Erdös--Ko--Rado teorem

Torić, Vice

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Vice Torić

ERDŐS-KO-RADO TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Teorem Erdősa, Koa i Radoa prvi put je objavljen 1961. godine. Inicijalni problem je bio odrediti veličinu presijecajuće familije skupova. Familija je presijecajuća ako svaka dva skupa iz familije imaju neprazan presjek. U ovom radu obradit ćemo razne dokaze EKR teorema i analogone za druge objekte. Diplomski rad je podijeljen na nekoliko poglavlja.

U prvom poglavlju bavimo se EKR teoremom za presijecajuće familije skupova. Prvo ćemo definirati presijecajuću i t-presijecajuću familiju k-članih podskupova i iskazati EKR teorem u oba slučaja. Zatim ćemo definirati (i, j)-zamjenu skupa koja nam je bitna u dokazu EKR teorema. Usput ćemo dokazati "Pascalov trokut" za binomne koeficijente i svojstvo apsorpcije binomnih koeficijenata na koje se pozivamo u dokazima teorema.

U idućem poglavlju navest ćemo neke alternativne dokaze EKR teorema. Prvo ćemo obraditi teorem Hiltona i Milnera. Nakon toga ćemo definirati sjenu familije k-članih podskupova i Spernerovu familiju skupova. Zatim ćemo iskazati LYM nejednakost pomoću koje ćemo odrediti donju granicu sjene familije podskupova. Nakon toga ćemo dokazati EKR teorem za $t = 1$ koristeći Katonin teorem. Na kraju poglavlja iskazat ćemo Kruskal-Katona teorem i pomoću njega pokazati da jedino kanonske presijecajuće familije dostižu jednakost u EKR teoremu za $t = 1$.

U zadnjem poglavlju ćemo iskazati analogone EKR teorema za druge objekte. Prvo ćemo preformulirati problem pronalaska najveće presijecajuće familije skupova kao problem na grafovima. Zatim ćemo definirati Kneserove grafove, kliku i kokliku. Prvi objekt kojim ćemo se baviti u ovom poglavlju biti će permutacije. Definirati ćemo grupu permutacija, stabilizator elementa i susjedne klase. Idući objekt koji ćemo obraditi biti će particije. Definirati ćemo Bellov broj i dotaknuti se problema savršenog sparivanja u grafu. Nakon toga ćemo se baviti vektorskim prostorima nad konačnim poljima. Iskazat ćemo teorem o konačnim poljima i definirati Gaussov binomni koeficijent. Posljednji objekt kojim ćemo se baviti biti će riječi. Definirati ćemo riječi, Hammingovu udaljenost dviju riječi i iskazati EKR teorem za presijecajuće i t-presijecajuće familije riječi.

2 Presijecajuće familije skupova

Promatramo konačan skup $S = \{1, \ldots, n\}$ i familiju $\mathcal{F}$ podskupova skupa S. Kažemo da je familija $\mathcal{F}$ *presijecajuća* ako bilo koja dva skupa iz $\mathcal{F}$ imaju barem jedan zajednički element. Jednostavno je pronaći male presijecajuće familije. Stoga je ključni problem pronalazak maksimalne veličine presijecajuće familije.

Promotrimo sad skup $A \in \mathcal{F}$. Očito je da komplement $A^c = S \setminus A$ ne može biti u familiji $\mathcal{F}$ jer vrijedi $A \cap A^c = \emptyset$. Kako znamo da je broj svih podskupova skupa S jednak 2^n, zaključujemo da $\mathcal{F}$ sadrži najviše polovinu, odnosno najviše 2^{n-1} elemenata. Promotrimo familiju svih skupova koji sadrže fiksni element n. Tada je jasno da je njen kardinalitet jednak 2^{n-1}. Dakle, maksimalna veličina presijecajuće familije podskupova n-članog skupa je 2^{n-1}.

Neka je sada $\mathcal{F}$ presijecajuća familja k-članih podskupova skupa S. Pitanje je koliko najviše elemenata sadrži familija $\mathcal{F}$? Broj svih k-članih podskupova skupa S je jednak $\binom{n}{k}$. Ovdje ne možemo primijeniti argument s komplementom kao u prethodnom primjeru, jer komplement k-članog skupa općenito nije k-člani skup. Presijecajuću familiju k-članih podskupova skupa S možemo dobiti tako da uzmemo sve k-člane skupove koji sadrže fiksni element n. Očito je da takve skupove dobivamo dodavanjem elementa n u $(k-1)$-člane podskupove od $\{1, \ldots, n-1\}$. Slijedi da je kardinalitet te familije jednak $\binom{n-1}{k-1}$.

Sljedeći teorem pokazuje da je ovo maksimalna presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa.

Teorem 2.1. *Neka je S n-člani skup i $\mathcal{F}$ familija k-članih podskupova od S takva da svaka dva skupa iz $\mathcal{F}$ imaju neprazan presjek. Ako je $n \geq 2k$, onda je*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Štoviše, ako je $n > 2k$, jednakost se dostiže ako i samo ako se $\mathcal{F}$ sastoji od svih k-članih podskupova kroz zadani element skupa S.

Granica $n \geq 2k$ je nužna i najbolja moguća jer za $n < 2k$ vrijedi da svaka dva k-člana podskupa n-članog skupa imaju barem jedan zajednički element. Dakle, u tom slučaju, maksimalnu presijecajuću familiju k-članih podskupova čine svi takvi podskupovi. Njen kardinalitet je jednak $\binom{n}{k}$.

Prethodni teorem je zapravo posljedica snažnijeg rezultata kojeg su dokazali Erdős, Ko i Rado [8]. Definiramo t-presijecajuću familiju podskupova tako da svaka dva elementa familije imaju barem t zajedničkih elemenata. Tada Erdős-Ko-Rado teorem za t-presijecajuće familije glasi:

Teorem 2.2. *Neka su n, k i t nenegativni cijeli brojevi takvi da vrijedi $0 \leq t \leq k$. Tada postoji funkcija $f(k,t)$ takva da, ako je $n \geq f(k,t)$ i ako je $\mathcal{F}$ t-presijecajuća familija k-članih podskupova od S, tada je*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{k-t}.$$

Nadalje, jednakost vrijedi ako i samo ako se $\mathcal{F}$ sastoji od svih k-članih podskupova kroz zadani t-člani podskup od S.

Ovaj teorem je očito mnogo općenitiji od našeg prvog teorema, ali ima slabost da njegov zaključak vrijedi jedino ako je n veći od neke neodređene granice $f(k,t)$.

Najlakši način za napraviti t-presijecajuću familiju k-članih podskupova n-članog skupa je taj da jednostavno uzmemo sve k-člane podskupove kroz fiksni t-člani skup. Očito je kardinalnost te familije jednaka

$$\binom{n-t}{k-t}.$$

Familiju skupova ovakvog tipa nazivamo *kanonskom t-presijecajućom familijom*. Donja granica za n u teoremu 2.1 je potrebna zato što, kad n nije dovoljno velik, najveća presijecajuća familija ne mora biti kanonska.

Puno je radova posvećeno pronalasku potrebne vrijednosti za $f(n,k)$. Primjeri pokazuju da trebamo $n \geq (t+1)(k-t+1)$ da bi vrijedio teorem te je 1978. godine Frankl [9] pokazao da je ovo ograničenje dovoljno kad je t dovoljno velik. Wilson je 1984. godine pokazao da ocjena za $\mathcal{F}$ u EKR teoremu vrijedi ako je $n \geq (t+1)(k-t+1)$ i da karakterizacija maksimalne familije vrijedi ako je $n > (t+1)(k-t+1)$. Ahlswede i Khachatrian [1] su 1997. godine odredili najveću t-presijecajuću familiju k-članih podskupova n-članog skupa za sve vrijednosti broja n. Rezultat ovog rada je da za bilo koji izbor brojeva n, k i t znamo maksimalnu veličinu i strukturu t-presijecajuće familije.

Erdős, Ko i Rado su u radu [8] dokazali dvije tvrdnje. Prva je bila teorem 2.1, a druga teorem 2.2 s ne baš preciznom ocjenom za funkciju $f(k,t)$. U oba dokaza koristili su takozvanu metodu *zamjene*.

Neka je $\mathcal{F}$ familija k-članih podskupova n-članog skupa. Za proizvoljne $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo (i,j)-*zamjenu skupa* A u $\mathcal{F}$ sa

$$S_{i,j}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}, & \text{ako } j \in A \text{ i } i \notin A \text{ i } (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \notin \mathcal{F} \\ A, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je (i, j)-zamjena familije podskupova $\mathcal{F}$ definirana sa

$$S_{i,j}(\mathcal{F}) = \{S_{i,j}(A) : A \in \mathcal{F}\}.$$

Ako je $\mathcal{F}$ familija k-članih podskupova, onda je $S_{i,j}(\mathcal{F})$ također familija podskupova iste veličine. Isto tako vrijedi da kada metodom zamjene djelujemo na t-presijecajuću familiju, također dobijemo t-presijecajuću familiju. To ćemo pokazati u sljedećoj lemi.

