A}$ i $\overline{EC}$. Iz toga slijedi da je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{A}$ i $\overline{BC}$ jednak zbroju pravokutnika obuhvaćenih dužinama $\overline{A}$ i $\overline{BD}$, $\overline{A}$ i $\overline{DE}$ te $\overline{A}$ i $\overline{EC}$.

□

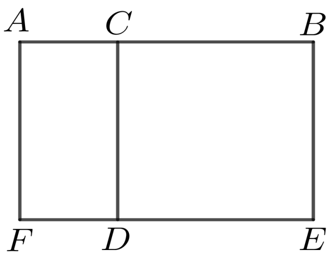
Sljedeće dvije propozicije su specijalni slučajevi EEII1:

Propozicija 3.2.2. *Ako proizvoljno podijelimo dužinu, zbroj pravokutnika obuhvaćenih cijelom dužinom i svakim od dijelova jednak je kvadratu nad cijelom dužinom.*

Iako je ovu propoziciju moguće dobiti kao direktni korolar EEII1, Euklid ju je direktno dokazao, što sugerira da je prva propozicija dodana naknadno, bilo da ju je dodao sam Euklid bilo netko drugi.

Propozicija 3.2.3. *Ako proizvoljno podijelimo danu dužinu, pravokutnik obuhvaćen danom dužinom i jednim od dijelova jednak je zbroju pravokutnika obuhvaćenih dobivenim dijelovima te kvadrata nad prvim dijelom.*

Dokaz. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ podijeljena proizvoljno točkom C. Tvrdimo da je pra-



Slika 3.3: EEII3

vokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jednak zbroju pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ i kvadrata nad dužinom $\overline{BC}$ (slika 3.3).

Neka je $CDEB$ kvadrat konstruiran nad dužinom $\overline{CB}$ (konstrukcija kvadrata opisana je u EEI46). Dužinu $\overline{ED}$ produžimo do točke F te točkom A povučemo dužinu $\overline{AF}$ paralelnu s $\overline{CD}$ ili $\overline{BE}$, što možemo po EEI31. Tada je pravokutnik AE jednak zbroju pravokutnika AD i CE. Budući da je $\overline{BE}$ jednako $\overline{BC}$, pravokutnik AE, obuhvaćen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BE}$, jednak je pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Također, $\overline{CD}$ je jednako $\overline{CB}$ jer je DB kvadrat nad dužinom $\overline{CB}$ pa je pravokutnik AD, obuhvaćen dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$, jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. Iz toga slijedi da je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jednak zbroju pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BE}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{CB}$.

□

Suvremenim stilom, EEII3 izrekli bismo ovako: Ako je $x = y + z$, onda je $xy = y^2 + yz$, odnosno radi se o algebarskoj formuli

$$(y+z)z = y^2 + yz$$

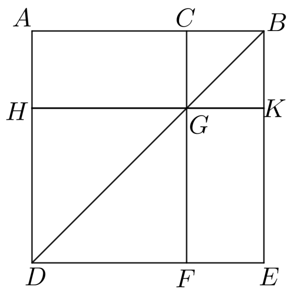
dokazanoj za pozitivne realne brojeve. Očigledno je i ovo specijalni slučaj EEII1.

Sljedeća je propozicija vjerojatno najpoznatiji primjer geometrijske algebre, jer se radi o geometrijskoj varijanti identiteta

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Propozicija 3.2.4. *Ako danu dužinu proizvoljno podijelimo na dva segmenta, kvadrat nad cijelom dužinom jednak je zbroju kvadrata nad segmentima i dvostrukom pravokutniku obuhvaćenom dobivenim segmentima.*

Dokaz. Neka je dana dužina $\overline{AB}$ proizvoljno podijeljena točkom C. Tvrdimo da je kva-



Slika 3.4: EEII4

drat nad dužinom $\overline{AB}$ jednak zbroju kvadrata nad segmentima $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ te dvostrukog pravokutnika obuhvaćenog segmentima $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ (slika 3.4).

Neka je $ADEB$ kvadrat konstruiran nad dužinom $\overline{AB}$ (konstrukcija kvadrata opisana je u EEI46). Spojimo $\overline{BD}$, kroz C povučemo dužinu $\overline{CF}$ paralelnu s $\overline{AD}$ ili $\overline{EB}$ te kroz G povučemo dužinu $\overline{HK}$ paralelnu s $\overline{AB}$ ili $\overline{DE}$ (konstrukcija paralela moguća je po EEI31). Tada, budući da je dužina $\overline{CF}$ paralelna dužini $\overline{AD}$, a $\overline{BD}$ ih obje siječe, vanjski kut $\angle CGB$ jednak je unutarnjem nasuprotnom kutu $\angle ADB$ (po propoziciji EEI29[1]. No, budući da je $\overline{BA}$ jednaka $\overline{AD}$, kut $\angle ADB$ jednak je kutu $\angle ABD$ (EEI5: U jednakokračnom trokutu kutovi uz osnovicu su jednaki). Također, kut $\angle CGB$ tada je jednak kutu $\angle GBC$ jer je dužina $\overline{BC}$ jednaka dužini $\overline{CG}$. Sada, budući da je $\overline{CB}$ jednako $\overline{GK}$ i $\overline{CG}$ jednako $\overline{KB}$, slijedi da je i $\overline{GK}$ jednako $\overline{KB}$ pa je $CGKB$ istostraničan mnogokut. Želimo pokazati da su kutovi tog mnogokuta pravi. Budući da je $\overline{CG}$ paralelna $\overline{BK}$, zbroj kutova $\angle KBC$ i $\angle GCB$ jednak je

[1]EEI29 – Ako pravac siječe dva paralelna pravca, izmjenični kutovi su međusobno jednaki, odnosno vanjski kut jednak je unutarnjem nesusjednom kutu, a zbroj unutarnjih kutova s iste strane pravca jednak je dvama pravim kutovima.

dvama pravim kutovima. No, kut $\angle KBC$ je pravi jer je $ADEB$ kvadrat pa je kut $\angle BCG$ također pravi, a iz toga slijedi da su i njima nasuprotni kutovi $\angle CGK$ i $\angle GKB$ pravi. Dakle, $CGKB$ ja pravokutan, a također smo pokazali da je i jednako straničan pa je prema tome $CGKB$ kvadrat konstruiran nad dužinom $\overline{CB}$. Slično se pokaže da je HF također kvadrat konstruiran nad dužinom $\overline{HG}$, odnosno nad $\overline{AC}$ jer je $\overline{AC}$ jednako $\overline{HG}$. Dakle, kvadrati HF i KC su kvadrati nad dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. Sada, budući da je $\overline{GC}$ jednako $\overline{CB}$, pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CG}$ jednak je pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$, a jer je pravokutnik AG jednak pravokutniku GE slijedi da je i pravokutnik GE jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. No, kako su kvadrati HF i CK jednaki kvadratima nad $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$, slijedi da je zbroj površina likova HF, CK, AG i GE jednak zbroju kvadrata nad $\overline{AC}$, kvadrata nad $\overline{CB}$ te dvostrukog pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. Ali, zbroj površina likova HF, CK, AG i GE zapravo je cijeli $ADEB$, odnosno kvadrat AB. Prema tome, kvadrat nad $\overline{AB}$ jednak je zbroju kvadrata AC i CB te dvostrukog pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$.

□

Dok je prethodna propozicija iz algebarske perspektive bila formula za kvadrat binoma, sljedeća propozicija ekvivalentna je formuli za razliku kvadrata:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

odnosno $a^2 - b^2 = ab$.

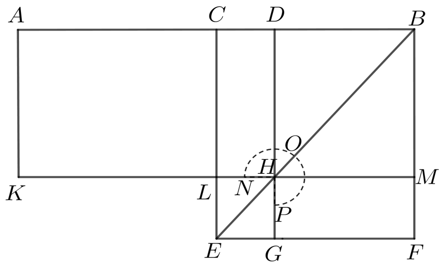
Propozicija 3.2.5. *Ako danu dužinu podijelimo dvjema točkama na jednake i nejednake dijelove,* [2] *zbroj pravokutnika obuhvaćenog nejednakim segmentima dužine i kvadrata nad spojnicom tih dviju točaka jednak je kvadratu nad polovicom dužine.*

Dokaz.

Neka je dužina $\overline{AB}$ podijeljena točkom C na jednake dijelove, a točkom D na različite. Tvrdimo da je zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{CD}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{CB}$ (slika 3.5).

Neka je kvadrat $CEFB$ konstruiran nad dužinom $\overline{CB}$ i spojimo $\overline{BE}$ (kvadrat znamo konstruirati po EEI46). Točkom D povucimo paralelu s $\overline{CE}$ ili $\overline{BF}$, točkom H paralelu

[2] Želi se reći: Jedna točka je polovište dužine, a druga je bilo koja druga točka unutar dužine.