Lema 2.3. *Ako je $\mathcal{F}$ t-presijecajuća familija k-članih podskupova, tada za sve $i \neq j$ vrijedi da je familija $S_{i,j}(\mathcal{F})$ također t-presijecajuća.*

Dokaz. Neka su A i B neka dva skupa iz $\mathcal{F}$. Pokazat ćemo da vrijedi

$$|S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B)| \geq t.$$

Ako oba skupa ostanu nepromijenjena metodom zamjene ili ako oba budu promijenjena, očito je da su $S_{i,j}(A)$ i $S_{i,j}(B)$ t-presijecajući skupovi. Zato možemo pretpostaviti da vrijedi $S_{i,j}(A) = A$ i $S_{i,j}(B) \neq B$. Kako je skup B promijenjen, znamo da vrijedi $S_{i,j}(B) = (B \setminus \{j\}) \cup \{i\}$. Skup A je ostao nepromijenjen, pa vrijedi bar jedna od sljedećih tvrdnji:

1. $j \notin A$,

2. $i \in A$,

3. $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$.

Kako su A i B t-presijecajući, ako vrijedi 1. ili 2., lako je za vidjeti da su $S_{i,j}(A)$ (što je jednako A) i $S_{i,j}(B)$ t-presijecajući. Ako vrijedi 3., onda je $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$ i mora imati barem t zajedničkih elemenata sa skupom B. Kako $j \notin (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ i $i \notin B$ tada ni i ni j nisu jedan od t elemenata u presjeku skupova $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ i B. Zato svih t elemenata moraju biti sadržani i u $S_{i,j}(A) = A$ i u $S_{i,j}(B)$. $\square$

Ako za svaki $i < j$ vrijedi $S_{i,j}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, onda $\mathcal{F}$ nazivamo *stabilnom familijom*. Svaka familija $\mathcal{F}$ može se transformirati u stabilnu metodom zamjene. Točnije, dovoljno je $\binom{n}{2}$ zamjena da se to postigne. Da bismo to pokazali prvo ćemo sagledati metodu zamjene iz drugog kuta.

Za $1 \leq i \leq n$ i familiju $\mathcal{F}$ definiramo $\mathcal{F}(i) = \{F \setminus \{i\} : i \in F \in \mathcal{F}\}$. Tada je $S_{i,j}(\mathcal{F})$ jedinstvena familija $\mathcal{G}$ koja zadovoljava $\mathcal{G}(i) = \mathcal{F}(i) \cup \mathcal{F}(j)$, $\mathcal{G}(j) = \mathcal{F}(i) \cap \mathcal{F}(j)$ i $H \in \mathcal{F}$ ako i samo ako $H \in \mathcal{G}$ za $|H \cap \{i, j\}| \neq 1$. Slijedi da je $\mathcal{F}$ stabilna ako i samo ako je $\mathcal{F}(j) \subset \mathcal{F}(i)$ za sve $1 \leq i < j \leq n$.

Lema 2.4. *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova i pretpostavimo da smo obavili $\binom{n}{2}$ zamjena $S_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ točno jednom, tako da $S_{i,j}$ prethodi $S_{i',j'}$ za $j' < j$. Dobivena familija je stabilna.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n. Tvrdnja je trivijalna za $n \leq 2$. Po pretpostavci, prvo napravimo $n-1$ zamjena $S_{i,n}$, $1 \leq i < n$. Neka je $\mathcal{G}$ familija nakon tih zamjena. Tada lako provjerimo da vrijedi $\mathcal{G}(n) \subset \mathcal{G}(i)$. Štoviše, ovo svojstvo vrijedi i nakon ostalih zamjena. Neka je $\mathcal{G}(\overline{n}) = \{G \in \mathcal{G} : n \notin \mathcal{G}\}$. Preostalih $\binom{n-1}{2}$ zamjena transformiraju odvojeno $\mathcal{G}(n)$ i $\mathcal{G}(\overline{n})$ i tvrdnja teorema slijedi po pretpostavci indukcije. □

Lema 2.5. *("Pascalov trokut" za binomne koeficijente)*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Izraz s lijeve strane je broj k-članih podskupova n-članog skupa. Pokažimo sada da je tome jednak i broj s desne strane. Promotrimo proizvoljni skup X koji ima n elemenata. Neka je $x \in X$. Sve k-člane podskupove možemo podijeliti u dvije disjunktne familije k-članih podskupova skupa X:

- oni koji sadrže element x: $\mathcal{A} = \{Y \subseteq X : |Y| = k, x \in Y\}$,
- oni koji ne sadrže element x: $\mathcal{B} = \{Y \subseteq X : |Y| = k, x \notin Y\}$.

Vrijedi $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$ jer se svaki skup familije $\mathcal{A}$ sastoji od elementa x i još $k-1$ elemenata od preostalih $n-1$ elemenata skupa X i $|\mathcal{B}| = \binom{n-1}{k}$. Očito je da familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ u uniji daju sve k-člane podskupove skupa X. □

Sada imamo sve potrebne tvrdnje da dokažemo Erdős-Ko-Rado teorem za $t = 1$.

Teorem 2.6. *Neka su k i n nenegativni cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq 2k$. Ako je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa, tada je*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Prvo promotrimo slučaj kada je $2k = n$. Kako je $\mathcal{F}$ presijecajući, nije moguće da za skup A vrijedi $A \in \mathcal{F}$ i $A^c \in \mathcal{F}$, stoga je

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}.$$

Dalje, promotrimo slučaj $2k < n$ i provedimo indukciju po n. Za $n = 3$ je $k = 1$ i jasno je da vrijedi $|\mathcal{F}| = 1$ pa tvrdnja teorema vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $n_0 < n$. Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa i također neka je $\mathcal{F}$ stabilna familija. Posebno, $S_{i,n}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, za svaki $i < n$.

Familija $\mathcal{F}$ se može podijeliti u dvije podfamilije: prva je familija svih skupova koji ne sadrže n, a druga koji sadrže. Prva podfamilija je presijecajuća familija k-članih podskupova $(n-1)$-članog skupa i po indukciji njena veličina nije veća od $\binom{n-2}{k-1}$. Tvrdimo da veličina druge nije veća od $\binom{n-2}{k-2}$, što po lemi 2.5 povlači

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Da bi pokazali ovaj zaključak, treba pokazati da ako je n uklonjen iz svakog skupa u drugoj podfamiliji, tada ostaje presijecajuća familija $(k-1)$-članih podskupova $(n-1)$-članog skupa, odakle po pretpostavci indukcije slijedi da veličina druge podfamilije nije veća od $\binom{n-2}{k-2}$.

Dakle jedino što trebamo pokazati je da za bilo koja dva skupa A_1 i A_2 iz druge podfamilije vrijedi

$$(A_1 \setminus \{n\}) \cap (A_2 \setminus \{n\}) \neq \emptyset.$$

Kako je $n > 2k$, postoji $x \in \{1, \ldots, n\}$ za koji vrijedi $x \notin A_1 \cup A_2$. Nadalje, familija $\mathcal{F}$ je stabilna, stoga je skup

$$B_1 = (A_1 \setminus \{n\}) \cup \{x\}$$

u $\mathcal{F}$. Familija $\mathcal{F}$ je presijecajuća, to znači da vrijedi $|A_2 \cap B_1| \geq 1$, tj. da skupovi A_1 i A_2 imaju zajednički element koji nije n.

$\square$

Sada ćemo pokazati originalni dokaz Erdősa, Koa i Radoa koji kaže da za kardinalitet t-presijecajuće familije k-članih podskupova koja nije kanonska vrijedi da je strogo manji od $\binom{n-t}{k-t}$, pod pretpostavkom da je n dovoljno velik u odnosu na k i t.

Lema 2.7. *(Svojstvo apsorpcije binomnih koeficijenata)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Transformirajmo izraz kojeg treba dokazati kako bi pojednostavili njegovu interpretaciju:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Izraz s lijeve strane nam kaže da prvo odabiremo k-člani podskup n-članog skupa, a zatim na k načina odabiremo element iz tog podskupa. Izraz s desne strane nam kaže da prvo odabiremo neki element polaznog n-članog skupa, a zatim među preostalim elementima odabiremo $(k-1)$-člani podskup. $\square$

Teorem 2.8. *Neka je $\mathcal{F}$ t-presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa. Ako vrijedi $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$ i ako $\mathcal{F}$ nije kanonska t-presijecajuća familija, tada je*

$$|\mathcal{F}| < \binom{n-t}{k-t}.$$

Dokaz. Neka je $r = |\cap_{A\in\mathcal{F}} A|$; budući da $\mathcal{F}$ nije kanonska t-presijecajuća familija, slijedi da je $r < t$.

Iz pretpostavke $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$ slijedi $n > t + 2(k-t)$ zato što je $\binom{k}{t}^3 > 2$, osim za $k = t$ (u tom slučaju, $|\mathcal{F}| = 1$ jer je $\mathcal{F}$ k-presijecajuća familija k-članih podskupova tj. familija je kanonska). Dakle, iz pretpostavki teorema slijedi $n > 2k-t$. Ako vrijedi $n > 2k-t$, maksimalna t-presijecajuća familija nije $(t+1)$-presijecajuća familija. Naime, pretpostavimo da imamo $(t+1)$-presijecajuću familiju. Tada možemo dodati skup tako da familija ostane t-presijecajuća na slijedeći način. Prvo uzmemo dva skupa A i B iz $\mathcal{F}$ tako da su oni par iz $\mathcal{F}$ s najmanjim brojem elemenata u presjeku. Neka je taj broj $t+s$, $s \geq 1$. Sada iz skupa A oduzmimo točno s elemenata koji su u presjeku skupova A i B tako da taj novi skup (nazovimo ga A') i B sada imaju t elemenata u presjeku. Kako smo uzeli par skupova s najmanjim presjekom, sigurni smo da A' ima barem t elemenata u presjeku sa svim ostalima iz $\mathcal{F}$. Preostaje nam dopuniti skup A' do veličine k tako da više nijedan element ne bude u presjeku s B. Nedostaje nam s elemenata, a možemo dodati bilo koje elemente iz skupa $(A \cup B)^c$. U tom skupu ima $n - (2k-t-s) = n - (2k-t) + s$ elemenata. Iz pretpostavke $n > 2k-t$ slijedi $|(A\cup B)^c| > s$ pa možemo uzeti s elemenata iz njega i dodati ih u A'. Skup A' ima točno t elemenata u presjeku sa skupom B što znači da $A' \notin \mathcal{F}$ jer nijedan skup iz $\mathcal{F}$ nema samo t elemenata u presjeku s B. Dobili smo familiju $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{A'\}$ koja je t-presijecajuća. Dakle, naša pretpostavljena familija nije bila maksimalna t-presijecajuća jer smo uspjeli dodati još jedan skup pa po obratu po kontrapoziciji možemo zaključiti da maksimalna t-presijecajuća familija nije $(t+1)$-presijecajuća familija.

Stoga, postoje A_1, $A_2 \in \mathcal{F}$ tako da $|A_1 \cap A_2| = t$. Kako $\mathcal{F}$ nije kanonska t-presijecajuća familija, mora postojati $A_3 \in \mathcal{F}$ tako da je

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| < t.$$

Promotrimo familiju $\mathcal{T}$ trojki (B_1, B_2, B_3) gdje su su $B_i \subset A_i$ t-člani podskupovi za $i = 1$, 2, 3 tako da

$$t < |B_1 \cup B_2 \cup B_3| \leq k.$$

Za svaku trojku (B_1, B_2, B_3) iz $\mathcal{T}$ definiramo familiju skupova

$$\phi_{(B_1,B_2,B_3)} = \{A \in \mathcal{F} : B_1 \cup B_2 \cup B_3 \subseteq A\}.$$

Svaki skup u $\mathcal{F}$ mora imati presjek veličine barem t sa svakim od A_1, A_2 i A_3. Zato svaki skup u $\mathcal{F}$ mora sadržavati barem jedan skup $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ za $(B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{T}$. Stoga, unija skupova $\phi_{(B_1,B_2,B_3)}$ za sve trojke iz $\mathcal{T}$ je upravo naša familija $\mathcal{F}$. Ograničavanjem veličine od $\mathcal{T}$ i veličine od $\phi_{(B_1,B_2,B_3)}$ dobivamo ocjenu za veličinu familije $\mathcal{F}$.

Vrlo gruba gornja ocjena za veličinu od $\mathcal{T}$ je $\binom{k}{t}^3$. Nadalje, ako označimo $s = |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$, tada je gornja ocjena za veličinu od $\phi_{(B_1,B_2,B_3)}$ jednaka $\binom{n-s}{k-s}$. Kako je $s \geq t+1$, ova ocjena nije veća od $\binom{n-t-1}{k-t-1}$. Sada iz svega toga slijedi

$$|\mathcal{F}| = \left| \bigcup_{(B_1,B_2,B_3)\in\mathcal{T}} \phi_{(B_1,B_2,B_3)} \right| \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3.$$

Konačno, ako je $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$, tada je $\binom{k}{t}^3 \leq \frac{n-t}{k-t}$ i vrijedi $\binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3 \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\frac{n-t}{k-t} = \binom{n-t}{k-t}$. Zadnja jednakost slijedi iz svojstva apsorpcije binomnih koeficijenata (leme 2.7).

$\square$

3 Alternativni dokazi EKR teorema

Nedugo nakon što je objavljen originalni dokaz EKR teorema, matematičari su počeli pronalaziti kraće i elegantnije dokaze, naročito za slučaj kad je $t = 1$. Prvi alternativni dokaz EKR teorema se pojavljuje u Franklovom radu [10]. Ovaj dokaz jedino uspostavlja granicu u teoremu, ali se može iskoristiti u dokazu Hilton-Milnerova teorema.

Lema 3.1. *Neka je $\mathcal{F}$ stabilna presijecajuća familija k-članih podskupova. Tada za sve $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$A \cap B \cap \{1, \ldots, 2k-1\} \neq \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje A i B takvi da je

$$A \cap B \cap \{1, \ldots, 2k-1\} = \emptyset,$$

pri čemu je $|A \cap \{1, \ldots, 2k-1\}|$ maksimalan. Tada postoji $j \in A \cap B$ takav da vrijedi $j > 2k-1$. Nadalje, kako je $|A \setminus \{j\}| = k-1$ i $|B \setminus \{j\}| = k-1$, slijedi da postoji $i \leq 2k-1$ sa svojstvom $i \notin A \cup B$. Kako je $\mathcal{F}$ stabilna familija, skup $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ je u $\mathcal{F}$ i vrijedi

$$((A \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \cap B \cap \{1, \ldots, 2k-1\} = \emptyset,$$

a ovo je kontradikcija s maksimalnošću skupa $|A \cap \{1, \ldots, 2k-1\}|$. □

Ova lema se može iskoristiti u dokazu EKR teorema za $t = 1$ i $n \geq 2k$. Dokazat ćemo indukcijom po k. Jasno, ako je $k = 1$ tvrdnja je trivijalna. Također, ako je $n = 2k$, tada je tvrdnja isto trivijalna jer $\mathcal{F}$ ne može sadržavati istodobno neki skup i njegov komplement.

Za $n > 2k$, pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ stabilna presijecajuća familija k-članih podskupova. Definiramo

$$\mathcal{F}_i = \{A \cap \{1, \ldots, 2k\} : A \in \mathcal{F}, |A \cap \{1, \ldots, 2k\}| = i\}.$$

Po lemi 3.1 je $\mathcal{F}_i$ presijecajuća familija i-članih podskupova za svaki i iz $\{1, \ldots, k\}$. Indukcijom, za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$ vrijedi,

$$|\mathcal{F}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1}$$

i kako je $\mathcal{F}_k$ presijecajuća familija k-članih podskupova $2k$-članog skupa, vrijedi

$$|\mathcal{F}_k| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} \leq \binom{2k-1}{k-1}.$$

Za svaki skup $B \in \mathcal{F}_i$ postoji najviše $\binom{n-2k}{k-i}$ skupova $A \in \mathcal{F}$ tako da vrijedi $B \subset A$. Konačno,

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^{k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{k-i} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Zadnju jednakost dokazujemo kombinatorno. Zbog lakšeg zapisa pomaknut ćemo granicu sume

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i}\binom{n-2k}{k-1-i} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Problem ćemo prikazati slikovito. Neka je S familija svih mogućih odabira $(k-1)$-člane ekipe s kandidatima od kojih je $2k-1$ muškaraca i $n-2k$ žena. Izraz s desne strane predstavlja broj načina na koji možemo od $n-1$ ljudi izabrati $k-1$ članova ekipe. Primjetimo da skup S možemo podijeliti na disjunktne skupove u ovisnosti o broju i koji predstavlja broj muškaraca u ekipi i može biti $0, 1, \ldots, k-1$. Tih i muškaraca možemo odabrati na $\binom{2k-1}{i}$ načina, a kad njih odaberemo onda ekipu možemo dopuniti sa $k-1-i$ žena na $\binom{n-2k}{k-1-i}$ načina. Zato lijeva strana također daje broj elemenata familije S. $\square$

Hilton i Milner [16] su pokazali da najveću presijecajuću familiju koja nije podskup kanonske možemo konstruirati na slijedeći način. Neka je $\mathcal{A}_0$ familija svih k-članih podskupova koji sadrže element 1 i neka je $A = \{2, 3, \ldots, k+1\}$. Definiramo $\mathcal{A}'$ kao familiju svih skupova iz $\mathcal{A}_0$ koji imaju neprazan presjek s A, zajedno s A. Familija je presijecajuća i ima veličinu

$$\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

Idući rezultat je poznat kao Hilton-Milnerov teorem [16]. Hiltonov i Milerov originalni dokaz zapravo pokazuje puno općenitiju tvrdnju, pa ćemo prikazati Franklovu i Füredijevu [12] verziju teorema.