Slika 3.5: EEII5

$\overline{KM}$ s $\overline{AB}$ ili $\overline{EF}$ te točkom A paralelu $\overline{AK}$ s $\overline{CK}$ ili $\overline{BM}$, što znamo prema EEI31. Tada, budući da je nadopuna $\overline{CH}$ jednaka nadopuni $\overline{HF}$ (to znamo iz EEI43[3]), dodajmo objema kvadrat *DM* te će tada pravokutnik *CM* biti jednak pravokutniku *DF*. No, budući da je dužina $\overline{AC}$ jednaka dužini $\overline{AB}$, iz EEI36 [4] slijedi da je i pravokutnik *CM* jednak pravokutniku *AL* pa je i pravokutnik *AL* jednak pravokutniku *DF*. Dodajmo svakom od tih pravokutnika pravokutnik *CH*. Tada je pravokutnik *AH* jednak gnomonu *NOP*. No, budući da je dužina $\overline{DH}$ jednaka dužini $\overline{DB}$, slijedi da je pravokutnik *AH* jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ pa je prema tome gnomon *NOP* također jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$. Dodajmo sada i pravokutniku *AH* i gnomonu *NOP* kvadrat *LG* koji je jednak kvadratu nad dužinom $\overline{CD}$. Tada je gnomon *NOP* zajedno s kvadratom *LG* jednak pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ zajedno s kvadratom nad $\overline{CD}$. No, gnomon *NOP* zajedno s kvadratom *LG* čini kvadrat *CEFB* koji je konstruiran nad dužinom $\overline{CB}$ pa je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ zajedno s kvadratom nad dužinom $\overline{DC}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{CB}$.

□

Sljedeća propozicija slična je prethodnoj, a razlika je u tome što točka D ne leži na dužini $\overline{AB}$, već na njezinom produžetku. Ekvivalentna je sljedećoj formuli:

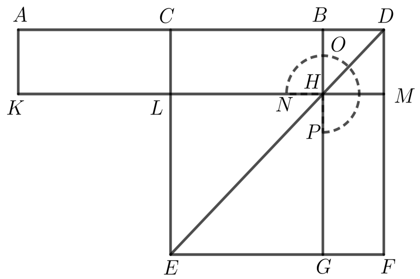
$$xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

odnosno $b^2 - a^2 = ab$.

[3]EEI43 – U svakom paralelogramu dopune paralelograma oko dijagonale međusobno su jednake.
[4]EEI36 – Paralelogrami nad jednakim osnovicama koji se nalaze između istih paralela su jednaki.

Propozicija 3.2.6. *Ako danu dužinu podijelimo na dva jednaka dijela i proizvoljno produžimo, zbroj pravokutnika obuhvaćenog novodobivenom dužinom i produžetkom dane dužine te kvadrata nad polovicom dane dužine jednak je kvadratu nad dužinom koju čine polovica dane dužine i produžetak.*

Dokaz. Neka je dužina $\overline{AB}$ podijeljena na dva jednaka dijela točkom C i neka joj je u produžetku dodana dužina $\overline{BD}$. Tvrdimo da je zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{CB}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{CD}$ (slika 3.6).



Slika 3.6: EEII6

Neka je *CEFD* kvadrat konstruiran nad dužinom $\overline{CD}$ i neka su spojene točke C i D (konstrukcija kvadrata opisana je u EEI46). Kroz točku C neka je povučena paralela $\overline{BG}$ s $\overline{EC}$ ili $\overline{DF}$, kroz točku H neka je povučena paralela $\overline{KM}$ s $\overline{AB}$ ili $\overline{EF}$ te neka je kroz A povučena paralela $\overline{AK}$ s $\overline{CL}$ ili $\overline{DM}$ (to je moguće po EEI31). Tada, budući da je $\overline{AC}$ jednako $\overline{CB}$, slijedi da je i pravokutnik *AL* jednak pravokutniku *CH* (po EEI36). Iz EEI43 slijedi da je pravokutnik *CH* jednak pravokutniku *HF* pa je i pravokutnik *AL* jednak pravokutniku *HF*. Dodajmo pravokutnik *CM* pravokutnicima *AL* i *HF*. Tada je pravokutnik *AM* jednak gnomonu *NOP*. No, budući da je dužina $\overline{DM}$ jednaka dužini $\overline{DB}$, pravokutnik *AM* jednak je pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ iz čega slijedi da je i gnomon *NOP* jednak tom pravokutniku. Neka je kvadrat *LG* koji je jednak kvadratu nad $\overline{BC}$ dodan pravokutniku *AM* i gnomonu *NOP*. Tada je zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{CB}$ jednak zbroju gnomona *NOP* i kvadrata *LG*. No, zbroj gnomona *NOP* i kvadrata *LG* čini kvadrat *CEFD* koji je konstruiran nad dužinom $\overline{CD}$ pa je prema tome zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{CB}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{CD}$.

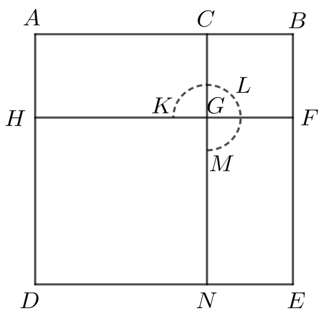
□

Sljedeća propozicija još jedan je poznati primjer geometrijske algebre, a radi se o formuli za kvadrat razlike:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Propozicija 3.2.7. *Ako danu dužinu proizvoljno podijelimo na dva dijela, zbroj kvadrata nad danom dužinom i kvadrata nad jednim segmentom dužine jednak je dvostrukom pravokutniku kojeg čine pravokutnik obuhvaćen danom dužinom i prethodno spomenutim segmentom te kvadrat nad drugim segmentom.*

Dokaz. Neka je dužina $\overline{AB}$ proizvoljno podijeljena točkom C. Tvrdimo da je zbroj kvadrata nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jednak zbroju dvostrukog pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te kvadrata nad $\overline{CA}$.



Slika 3.7: EEII7

Nad dužinom $\overline{AB}$ konstruirajmo kvadrat $ADEB$ (to možemo po EEI46) i podijelimo ga kao na slici 3.7. Tada, budući da je pravokutnik AG jednak pravokutniku GE, dodamo li svakom od njih kvadrat CF, pravokutnik AF će biti jednak pravokutniku CE (prema EEI43). Prema tome, zbroj pravokutnika AF i CE jednak je dvostrukom pravokutniku AF. No, zbroj pravokutnika AF i CE jednak je zbroju gnomona KLM i kvadrata CF pa je i taj zbroj jednak dvostrukom pravokutniku AF. Nadalje, budući da je dužina $\overline{BF}$ jednaka dužini $\overline{BC}$, dvostruki pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ također je jednak dvostrukom pravokutniku AF pa je zbroj gnomona KLM i kvadrata CF jednak dvostrukom pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Kvadrat DG konstruiran nad dužinom $\overline{AC}$ dodamo svakom od prethodna dva zbroja. Tada je zbroj gnomona KLM

te kvadrata BG i GD jednak zbroju dvostrukog pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te kvadrata nad $\overline{AC}$. No, zbroj gnomona KLM, kvadrata BG i GD jednak je zbroju kvadrata $ADEB$ i CF, odnosno zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Prema tome, zbroj kvadrata nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jednak je dvostrukom zbroju pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{AC}$.

□

Slijede još tri propozicije slične moderne interpretacije u terminima algebarskih identiteta:

Propozicija 3.2.8. *Ako danu dužinu proizvoljno podijelimo na dva dijela, onda je četverostruki zbroj pravokutnika obuhvaćenog danom dužinom i jednim od segmenata te kvadrata nad drugim segmentom jednak kvadratu nad dužinom koju čine dana dužina i prvi odsječak.*

U suvremenom zapisu prethodnu propoziciju zapisali bismo na sljedeći način: Ako je $x = y + z$, onda je $4xy + z^2 = (x + y)^2$, a to je zapravo algebarska formula

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy.$$

Slično, sljedeća propozicija je geometrijska varijantna identiteta $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Propozicija 3.2.9. *Ako danu dužinu podijelimo dvjema točkama na jednake i nejednake dijelove, zbroj kvadrata nad nejednakim segmentima jednak je dvostrukom zbroju kvadrata nad polovicom početne dužine i kvadrata nad spojnicom danih točaka.*

Kao i prethodna propozicija, EEII10 također se može interpretirati tako da iz algebarske perspektive predstavlja formulu $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Propozicija 3.2.10. *Ako danu dužinu podijelimo na dva jednaka dijela i proizvoljno produžimo, zbroj kvadrata nad dužinom koju čine cijela dužina i produžetak te kvadrata nad produžetkom jednak je dvostrukom zbroju kvadrata nad polovicom dane dužine te kvadrata nad dužinom koju čini polovica dane dužine i produžetak te dužine.*

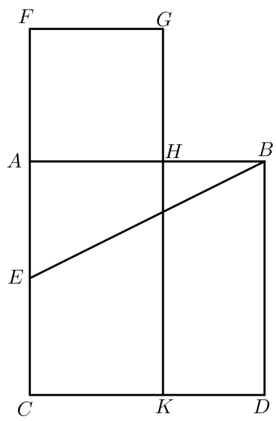
U sljedećoj propoziciji geometrijski je prikazano rješenje sljedeće kvadratne jednadžbe:

$$a(a-x) = x^2,$$

odnosno njome se dana dužina dijeli na dva dijela u takvom omjeru da se cjelina prema većem dijelu odnosi kao veći dio prema manjem. Danas se taj omjer naziva zlatni rez.