Teorem 3.2. *Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa takva da je $\cap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$. Tada vrijedi*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po k. Ako je $k = 2$, tada $\mathcal{F}$ mora biti izomorfna familiji $\{\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\}\}$ i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da ocjena vrijedi za sve $k_0 < k$.

Neka je $\mathcal{F}$ maksimalna presijecajuća familija k-članih podskupova koja nije kanonska ili podskup kanonske familije. Sada koristimo metodu zamjene $S_{i,j}$ za $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ nad familijom $\mathcal{F}$ dok god ne postane kanonska ili stabilna familija.

U prvom slučaju, pretpostavimo da $\mathcal{F}$ nije kanonska presijecajuća familija, ali da $S_{x,y}(\mathcal{F})$ jest. U ovom slučaju, svi podskupovi od $S_{x,y}(\mathcal{F})$ sadrže element x, to znači da svaki skup u $\mathcal{F}$ sadrži ili x ili y. Kako je $\mathcal{F}$ maksimalna, dalje možemo pretpostaviti da svaki k-člani podskup skupa $\{1,\ldots,n\}$ koji sadrži i x i y je u $\mathcal{F}$.

Napravimo sad sve (i,j)-zamjene za $i,j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{x,y\}$ na familiji $\mathcal{F}$ i nazovimo je sada familijom $\mathcal{G}$. Svaki skup u $\mathcal{G}$ sadrži barem x ili y (zato što (i,j)-zamjene neće nikad eliminirati iz skupa nijedan od tih elemenata). Nadalje, ova familija je stabilna tj. vrijedi $S_{x,y}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ za sve

$$i,j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{x,y\}.$$

Neka je sad Y prvih $2k-2$ elemenata skupa $\{1,\ldots,n\}$. Tada za sve $A,B \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$A \cap B \cap Y \neq \emptyset. \tag{1}$$

Dokaz ove tvrdnje sličan je dokazu leme 3.1.

Definiramo

$$\mathcal{G}_i = \{B \cap Y : B \in \mathcal{G}, |B \cap Y| = i\}.$$

Jasno je da je $|\mathcal{G}_1| = 0$ jer $\mathcal{G}$ nije kanonska presijecajuća familija. Također je jasno da vrijedi

$$|\mathcal{G}_k| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}.$$

Tvrdimo da za svaki $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ vrijedi

$$|\mathcal{G}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1}. \tag{2}$$

Pretpostavimo da je $i \in \{2,\ldots,k-1\}$. Tada po (1), $\mathcal{G}_i$ je presijecajuća familija i-članih podskupova s elementima iz skupa veličine $2k$. Zato, ako tvrdnja (2) ne vrijedi, tada

$$|\mathcal{G}_i| > \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \geq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{2k-i-1}{i-1} + 1.$$

Po pretpostavci indukcije, $\mathcal{G}_i$ mora biti kanonska presijecajuća familija (ili podskup kanonske presijecajuće familije). To povlači da svaki skup u $\mathcal{G}_i$ sadrži zajednički element a. Ali kako $\mathcal{G}$ nije kanonska presijecajuća familija, postoji k-člani podskup u $\mathcal{G}$ koji ne sadrži element a. Možemo ocjeniti veličinu od $\mathcal{G}_i$ prebrojavanjem i-članih podskupova iz Y koji sadrže element a i oduzimanjem broja onih skupova koji nemaju neprazan presjek s k-članim podskupovima iz $\mathcal{G}$ koji ne sadrže a. Dakle, vrijedi

$$|\mathcal{G}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \tag{3}$$

i ovo dokazuje našu tvrdnju (2).

Za svaki i-člani podskup B iz $\mathcal{G}_i$, postoji najviše $\binom{n-2k}{k-i}$ k-članih podskupova B' u $\mathcal{G}$ tako da vrijedi $B' \cap Y = B$. Znači kardinalitet familije $\mathcal{G}$ nije veći od

$$\binom{2k-1}{k-1}+\sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{2k-1}{i-1}-\binom{k-1}{i-1}\right)\binom{n-2k}{k-i} \leq \binom{n-1}{k-1}-\binom{n-k-1}{k-1}+1.$$

Još uvijek moramo uzeti u obzir situaciju kada djelovanje metodom zamjene na familiju $\mathcal{F}$ dobijemo stabilnu familiju koja nije kanonska. U ovom slučaju dokaz je analogan. Jedina razlika je ta što skup Y definiramo kao skup $\{1, \ldots, 2k\}$.

□

Za $k > 3$, ovaj dokaz također pokazuje da se nejednakost dostiže ako i samo ako je $\mathcal{F}$ izomorfna s familijom svih skupova iz $\mathcal{A}_0$ koji imaju neprazan presjek s $\{2, \ldots, k+1\}$ zajedno sa skupom $\{2, \ldots, k+1\}$. Ključ ovoga je da primjetimo da jednakost mora vrijedi za svaki i u (3), posebno za $i = 2$. Konačno, ako je $k = 3$ tada postoje dvije neizomorfne familije koje zadovoljavaju ovu ocjenu. To su ova opisana iznad i familija svih k-članih podskupova n-članog skupa koji sadrže barem $t+1$ elemenata iz skupa $\{1, \ldots, t+2\}$.

Sljedeći dokaz Erdős-Ko-Rado teorema temelji se na Kruskal-Katona teoremu, koji nam daje donju granicu za veličinu sjene familije podskupova. *Sjenu* $\partial(\mathcal{F})$ familije k-članih podskupova definiramo sa:

$$\partial(\mathcal{F}) = \{B : |B| = k-1 \text{ i } B \subseteq A \text{ za neki } A \in \mathcal{F}\},$$

i g-tu sjenu $\partial^g(\mathcal{F})$ familije k-članih podskupova:

$$\partial^g(\mathcal{F}) = \{B : |B| = k-g \text{ i } B \subseteq A \text{ za neki } A \in \mathcal{F}\}.$$

Primijetimo da vrijedi $\partial^2(\mathcal{F}) = \partial(\partial(\mathcal{F})), \partial^3(\mathcal{F}) = \partial(\partial(\partial(\mathcal{F})))$, itd.

Primjer 3.3. *Neka je $\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{2,4,6\},\{1,2,4\},\{3,4,7\}\} \subseteq \mathbb{N}^{(3)}$. Da bismo dobili sjenu od $\mathcal{F}$, moramo uzeti dvočlane podskupove svih skupova iz familije:*

- *dvočlani podskupovi skupa* $\{1,2,3\}$ *su* $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$,
- *dvočlani podskupovi skupa* $\{2,4,6\}$ *su* $\{2,4\}$, $\{4,6\}$, $\{2,6\}$,
- *dvočlani podskupovi skupa* $\{1,2,4\}$ *su* $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$,
- *dvočlani podskupovi skupa* $\{3,4,7\}$ *su* $\{3,4\}$, $\{4,7\}$, $\{3,7\}$.

Slijedi da je sjena familije $\mathcal{F}$ *jednaka* $\partial\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{2,4\},\{4,6\},\{2,6\},\{1,4\},\{3,4\},\{4,7\},\{3,7\}\}$.

Familija skupova gdje nijedan skup iz familije nije podskup nekog drugog skupa iz familije zove se *Spernerova familija skupova.* Ako je $\mathcal{S}$ Spernerova familija podskupova n-članog skupa, tada vrijedi

$$|\mathcal{S}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Ovaj rezultat je poznat kao *Spernerov teorem.* Idući teorem se zove *LYM nejednakost* (dobio ime po Lubellu [23], Yamamotu [29] i Mešalkinu [24]) i on je poopćenje Spernerova teorema.