Propozicija 3.2.11. *Podijeliti danu dužinu tako da je pravokutnik obuhvaćen danom dužinom i jednim od segmenata jednak kvadratu nad drugim segmentom.*

Dokaz.



Slika 3.8: EEII11

Neka je $\overline{AB}$ dana dužina koju želimo podijeliti tako da je pravokutnik obuhvaćen danom dužinom i jednim od segmenata jednak kvadratu nad drugim segmentom. Neka je $ABDC$ kvadrat konstruiran nad dužinom $\overline{AB}$. Neka je točka E polovište dužine $\overline{AC}$ (polovište znamo pronaći prema EEI10) i spojimo točke B i E. Zatim produljimo dužinu $\overline{AC}$ do točke F tako da je dužina $\overline{EF}$ jednaka dužini $\overline{BE}$, što možemo po EEI3. Nad dužinom $\overline{AF}$ konstruirajmo kvadrat FH i produljimo dužinu $\overline{GH}$ do točke K. Tvrdimo da točka H dijeli dužinu $\overline{AB}$ tako da je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BH}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{AH}$.

Budući da je točka E polovište dužine $\overline{AC}$ te je na nju nadodana dužina $\overline{FA}$, iz 3.2.6 slijedi da je zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{CF}$ i $\overline{FA}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{AE}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{EF}$. No, dužina $\overline{EF}$ jednaka je dužini $\overline{EB}$ pa je prema EEI47[5] zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{CF}$ i $\overline{FA}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{AE}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{EB}$. Isto tako, kvadrati nad dužinama $\overline{BA}$ i $\overline{AE}$ jednaki su kvadratu EB jer je kut u vrhu A pravi, iz čega slijedi da je zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{CF}$ i $\overline{FA}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{AE}$ jednak zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{BA}$ i $\overline{AE}$. Oduzmimo od oba zbroja kvadrat nad dužinom AE. Tada je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{CF}$ i $\overline{FA}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{AB}$. Sada, kako je $\overline{AF}$ jednaka $\overline{FG}$, slijedi da je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{CF}$ i $\overline{FA}$ jednak pravokutniku FK. Također, kvadrat nad dužinom $\overline{AB}$ jednak je kvadratu AD iz čega slijedi da je pravokutnik FK jednak kvadratu AD. Oduzmemo od oba lika pravokutnik AK i tada je kvadrat FH jednak pravokutniku HD. Pravokutnik HD jednak je pravokutniku obuhvaćenom dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BH}$ jer su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$ jednake, a kvadrat FH je kvadrat nad dužinom $\overline{AH}$ pa je pravokutnik obuhvaćen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BH}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{HA}$.

□

Sljedeće dvije propozicije na neki način smatraju se antičkom varijantom poučka o kosinusu, odnosno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

U Euklidovo doba trigonometrija nije postojala te Euklid taj poučak razdvaja na dva slučaja, ovisno o tome je li kut tupi ili šiljast:

Propozicija 3.2.12. *U tupokutnim trokutima je kvadrat nad stranicom nasuprot tupog kuta veći od zbroja kvadrata nad stranicama koje zatvaraju tupi kut, za dvostruki pravokutnik obuhvaćen jednom od stranica koje zatvaraju tupi kut, točnije, onom na koju pada visina, te samom visinom.*

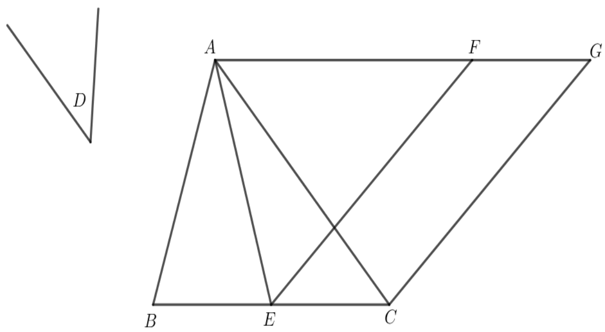
Propozicija 3.2.13. *U šiljastokutnim trokutima je kvadrat nad stranicom nasuprot šiljastog kuta manji od zbroja kvadrata nad stranicama koje zatvaraju šiljasti kut, za dvostruki pravokutnik obuhvaćen jednom stranicom koja zatvara šiljasti kut, točnije, onom na koju pada visina, te samom visinom.*

Još u EEI je dokazano da se za svaki mnogokut može konstruirati pravokutnik iste površine (EEI45). Za dokaz EEI45 neophodne su propozicije EEI42 i EEI44:

[5] EEI47 – Pitagorin poučak

Propozicija 3.2.14. *U danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom trokutu.*

Dokaz. Neka je ABC dan trokut, a D dani pravocrtni kut. Dakle, potrebno je u danom pravocrtnom kutu D konstruirati paralelogram jednak trokutu $\triangle ABC$ (slika 3.9).



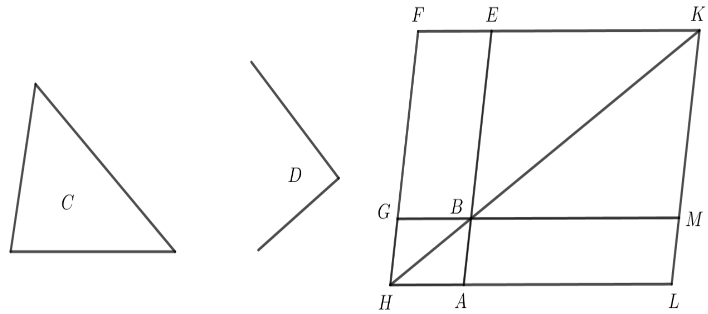
Slika 3.9: EEI42

Podijelimo $\overline{BC}$ na dva jednaka dijela u točki E, spojimo $\overline{AE}$ i na njoj konstruirajmo kut $\angle CEF$ jednak kutu D (to možemo po EEI23). Kroz točku A povučemo paralelu $\overline{AG}$ s $\overline{EC}$, a kroz točku C paralelu $\overline{CG}$ s $\overline{EF}$. Prema tome, $FECG$ je paralelogram. Budući da je dužina $\overline{BE}$ jednaka dužini $\overline{EC}$, trokut $\triangle ABE$ jednak je trokutu $\triangle AEC$ jer oni leže na jednakim osnovicama $\overline{BE}$ i $\overline{EC}$ i nalaze se u istim paralelama $\overline{BC}$ i $\overline{AG}$. Iz toga slijedi da je trokut $\triangle ABC$ dvostruko veći od trokuta $\triangle AEC$. Budući da paralelogram $FECG$ i trokut $\triangle AEC$ imaju istu osnovicu i nalaze se među istim paralelama, slijedi da je i paralelogram $FECG$ dvostruko veći od trokuta $\triangle AEC$. Prema tome, paralelogram $FECG$ je jednak trokutu $\triangle ABC$ i ima kut $\angle CEF$ jednak danom kutu D.

□

Propozicija 3.2.15. *U danom pravocrtnom kutu uz danu dužinu položiti paralelogram jednak danom trokutu.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ dana dužina, $\triangle C$ dani trokut, a D dani pravocrtni kut. Dakle, potrebno je uz danu dužinu $\overline{AB}$ položiti paralelogram jednak danom trokutu $\triangle C$ u kutu jednakom kutu D (slika 3.10).