Teorem 3.4. *Ako je* $\mathcal{F}$ *Spernerova familija podskupova* n*-članog skupa, tada vrijedi*

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Koristeći ovu nejednakost, možemo odrediti donju granicu sjene familije podskupova.

Korolar 3.5. *Ako je* $\mathcal{F}$ *famiija* k*-članih podskupova* n*-članog skupa, tada je*

$$|\mathcal{F}|\binom{n}{k-1} \leq |\partial(\mathcal{F})|\binom{n}{k}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ familija $(k-1)$-članih podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$ koji nisu u $\partial(\mathcal{F})$. Tada je $\mathcal{F} \cup \mathcal{B}$ Spernerova familija podskupova i po LYM nejednakosti vrijedi

$$\sum_{A \in \mathcal{F}\cup\mathcal{B}} \binom{n}{|A|}^{-1} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{k}} + \frac{\binom{n}{k-1} - |\partial(\mathcal{F})|}{\binom{n}{k-1}} = 1 + \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{k}} - \frac{\partial(\mathcal{F})}{\binom{n}{k-1}} \leq 1.$$

Odavdje slijedi tvrdnja korolara. □

Katona [17] je proširio ovaj rezultat na g-tu sjenu presijecajuće familije podskupova na sljedeći način.

Teorem 3.6. *Neka je $0 \leq g \leq k-1$, $1 \leq t \leq k$ i $g \leq t$. Ako je $\mathcal{F}$ t-presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa, tada vrijedi*

$$|\mathcal{F}|\binom{2k-t}{k-g} \leq |\partial^g(\mathcal{F})|\binom{2k-t}{k}.$$

Nejednakost vrijedi ako i samo ako je $t = g$ ili $g = 0$.

Katonin teorem se može iskoristiti da bi se dokazao Erdős-Ko-Rado teorem. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa $\{1, \ldots, n\}$. Ako stavimo

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}^c = \{\{1, \ldots n\} \setminus A : A \in \mathcal{F}\},$$

tada je kardinalnost svakog $B \in \mathcal{B}$ jednaka $n-k$. Nadalje, za svaki međusobno različiti par $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da $B_i = \{1, \ldots, n\} \setminus A_i$ za $i = 1, 2$, vrijedi

$$|B_1 \cap B_2| = |\{1, \ldots, n\} \setminus (A_1 \cup A_2)| \geq n - (2k-1).$$

Dakle, $\mathcal{B}$ je $(n-2k+1)$-presijecajuća familija $(n-k)$-članih podskupova. Promotrimo $(n-2k)$-tu sjenu od $\mathcal{B}$. Tu familiju označavamo s $\partial^{n-2k}(\mathcal{B})$ i ona je familija k-članih podskupova. Nadalje, $\partial^{n-2k}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{F} = \emptyset$, što implicira

$$|\partial^{n-2k}(\mathcal{B}) \cup \mathcal{F}| = |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| + |\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}.$$

Sada imamo sljedeće:

$$|\mathcal{B}|\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = |\mathcal{B}|\frac{\binom{2(n-k)-(n-2k+1)}{k}}{\binom{2(n-k)-(n-2k+1)}{n-k}} \leq |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})|.$$

Zadnja nejednakost slijedi iz Katonina teorema 3.6 za $\mathcal{B}$.

Konačno, kako je $|\mathcal{F}| = |\mathcal{B}|$,

$$\binom{n}{k} \geq |\mathcal{F}| + |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| \geq |\mathcal{F}| + |\mathcal{F}|\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = |\mathcal{F}|\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}},$$

iz čega slijedi $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$, odnosno tvrdnja Erdős-Ko-Rado teorema. $\square$

Prije nego nastavimo s dokazom da jedino kanonske presijecajuće familije dostižu jednakost, trebamo uvesti uređaj na k-člane skupove. Ima nekoliko različitih uređaja na familijama k-članih podskupova n-članog skupa. Onaj koji ćemo koristiti naziva se *koleksikografski*. U koleksikografskom uređaju vrijedi $A < B$ ako i samo ako su A i B međusobno različiti i ako se najveći element iz $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ nalazi u B. Za ovaj uređaj, ako je $k = 4$, poredak skupova je redom:

$$\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,6\}, \dots$$

Uočimo da početak niza ne ovisi o n. Za neku familiju k-članih podskupova, neka $\partial(|\mathcal{F}|)$ predstavlja broj $(k-1)$-članih podskupova u sjeni prvih (u koleksikografskom uređaju) $|\mathcal{F}|$ podskupova veličine k skupa $\{1, \dots, n\}$.

Također trebamo i sljedeći rezultat poznat kao Kruskal-Katona teorem [18, 20].

Teorem 3.7. *Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ familija k-članih podskupova n-članog skupa. Tada vrijedi*

$$\partial(|\mathcal{F}|) \leq |\partial(\mathcal{F})|,$$

i ako je $|\mathcal{F}| = \binom{n_k}{k}$ za neki $k \leq n_k \leq n$, tada jednakost vrijedi ako i samo ako je $\mathcal{F}$ izomorfna s familijom svih k-članih podskupova skupa $\{1, \dots, n_k\}$.

Iz Kruskal-Katoninog teorem slijedi da, ako je

$$|\mathcal{F}| = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_s}{s}$$

za $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_s$, onda vrijedi

$$|\partial(\mathcal{F})| = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{a_s}{s-1}.$$

Ako za realni broj x definiramo

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!},$$

tada za svaku familiju k-članih podskupova $\mathcal{F}$ postoji realan broj $x \leq n$ tako da vrijedi

$$|\mathcal{F}| = \binom{x}{k}.$$

Lovász [22] je dokazao da $|\mathcal{F}| = \binom{x}{k}$ povlači $|\partial(\mathcal{F})| \geq \binom{x}{k-1}$. Primjenjujući ovu ocjenu opetovano, dobijemo

$$|\partial^g(\mathcal{F})| \geq \binom{x}{k-g} \tag{4}$$

za $1 \leq g \leq k$.

Sada možemo karakterizirati sve 1-presijecajuće familije k-članih podskupova maksimalne veličine. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa veličine $\binom{n-1}{k-1}$, za $n > 2k$. Također neka je $\mathcal{G}$ familija $(n-k)$-članih podskupova definirana s

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}^c = \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}.$$

Kako je

$$|\mathcal{G}| = |\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k},$$

prvih $|\mathcal{G}|$ elemenata od X veličine $n-k$ u koleksikografskom uređaju su točno oni elementi veličine $n-k$ koji ne sadrže element n.

Po Kruskal-Katona teoremu, točnije po (4),

$$|\partial^{n-2k}(\mathcal{G})| \geq \binom{n-1}{n-k-(n-2k)} = \binom{n-1}{k}.$$

Kako je

$$|\mathcal{F}| + |\partial^{n-2k}(\mathcal{G})| \leq \binom{n}{k}$$

i $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$, mora vrijediti $|\partial^{n-2k}(\mathcal{G})| = \binom{n-1}{k}$. Ovo povlači da vrijedi

$$|\partial^{n-2k-i}(\mathcal{G})| = \binom{n-1}{k+i}$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, n-2k-1\}$. Posebno, imamo da vrijedi $|\mathcal{G}| = \binom{n-1}{n-k}$ i

$$|\partial(\mathcal{G})| = \binom{n-1}{n-k-1} = \partial(|\mathcal{G}|).$$

Po Kruskal-Katona teoremu, ove dvije tvrdnje impliciraju da je $\mathcal{G}$ izomorfna s familijom svih $(n-k)$-članih podskupova koji ne sadrže element n, a ovo vrijedi samo kada je $\mathcal{F}$ izomorfna s familijom svih k-članih podskupova koji sadrže taj element. $\square$

Kruskal-Katona teorem i EKR teorem su možda dva najvažnija teorema u kombinatornoj teoriji skupova. Zanimljivo je da možemo izvesti EKR teorem iz Kruskal-Katona teorema. No nije poznat niti jedan izvod Kruskal-Katona teorema iz EKR teorema.

4 EKR teorem za druge objekte

U ovoj ćemo cjelini iskazati analogone EKR teorema za druge objekte: permutacije, particije, vektorske prostore nad konačnim poljima i riječi.

Problem pronalaska najveće presijecajuće familije skupova može se preformulirati kao problem na grafovima. Za svake k i n, definiramo graf čiji skup vrhova čine svi k-člani podksupovi skupa $\{1, \ldots, n\}$ i dva vrha su susjedna (spojena bridom) ako i samo ako su k-člani skupovi disjunktni. Ovi grafovi se označavaju s $K(n, k)$ i nazivaju *Kneserovim grafovima*. Svaka dva nesusjedna vrha u Kneserovom grafu su par presijecajućih skupova, a familija vrhova gdje nijedna dva nisu susjedna je presijecajuća familija skupova.