Slika 3.10: EEI44

U kutu $\angle EGB$ jednakom kutu D konstruirajmo paralelogram $BEFG$ jednak trokutu $\triangle C$ (EEI42), tako da je $\overline{BE}$ u dužini s $\overline{AB}$. Produljimo dužinu $\overline{FG}$ do točke H, kroz točku A povučemo paralelu $\overline{AH}$ s $\overline{BG}$ ili $\overline{EF}$ i spojimo $\overline{HB}$. Budući da dužina $\overline{HF}$ siječe paralele $\overline{AH}$ i $\overline{EF}$, zbroj kutova $\angle AHF$ i $\angle HFE$ jednak je dvama pravim kutovima, iz čega slijedi da je zbroj kutova $\angle BHG$ i $\angle GFE$ manji od dva prava kuta. Produžimo dužine $\overline{HB}$ i $\overline{FE}$ i njihovo sjecište označimo s K (dužine će se sjeći prema EEP5 [6]). Kroz točku K povucimo dužinu $\overline{KL}$ paralelnu s dužinom $\overline{EA}$ ili $\overline{FH}$ te produžimo dužine $\overline{HA}$ i $\overline{B}$ do točaka L i M. Tada je $HKLF$ paralelogram, a dužina $\overline{HK}$ njegova dijagonala. AG i ME također su paralelogrami, a LB i BF dopune oko HK. Iz toga slijedi da je pravokutnik LB jednak pravokutniku BF. Budući da je pravokutnik BF jednak trokutu $\triangle C$, slijedi da je i pravokutnik LB jednak trokutu $\triangle C$. Kut $\angle GBE$ jednak je kutu $\angle ABM$, a kut $\angle GBE$ jednak je kutu D pa slijedi da je i kut $\angle ABM$ jednak kutu D. Dakle, uz danu dužinu AB položen je paralelogram LB jednak danom trokutu $\triangle C$ u kutu $\angle ABM$ koji je jednak kutu D.

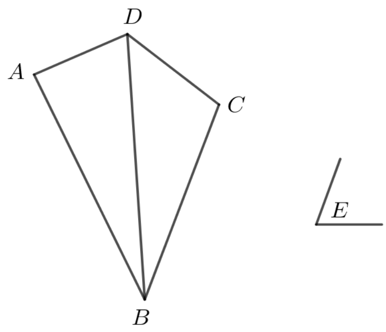
□

Konstrukcija pravokutnika površine jednake zadanom mnogokutu svodi se na podjelu mnogokuta na trokute, od kojih se prvi po EEI42 pretvori u pravokutnik (paralelogram s pravim kutom) iste površine, a ostali po EEI44 u pravokutnike koji s prvim imaju jednu zajedničku stranicu te se onda ti pravokutnici „zalijepe":

[6] Ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sjeku se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Propozicija 3.2.16. *U danom pravocrtnom kutu konstruirati paralelogram jednak danom pravocrtnom liku.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ dani pravocrtni lik, a E dani pravocrtni kut. Dakle, potrebno je u danom pravocrtnom kutu E konstruirati paralelogram jednak pravocrtnom liku $ABCD$ (slika 3.11)



Slika 3.11: EEI45

Spojimo $\overline{DB}$ i u kutu $\angle HKF$ konstruirajmo paralelogram FH jednak trokutu $\triangle ABD$ (EEI42). U kutu $\angle GHM$, jednakom kutu E, uz dužinu $\overline{GH}$ prislonimo paralelogram GM jednak trokutu $\triangle DBC$, što možemo po EEI44. Budući da je kut E jednak svakom od kutova $\angle HKF$ i $\angle GHM$, iz Euklidovog prvog aksioma slijedi da je i kut $\angle HKF$ jednak kutu $\angle GHM$. Svakom od tih kutova dodajmo kut $\angle KHG$ i sada su kutovi $\angle FKH$ i $\angle KHG$ jednaki kutovima $\angle KHG$ i $\angle GHM$. No, kutovi $\angle FKH$ i $\angle KHG$ jednaki su dvama pravim kutovima pa su i kutovi $\angle KHG$ i $\angle GHM$ jednaki dvama pravim kutovima. Prema tome, s dužinom $\overline{GH}$ i točkom H na njoj, dužine $\overline{KH}$ i $\overline{HM}$ koje ne leže s iste strane dužine $\overline{GH}$ čine susjedne kutove jednake dvama pravim kutovima iz čega slijedi da dužine $\overline{KH}$ i $\overline{HM}$ leže na istom pravcu. Budući da dužina $\overline{HG}$ siječe paralele $\overline{KM}$ i $\overline{FG}$, izmjenični kutovi $\angle MHG$ i $\angle HGF$ međusobno su jednaki. Svakom od njih dodamo kut $\angle HGL$ i tada su kutovi $\angle MHG$ i $\angle HGL$ jednaki kutovima $\angle HGF$ i $\angle HGL$. Budući da su kutovi $\angle MHG$ i $\angle HGL$ jednaki dvama pravim kutovima, slijedi da su i kutovi $\angle HGF$ i $\angle HGL$ jednaki dvama pravim kutovima. Prema tome, dužine $\overline{FG}$ i $\overline{GL}$ leže na istom pravcu. Dužine $\overline{FK}$ i $\overline{HG}$ su jednake i paralelne, a dužina $\overline{HG}$ je jednaka i paralelna dužini $\overline{MK}$ pa je i dužina $\overline{KF}$ jednaka i paralelna dužini $\overline{ML}$. Budući da dužine $\overline{KM}$ i $\overline{FL}$ spajaju dužine $\overline{KF}$ i $\overline{ML}$, slijedi da su i one jednake i paralelne. Dakle, $KFLM$ je paralelogram iste površine kao mnogokut ABCD.

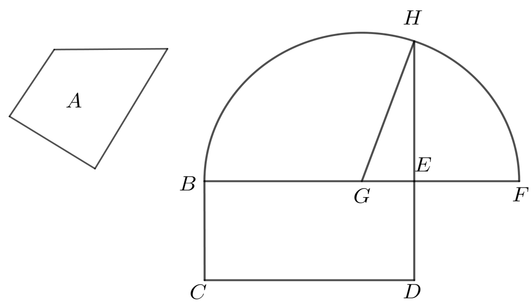
□

Naposljetku, zadnja propozicija u EEII dokazuje već više puta spomenutu činjenicu da je moguće kvadrirati svaki mnogokut.

Propozicija 3.2.17. *Konstruirati kvadrat jednak zadanom mnogokutu.*

Dokaz. Neka je A zadani mnogokut. Potrebno je konstruirati kvadrat koji je jednak zadanom mnogokutu.

Neka je konstruiran pravokutnik BD jednak zadanom mnogokutu A (to možemo po EEI45).



Slika 3.12: EEII14

Tada, kada bi dužina $\overline{BE}$ bila jednaka dužini $\overline{ED}$, dobili bismo ono što tražimo jer je kvadrat BD jednak mnogokutu A. No, ako dužina $\overline{BE}$ nije jednaka dužini $\overline{ED}$, onda je jedna od te dvije dužine veća od druge.

Neka je dužina $\overline{BE}$ veća od dužine $\overline{ED}$. Produljimo ju do točke F tako da su dužine $\overline{EF}$ i $\overline{ED}$ jednake, što možemo po EEI3. Dužinu $\overline{BF}$ točkom G podijelimo na dva jednaka dijela (EEI10) i oko nje opišemo polukružnicu BHF polumjera $|GB|$, odnosno $|GF|$. Produljimo dužinu $\overline{DE}$ do točke H i spojimo $\overline{GH}$ (slika 3.12). Budući da je dužina $\overline{BF}$ točkom G podijeljena na jednake dijelove, a točkom E na nejednake dijelove, iz propozicije 3.2.5 slijedi da je zbroj pravokutnika obuhvaćenog dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{EG}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{GF}$. No, dužina $\overline{GF}$ jednaka je dužini $\overline{GH}$ pa je zbroj pravokutnika omeđenog dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ te kvadrata nad dužinom $\overline{GE}$ jednak kvadratu nad dužinom $\overline{GH}$. Iz Pitagorinog poučka slijedi da je kvadrat nad dužinom $\overline{GH}$ jednak zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{HE}$ i $\overline{EG}$. Prema tome, zbroj pravokutnika omeđenog dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ i kvadrata nad dužinom $\overline{GE}$ jednak je zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{HE}$ i $\overline{EG}$. Oduzmimo od oba zbroja kvadrat nad dužinom $\overline{GE}$. Preostali pravokutnik omeđen dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ jednak je kvadratu nad dužinom $\overline{EH}$. No, pravokutnik omeđen dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ jednak je pravokutniku $\overline{BD}$ jer je $|EF| = |ED|$. Dakle, pravokutnik BD jednak je kvadratu nad dužinom $\overline{HE}$. Sada, budući da je BD jednak mnogokutu A, slijedi da je i mnogokut A jednak kvadratu nad dužinom $\overline{EH}$.

□

Uočimo da iz algebarske perspektive propozicija EEII14 opisuje konstrukciju dužine duljine $\sqrt{ab}$ ako su zadane duljine a i b, odnosno radi se o geometrijskom rješavanju jednadžbe

$$x^2 = ab.$$

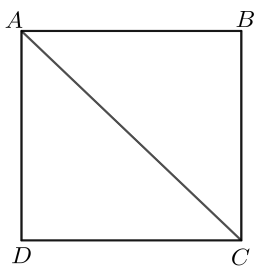
Poglavlje 4

Drugi primjeri starogrčke geometrijske algebre

4.1 Nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata

Kako navodi Heath [5], nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata je činjenica otkrivena u pitagorejskoj školi. U suvremenoj interpretaciji radi se o iracionalnosti broja $\sqrt{2}$. Dokaz je proveden metodom *reductio ad absurdum.* U dokazu se koristi činjenica iz teorije brojeva da je umnožak dva neparna broja neparan, a umnožak dva parna broja paran broj.

Pretpostavimo da je $\overline{AC}$ dijagonala kvadrata za koju tvrdimo da je sumjerljiva sa stranicom kvadrata $\overline{AB}$ (slika 4.1), te neka su one u omjeru $m : n$, gdje su m i n prirodni brojevi. Možemo pretpostaviti da nisu oba parni, jer bismo u suprotnom mogli za jediničnu mjeru duljine uzeti dvostruko dulju. Tada je $m > n$ (dijagonala je očigledno dulja



Slika 4.1: Nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata

od stranice kvadrata) pa je nužno $m > 1$. Sada, budući da je $|AC|^2 : |AB|^2 = m^2 : n^2$ i iz Pitagorinog poučka (kojeg su prvi dokazali pitagorejci) slijedi $|AC|^2 = 2|AB|^2$. Dakle je $m^2 = 2n^2$. Prema tome, m^2 je paran pa je i m paran. Po pretpostavci je onda n neparan.

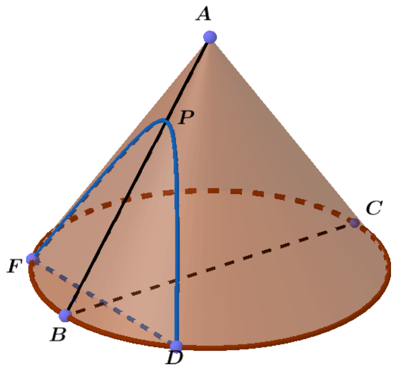
Neka je sada $m = 2k$. Iz toga slijedi da je $4k^2 = m^2 = 2n^2$, odnosno $2k^2 = n^2$. Dakle, β je paran. Slijedilo bi da je n paran, no to je nemoguće. Dakle, dijagonala kvadrata $\overline{AC}$ je nesumjerljiva sa stranicom kvadrata $\overline{AB}$.

4.2 Apolonijeva teorija konika

Apolonije (oko 262.–oko 190. pr. Kr.) je rođen u Pergi[1], a o njegovom životu poznato je vrlo malo podataka. Kako navodi Heath [4], svoja znanja stekao je u Aleksandriji učeći zajedno s Euklidovim nasljednicima. Poznat je po svome djelu *Konike* pisanom u osam knjiga, u kojima su među ostalim uvedeni i nazivi konika: elipsa, parabola i hiperbola. Prva knjiga opisuje načine na koje nastaju tri presjeka stošca te njihova svojstva, druga knjiga sadrži svojstva promjera i osi tih presjeka, asimptota te ostalog što je neophodno za razlikovanje slučajeva u propozicijama. Treća knjiga sadrži teoreme korisne za rješavanje problema čija rješenja zahtijevaju primjenu konika, a četvrta knjiga prikazuje na koliko načina presjeci stošca mogu sječi luk kružnice ili jedan drugog. Preostale knjige su složenije i govore o jednakosti i sličnosti presjeka, teoremima pomoću kojih razlikujemo konike te o problemima vezanim uz razne vrste konika. Prve četiri knjige *Konika* sačuvane su u grčkom originalu, sljedeće tri su sačuvane u arapskom prijevodu, dok je posljednja izgubljena. Dok bismo u današnje vrijeme Apolonijeve rezultate najlakše dobili pomoću analitičke geometrije, u njenom nedostatku Apolonije je sve svoje rezultate izveo geometrijskom algebrom. Ovdje ćemo opisati samo nekoliko primjera iz kojih je vidljiv Apolonijev pristup.

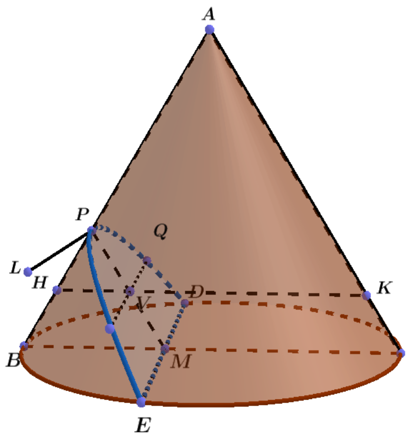
Prvu knjigu Apolonije započinje opisom dvostrukog kosog kružnog stošca, a nakon toga uvodi definicije nekih pojmova vezanih uz konike: definiciju promjera, dijagonalnog promjera, uspravnog promjera, ordinata, konjugiranih promjera, osi i konjugiranih osi, kako bi lakše opisao nastanak presjeka stošca. Apolonije uzima trokut koji sadrži os stošca, odnosno trokut $\triangle ABC$ čija je jedna stranica promjer baze stošca (slika 4.2). Presječnu ravninu postavio je tako da je njezin presjek $\overline{DE}$ s bazom okomit na osnovicu

[1] Antički grad u Maloj Aziji, nedaleko današnjeg turskog grada Antalye.



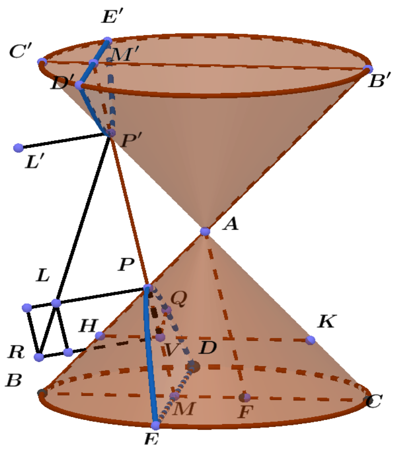
Slika 4.2: Osni trokut

trokuta $\overline{BC}$. Ako je $\overline{PM}$ presjek presječne ravnine i odabranog trokuta $\triangle ABC$ (dakle je M polovište $\overline{DE}$), Apolonije je prvo dokazao da $\overline{PM}$ raspolavlja svaku tetivu presjeka stošca koja je paralelna $\overline{DE}$. Apolonije tako sve tri vrste konika opisuje preko njihova promjera okomitog na BC. U slučaju parabole (slika 4.3), PM je paralelan s AC, u slučaju hiperbole (slika 4.4 siječe drugu polovicu stošca u točki P', dok u slučaju elipse (slika 4.5) siječe osnovni stožac u točki P'. U slučaju hiperbole i elipse Apolonije dodatno povlači

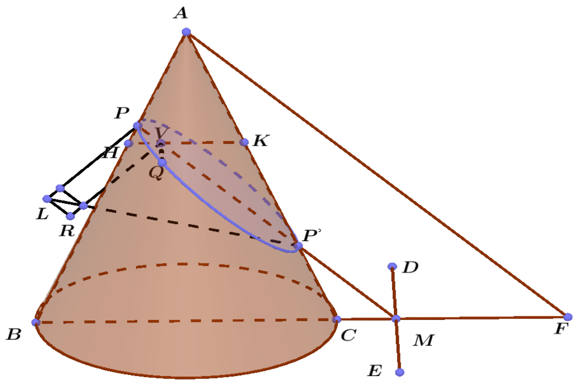


Slika 4.3: Parabola dobivena presjekom stošca i ravnine

dužinu $\overline{AF}$ paralelnu s $\overline{PM}$ (pri čemu je F njezin presjek s pravcem BC). Kako bi izveo temeljna svojstva konika, Apolonije ovisno o tipu konike povlači i određeni pravac PL



Slika 4.4: Hiperbola dobivena presjekom stošca i ravnine



Slika 4.5: Elipsa dobivena presjekom stošca i ravnine

unutar ravnine presjeka, okomit na $\overline{PM}$. U slučaju parabole, P i L su odabrane tako

$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|),$$

a kod hiperbole i elipse tako da vrijedi

$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2.$$

U posljednja dva slučaja spojimo $\overline{P'L}$ i povučemo paralelu s PL koja siječe $P'L$ u točki R. Neka je sad QQ' proizvoljna tetiva konike paralelna s DE i V njezino polovište (dakle je $V \in PM$). Povučemo li HK kroz V tako da siječe AB i BC redom u točkama H i K,