Klika u grafu je skup vrhova gdje su svaka dva vrha susjedna, a *koklika* ili nezavisni skup je skup vrhova gdje nijedna dva nisu susjedna. Standardna oznaka za veličinu najveće klike u grafu X je $\omega(X)$, a za veličinu najveće koklike je $\alpha(X)$.

Sljedeći teorem je EKR teorem u terminima Kneserova grafa.

Teorem 4.1. *Neka je $n \geq 2k$, tada je $\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz ovog teorema možemo pronaći u knjizi koju su napisali Godsil i Meagher [14].

4.1 Permutacije

Neka je X konačan skup. Permutacija od X je bijekcija s X u X. Pretpostavimo da su elementi u X uređeni, npr. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Tada permutaciju π možemo identificirati s uređenom n-torkom $(\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n))$. Permutaciju π od $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ još zapisujemo i na sljedeći način:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Broj permutacija n-članog skupa je $n!$. Neka je X skup od n elemenata, a $k \leq n$. Za uređenu k-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ međusobno različitih elemenata iz X kažemo da je k-permutacija. Broj k-permutacija n-članog skupa je $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Neka je $X \neq \emptyset$ neki skup. Definirajmo

$$Perm(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ je bijekcija}\}.$$

Ako je $f : X \to X$ bijekcija, onda postoji *inverzna* funkcija $f^{-1} : X \to X$ i ona je naravno isto bijekcija. Nadalje, za bilo koje funkcije $f, g : X \to X$, definirana je njihova kompozicija $g \circ f : X \to X$. Kompozicija dviju bijekcija je bijekcija. Za tri funkcije $f, g, h : X \to X$ vrijedi asocijativnost kompozicije, tj. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Konačno, funkcija *identiteta* $id = id_X : X \to X$, $id(x) = x$ za svaki $x \in X$, zadovoljava svojstvo $f \circ id = id \circ f$, za bilo koji f. Sve ovo navedeno zapravo govori da je $(Perm(X), \circ)$ grupa. Ta se grupa zove *grupa permutacija* ili *simetrična grupa* skupa X.

Neka je G podgrupa $G \leq Perm(X)$. *Stabilizator* elementa $x \in X$ je skup

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}.$$

Propozicija 4.2. *Stabilizator G_x je podgrupa od G.*

Dokaz. Neka je $x \in X$. Kako za $g \in G_x$ vrijedi $g(x) = x$, djelujemo li na tu jednakost s g^{-1} s lijeva imamo $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(x)$, odnosno $x = g^{-1}(x)$. Tada vrijedi $f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x) = x$. Dakle, $f \circ g^{-1} \in G_x$, $\forall f, g \in G_x$. $\square$

Neka je H podgrupa grupe G i neka je $a \in G$. Skup

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

naziva se *lijeva susjedna klasa* podgrupe H određena elementom a. Analogno se definira i desna susjedna klasa:

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}.$$

Podgrupa $N \leq G$ grupe G je *normalna podgrupa* ako vrijedi

$$aN = Na, \ \forall a \in G.$$

Stabilizator općenito nije normalna podgrupa jer grupa permutacija nije komutativna. Pokazat ćemo to slijedećim primjerom.

Primjer 4.3. *Neka je $G = Perm(\{1, 2, 3\})$. Tada je stabilizator elementa $x = 1$ podgrupa*

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Za $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ vrijedi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je desna desna susjedna klasa

$$G_1 a = \left\{ a, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

a lijeva susjedna klasa je

$$aG_1 = \left\{ a, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Za sve $x, y \in X$ definiramo familiju

$$G_{(x,y)} = \{\pi \in G : \pi(x) = y\}.$$

Pokazat ćemo da se susjedne klase stabilizatora G_x mogu prikazati na taj način.

Propozicija 4.4. *Neka je $x \in X$ i $g \in G$. Označimo $y = g(x)$. Onda je lijeva klasa stabilizatora $gG_x = G_{(x,y)}$.*

Dokaz. ($\subseteq$) $h \in gG_x \Rightarrow h = g \circ f$ za neki $f \in G_x \Rightarrow h(x) = g(f(x)) = g(x) = y$. Dakle, $h \in G_{(x,y)}$.

($\supseteq$) $h \in G_{(x,y)}$ ima svojstvo $h(x) = y \Rightarrow f := g^{-1} \circ h \in G_x$ jer je $f(x) = g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(y) = x$. Dakle, $h = g \circ f$ za $f \in G_x$ pa je $h \in gG_x$.

□

Propozicija 4.5. *Neka je $x \in X$ i $g \in G$. Označimo $y = g^{-1}(x)$. Onda je desna klasa stabilizatora $G_x g = G_{(y,x)}$.*

Dokaz. ($\subseteq$) $h \in G_x g \Rightarrow h = f \circ g$ za neki $f \in G_x \Rightarrow h(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = x$. Dakle $h \in G_{(y,x)}$.

($\supseteq$) $h \in G_{(y,x)}$ ima svojstvo $h^{-1}(x) = y \Rightarrow f := g \circ h^{-1} \in G_x$ jer je $f(x) = g \circ h^{-1}(x) = g(h^{-1}(x)) = g(y) = x$. Dakle, $h = f \circ g$ za $f \in G_x$ pa je $h \in G_x g$.

□

Simetričnu grupu skupa $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ označavamo S_n i zovemo je simetričnom grupom stupnja n. Dvije permutacije π, $\sigma \in S_n$ su presijecajuće ako vrijedi $\pi(i) = \sigma(i)$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Za takve permutacije kažemo i da se poklapaju na poziciji i. Za cijeli broj $t \geq 1$, permutacije π, $\sigma \in S_n$ su t-presijecajuće ako se poklapaju na barem t pozicija iz skupa $i \in \{1, \ldots, n\}$. Familija permutacija je t-presijecajuća ako su svake dvije permutacije iz familije t-presijecajuće. Primjer presijecajuće familije permutacija je familija svih permutacija u S_n kojima je i fiksna točka (ova familija je stabilizator elementa i).

Teorem 4.6. *Najveća presijecajuća familija permutacija je veličine $(n-1)!$. Susjedne klase stabilizatora elemenata su jedine familije koje dostižu ovu ocjenu.*

Tvrdnja teorema vrijedi za lijeve i za desne susjedne klase stabilizatora jer smo vidjeli da su jedne i druge oblika $G_{(x,y)}$ za neke $x, y \in \{1, \dots, n\}$. Cameron i Ku [5] i Larose i Malvenuto [21] su neovisno jedni o drugima dokazali ovaj teorem 2006. godine.

Deranžman je permutacija skupa bez fiksne točke. Familiju svih deranžmana označavamo sa $D(n)$. Broj svih deranžmana n-članog skupa je $|D(n)| = d(n)$ i dan je rekurzivnom formulom

$$d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2)), \; d(1) = 0, \; d(2) = 1.$$

Broj deranžmana n-članog skupa možemo računati i na slijedeći način:

$$d(n) = n!\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor, n \in \mathbb{N}.$$

Formula se dokazuje metodom uključivanja-isključivanja. Za prirodni broj n definiramo *graf deranžmana* Γ_n kao graf čiji je skup vrhova S_n, a vrhovi π i ρ su susjedni ako vrijedi $\pi(i) \neq \rho(i)$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Ovaj graf je definiran tako da je presijecajuća familija permutacija koklika. Svaki $G_{(x,y)}$ je koklika u Γ_n veličine $(n-1)!$.

Sada ćemo iskazati istu tvrdnju kao u teoremu 4.6 pomoću klika u grafu deranžmana.

Teorem 4.7. *Veličina maksimalne koklike u Γ_n je $(n-1)!$.*

Ovaj rezultat se može smatrati ocjenom u EKR teoremu za permutacije. Štoviše, familije $(S_n)_{(i,j)}$ su maksimalne koklike u Γ_n. Dokaz teorema 4.7 možemo pronaći u [14].

Deza i Frankl [11] su pretpostavili da se EKR teorem može proširiti na familije permutacija u S_n gdje se svake dvije permutacije poklapaju na barem nekoliko fiksnih pozicija (tj. familije su t-presijecajuće). Ovu pretpostavku su dokazali Ellis, Friedgut i Pilpel [7].

Teorem 4.8. *Za dovoljno velik n u odnosu na t, veličina maksimalne t-presijecajuće familije permutacija n-članog skupa je $(n-t)!$. Ako t-presijecajuća familija permutacija ima veličinu $(n-t)!$ za dovoljno velik n, onda se sastoji od svih permutacija koje se poklapaju na t fiksnih pozicija.*

Ovo zapravo znači da su jedine familije permutacija koje dostižu ovu ocjenu zapravo susjedne klase stabilizatora t-članih podskupova.