$\overline{HK}$ je promjer kružnog presjeka paralelnog bazi stošca. Iz toga slijedi da je $|QV|^2 = (|HV| \cdot |VK|)$. Sada u slučaju parabole, iz paralelnosti i sličnih trokuta slijedi:

$$|HP| : |PV| = |BC| : |CA|,$$

$$|VK| : |PA| = |BC| : |BA|.$$

Prema tome, za svaku točku Q na paraboli vrijedi:

$$|QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |PA|)$$

$$= |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|) = |PL| : |PA| = (|PL| \cdot |PV|) : (|PV| \cdot |PA|),$$

odnosno, za svaku točku Q na paraboli i polovište odgovarajuće s $\overline{DE}$ paralelne tetive vrijedi

$$|QV|^2 = (|PL| \cdot |PV|).$$

U slučaju hiperbole i elipse pak Apolonije izvodi:

$$|HV| : |PV| = |BF| : |FA|,$$

$$|VK| : |P'V| = |FC| : |AF|.$$

Iz toga slijedi:

$$|QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |P'V|)$$

$$= (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2 = |PL| : |PP'| = (|PV| \cdot |VR|) : (|PV| \cdot |P'V|),$$

odnosno,

$$|QV|^2 = (|PV| \cdot |VR|).$$

Prema tome, u slučaju parabole, kvadrat nad ordinatom $\overline{QV}$ jednak je pravokutniku omeđenom dužinama $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$, u slučaju hiperbole kvadrat nad ordinatom $\overline{QV}$ jednak je prethodno opisanom pravokutniku kojemu je dodan mali pravokutnik LR, sličan pravokutniku omeđenom dužinama $\overline{PL}$ i $\overline{PP'}$, dok je u slučaju elipse kvadrat nad ordinatom $\overline{QV}$ jednak prethodno spomenutom pravokutniku, umanjenom za pravokutnik sličan onom omeđenom dužinama $\overline{PL}$ i $\overline{PP'}$. Dakle, nazivi krivulja povezani su s odnosom pravokutnika omeđenog dužinama $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$ te pravokutnika kojim prekrivamo prethodni pravokutnik: U slučaju kada se ti pravokutnici podudaraju (u površini) krivulja se naziva parabola, u slučaju kada pravokutnik ima veću površinu od onog početnog krivulja se naziva hiperbola, a u slučaju kada je pravokutnik manji od početnog, krivulja se naziva elipsa.

Apolonije je dokazao da $|QV|^2$ varira ovisno o $|PV| \cdot |P'V|$, što je očito iz činjenice da je $|QV|^2 : |PV| \cdot |P'V| = |PL| : |PP'|$ te da je za bilo koji fiksiran promjer $|PP'|$ omjer $|PL| : |PP'|$ konstantan. Dokazao je i da suprotne grane hiperbole imaju jednaki promjer i pripadne *latera recta*. Heath [4] navodi da je Apolonije prvi razlikovao dvije grane hiperbole i njezina svojstva opisivao je posebno, dok je svojstva jedne grane hiperbole pokušao opisati zajedno sa svojstvima elipse i kružnice.

Danas bismo Apolonijeve omjere interpretirali na sljedeći način: Neka je p parametar, a d odgovarajući promjer konike. Tada su prethodno opisana svojstva ekvivalentna sljedećim jednadžbama u Kartezijevom koordinatnom sustavu:

$$y^2 = px \quad \text{(parabola)},$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2 \quad \text{(hiperbola)}$$

i

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2 \quad \text{(elipsa)},$$

pri čemu maksimalne vrijednosti koje postižu promjer i tangenta čine osi koordinatnog sustava.

Poglavlje 5

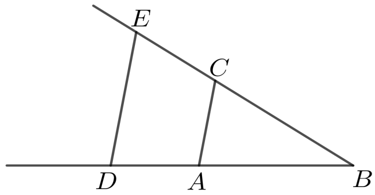
Suvremeni pogled na geometrijsku algebru

5.1 René Descartes i veza geometrije i algebre

René Descartes (1596.–1650.) rođen je u malom francuskom gradu danas zvanom La Haye-Descartes. Od 10. do 18. godine pohađao je isusovačku školu u kojoj je stjecao znanja iz klasičnih predmeta poput povijesti i retorike, ali i matematike, filozofije, teologije i prirodne filozofije, a po završetku škole upisuje studij prava. Napisao je mnoga dijela, od kojih nam je posebno zanimljiva *Geometrija (La Géometrié)* [3] u kojoj je položio temelje analitičke geometrije. *Geometrija* je trodijelni prilog Descartesovoj filozofskoj raspravi *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*. U prvom dijelu *Geometrije* Descartes daje osnove analitičke geometrije, ali kroz analizu problema koji su rješivi konstrukcijama ravnalom i šestarom, tj. euklidskim konstrukcijama. Drugi dio se bavi krivuljama, koje dijeli na geometrijske i mehaničke, a treći sadrži analizu potrebne algebre. Za našu temu bitan je prvi dio *Geometrije*.

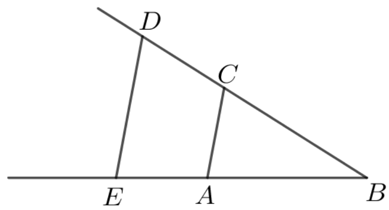
Descartes započinje taj prvi dio rečenicom da svaki geometrijski problem možemo svesti na onaj za čije je rješavanje dovoljno znanje o duljinama određenih dužina. Kao što se aritmetika sastoji od pet osnovnih operacija – zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugog korijena, slično je i u geometriji. Kako bi poistovjetio dužine s realnim brojevima, Descartes odabire dužinu jedinične duljine.

Neka je $\overline{AB}$ jedinična dužina. Želimo pomnožiti duljine a i b tako da dobijemo dužinu duljine ab (a ne, kako bi to stari Grci gledali, pravokutnik površine ab). Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$ duljina a odnosno b Potrebno je samo spojiti točke A i C, povući paralelu $\overline{DE}$ s $\overline{CA}$ i tada je duljina dužine $\overline{BE}$ jednaka umnošku ab (slika 5.1). Analogno se koristeći



Slika 5.1: Umnožak dviju dužina

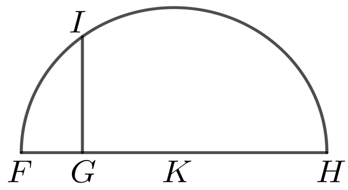
Talesove teoreme o proporcionalnosti provodi dijeljenje duljina: Pri dijeljenju dužine $\overline{BE}$ dužinom $\overline{BD}$ duljine b potrebno je spojiti točke E i D, povući dužinu $\overline{AC}$ paralelnu $\overline{DE}$ i tada je $\overline{BC}$ duljine a/b (slika 5.2).



Slika 5.2: Količnik dviju dužina

Descartes uočava i da se EEII14 može koristiti za određivanje $\sqrt{a}$ ako je zadana dužina duljine a. Želimo li pronaći drugi korijen dužine $\overline{GH}$ duljine a, u njezinom produžetku dodamo dužinu $\overline{FG}$ duljine 1. Polovište dužine $\overline{FH}$ označimo s K te konstruiramo kružnicu FIH sa središtem u tom polovištu. Iz točke G povučemo okomicu na $\overline{FH}$ i produljimo je do I i tada dužina $\overline{GI}$ ima duljinu $\sqrt{a}$ (slika 5.3).

Tako kod Descartesa a^2, a^3 ili pak ab više ne predstavljaju površinu kvadrata ili volumen kocke stranice a, odnosno površinu pravokutnika sa stranicama a i b već dužine nazvane kvadratom, kubom, itd. U nastavku Descartes opisuje kako se rješavaju geometrijski problemi svodeći ih na jednadžbe. Pritom primjećuje da se pri rješava-



Slika 5.3: Korijen dužine

nju problema koji su rješivi euklidskim konstrukcijama konačno rješenje može izraziti preko osnovnih četiriju operacija i drugih korijena iz polaznih vrijednosti.

5.2 Dokaz ekvivalencije euklidskih konstrukcija i rješavanja kvadratnih algebarskih jednadžbi

Da bismo dokazali ekvivalentnost klasičnih konstrukcija ravnalom i šestarom (tzv. euklidskih konstrukcija) s rješavanjem kvadratnih algebarskih jednadžbi, prvo ćemo ponoviti definicije tih dvaju pojmova:

Definicija 5.2.1 (**Algebarska jednadžba**). *Algebarska jednadžba je polinomijalna jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima. Ovdje se ograničavamo na kvadratne algebarske jednadžbe, tj. jednadžbe*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{5.1}$$

s $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Podsjetimo se ovdje da se rješenja jednadžbe 5.1 dana formulom

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

dakle se mogu izraziti s konačno mnogo operacija $+$, $-$, $\cdot$, $/$ i $\sqrt{\cdot}$ primijenjenih na cijele brojeve.