4.2 Particije

Particija skupa X je familija međusobno disjunktnih nepraznih podskupova od X koji u uniji daju cijeli X. Dakle, particija skupa X je svaka familija oblika $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$ sa svojstvima

(i) $(\forall i \in I) X_i \subseteq X$,

(ii) $(\forall i \in I) X_i \neq \emptyset$,

(iii) $(\forall i, j \in I) i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$,

(iv) $\cup_{i \in I} X_i = X$.

Elemente X_i zovemo blokovima particije $\mathcal{F}$. Broj particija skupa jednak je broju relacija ekvivalencije na tom skupu. Taj broj nazivamo *Bellov broj.* S B_n ćemo označavati n-ti Bellov broj (broj particija n-članog skupa). Npr. lako se vidi da je $B_3 = 5$: particije od $\{1, 2, 3\}$ su $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Za razliku od broja podskupova i permutacija, ne postoji jednostavna formula za Bellove brojeve. Jedan način računanja Bellovih brojeva je dan sljedećom rekurzijom:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \text{ za sve } \ n \in \mathbb{N}.$$

Broj particija od k elemenata n-članog skupa označava se sa $S(n, k)$ i zove *Stirlingovim brojem druge vrste*. Nadalje, vrijedi $B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$.

Uniformna k-particija n-članog skupa je particija $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ skupa $\{1, \dots, n\}$ na k blokova veličine n/k. Da bi takva particija postojala, k mora dijeliti n. Ubuduće podrazumijevamo da su n i k prirodni brojevi takvi da vrijedi $n = \ell k$ za neki prirodni broj ℓ. Broj uniformnih k-particija n-članog skupa je

$$U(n, k) = \frac{1}{k!} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{\ell} \cdots \binom{\ell}{\ell} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \binom{n - i\ell}{\ell}.$$

U ovoj cjelini ćemo razmotriti EKR teorem za uniformne particije. Prvo moramo pojasniti kakve su to presijecajuće particije.

Uniformna particija skupa $\{1, \dots, n\}$ je familija k blokova od kojih je svaki ℓ-člani skup. Kažemo da su dvije particije presijecajuće ako sadrže barem jedan jednaki blok. Ova definicija nam se prirodno nameće. Naime, particija je sama po sebi familija skupova pa mi tvrdimo da presijecajuće particije sadrže zajednički element kao i kod presijecajuće familije skupova. Točnije, neka su P i Q uniformne k-particije tako da je

$$P = \{P_1, \ldots, P_k\}, \quad Q = \{Q_1, \ldots, Q_k\}.$$

Tada su P i Q presijecajuće ako postoje $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da je $P_i = Q_j$.

Sada možemo definirati graf na način da su koklike presijecajuće familije particija. Označimo ga sa $P(n, k)$. Skup vrhova grafa $P(n, k)$ je familija svih uniformnih k-particija n-članog skupa i vrhovi su susjedni ako i samo ako ne sadrže nijedan zajednički blok. Klika u $P(n, k)$ je familija uniformnih particija u kojoj se nijedan blok ne pojavljuje više od jednom.

Definiramo *kanonske koklike* u $P(n, k)$ kao koklike koje se sastoje od svih particija koje sadrže fiksni blok. Sljedeći korak priče o EKR teoremu za particije je ocjena za veličinu maksimalne koklike i tvrdnja da su kanonske koklike zapravo jedine maksimalne koklike.

Teorem 4.9. *Neka su $k, \ell > 2$ i $n = k\ell$. Ako je S koklika u $P(n, k)$, tada je*

$$|S| \leq \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{k-1} \binom{n - i\ell}{\ell}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je S kanonska koklika u $P(n, k)$.

Sada ćemo promotriti poseban slučaj particije skupa X na dvočlane skupove ($\ell = 2$). *Sparivanje* u grafu je skup bridova u kojem nikoja dva nisu susjedna, tj. nemaju zajednički vrh. *Savršeno sparivanje* u grafu je sparivanje u kojem je zasićen svaki vrh. Vrh je *zasićen* ako je incidentan s nekim bridom sparivanja. Presjek dva sparivanja je skup bridova koji su u oba sparivanja, tj. dva sparivanja su presijecajuća ako sadrže barem jedan zajednički brid.

Kneserov graf $K(n, 1)$ je *potpun graf* i označavamo ga s K_n. Sada definiramo graf $M(2m)$ čiji su vrhovi savršena sparivanja u grafu K_{2m}. Dva savršena sparivanja su spojena bridom ako i samo ako nisu presijecajuća.

Sada ćemo iskazati EKR teorem za savršena sparivanja.

Teorem 4.10. *Najveća koklika u $M(2k)$ je veličine $(2k-3)!!$. Jedine koklike koje zadovoljavaju ovu ocjenu su kanonske koklike presijecajućih familija savršenih sparivanja.*

4.3 Vektorski prostori nad konačnim poljima

Za konačno polje kažemo da je reda q ako se sastoji od točno q elemenata.

Teorem 4.11. *(i) Konačno polje postoji ako i samo ako je njegov red oblika $q = p^d$, pri čemu je p primbroj, a $d \in \mathbb{N}$.*

(ii) Polje reda $q = p^d$ ima jedinstveno potpolje reda p. Primbroj p je karakteristika polja F, u oznaci $\mathrm{char} F = p$. *To je najmanji prirodan broj m za koji je*

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m\ puta} = 0.$$

(iii) Svaka dva polja istog reda q su izomorfna.

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}_q$ reda q. *Gaussov* ili *q-binomni koeficijent* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ je broj k-dimenzionalnih potprostora vektorskog prostora V.

Propozicija 4.12.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \ldots (q - 1)}.$$

Dokaz. Potprostor A dimenzije k zadajemo linearno nezavisnim podskupom od k vektora iz V. Za prvi vektor biramo bilo koji osim nulvektora ($q^n - 1$ izbora), za drugi bilo koji vektor koji nije u potprostoru razapetom s prvim ($q^n - q$ izbora), za treći bilo koji vektor koji nije u potprostoru razapetom s prva dva ($q^n - q^2$ izbora), za i-ti bilo koji vektor koji nije u potprostoru razapetom s prvih $i-1$ ($q^n - q^{i-1}$ izbora). Produkt tih brojeva treba podijeliti s brojem baza od A, što je na sličan način $(q^k - 1)(q^k - q) \ldots (q^k - q^{k-1})$. Formula slijedi kraćenjem $q^{1+2+\ldots k-1}$ iz brojnika i nazivnika. □

Familija $\mathcal{F}$ potprostora od V je presijecajuća ako je presjek svaka dva elementa iz $\mathcal{F}$ netrivijalan (trivijalan je ako sadrži samo nulvektor). Ako je T jednodimenzionalan potprostor od V tada je familija svih k-dimenzionalnih potprostora od V koji sadrže T presijecajuća veličine $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$. Takvu familiju nazivamo *kanonskom presijecajućom familijom.*

Teorem 4.13. *Pretpostavimo da je $n > k$ i da je V n-dimenzionalni vektorski prostor. Ako je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-dimenzionalnih potprostora od V, tada vrijedi*

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\mathcal{F}$ kanonska presijecajuća familija.

Dokaz ove tvrdnje možemo pronaći u [26]. Familija k-dimenzionalnih potprostora je t-presijecajuća ako je dimenzija presjeka svaka dva potprostora iz familije barem t. Frankl i Wilson [13] su dokazali slijedeći teorem za t-presijecajuće familije potprostora.

Teorem 4.14. *Pretpostavimo da je $n \geq 2k-t$. Tada je veličina t-presijecajuće familije k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad $\mathbb{F}_q$ najviše*

$$\max \left\{ \begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} 2k-t \\ k \end{bmatrix}_q \right\}.$$

4.4 Riječi

Neka je Q abeceda veličine q. *Riječ* veličine n je n-torka elemenata iz Q, tj. element iz Q^n. *Hammingova udaljenost* dviju riječi $x, y \in Q^n$ je broj pozicija na kojima su te dvije riječi različite. Naš glavni problem je odrediti maksimalnu veličinu familije riječi tako da se svake dvije poklapaju na barem t pozicija. Ako se dvije riječi poklapaju na barem t pozicija tada je Hammingova udaljenost između njih najviše $n-t$.

Prirodno se nameće definicija da su dvije riječi presijecajuće ako se poklapaju na barem jednoj poziciji, odnosno t-presijecajuće ako se poklapaju na barem t pozicija. Familija svih riječi u kojoj je i-ta pozicija svake riječi jednaka slovu a je očito veličine q^{n-1}. Takve familije riječi nazivamo *kanonskim familijama.*

Teorem 4.15. *Neka je $\mathcal{K}$ presijecajuća familija riječi iz Q^n. Tada vrijedi*

$$|\mathcal{K}| \leq q^{n-1}.$$

Ovu ocjenu dostižu samo kanonske familije riječi.