Definicija 5.2.2 (**Euklidske konstrukcije i brojevi**). *Euklidske konstrukcije su one koje se u konačno mnogo koraka mogu provesti korištenjem sljedećih osnovnih konstrukcija:*

1. *Ako su konstruirane dvije točke, onda je moguće konstruirati pravac kroz njih.*

2. *Ako su konstruirane točka i udaljenost, moguće je konstruirati kružnicu kojoj je zadana točka središte, a zadana udaljenost polumjer.*

Konstruiranom se smatra točka koja je zadana na početku ili koja se može dobiti uzastopnim presjecima pravaca i kružnica konstruiranih po prethodnim dvama pravilima. Konstruiranom se smatra udaljenost koja je zadana na početku ili koja je razmak dvije konstruirane točke. Realan broj x *je euklidski ako je duljina* $|x|$ *konstruktibilna. Skup svih euklidskih brojeva označit ćemo s* $\mathbb{E}$.

U Euklidovim *Elementima* dokazano je da se, među ostalim, euklidski mogu konstruirati okomice i paralele sa zadanim pravcem kroz zadanu točku (EEI11,12,31) te kvadrirati svi mnogokuti (EEII14). U nastavku koristimo prilagođeni pristup iz [2] .

S obzirom na to da ovdje želimo uspostaviti određenu ekvivalenciju između geometrijskih konstrukcija i algebarskih operacija, potrebne su nam pretpostavke temeljem kojih duljine poistovjećujemo s realnim brojevima. Ovdje će to biti sljedeća pretpostavka:

Kao zadane uzimaju se dvije točke O *i* E_1*, koje ovdje poistovjećujemo s točkama* $(0,0)$ *i* $(1,0)$ *u Kartezijevom koordinatnom sustavu, odnosno čiju udaljenost poistovjećujemo s brojem* 1 *(jedinična udaljenost).*

Ako su zadane O i E_1, prva konstrukcija nam daje pravac kroz njih, tj. x-os, a druga konstrukcija, uz nanošenje jedinične duljine $1 = |OE_1|$ duž x-osi, garantira da su konstruktibilne sve cjelobrojne točke na x-osi, dakle su svi cijeli brojevi euklidski. Propozicija EEI11 nam omogućuje konstrukciju y-osi, te su opet nanošenjem jedinične duljine duž nje konstruktibilne i sve točke $(0,n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Uzastopna primjena EEI31 nam daje mrežu pravaca $x = m$ i $y = n$ $(m,n \in \mathbb{Z})$ i njihova sjecišta, dakle su sigurno konstruktibilne sve točke s cjelobrojnim koordinatama. Nadalje, neka su $A = (x,0)$ i $B = (x',0)$ dvije konstruktibilne točke na x-osi. Tada se može konstruirati i $(x \pm x', 0)$, jer se x' može koristeći drugu konstrukciju nanijeti udesno odnosno ulijevo od A. Također, korištenjem druge euklidske konstrukcije možemo dobiti i točku $B' = (0,x')$ pa se korištenjem Talesovih teorema o proporcionalnosti mogu konstruirati i točke s koordinatama $(xy,0)$ odnosno $(x/y,0)$. Stoga su konstruktibilne sve točke s racionalnim koordinatama, posebno su i svi racionalni brojevi euklidski, odnosno dokazali smo:

Propozicija 5.2.3. *Ako je $x \in \mathbb{Q}$ te ako su zadane točke O i E_1 kao gore, onda je točka $(x, 0)$ konstruktibilna.*

Naposljetku, EEII14 nam (kroz kvadriranje pravokutnika čije duljine stranica su 1 i x), omogućuje i konstrukciju $\sqrt{x}$ za svaki konstruktibilni broj x. Stoga zaključujemo:

Propozicija 5.2.4. *Svaki realan broj koji se može izračunati s konačno mnogo primjena operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena iz cijelih brojeva je euklidski.*

Korolar 5.2.5. *Rješenja svake algebarske kvadratne jednadžbe su euklidski brojevi.*

Korolar 5.2.6. *Skup $\mathbb{E}$ je zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena.*

Postoje li euklidski brojevi koji se ne mogu dobiti kako je navedeno u gornjem teoremu? Odgovor je: Ne. Dokažimo to, odnosno dokažimo

Propozicija 5.2.7. *Koordinate svake konstruktibilne točke mogu se izraziti s konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena primijenjenih na cijele brojeve.*

Dokaz. Konstruktibilni pravac je pravac kroz dvije konstruktibilne točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2), tj. pravac s jednadžbom

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{5.2}$$

gdje su x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{E}$. Konstruktibilna kružnica je kružnica čije središte je konstruktibilna točka (p, q) i čiji polumjer r je konstruktibilan, tj. to je kružnica s jednadžbom

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \tag{5.3}$$

gdje su p, q, $r \in \mathbb{E}$.

Presjek dva konstruktibilna (neparalelna) pravca je konstruktibilna točka (X, Y) čije koordinate su rješenje sustava dviju jednadžbi tipa 5.3. Očigledno se te koordinate mogu izraziti s konačno mnogo primjena osnovne četiri računske operacije na (euklidske) koordinate točaka koje određuju zadana dva pravca.

Presjek konstruktibilnog pravca i konstruktibilne kružnice je konstruktibilna točka (X,Y) čije koordinate su rješenje sustava dviju jednadžbi od kojih je jedna tipa 5.2, a druga tipa 5.3. Supstitucijom y iz jednadžbe 5.2 u jednadžbu 5.3 rezultira kvadratnom jednadžbom za x, dakle se X i Y mogu izraziti s konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena primijenjenih na euklidske brojeve.

Naposljetku, ako je konstruktibilna točka (X,Y) dobivena kao presjek dvije konstruktibilne kružnice, računanje X i Y je ekvivalentno rješavanju sustava dviju jednadžbi tipa 5.3. Ako takve dvije jednadžbe oduzmemo, ostat će linearna jednadžba koja povezuje x i y, je ovaj problem algebarski ekvivalentan prethodnom.

Zaključujemo: Ako je točka (X,Y) konstruktibilna u jednom koraku, njene koordinate se mogu izraziti s konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena primijenjenih na euklidske brojeve. Kako su konstruktibilne točke točno one koje se mogu dobiti u konačno mnogo konstrukcija iz O i E_1, slijedi tvrdnja propozicije.

□

Uzevši u obzir formule za rješenja linearnih i kvadratnih jednadžbi zaključujemo:

Teorem 5.2.8. *Realan broj x je euklidski ako i samo ako se može izraziti s konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena primijenjenih na cijele brojeve, odnosno euklidske konstrukcije ekvivalentne su uzastopnom rješavanju konačno mnogo linearnih i kvadratnih jednadžbi.*

Naposljetku, dokazat ćemo da tri klasična problema nisu rješiva euklidskim konstrukcijama [8].

5.3 Dokaz nemogućnosti rješenja tri klasična problema

Dokaz nemogućnosti rješenja problema udvostručenja kocke

Neka je zadana kocka brida a, a brid tražene kocke označimo s x. Kako bismo riješili problem udvostručenja kocke, potrebno je konstruirati kocku volumena jednakog dvostrukom volumenu zadane kocke. Problem se svodi na određivanje rješenja jednadžbe

$$x^3 = 2a^3,$$

odnosno na konstrukciju dužine duljine $x = a\sqrt[3]{2}$ iz zadane duljine a. Očigledno je problem rješiv ako je uz zadanu jediničnu dužinu ravnalom i šestarom moguće konstruirati dužinu duljine $\sqrt[3]{2}$. Pretpostavimo da je problem rješiv i navedimo dva teorema koja ćemo koristiti u dokazu.

Teorem 5.3.1. *Ako kubna jednadžba $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ s racionalnim koeficijentima nema ni jedno racionalno rješenje, onda ni jedno njeno rješenje nije konstruktibilno iz racionalnih brojeva.*

Za dokaz teorema vidi [9]. Prema teoremu 5.3.1, ako bi broj $x = \sqrt[3]{2}$ bio konstruktibilan iz broja 1, jednadžba $x^3 - 2 = 0$ bi morala imati jedno rješenje konstruktibilno iz racionalnih brojeva. No, vrijedi i:

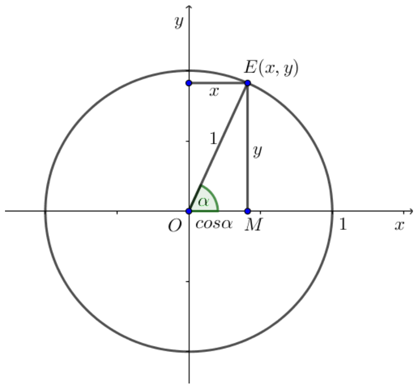
Teorem 5.3.2. *Ako kubna jednadžba $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ s cjelobrojnim koeficijentima ima racionalno rješenje x_1, onda je x_1 cijeli broj koji dijeli a_0.*

Dakle, kad bi problem duplikacije kocke bio rješiv, jednadžba $x^3 - 2 = 0$ bi morala imati jedan od brojeva 1, -1, 2 i -2 za rješenje. Uvrštavanjem vidimo da ni jedan od tih brojeva nije rješenje jednadžbe, dakle problem nije rješiv ravnalom i šestarom.