Ahlswede i Khachatrian [2] su odredili veličinu za najveću familiju t-presijecajućih riječi iz Q^n. Prije nego iskažemo opći EKR teorem za riječi, definirat ćemo neke ključne pojmove. Neka je $Q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Za riječ $\omega \in Q^n$ definiramo skup:

$$Z(\omega) = \{j : \omega_j = 0\}.$$

Za $i \in \{0, \ldots, \frac{n-t}{2}\}$ definiramo familiju riječi

$$\mathcal{K}_i = \{\omega \in Q^n : |Z(\omega) \cap \{1, 2, \ldots, t+2i\}| \geq t+i\}.$$

Familija riječi $\mathcal{F}$ je izomorfna s $\mathcal{K}_i$ ako se može dobiti istodobnim permutiranjem indeksa riječi i permutiranjem elemenata u Q za svaku riječ iz

$\mathcal{K}_i$. Svaka familija izomorfna s $\mathcal{K}_i$ je t-presijecajuća. Nadalje, svaka familija izomorfna s $\mathcal{K}_0$ se sastoji od svih riječi koje imaju t jednakih pozicija. Svaku takvu familiju zvat ćemo *kanonskom t-presijecajućom familijom riječi.*

Teorem 4.16. *Za $q \geq 2$, neka je r najveći nenegativan cijeli broj tako da vrijedi*

$$t + 2r < \min\left\{n + 1, t + 2\left(\frac{t-1}{q-2}\right)\right\}$$

(za $q = 2$ je $t + 2r < n + 1$). Veličina najveće t-presijecajuće familije riječi iz Q^n je $|\mathcal{K}_r|$. Ako je $s = \frac{t-1}{q-2} \in \mathbb{Z}$ i

$$t + 2\left(\frac{t-1}{q-2}\right) \leq n,$$

tada $|\mathcal{K}_s| = |\mathcal{K}_{s-1}|$. Inače, jedine familije koje imaju veličinu $|\mathcal{K}_r|$ su izomorfne s $\mathcal{K}_r$.

Korolar 4.17. *Neka je $\mathcal{F}$ t-presijecajuća familija riječi iz Q^n. Ako vrijedi $q \geq t + 2$, tada je*

$$|\mathcal{F}| \leq q^{n-t}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\mathcal{F}$ kanonska t-presijecajuća familija.

Literatura

[1] R. Ahlswede, L. H. Khachatrian, *The complete intersection theorem for systems of finite sets*, European J. Combin., 18(2):125–136, 1997.

[2] R. Ahlswede, L. H. Khachatrian, *The diametric theorem in Hamming spaces – optimal anticodes*, Adv. in Appl. Math., 20(4):429–449, 1998.

[3] Z. Baranyai, *On the factorization of the complete uniform hypergraph,* u *Infinite and Finite Sets*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, str. 91–108, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[4] B. Bollobas, *Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[5] P. J. Cameron, C. Y. Ku, *Intersecting families of permutations*, European J. Combin., 24(7):881–890, 2003.

[6] D. E. Daykin, *Erdős–Ko–Rado from Kruskal–Katona*, J. Combinatorial Theory Ser. A, 17:254–255, 1974.

[7] D. Ellis, E. Friedgut, H. Pilpel, *Intersecting families of permutations*, J. Amer. Math. Soc., 24(3):649–682, 2011.

[8] P. Erdős, C. Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser., 12(2):313–320, 1961.

[9] P. Frankl, *The Erdős-Ko-Rado theorem is true for* $n = ckt$, u *Combinatorics*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, str. 365–375, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[10] P. Frankl, *The shifting technique in extremal set theory*, u *Surveys in Combinatorics 1987*, str. 81–110, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[11] P. Frankl, M. Deza, *On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance*, J. Combinatorial Theory Ser. A, 22(3):352–360, 1977.

[12] P. Frankl, Z. Füredi, *Nontrivial intersecting families*, J. Combin. Theory Ser. A, 41(1):150–153, 1986.

[13] P. Frankl, R. M. Wilson, *The Erdős-Ko-Rado theorem for vector spaces*, J. Combinatorial Theory Ser. A, 43(2):228–236, 1986.

[14] C. Godsil, K. Meagher, *Erdős-Ko-Rado theorems: algebraic approaches*, Cambridge University Press, 2016.

[15] A. Hajnal, B. Rothschild, *A generalization of the Erdős–Ko–Rado theorem on finite set systems*, J. Combinatorial Theory Ser. A, 15:359–362, 1973.

[16] A. J. W. Hilton, E. C. Milner, *Some intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser, 18(2):369–384, 1967.

[17] G. Katona, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 15:329–337, 1964.

[18] G. Katona, *A theorem of finite sets*, u *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, str. 187–207, Academic Press, New York, 1968.

[19] V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2017.

[20] J. B. Kruskal, *The number of simplices in a complex*, u *Mathematical Optimization Techniques*, str. 251–278, University of California Press, Berkeley, 1963.

[21] B. Larose, C. Malvenuto, *Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs*, European J. Combin., 25(5):657–673, 2004.

[22] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, AMS Chelsea, Providence, drugo izdanje, 2007.

[23] D. Lubell, *A short proof of Sperner's lemma*, J. Combin. Theory, 1:299, 1966.

[24] L. D. Mešalkin, *A generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set*, Teor. Verojatnost. i Primenen, 8:219–220, 1963.

[25] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2011.

[26] M. W. Newman, *Independent Sets and Eigenvalues*, PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, 2004.

[27] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2012.

[28] B. Širola, *Algebarske strukture*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2011.

[29] K. Yamamoto, *Logarithmic order of free distributive lattice*, J. Math. Soc. Japan, 6:343–353, 1954.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je teorem Erdősa, Koa i Radoa. Diplomski rad je podijeljen u tri poglavlja.

U prvom poglavlju cilj je upoznati se s definicijom presijecajuće i t-presijecajuće familije k-članih podskupova i iskazati i dokazati EKR teorem. Definirane su i dokazane neke pomoćne tvrdnje.

U drugom poglavlju obrađujemo alternativne dokaze EKR teorema. Prvo se bavimo Hilton-Milnerovim teoremom. Zatim definiramo pomoćne tvrdnje i iskazujemo Katonin teorem pomoću kojih dokazujemo EKR teorem za $t = 1$. Na kraju poglavlja iskazujemo Kruskal-Katona teorem i pomoću njega pokazujemo da jedino kanonske presijecajuće familije dostižu jednakost u EKR teoremu za $t = 1$.

U trećem poglavlju iskazujemo analogone EKR teorema za druge objekte. Prvo definiramo Kneserove grafove, kliku i kokliku. Zatim za permutacije, particije, vektorske prostore nad konačnim poljima i riječi definiramo osnovne pojmove i iskazujemo analogone EKR teorema.

Summary

The topic of this thesis is the Erdős-Ko-Rado theorem. The thesis is divided into three chapters.

In the first chapter, we deal with the basic concepts of intersecting and t-intersecting k-set systems and state and prove the EKR theorem. We define and prove some auxiliary statements which are crucial for further understanding.

The focus of the next chapter is on alternative proofs of the EKR theorem. The Hilton-Milner theorem is examined, auxiliary statements are defined and the Katona theorem is stated using which the EKR theorem is proved for $t = 1$. At the end of the second chapter, the Kruskal-Katona theorem is stated and it is shown that only canonical intersecting systems meet the bound for $t = 1$ in the EKR theorem.

In the final, third chapter, analogs of the EKR theorem are stated. Firstly, Kneser graphs, cliques and cocliques are defined. Later, basic statements are defined and analogs of the EKR theorem are stated for permutations, partitions, vector spaces over finite fields and words.

Životopis

Rođen sam u Zadru 9. srpnja 1995. godine gdje sam pohađao osnovnu i srednju školu. Nakon završene srednje škole upisao sam 2014. godine preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija sam 2017. godine upisao Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu. Aktivno se bavim sportom, treniram vaterpolo od svoje jedanaeste godine. Moj matični klub je vaterpolo klub Zadar 1952 za kojeg sam nastupao u prvoj B ligi do odlaska na fakultet. Nakon toga sam igrao za vaterpolo klub Zagreb, ekipu fakulteta u sveučilišnoj ligi gdje smo 2018. godine osvojili prvo mjesto i za vaterpolo reprezentaciju zagrebačkog sveučilišta na sveučilišnom prvenstvu Hrvatske gdje smo također 2018. godine osvojili treće mjesto. U slobodno vrijeme volim igrati šah i loviti ribe.