Dokaz nemogućnosti rješenja problema trisekcije kuta

Neka je zadan kut α. Želimo konstruirati kut jednak $\frac{\alpha}{3}$. Da bismo pokazali da problem nije rješiv, potrebno je to pokazati za neki određeni kut, primjerice za kut od $60°$. Znamo da neki kut možemo konstruirati ako možemo konstruirati njegov kosinus. Konstruirajmo jediničnu kružnicu sa središtem O u ishodištu koordinatnog sustava i na njoj odredimo neku točku $E(x, y)$. Kosinus kuta definiramo kao ordinatu točke E na trigonometrijskoj kružnici (slika 5.4). Uočimo na slici trokut OME i iz njega vidimo da za apscisu točke E vrijedi: $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$. Uočimo:

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha+\alpha) &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - (1-\cos^2\alpha)\cos\alpha - 2(1-cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$



Slika 5.4: Kosinus kuta

Dakle, možemo uočiti da smo problem trisekcije kuta 3α sveli na traženje rješenja $\cos\alpha$ kubne jednadžbe $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Uzmimo da je $3\alpha = 60°$, dakle je $\alpha = 20°$. Sada, budući da je $\cos 60° = \frac{1}{2}$, slijedi: $\frac{1}{2} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Uvedemo li supstituciju $x = \cos\alpha$ dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

čije je rješenje tražena vrijednost $x = \cos\alpha$. Prethodna jednadžba ekvivalentna je sljedećoj:

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0,$$

odnosno

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Uvrštavanjem supstitucije $y = 2x$ dobivamo:

$$y^3 - 3y - 1 = 0.$$

Prethodna jednadžba morala bi imati jedno rješenje konstruktibilno iz racionalnih brojeva da bi početni problem bio rješiv. Ta bi jednadžba, prema teoremu 5.3.1, morala imati barem jedno racionalno rješenje koje bi, prema teoremu 5.3.2, trebalo biti djelitelj broja 1. Dakle, jedina moguća rješenja su -1 i 1. Uvrstimo ih u prethodnu jednadžbu i provjerimo je li jedan od tih brojeva rješenje. Zaključujemo da ni jedan od ta dva broja ne zadovoljava jednadžbu iz čega slijedi da početni problem nije rješiv konstrukcijom ravnalom i šestarom.

Nerješivost problema kvadrature kruga

Problem kvadrature kruga također nije rješiv ravnalom i šestarom, no budući da je on ekvivalentan jednadžbi

$$x^2 = \pi$$

tu nije problem u nepostojanju racionalnog rješenja određene kubne jednadžbe, već u činjenici da se ne radi o algebarskoj kvadratnoj jednadžbi jer broj π nije racionalan (štoviše, transcendentan je). Da je π iracionalan prvi je dokazao **Johann Heinrich Lambert** (1728.–1777.). Do danas je poznato više različitih dokaza iracionalnosti broja π. Možda najlakši dokaz te tvrdnje je sljedeći (prema [1]):

Teorem 5.3.3. *Broj π je iracionalan.*

Dokaz. Za svaki pozitivan cijeli broj b i nenegativan cijeli broj n definiramo

$$A_n(b) = b^n \int_0^\pi \frac{x^n(\pi - x)^n \sin(x)}{n!} dx.$$

Uočimo da integralna funkcija $A_n(b)$ postiže vrijednost nula za $x = 0$ i $x = \pi$, ali je strogo pozitivna na preostalom intervalu. Prema tome je $A_n(b) > 0$. Nadalje, budući da je

$$x(\pi - x) \le (\pi/2)^2,$$

možemo pisati

$$A_n(b) \le \frac{\pi b^n}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} = \frac{\pi(b\pi^2/4)^n}{n!},$$

što je manje od 1 za veliki n, jer prema Stirlingovoj formuli $n!$ iz nazivnika raste brže od n-te potencije iz brojnika. Dakle, za bilo koji $b \ge 1$ i dovoljno velik n vrijedi $0 < A_n(b) < 1$.

Pretpostavimo sada da je π racionalan, odnosno da se može zapisati kao $\pi = a/b$ za relativno proste cijele brojeve a i b. Definirajmo funkciju $f(x) = x^n(a-bc)^n/n!$. Koristeći integriranje po dijelovima tada možemo pisati:

$$A_n(b) \int_0^\pi f(x)\sin(x) = \left[-f(x)cos(x)\right]_0^\pi - \left[-f'(x)\sin(x)\right]_0^\pi + \dots$$

$$\dots \pm \left[f^{2n}(x)\cos(x)\right]_0^\pi \pm \int_0^\pi f^{2n+1}(x)\cos(x)dx.$$

Uočimo da za $k = 1$ do $k = n$ derivacija $f^{(k)}(x)$ iznosi 0 za $x = 0$ i $x = \pi$. Za $k = n+1$ do $k = 2n$ derivacija poprima različite cijele brojeve za $x = 0$ i $x)\pi$, a za $x = 2n+1$ derivacija iznosi 0. Također, funkcija $\sin(x)$ iznosi 0 za $x = 0$ i $x = \pi$, dok funkcija $\cos(x)$ iznosi 1 za $x = 0$ i -1 za $x = \pi$. Kombinirajući te činjenice zaključujemo da $A_n(b)$ mora biti cijeli broj, što je kontradikcija sa zaključkom da je $0 < A_n(b) < 1$, dakle π je iracionalan.

$\square$

Bibliografija

[1] *Simple proofs: The irrationality of pi*, https://mathscholar.org/2018/09/simple-proofs-the-irrationality-of-pi/, posjećena 05. 11. 2019.

[2] R. C. Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York J. Math. **6** (2000), 119–133.

[3] René Descartes, *The Geometry of Rene Descartes: With a facsimile of the first edition*, New York: Dover Publications, 1954.

[4] Thomas Heath, *A history of Greek mathematics, volume II*, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[5] ______, *A history of Greek mathematics, volume I*, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[6] Jens Høyrup, *What is "geometric algebra", and what has it been in historiography?*, AIMS Mathematics **2** (2017), br. 1, 128–160.

[7] D. Joyce, *Euclid's Elements*, https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/, posjećena 26. 06. 2019.

[8] Marina Musa, *Tri klasična problema*, http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/MUS05.pdf, posjećena 15. 10. 2019.

[9] Emanuela Vrban, *Konstrukcije ravnalom i šestarom*, http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/VRB01.pdf, posjećena 15. 10. 2019.

[10] Robert C. Yates, *The Trisection Problem*, National Mathematics Magazine **15** (1940), br. 3, 129–142, ISSN 15395588, http://www.jstor.org/stable/3028693.

Sažetak

U radu opisujemo probleme vezane uz geometriju kojima su se bavili starogrčki matematičari, a koji se moderno mogu interpretirati algebarski. U pokušajima rješavanja koristili su razne metode, no valjana geometrijska konstrukcija dopuštala je samo korištenje konstrukcija ravnalom i šestarom. U prvom poglavlju navodimo neke klasične konstrukcije ravnalom i šestarom koje su bile poznate među grčkim matematičarima. Drugo poglavlje opisuje neke pokušaje rješavanja tri klasična problema. U trećem poglavlju naglasak je na drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata*. Četvrto poglavlje sadrži dokaz nesumjerljivosti stranice i dijagonale kvadrata te način na koji je Apolonije opisivao konike. Rad završava opisom Descartesovog povezivanja geometrije i algebre, dokazom ekvivalencije konstrukcija ravnalom i šestarom s rješavanjem algebarskih kvadratnih jednadžbi te dokazom da tri klasična problema nisu rješivi konstrukcijama ravnalom i šestarom.

Summary

This thesis describes geometric problems that ancient Greek mathematicians were trying to solve and which can be interpreted geometrically. In their attempts they used different methods, but only solutions that used straightedge and compass were considered valid. In the first chapter we describe some of the classical straightedge and compass constructions that were known to Greek mathematicians. The second chapter describes some attempts to solve three classical problems. In the third chapter the emphasis is on the second book of Euclid's *Elements*. The fourth chapter contains a proof of the incommensurability of the side and diagonal of a square and Appolonius' approach to conics. The thesis concludes with Descartes' connection of geometry and algebra, with proof that straightedge and compass constructions are equivalent to solving algebraic quadratic equations and with proofs of the impossibility of solving the three classical problems with ruler and compass constructions.

Životopis

Rođena sam 8. studenog 1995. godine u Čakovcu. 2010. godine završila sam osnovnu školu Jože Horvata u Kotoribi, a 2014. godine opću Gimnaziju Josipa Slavenskog Čakovec. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike. Po završetku srednje škole, 2014. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Na istom fakultetu 2017. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.